Н. А. Шиловская

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ СПО

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника и практикума для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 519.6(075.32)
ББК 65.262.4я723
Ш59

***Автор*:**

Шиловская Надежда Аркадьевна — старший преподаватель кафедры математики Института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Тутыгин А. Г. — кандидат физико-математических наук, доцент;
Петрик Н. И. — кандидат сельскохозяйственных наук, доцент;
Скрипниченко В. А. — доктор экономических наук, профессор.

Шиловская, Н. А.

Ш59 Финансовая математика : учебник и практикум для СПО / Н. А. Шиловская. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 176 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-09804-4

В учебнике рассмотрены базовые детерминированные модели и схемы, используемые в финансово-кредитных расчетах. Приведены практические задания, тесты, справочный материал для самостоятельной работы студентов.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, обучающихся по естественнонаучным специальностям.

УДК 519.6(075.32)
ББК 65.262.4я723

ISBN 978-5-534-09804-4

Содержание

Введение

Конкурентоспособность и платежеспособность хозяйствующего субъекта в условиях рыночной экономики во многом определяются рациональной организацией финансов. От специалиста, занятого в сфере финансов, учета, аудита, управления, чья профессия предполагает действительное владение методами финансового анализа, требуется умение правильно оценить возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки или реализации проекта, сопоставить в стоимостной форме затраты и результаты финансовой деятельности для получения максимальных доходов при минимальных затратах капитала в условиях конкуренции и устранить нежелательные последствия на конкретный период деятельности. А это возможно только в том случае, когда специалист хорошо ориентируется в особенностях денежно-кредитной системы, в принципах функционирования банковских структур и организаций, владеет методами расчета эффективности финансовых операций с различными видами ценных бумаг и приемами управления движением капитала.

Раздел количественного анализа финансовых операций, ***предметом*** которого является изучение функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций, а также разработка на их основе методов решения финансовых задач, *называется* ***финансовой математикой***. Количественный финансовый анализ объединяет методы финансовых дисциплин и математики. Он применим для решения широкого круга задач — от элементарных начислений процентов до анализа сложных инвестиционных, кредитных, коммерческих, актуарных и других проблем в различных их постановках, зависящих от конкретных условий. Задачи, чаще всего решаемые при помощи расчетов финансовых и коммерческих операций: определение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих в ней сторон; определение взаимосвязи параметров операции или сделки и их влияния на конечный результат; разработка бизнес-планов; нахождение параметров эквивалентного изменения условий сделки.

В настоящем учебнике рассмотрены традиционные разделы финансовой математики — ***детерминированные модели финансовых операций и процессов***, т. е. модели, в которых полностью определены будущие значения временны́х и финансовых параметров. Устранение неопределенности и риска позволяет использовать для построения моделей несложные математические средства, что делает материал доступным читателям с разными уровнями подготовки. Несмотря на техническую простоту, детерминированные модели вполне адекватно описывают многие классы финансовых операций. Например, кредитные операции, составляющие предмет теории процентов (процентных ставок).

Зачастую термином «финансовая математика» обозначают совокупность методов финансовых количественных расчетов. В учебниках прикладной ориентации изложение носит операционный характер (т. е. результат финансового анализа выдается в виде готовой формулы, в которую достаточно подставить исходные данные, чтобы получить значение вычисляемой характеристики). Основной при таком подходе является «техническая» сторона — методы расчетов, измерение влияния отдельных факторов на финансовые параметры, взаимозависимости этих параметров. Для первоначального знакомства с предметом операционный подход достаточен, но при систематическом изучении финансовой математики необходимо более глубокое усвоение ее концептуальных основ, ее методов и схем. Поэтому в данном учебнике представлено достаточно строгое изложение финансовой математики как метода построения и анализа моделей финансовых операций и процессов, рассматривается как практика, так и теория расчетов, приводятся доказательства и выводы расчетных формул. Знакомство с выводами и доказательствами формирует навык осознанного применения формул и самостоятельного вывода необходимых соотношений.

В учебнике содержится традиционный материал, включенный в большинство учебников по финансовой математике, финансовым и коммерческим расчетам. Акцент сделан на систематичность и математическую строгость изложения, терминологическую точность. Теоретический материал книги проиллюстрирован рисунками и примерами.

Предлагаемый учебник адресован студентам, обучающимся по направлениям подготовки «Менеджмент» и «Экономика». «Финансовая математика» является дисциплиной по выбору математического и естественнонаучного цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (ФГОС СПО). Также учебник может быть полезен студентам, обучающимся по специальностям «Прикладная математика и информатика», «Математические методы в экономике», изучающим экономику и финансовые расчеты.

Учебник составлен в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта и примерными программами дисциплины «Финансовая математика», утвержденными Министерством образования и науки РФ.

Согласно ФГОС СПО ***целью курса*** финансовой математики является овладение навыками количественного анализа финансовых операций теоретического и практического характера. В ходе изучения дисциплины студент приобретает навыки: использовать основные понятия финансовых расчетов; рассчитывать эффективность (доходность) финансовой операции; выбирать наилучший план выполнения финансовой операции; учитывать фактор времени при расчете длительности финансовой операции, продолжительности периодов начисления или отсрочки платежей.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен освоить:

трудовые действия

- владения комплексом исследовательских и аналитических методов;
- навыками начисления процентов в соответствии с различными финансовыми схемами;
- методикой начисления процентов;
- методами обобщения характеристик потоков платежей;
- методами количественного анализа финансовых и кредитных операций;
- навыками применения современных компьютерных технологий и программ для решения финансово-экономических задач;
- методиками оценивания эффективности краткосрочных инструментов и долгосрочных финансовых операций, включая производственные инвестиции;
- навыком обобщения характеристики потоков платежей;
- методами проведения количественного анализа финансовых и кредитных операций;
- методами расчета доходности удержания комиссионных и налогообложения;
- методами финансовой математики для расчета и оценки эффективности использования оборотных средств и источников финансирования;
- современной методикой построения эконометрических моделей;
- методами и приемами анализа экономических явлений и процессов с помощью стандартных теоретических и эконометрических моделей;
- количественным анализом среднего срока погашения ссуды по одному кредиту, начисления процентов на сумму вклада до востребования и реальной ставки доходности с учетом налога;

необходимые умения

- выполнять расчеты, связанные с начислением простых и сложных процентов;
- вычислять процентные ставки для различных вариантов и ситуаций, оценивать риски;
- корректировать финансово-экономические показатели с учетом инфляции;
- вычислять параметры финансовой ренты;
- применять математический инструментарий финансового анализа для целей теоретического и экспериментального исследования при решении финансово-экономических задач;

- строить на основе описания ситуаций стандартные теоретические и эконометрические модели с помощью финансовой математики;
- анализировать результаты сравнения финансовых операций;
- использовать направления развития и совершенствования моделей финансовых потоков, аннуитетов и финансовых рент;
- рассчитывать суммы платежей при различных способах погашения долга;
- производить вычисления, связанные с проведением валютных операций;

необходимые знания

- видов процентных ставок и способов начисления процентов;
- способов расчета процентных ставок;
- основных положений теории процентов, методов и характеристик оценки финансовых операций;
- методов и алгоритмов расчета эффективности привлеченных заемных средств;
- формул эквивалентности процентных ставок;
- методов расчета наращенных сумм в условиях инфляции;
- видов потоков платежей и их основные параметры;
- методов оценки инвестиционных проектов;
- методов построения эконометрических моделей объектов, явлений и процессов с помощью элементов финансовой математики;
- компьютерных пакетов прикладных программ, реализующих финансовые расчеты;
- методов расчета платежей при погашении долга;
- показателей доходности ценных бумаг;
- основ валютных вычислений;
- методов определения доходности ценных бумаг, портфельных инвестиций и вложений, доходности облигаций.

Структура книги позволяет использовать ее для построения курсов разного объема и сложности, ориентированных на слушателей с разными целями обучения и уровнем подготовки. Учебник состоит из курса лекций и практикума.

В первых трех лекциях вводятся основные понятия, которые применяются в финансовом анализе: проценты, система процентных ставок, наращение процентов, дисконтирование платежей. Обсуждаются важные «сопутствующие проблемы»: учет инфляции, конверсия валюты, сбалансированные изменения условий контрактов. В этих лекциях описаны две основные, чаще всего используемые на практике, финансовые схемы простых и сложных процентов — математические структуры, лежащие в основе определенного класса финансовых моделей.

В четвертой и пятой лекциях обсуждаются проблемы, относящиеся к количественному анализу разнообразных потоков платежей, и в частности, финансовых рент. Без знания количественных соотношений между показателями, характеризующими потоки платежей, нельзя понять механизм любой долгосрочной финансовой операции.

И наконец, в шестой и седьмой лекциях обсуждаются вопросы оценки стоимости и доходности таких ценных бумаг, как акции, облигации, векселя; методы погашения долгов.

Для закрепления полученных навыков в учебник включен практикум, где по каждой теме подобраны задачи, контрольные вопросы и упражнения, итоговый тест. Также в каждой части имеются индивидуальные задания.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1
ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

При анализе финансовых операций очень важно учитывать фактор изменения стоимости денег во времени. ***Наращенной суммой*** (долга, депозита, других видов инвестированных денег) называют первоначальную величину капитала с начисленными на нее процентами к концу срока начисления. ***Процентами*** называется абсолютная величина дохода от предоставления капитала в долг в любой ее форме (выдача ссуды, покупка облигаций, учет векселя, продажа товаров в кредит и т. д.). Величина полученного дохода определяется величиной вкладываемого капитала P, сроком n, на который вкладывается капитал, размером и видом применяемой процентной ставки, условиями наращения.

Существуют два способа начисления процентов: декурсивный и антисипативный. При ***декурсивном способе*** проценты начисляются в конце каждого интервала начисления (их величина определяется исходя из предоставляемого капитала P, а процентная ставка представляет собой отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода (процентов) к сумме имеющегося капитала на начало данного интервала). При ***антисипативном*** (предварительном) ***способе*** проценты начисляются в начале каждого интервала (при этом сумма процентных денег определяется исходя из наращенной суммы, а процентная ставка, называемая учетной, представляет собой отношение суммы дохода, выплачиваемой за определенный интервал, к величине наращенной).

При обоих способах начисления проценты могут быть либо простыми, либо сложными.

К *наращению по простым процентам* обычно прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до одного года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются. Для записи формулы наращения простых процентов имеет следующий вид:

$$S = P + I, \tag{1.1}$$

где I — проценты за весь срок ссуды; P — первоначальная сумма долга; S — наращенная сумма, т. е. сумма в конце срока.

Если срок ссуды n измеряется в годах, то i означает годовую процентную ставку. Соответственно каждый год приносит проценты в сумме Pi.

Начисленные за весь срок проценты составят $I = Pni$. Наращенная сумма, таким образом, находится как

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni). \qquad (1.2)$$

Данное выражение называют формулой наращения по простым процентам или кратко — формулой простых процентов, а множитель $(1 + ni)$ — *множителем наращения простых процентов*.

График роста по простым процентам представлен на рис. 1.1.

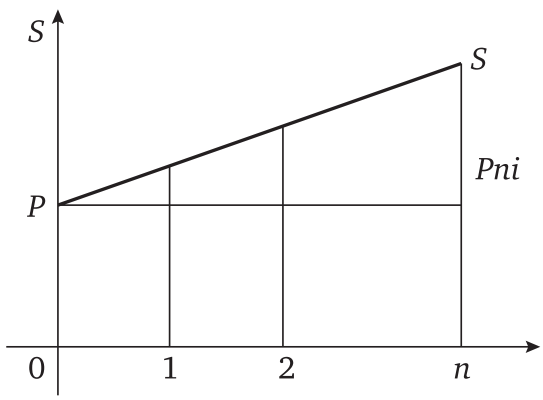

Рис. 1.1. **График роста по простым процентам**

Пример 1.1

Определить проценты и сумму накопления долга, если размер ссуды, выданной на 4 года, составляет 700 тыс. руб., проценты простые по ставке 20% годовых ($i = 0,2$):

$$I = 700 \cdot 4 \cdot 0,2 = 560 \text{ тыс. руб.}$$

$$S = 700 + 560 = 1260 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть ставка увеличивается в 2 раза. Сумма процентов при этом удвоится. Однако наращенная сумма увеличится в $\frac{1+2\cdot 4\cdot 0,2}{1+4\cdot 0,2} = 1,444$ раза.

Срок ссуды не всегда равен целому числу лет. Чтобы перейти от промежутка, измеряемого в днях, к промежутку, измеряемому в годах, вводят годовой дивизор Y (число дней в году, или временна́я база, начисления процентов, обычно 360, 365, 366), тогда срок n будет иметь вид: $n = t / Y$, где t — число дней ссуды.

При расчете процентов применяют две временны́е базы: $Y = 360$ дней (12 месяцев по 30 дней) или $Y = 365$ (366) дней. Если $Y = 360$, то получают *обыкновенные* или *коммерческие* проценты, а при использовании действительной продолжительности года 365 (366) дней рассчитывают *точные* проценты.

Чтобы определить точное число дней ссуды t, используют таблицы (П.1 и П.2), в которых указаны порядковые номера даты в стандартном году. Число дней между датами определяется как разность между номерами этих дат.

Пример 1.2

Определить точное число дней между двумя датами: 14.02.1998 и 27.08.1998. Год невисокосный, поэтому дата 14.02.1998 имеет номер 45, а у 27.08.1998 порядковый номер 239. Следовательно, между датами содержится ровно 239 – 45 = 194 дня.

Если рассмотреть даты 14.02.1996 и 27.08.1996 високосного года, то получим число дней между ними, равное 240 – 45 = 195.

Если год рассматривается как промежуток, содержащий 12 месяцев продолжительностью 30 дней (дивизор равен 360 дней), то приближенное число дней рассчитывается следующим образом:

$$t = 360 \cdot (g_2 - g_1) + 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1), \tag{1.3}$$

где g — номер года; m — номер месяца в году; d — номер дня в месяце.

Пример 1.3

Определить приближенное число дней между 12.02.1996 и 27.08.1998.

$$t = 360 \cdot (1998 - 1996) + 30 \cdot (8 - 2) + (27 - 12) = 720 + 180 + 15 = 915.$$

Между датами содержится приближенно 915 дней.

Чаще всего на практике применяются три варианта расчета простых процентов:

— ***точные проценты с точным числом дней ссуды*** (английская практика). Этот вариант, естественно, дает самые точные результаты. Данный способ применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например, в Великобритании, США. В коммерческих документах он обозначается как 365 / 365 или АТС / АТС;

— ***обыкновенные*** (***коммерческие***) ***проценты с точным числом дней ссуды*** (французская практика). Этот метод, иногда называемый банковским, распространен в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков, во внутристрановых — во Франции, в Бельгии, Швейцарии. Он обозначается как 365 / 360 или АТС / 360. Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов;

— ***обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды*** (германская практика). Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах. Он принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании. Метод условно обозначается как 360 / 360.

Пример 1.4

Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 20 января до 5 октября включительно под 18% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? При решении применить три метода расчета срока ссуды.

Предварительно (используя таблицы) определим число дней ссуды: точное — 258, приближенное — 255.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365 / 365):

$$S = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{258}{365} \cdot 0{,}18\right) = 1\,127\,233 \text{ руб.}$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (360 / 365):

$$S = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{258}{360} \cdot 0{,}18\right) = 1\,129\,000 \text{ руб.}$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360 / 360):

$$S = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{255}{360} \cdot 0{,}18\right) = 1\,127\,500 \text{ руб.}$$

Если общий срок ссуды захватывает два смежных календарных года и есть необходимость в делении суммы процентов между ними (например, при определении годовых сумм дохода и т. д.), то общая сумма начисленных простых процентов составит сумму процентов, полученных в каждом году:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i, \tag{1.4}$$

где n_1 и n_2 — части срока ссуды, приходящиеся на каждый календарный год.

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$S = P(1 + n_1i_1 + n_2i_2 + \ldots + n_mi_m) = P\left(1 + \sum_t n_ti_t\right), \tag{1.5}$$

где i_t — ставка простых процентов в периоде t; n_t — продолжительность периода с постоянной ставкой, а $n = \sum_t n_t$.

Принципиально ничего не меняется, если *сумма, на которую начисляются проценты, изменяет свою величину во времени* (размер вклада на сберегательном счете, текущий счет при периодическом его пополнении или снятии денег и т. п.).

В этом случае

$$I = \sum_j R_jn_ji, \tag{1.6}$$

где R_j — остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств; n_j — срок хранения денег (в годах) до нового изменения остатка средств на счете.

В банковско-сберегательном деле обычно применяют следующий способ, основанный на преобразовании формулы (1.6). Для этого измеряют интервалы между моментами изменений величины остатка на счете в днях, а процентную ставку выразим в процентах (а не в десятичных дробях, как выше). После чего получают

$$I = \sum_j R_j n_j i = \sum_j R_j \frac{t_j}{Y} \cdot \frac{i}{100} = \frac{\sum R_j t_j}{100} \div \frac{Y}{t}, \qquad (1.7)$$

где Y — число дней в году; t_i — срок в днях между последовательными изменениями остатков на счете.

Величину $I = \sum R_j n_j / 100$ называют ***процентным числом*** (*interest number*), а Y / i — ***процентным*** (или постоянным) ***делителем*** (*interest divisor*).

Пример 1.5

Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 5 февраля поступило 12 млн руб., 10 июля снято 4 млн руб. и 20 октября поступило 8 млн руб. Найти сумму на счете на конец года. Процентная ставка 18% годовых.

Процентный делитель составит 365 / 18 = 20,27778. Расчет суммы процентных чисел приведен в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Дата	**Движение средств (P)**	**Остаток (R_j)**	**Срок (t_j)**	**Процентное число ($R_j n_j$ / 100)**
05.02	12	12	155	18,6
10.07	–4	8	102	8,16
20.10	8	16	72	11,52
31.12	—	16	—	—
Итого	—	—	—	38,28

Сумма процентов за весь срок составит

$$I = \frac{38,28}{20,27778} = 1,888 \text{ млн руб.}$$

На практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращении по простым процентам в пределах заданного общего срока. Физически это означает ***реинвестирование*** средств, полученных на каждом этапе наращения, с помощью постоянной или переменной ставки. Наращенная сумма для всего срока составит в этом случае

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) \ldots (1 + n_t i_t), \qquad (1.8)$$

где i_t — размер ставок, по которым производится реинвестирование. Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются во времени, то формула для расчета S принимает вид

$$S = P(1 + ni)^m, \qquad (1.9)$$

где m — количество повторений реинвестирования.

Пример 1.6

100 млн руб. размещены 1 января на месячном депозите под 20% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Если начислять точные проценты (365 / 365), то

$$S = 100\left(1+\frac{31}{365}0,2\right)\left(1+\frac{28}{365}0,2\right)\left(1+\frac{31}{365}0,2\right) = 105,084 \text{ млн руб.}$$

Начисление обыкновенных процентов (360 / 360) при реинвестировании дает

$$S = 100\left(1+\frac{30}{365}0,2\right)^3 = 105,084 \text{ млн руб.}$$

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. Такая ситуация может возникнуть, например, при разработке условий контракта. Расчет P по S необходим и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются вперед, т. е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма S ***дисконтируется*** или учитывается, сам процесс начисления процентов и их удержания называют учетом, а удержанные проценты — ***дисконтом*** (*discount*) или скидкой. Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке краткосрочных обязательств, оплата которых должником произойдет в будущем.

Термин «дисконтирование» употребляется и в более широком смысле — как средство определения любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на более ранний момент времени. Такой прием часто называют приведением стоимостного показателя к некоторому, обычно начальному, моменту времени. (Приведение может быть осуществлено на любой, в том числе промежуточный, момент времени.)

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют современной стоимостью, или современной величиной (*present value*), будущего платежа S, а иногда — текущей, или капитализированной, стоимостью. Современная величина суммы денег является одним из важнейших понятий в количественном анализе финансовых операций. В большинстве случаев именно с помощью дисконтирования, а не наращения удобно учитывать такой фактор, как время.

В зависимости от *вида процентной ставки* применяют два метода дисконтирования — математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. В первом случае применяется ставка наращения, во втором — учетная ставка.

Математическое дисконтирование представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы ссуды. Задача в этом случае формулируется так: какую первоначальную сумму ссуды надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму S, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке i. Выражая P из формулы (1.2), получаем

$$P = \frac{S}{1+in}. \tag{1.10}$$

Установленная таким путем величина P является современной величиной суммы S, которая будет выплачена спустя n лет. Дробь $1/(1 + in)$ называют *дисконтным*, или *дисконтирующим, множителем*. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

Пример 1.7

Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс. руб. Кредит выдан под 16% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временна́я база равна 365 дням?

Находим современную стоимость P: $P = \dfrac{310\,000}{1+\dfrac{180}{365}\cdot 0{,}16} = 287\,328{,}59$ руб.

Разность $(S - P)$ можно рассматривать не только как проценты, начисленные на P, но и как дисконт с суммы S.

Суть операции заключается в следующем. Банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа (*date of maturity*) по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т. е. покупает (учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. В свою очередь владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объеме, однако ранее указанного на нем срока.

При учете векселя применяется ***банковский***, или ***коммерческий учет***. Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока (*maturity value*). При этом применяется учетная ставка d.

Размер дисконта, или суммы учета, очевидно, равен $D = Snd$, таким образом,

$$P = S - Snd = S \cdot (1 - nd), \tag{1.11}$$

где n — срок от момента учета до даты погашения векселя (в годах); d — годовая учетная ставка.

Дисконтный множитель здесь равен $1 - nd$. Из полученной формулы следует, что при $n > 1/d$ величина дисконтного множителя и, следовательно, суммы P станет отрицательной. Иначе говоря, при относительно большом сроке векселя учет может принести к нулевой или даже отрицательной сумме P, что лишено смысла. Например, при $d = 20\%$ уже пятилетний срок достаточен для того, чтобы владелец векселя ничего не получил при его учете.

Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временно́й базе Y = 360 дней, число дней ссуды обычно берется точным, АСТ / 360.

Простая учетная ставка иногда применяется и при расчете наращенной суммы. В частности, в этом возникает необходимость при определении суммы, которую надо проставить в векселе, если задана текущая сумма долга. Наращенная сумма в этом случае равна

$$S = \frac{P}{1 - nd}. \quad (1.12)$$

Множитель наращения здесь равен $1/(1 - nd)$. Наращение не пропорционально ни сроку, ни ставке. При $n > 1/d$ расчет лишен смысла, так как наращенная сумма становится бесконечно большим числом. Такая ситуация не возникает при математическом дисконтировании: при любом сроке современная величина платежа больше нуля.

Пример 1.8

Тратта (переводной вексель) выдан на сумму 1 млн руб. с уплатой 17.11.2000. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2000 по учетной ставке 20% (АСТ / 360). Оставшийся до конца срока период равен 55 дням. Полученная при учете сумма (без уплаты комиссионных) равна

$$P = 1\,000\,000\left(1 - \frac{55}{360}0{,}2\right) = 969\,444{,}4 \text{ руб.}$$

Дисконт составит

$$P'' = P(1 + ni)(1 - nd) = 30\,555{,}6 \text{ руб.}$$

Изменим условия примера. Пусть на всю сумму долга теперь начисляются проценты по ставке простых процентов i = 20,5% годовых. В этом случае, очевидно, надо решить две задачи: определить наращенную сумму долга и сумму, получаемую при учете. Оба последовательных действия можно представить в одной формуле, где n — общий срок обязательства, n' — срок от момента учета до погашения.

Пусть в данном примере n = 120 / 360, тогда

$$P' = 1\,000\,000\left(1 + \frac{120}{360}0{,}205\right)\left(1 - \frac{55}{360}0{,}2\right) = 1\,035\,690 \text{ руб.}$$

Дисконт как скидка с конечной суммы долга необязательно определяется через ту или иную процентную ставку, он может быть установлен по соглашению сторон и в виде фиксированной величины для всего срока. Однако размер ставки неявно всегда имеется в виду.

Оба вида ставок (наращения и дисконтирования) применяются для решения сходных задач, только для ставки наращения прямой задачей является определение наращенной суммы, обратной — дисконтирование, а для учетной ставки, наоборот, прямая задача заключается в дисконтировании, обратная — в наращении (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Ставки	Прямая задача	Обратная задача
i	$S = P(1 + ni)$	$P = S / (1 + ni)$
d	$P = (1 - nd)$	$S = P / (1 - nd)$

Очевидно, что рассмотренные два метода наращения и дисконтирования — по ставке наращения i и учетной ставке d — приводят к разным результатам даже тогда, когда $i = d$. Учетная ставка отражает фактор времени более жестко. Влияние этого фактора усиливается при увеличении величины ставки.

Для иллюстрации сказанного на рис. 1.2 и в табл. 1.3 приведены дисконтные множители (ДМ) для случая, когда $i = d = 20\%$.

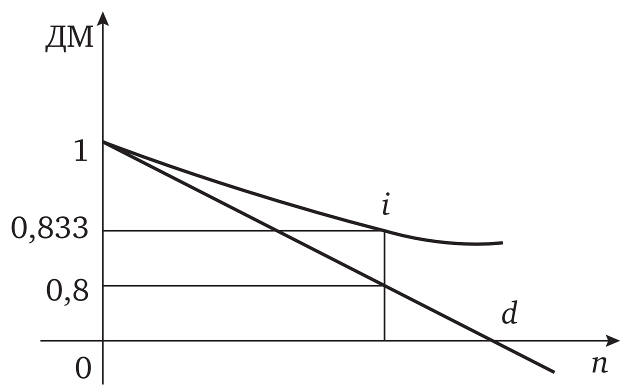

Рис. 1.2. **Изменение величины дисконтных множителей**

Таблица 1.3

Вид ставки	Срок в годах					
	1/12	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**10**
i	0,9836	0,9524	0,9091	0,8333	0,7143	0,3333
d	0,9833	0,9500	0,9000	0,8000	0,6000	—

Сравнивая формулы $S = P(1 + ni)$ и $S = P / (1 - nd)$, легко понять, что учетная ставка дает более быстрый рост суммы задолженности, чем такой же величины ставка наращения. Множители наращения (МН) для двух видов ставок при условии, что $i = d = 2$, показаны в табл. 1.4 и на рис. 1.3.

Таблица 1.4

Вид ставки	Срок в годах					
	1/12	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**10**
i	1,0167	1,0500	1,1000	1,2000	1,4000	3
d	1,0169	1,0526	1,1111	1,2500	1,6667	—

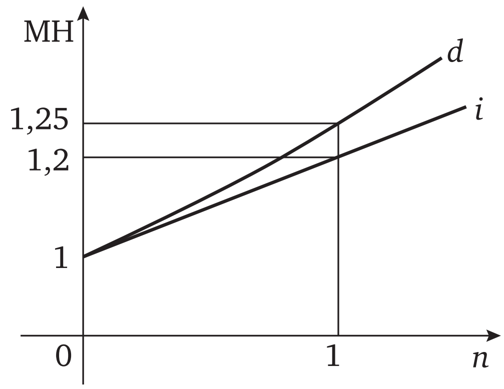

Рис. 1.3. **Изменение величины множителей наращения**

Итак, выбор конкретного вида процентной ставки заметно влияет на финансовые итоги операции. Однако возможен такой подбор величин ставок, при котором результаты наращения или дисконтирования будут одинаковыми. Такие ставки называются *эквивалентными*.

Ломбардный кредит

Особенности ломбардного кредита:

— заемщик обеспечивает получаемый кредит ценными бумагами или материальными ценностями;

— размер кредита обычно составляет 70 или 80% номинала залога;

— срок ломбардного кредита не более 3 месяцев;

— АТС = 360 — при расчетах используется французская практика;

— долг можно погасить полностью вовремя, а можно продлить еще на 3 месяца; можно часть долга погасить вовремя, а остаток погасить в следующие 3 месяца;

— если кредит не погашен вовремя, заемщик расплачивается с кредитором по увеличенной ставке за все время.

Пример 1.9

18 апреля предприниматель обратился в ломбард за кредитом под залог ценностей 100 тыс. руб. Размер кредита — 80% от номинальной стоимости ценностей (простая процентная ставка 12% годовых). Кредит был выдан до 18 июля. Какую сумму предприниматель получит на руки?

Решение: С 18 апреля по 18 июля — 91 день ($t = 91$). Годовой дивизор составит 360 ($Y = 360$). Размер кредита — $100\,000 \cdot 0{,}8 = 80\,000$ руб. Тогда на руки предприниматель получит

$$N = 80\,000 \cdot \left(1 - \frac{91}{360} \cdot 0{,}12\right) = 77{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

В некоторых задачах величина процентов I оказывается заранее не известной, тогда при расчетах пользуются формулой (1.13):

$$\frac{P}{I} = \frac{360}{it}. \tag{1.13}$$

Если современная стоимость P в задаче не оговаривается, а дана только увеличенная или уменьшенная на процент величина, то пользуются формулами:

$$\frac{P-I}{360-it}=\frac{I}{it}, \text{ если расчет меньше 100;} \qquad (1.14)$$

$$\frac{P+I}{360+it}=\frac{I}{it}, \text{ если расчет выше 100.} \qquad (1.15)$$

Пример 1.10

Заемщику был предложен кредит 80 тыс. руб. (под 12% годовых) 18 июля по 18 октября. 18 июля заемщик перечислил 25 тыс. руб., которые распределялись на выплату основного долга и проценты. Найти остаток долга.

Решение: 18 июля — 25 тыс. руб. (частично на проценты и частично на основной долг).

Остаток долга на 18 июля составит 80 тыс. руб. – 25 тыс. руб. = 55 тыс. руб., следовательно, платеж находят по схеме «меньше 100».

$$I=\frac{(P-I)it}{360-it}=\frac{55\cdot 0{,}12\cdot 92}{360-0{,}12\cdot 92}=1{,}74 \text{ тыс. руб.}$$

Тогда остаток долга составит

55 тыс. руб. + 1,74 тыс. руб. = 56,74 тыс. руб.

Лекция 2
СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Сложная процентная ставка наращения — это ставка, при которой база начисления является переменной, т. е. проценты начисляются на проценты. Формула наращения для сложных процентов имеет вид

$$S = P(1 + i)^n, \tag{2.1}$$

где S — наращенная сумма; i — годовая ставка сложных процентов; n — срок ссуды; $(1 + i)$ — множитель наращения.

Формулу наращения для сложных процентов используют и в том случае, когда срок для начисления процентов является дробным числом. Однако существует и специальная формула для этого случая: если срок вклада состоит из целого числа годов $a = [n]$ и части года $b = \{n\}$, т. е. $n = a + b$, то наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P(1 + i)^a(1 + i)^b.$$

Если разложить в ряд сомножитель $(1+i)^b = 1+\frac{b}{1!}i+\frac{b(b-1)}{2!}i^2+\ldots$, получим приближенную формулу

$$S = P(1 + i)^a(1 + bi). \tag{2.2}$$

Так как при $b < 1$ третий член разложения меньше нуля, то $(1 + bi) >$ $> (1 + i)^b$. Поэтому расчет наращенной суммы по приближенной формуле дает больший результат, чем по исходной формуле.

При $b \in [0; 1]$ величина $(1 + i)^b \in [1; 1 + i]$, поэтому при малых значениях i коммерческие банки при наличии полных периодов начисления процентов обычно принимают сомножитель $(1 + i)^b$ равным единице, т. е. $(1 + i)^b \approx 1$.

Время при наращении по сложной ставке обычно измеряется как АСТ / АСТ, т. е. точные проценты с точным числом дней ссуды.

Проценты за этот же срок в целом составляют $I = S - P = p[(1 + i)^n - 1]$. Часть из них получена за счет начисления процентов на проценты. Она составляет: $I_p = p[(1 + i)^n - (1 + ni)]$.

Как показано выше, рост по сложным процентам представляет собой процесс, соответствующий геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель — $(1 + i)$. Последний член прогрессии равен наращенной сумме в конце срока ссуды. Графическая иллюстрация наращения по сложным процентам представлена на рис. 2.1.

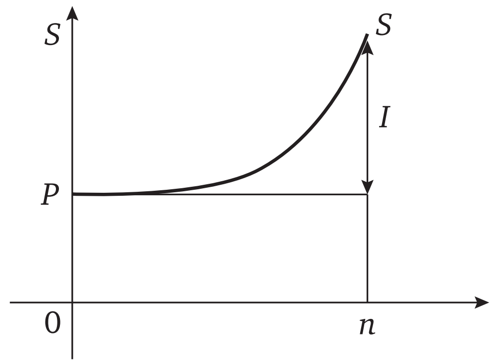

Рис. 2.1. **Наращение по сложным процентам**

Пример 2.1

Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых?

$$S = P(1 + i)^n = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}155)^5 = 2\,055\,464{,}22 \text{ руб.}$$

Для того чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Нетрудно убедиться в том, что при одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока.

В самом деле, при условии, что временна́я база для начисления процентов одна и та же, находим следующие соотношения (в приведенных ниже формулах подписной индекс s проставлен у ставки простых процентов):

— для срока меньше года простые проценты больше сложных:

$$(1 + ni_s) > (1 + i)^n;$$

— для срока больше года сложные проценты больше простых:

$$(1 + ni_s) < (1 + i)^n;$$

— для срока, равного году, множители наращения равны друг другу.

Заметим также, что при $n > 1$ с увеличением срока различие в последствиях применения простых и сложных процентов усиливается. Графическая иллюстрация соотношения множителей наращения представлена на рис. 2.2.

Формулы, приведенные выше, предполагают, что проценты на проценты начисляются по той же ставке, что и при начислении на основную сумму долга. Усложним условия начисления процентов. Пусть проценты на основной долг начисляются по ставке i, а проценты на проценты — по ставке $r \neq i$. В этом случае

$$S = P + Pi[1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \ldots + (1 + r)^{n-1}].$$

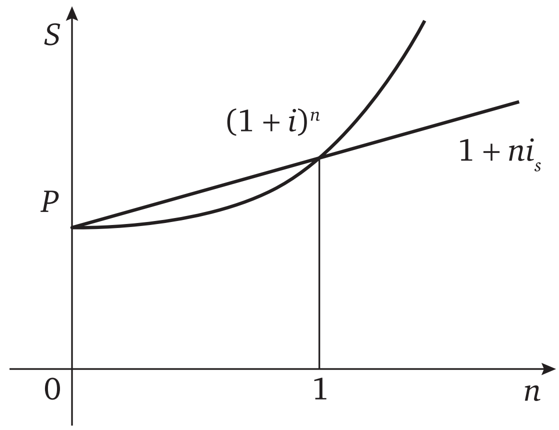

Рис. 2.2. **Соотношение множителей наращения**

Ряд в квадратных скобках представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом, равным единице, и знаменателем $(1 + r)$. В итоге имеем

$$S = P\left(1 + i\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right). \qquad (2.3)$$

Если на каждом этапе t (t = 1, 2, …, k) срока вклада процентная ставка i_t меняется, то величина наращенной суммы может быть определена по формуле

$$S = P(1+i)^{n_1}(1+i)^{n_2}...(1+i)^{n_k} = P\prod_{t=1}^{k}(1+i_t)^{n_t}, \qquad (2.4)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — последовательные значения ставок процентов, действующих в соответствующие периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Пример 2.2

В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые 2 года, 8% — в третий год, 5% — в четвертый год. Вычислить величину множителя наращения за 4 года.

Искомый множитель наращения равен

$$(1 + 0{,}3)^2(1 + 0{,}28)(1 + 0{,}25) = 2{,}704.$$

В ранее полученных формулах при начислении процентов не принималось во внимание расположение срока начисления процентов относительно календарных периодов. Очевидно, что часто даты начала и окончания ссуды находят в разных периодах, но начисленные за весь срок проценты не могут быть отнесены только к последнему периоду. В бухгалтерском учете, при налогообложении, в анализе финансовой деятельности предприятия возникает задача распределения начисленных процентов по периодам. Алгоритм деления общей массы процентов легко сформулировать на основе графика, построенного для двух смежных календарных периодов (рис. 2.3).

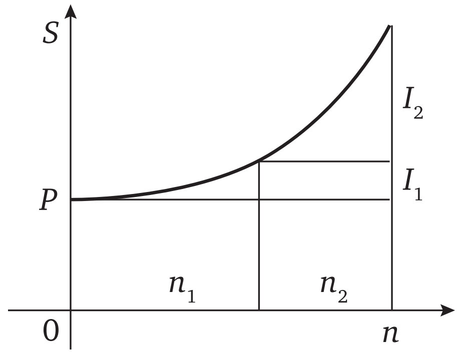

Рис. 2.3. **Наращение по сложным процентам в смежных периодах**

Общий срок ссуды делится на два периода n_1 и n_2. Соответственно,

$$I = I_1 + I_2, \tag{2.5}$$

где $I_1 = P[(1 + i)n_1 - 1]$; $I_2 = P(1 + i)n_1[(1 + i)n_2 - 1] = p[(1 + i)^n - (1 + i)n_1]$.

Пример 2.3

Ссуда была выдана на 2 года — с 1 мая 1998 г. по 1 мая 2000 г. Размер ссуды 10 млн руб. Необходимо распределить начисленные проценты (ставка 14% ACT / ACT) по календарным годам.

За период с 1 мая до конца года (244 дня): $10\,000 \cdot (1{,}14^{\frac{244}{365}} - 1) =$ $= 915{,}4$ тыс. рублей. За 1999 г.: $10\,000 \cdot (1{,}14^{\frac{244}{365}} \cdot 0{,}14) = 1528{,}2$ тыс. руб. Наконец, с 1 января до 1 мая 2000 г. (121 день): $10\,000 \cdot 1{,}14^{1\frac{244}{365}} \cdot (1{,}14^{\frac{121}{365}} -$ $- 1) = 552{,}4$ тыс. руб. Итого за весь срок — 2996 тыс. руб. Такой же результат получается для всего срока в целом: $10\,000 \cdot (1{,}14^2 - 1) = 2996$ тыс. руб.

Часто в финансовых операциях в качестве периода наращения процентов используется не год, а, например, месяц, квартал или другой период. В этом случае говорят, что *проценты начисляются m раз в году*. В контрактах обычно фиксируется не ставка за период, а годовая ставка, которая в этом случае называется ***номинальной***. Сложная процентная ставка наращения является частным случаем номинальной при начислении процентов раз в году. Если номинальную ставку обозначить через j, то проценты за один период начисляются по ставке j / m, а количество начислений равно ***mn***. Наращенная сумма при использовании номинальной процентной ставки наращения определяется по формуле

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}. \tag{2.6}$$

Пример 2.4

Изменим одно условие в примере 2.1. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых, если проценты начисляются не раз в году, а поквартально?

$$S = 1\,000\,000\left(1 + \frac{0{,}155}{4}\right)^{45} = 2\,139\,049{,}01 \text{ руб.}$$

Заметим, что чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения (цепной процесс).

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m — разовое наращение в год по ставке j / m.

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j / m, то, по определению, можно записать следующее равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+i_{эф})^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}, \tag{2.7}$$

где $i_{эф}$ — эффективная ставка; j — номинальная ставка.

Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i_{эф} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1. \tag{2.8}$$

Обратная зависимость имеет вид

$$j = m[(1+i_{эф})^{1/m} - 1]. \tag{2.9}$$

Пример 2.5

Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

Решение: По формуле, связывающей номинальную и эффективную ставки, находим: $i_{эф} = \left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{4} - 1 = 0,1038$, т. е. 10,38%.

В ***математическом учете*** решается задача, обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения сложных процентов $S = P(1 + i)^n$ и решим ее относительно P:

$$P = S\frac{1}{(1+i)^n} = Sv^n, \tag{2.10}$$

где $v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$ — учетный или дисконтный множитель.

Если проценты начисляются m раз в году, то получим

$$P = S\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = Sv^{mn}, \tag{2.11}$$

где $v^{mn} = \frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}$ — дисконтный множитель.

Величину P, полученную дисконтированием S, называют современной или текущей стоимостью или приведенной величиной S. Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент.

Пример 2.6

Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма 1 млн руб. Определить ее современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов — 10% годовых.

$$P = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}10)^{-5} = 620\,921 \text{ руб.}$$

В случае ***банковского учета*** предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1 - d)^n, \tag{2.12}$$

где d — сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D = S - P = S - S(1 - d)^n = S[1 - (1 - d)^n]. \tag{2.13}$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Если дисконтирование производится m раз в году, то оно осуществляется по формуле

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}, \tag{2.14}$$

где f — номинальная годовая учетная ставка.

Эффективная учетная ставка $d_{эф}$ характеризует степень дисконтирования за год. Определим ее на основе равенства дисконтных множителей:

$$(1 - d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}, \tag{2.15}$$

откуда получим

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}. \tag{2.16}$$

В свою очередь,

$$f = m(1 - \sqrt[m]{1 - d}). \tag{2.17}$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях, когда $m > 1$, меньше номинальной.

Пример 2.7

Вексель на сумму 20 000 руб., срок платежа по которому наступает через 1,8 года, учтен по сложной процентной ставке 18% годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя при учете, и дисконт при ежегодном и ежемесячном дисконтировании.

$$P = S(1 - d_{сл})^n = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}18)^{1{,}8} = 13\,992{,}49 \text{ руб.}$$

$$D = S - P = 20\,000 - 13\,992{,}49 = 6007{,}51 \text{ руб.}$$

$$P = S\left(1 - \frac{d_{сл}}{m}\right)^{mn} = 20\,000 \cdot \left(1 - \frac{0{,}18}{12}\right)^{12 \cdot 0{,}18} = 14\,429{,}52 \text{ руб.}$$

$$D = S - P = 20\,000 - 14\,429{,}52 = 5570{,}48 \text{ руб.}$$

Иногда наращенную сумму получают и с помощью сложной учетной ставки. Из формул (2.12) и (2.14) легко получить формулы наращения: $S = \dfrac{P}{(1-d)^n}$ и $S = \dfrac{P}{\left(1 - \dfrac{f}{m}\right)^{mn}}$.

Множитель наращения при использовании сложной ставки d равен $(1 - d)^{-n}$.

Если сравнивать различные ставки для наращения и дисконтирования, можно заметить, что даже в одинаковых исходных условиях применение этих ставок приводит к различным результатам. В связи с этим представляет практический интерес сравнение результатов наращения и дисконтирования по различным ставкам. Для этого достаточно сопоставить соответствующие множители наращения. Аналогичный анализ можно провести и с дисконтными множителями. Опустив формальные доказательства, можно записать необходимые соотношения при условии, что размеры ставок одинаковые. Варианты со ставками j и f не рассматриваются, так как для них результат зависит и от значения m.

Множители наращения по сложной ставке соотносятся между собой следующим образом (рис. 2.4): $(1+i)^n < \dfrac{1}{(1-d)^n}$.

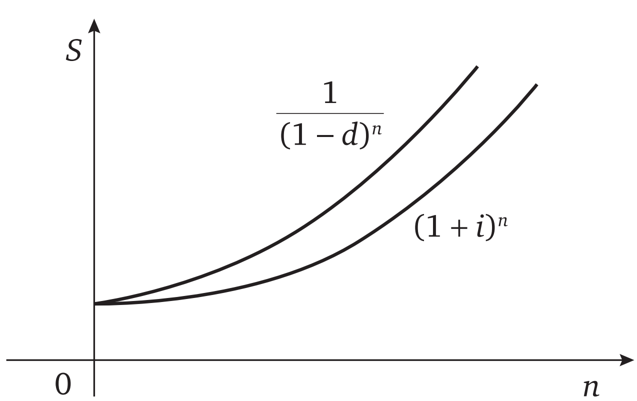

Рис. 2.4. **Соотношение множителей наращения**

Аналогичным образом получается соотношение для дисконтных множителей:

$$(1-d)^n < \frac{1}{(1+i)^n}.$$

Если в формуле $S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$, определяющей наращенную сумму при использовании номинальной процентной ставки наращения, периоды начисления процентов постоянно уменьшать, то количество этих периодов в году будет увеличиваться. В пределе при стремлении длительности периодов к нулю их число стремится к бесконечности ($m \to \infty$). Такое начисление процентов называется *непрерывным*, а процентная ставка при непрерывном начислении называется *силой роста*. Сила роста называется постоянной, если она не изменяется во времени. Если сила роста изменяется во времени, то она называется переменной. Формула для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов для постоянной силы роста δ имеет вид

$$S = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = Pe^{jn}, \tag{2.18}$$

где e^{jn} — множитель наращения, которые обозначают $e^{\delta n}$, чтобы отличить непрерывное начисление процентов от дискретного. Тогда формула наращенной суммы при непрерывном начислении процентов по постоянной силе роста δ будет иметь вид

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{2.19}$$

Таким образом, сила роста δ представляет собой номинальную процентную ставку j при $m \to \infty$.

Большое значение непрерывное наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например при анализе характеристик ценных бумаг.

Пусть переменная сила роста изменяется во времени, т. е. $\delta_t = f(t)$. В этом случае наращенная сумма и современная стоимость определяются соотношениями

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt}; \; P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}. \tag{2.20}$$

Рассмотрим случаи изменения силы роста по линейному закону и по экспоненте.

При линейном изменении силы роста от времени множитель наращения имеет вид

$$e^{\int_0^n \delta_t dt} = e^{\int_0^n (\delta_0 + at)dt} = e^{\left(\delta_0 n + \frac{an^2}{2}\right)}, \tag{2.21}$$

где δ_0 — начальное значение силы роста; a — прирост силы роста.

При экспоненциальном изменении силы роста от времени множитель наращения имеет вид

$$e^{\int_0^n \delta_t dt} = e^{\int_0^n \delta_0 e^t dt} = e^{(\delta_0 (e^n - 1))}. \quad (2.22)$$

Таким образом, формулы для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов для переменной силы роста S можно переписать в виде

$$S = Pe^{\left(\delta_0 n + \frac{an^2}{2}\right)},\ S = Pe^{(\delta_0 (e^n - 1))},$$

$$P = Se^{\left(-\left(\delta_0 n + \frac{an^2}{2}\right)\right)},\ P = Se^{(-\delta_0 (e^n - 1))}.$$

Пример 2.8

Определить современную стоимость суммы 25 000 руб., выплачиваемой через 2,8 года, при линейном изменении силы роста, когда начальное значение силы роста S_0 = 0,12, а прирост силы роста a = 0,1.

$$P = Se^{\left(-\left(\delta_0 n + \frac{an^2}{2}\right)\right)} = 25\ 000 \cdot e^{\left(-\left(0{,}12 \cdot 2{,}8 + \frac{0{,}1 \cdot 2{,}8^2}{2}\right)\right)} = 12\ 071{,}84 \text{ руб.}$$

Доходность финансовой операции определяется в виде процентной ставки. Например, доходность ссудной операции с использованием простой процентной ставки выражается в виде: $S = P(1 + ni) \Rightarrow i = \frac{1}{n}\left(\frac{S}{P} - 1\right)$.

Доходность ссудной операции с использованием сложной процентной ставки: $S = P(1+i)^n \Rightarrow i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$. Доходность ссудной операции с использованием непрерывной процентной ставки: $S = Pe^{\delta n} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{S}{P}\right)$.

Введем новые обозначения: $C(t)$ — капитал, составляющий в момент t $P(R) \to P(V) \xrightarrow{j} S(V) \to S(R)$ ден. ед.; если $t_2 > t_1$, то $C(t_1)$ — инвестиция, а $C(t_2)$ — результат финансовой операции; $\frac{C_2}{C_1}$ — коэффициент увеличения капитала; $(C_2 - C_1)$ — номинальный доход финансовой операции.

Формулы для вычисления доходности финансовых операций примут вид

$$d_1 = \frac{1}{t_2 - t_1}\left(\frac{C_2}{C_1} - 1\right) \quad (2.23)$$

— доходность ссудной операции с использованием простой процентной ставки;

$$d_2 = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1 \quad (2.24)$$

— доходность ссудной операции с использованием сложной процентной ставки;

$$d_3 = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \tag{2.25}$$

— доходность ссудной операции с использованием непрерывной процентной ставки.

Доходности d_1—d_3 можно рассчитывать не только для всего отрезка продолжительности финансовой операции $[t_1, t_2]$, но и для любого другого отрезка, входящего в него. Если длина отрезка $[t_1, t_2]$ уменьшается до нуля, можно получить мгновенную доходность финансовой операции.

Рассмотрим интервал $[t, t + \Delta t]$ и сделаем предельный переход $\Delta t \to \to 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{d}_1 &= \lim_{\Delta t \to 0} d_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{C(t+\Delta t)}{C(t)}\right) = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{C(t)\Delta t} = \frac{C'(t)}{C(t)} = (\ln C(t))'\end{aligned} \tag{2.26}$$

— логарифмическая производная $C(t)$.

$$\begin{aligned}\tilde{d}_2 &= \lim_{\Delta t \to 0} d_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{C(t+\Delta t)}{C(t)}\right)^{\frac{1}{\Delta t}} - 1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[C(t) + C'(t)\Delta t + o(\Delta t)\right]}{C(t)} - 1 = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[1 + \frac{C'(t)}{C(t)}\Delta t + \frac{o(\Delta t)}{C(t)}\right]^{\frac{1}{\Delta t}} - 1 = e^{\frac{C'(t)}{C(t)}} - 1;\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\tilde{d}_3 &= \lim_{\Delta t \to 0} d_3 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{C(t+\Delta t)}{C(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{C(t) + C'(t)\Delta t + o(\Delta t)}{C(t)} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \ln\left(1 + \frac{C'(t)}{C(t)}\Delta t + \frac{o(\Delta t)}{C(t)}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{C'(t)}{C(t)}\Delta t + \frac{o(\Delta t)}{C(t)}\right) = \frac{C'(t)}{C(t)}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Итак, для доходностей d_2 и d_3 мгновенные доходности в момент времени t равны логарифмической производной от капитала $C(t)$. В случае доходности d_2 мгновенная доходность в момент времени t равна экспоненте логарифмической производной от капитала $C(t)$ за вычетом единицы.

Лекция 3
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Для операций наращения и дисконтирования могут применяться разные виды процентных ставок, и можно подобрать такие их значения, при которых можно получить одинаковые финансовые результаты. В соответствии с ***принципом эквивалентности*** замена одного вида ставки на другой не изменяет финансовых отношений сторон в рамках одной операции. Такие ставки называются ***эквивалентными***.

Рассмотрим соотношения эквивалентности простых ставок i_s и d_s, с одной стороны, и сложных ставок i и j, с другой. Попарно приравняв друг к другу соответствующие множители наращения, получим набор искомых соотношений.

Эквивалентность i_s и i:

$$i_s = \frac{(1+i)^n - 1}{n},\ i = \sqrt[n]{1+ni_s} - 1. \tag{3.1}$$

Эквивалентность i_s и j:

$$i_s = \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{n},\ j = m(\sqrt[mn]{1+ni_s} - 1). \tag{3.2}$$

Эквивалентность d_s и j:

$$d_s = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{n},\ j = m(\sqrt[mn]{1/(1-nd_s)} - 1). \tag{3.3}$$

Далее рассмотрим соотношения эквивалентности сложных ставок i, j и d.

Имеем

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1,\ j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1). \tag{3.4}$$

Эквивалентность i и d:

$$i = \frac{d}{1-d},\ d = \frac{i}{1+i}. \tag{3.5}$$

Приведем еще несколько полезных соотношений, которые нетрудно получить на основе приведенных выше формул с учетом того, что $v = (1 + i)^{-1}$:

$$d = iv,\ v = 1 - d,\ i - d = id. \tag{3.6}$$

В последних зависимостях срок не оказывает влияния на величину процентной ставки.

Также можно найти соотношение эквивалентности между силой роста и любой дискретной процентной ставкой.

Эквивалентность δ и i:

$$\delta = \ln(1+i),\ i = e^{\delta} - 1. \tag{3.7}$$

Эквивалентность δ и j:

$$j = m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1),\ \delta = m \cdot \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right). \tag{3.8}$$

Эквивалентность δ и d: из равенства $(1 - d)^{-1} = e^{\delta}$ следует

$$\delta = -\ln(1 - d),\ d = 1 - e^{-\delta}. \tag{3.9}$$

Формулы эквивалентности дискретных и непрерывных ставок позволяют расширить применение непрерывных процентов. Как уже говорилось выше, непрерывные проценты во многих сложных расчетах позволяют существенно упростить выкладки. Вместе с тем такие ставки непривычны для практика, поэтому, используя формулы эквивалентности, нетрудно представить полученные результаты в виде общепринятых характеристик.

Пример 3.1

Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 18%, не изменяя финансовых последствий? Срок операции 580 дней.

$$i = \sqrt[580/365]{1 + \frac{580}{365} \cdot 0{,}18} - 1 = 0{,}17153 \text{ или } 17{,}153\%.$$

Инфляция — это процесс, характеризуемый обесценением национальной валюты, т. е. снижением ее покупательной способности и общим повышением цен. Без учета инфляции конечные результаты расчетов денежных потоков являются весьма условными.

Уровнем (***темпом***) ***инфляции*** называется величина α, определяемая как

$$\alpha = \frac{\Delta S}{S} = \frac{S_{\alpha} - S}{S},$$

где S — сумма денег, покупательная способность которой рассматривается при отсутствии инфляции; S_{α} — сумма денег, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции, причем $S_\alpha > S$.

Это индекс прироста, который показывает, на сколько процентов в среднем выросли цены за рассматриваемый период (относительный прирост цен за период). Легко получить формулу для вычисления S_α:

$$S_\alpha = S + \Delta S = S + \alpha S = S(1 + \alpha).$$

Величина

$$I_p = 1 + \alpha \qquad (3.10)$$

называется ***индексом инфляции*** (***индексом цен***). Это индекс роста, показывающий, во сколько раз в среднем выросли цены за рассматриваемый период.

Индекс инфляции может быть рассчитан, например, по формуле Пааши

$$I_p = \sum_{j=1}^{n} p_{1j} q_{1j} \Big/ \sum_{j=1}^{T} p_{0j} q_{1j}, \qquad (3.11)$$

где p_{1j}, q_{1j} — цена j-го товара в исследуемом и базисном периодах соответственно; количество проданных товаров j в исследуемом периоде; T — общее количество исследуемых товаров.

Поскольку индекс цен — это цепной индекс, то для периодов, следующих друг за другом, он рассчитывается следующим образом:

$$I_p = \prod_{t=1}^{n} I_{p,t} = \prod_{t=1}^{n} (1 + \alpha_t), \qquad (3.12)$$

где t — номер периода; $I_{p,t}$ — индекс цен в периоде t; α_t — темп инфляции в периоде t.

Если ожидаемый темп инфляции — величина постоянная в течение n периодов, то формула (3.12) приобретет вид

$$I_p = (1 + \alpha_t)^n. \qquad (3.13)$$

Средние за период, например, среднегодовые индексы цен $\overline{I}_{p,t}$ и темп инфляции $\overline{\alpha}_t$ находятся по формулам:

$$\overline{I}_{p,t} = \sqrt[n]{I_p} \text{ и } \overline{\alpha}_t = \sqrt[n]{I_p} - 1 = \overline{I}_{p,t} - 1, \qquad (3.14)$$

где n — количество периодов (лет). Отсюда следует выражение:

$$\overline{I}_{p,t} = 1 + \overline{\alpha}_t. \qquad (3.15)$$

Итак, стоимость суммы S, обесцененной во времени за счет инфляции, рассчитывается следующим образом: $S = S_\alpha / I_p$, где I_p — индекс цен (индекс инфляции).

Для простых процентов обесцененная инфляцией сумма определяется по формуле

$$S_{\alpha} = P\frac{1+ni}{I_p} = P\frac{1+ni}{(1+\overline{\alpha}_t)^n}. \quad (3.16)$$

Из формулы (3.16) следует, что увеличение наращенной суммы имеет место при выполнении соотношения

$$1 + ni > I_p. \quad (3.17)$$

Ставка i^*, при которой наращение равно потерям из-за инфляции, определяется из равенства $C = P$.

Сопоставив это с формулой (3.16), находим

$$i^* = \frac{I_p - 1}{n}. \quad (3.18)$$

Пример 3.2

Месячный темп инфляции составляет:

а) постоянную величину, равную 4%;

б) $\alpha_1 = 4\%$, $\alpha_2 = 3\%$, $\alpha_3 = 2\%$.

Найти индекс цен и темп инфляции за 12 месяцев. А также определить обесцененную наращенную сумму, если на сумму 10 000 руб. в течение указанных сроков начислялась простая процентная ставка 50% годовых ($Y = 360$), и определить ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.

а)

$$I_p = (1 + 0{,}04)^{12} = 1{,}601;\ \alpha = (1{,}601 - 1)100\% = 60{,}1\%;$$

$$C = 10\,000\frac{1+0{,}5}{1{,}601} = 9369{,}14 \text{ руб.};$$

$$i^* = \frac{1{,}601-1}{1} = 0{,}601 \text{ или } 60{,}1\%.$$

б)

$$I_p = 1{,}04 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 = 1{,}0926;\ \alpha = (1{,}0926 - 1)100\% = 9{,}26\%;$$

$$C = 10\,000\frac{1+\frac{3}{12}0{,}5}{1{,}0926} = 10\,296{,}54 \text{ руб.};$$

$$i^* = \frac{1{,}0926-1}{3/12} = 0{,}3704 \text{ или } 37{,}04\%.$$

В варианте а) произошла эрозия капитала, а для его увеличения процентная ставка должна превышать 60,1%.

В варианте б) капитал вырос в 10 294,54/10 000 = 1,029454 раза или приблизительно на 2,94%.

Для сложных процентов обесцененная инфляцией сумма определяется как: $S_\alpha = P\dfrac{(1+i)^n}{I_p} = P\left(\dfrac{1+i}{1+\alpha}\right)^n$. Зависимость обесцененной инфляцией суммы от времени представлена на рис. 3.1.

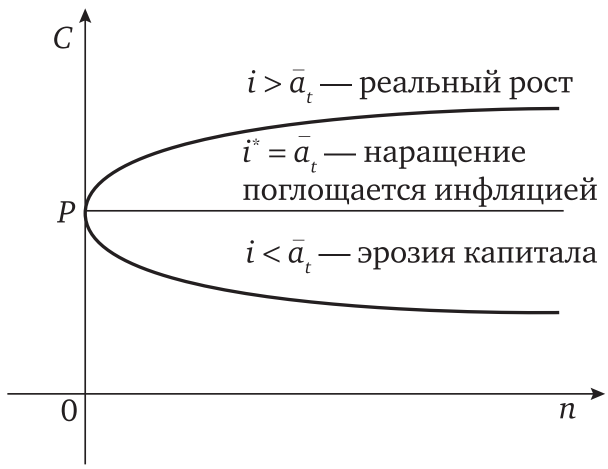

Рис. 3.1. **Зависимость обесцененной инфляцией суммы от времени**

Ставка i^*, при которой наращение компенсируется инфляцией, определяется из соотношения $C = P / i^* = \bar{\alpha}_t$.

Полученная ранее формула наращения по простым процентам $S = P(1 + ni)$ не учитывает инфляцию. Если уровень инфляции α известен, то эта формула может быть записана в виде: $S_\alpha = P(1 + ni)(1 + a)$. Если обозначить за i_a простую ставку ссудных процентов с учетом инфляции, получим: $S_\alpha = P(1 + ni_a)$.

Уравнение эквивалентности имеет вид: $P(1 + ni)(1 + \alpha) = P(1 + ni_\alpha)$. Из уравнения легко выразить простую ставку ссудных процентов, под которую нужно положить первоначальную сумму P на срок n, чтобы получить сумму S_α, учитывающую инфляцию:

$$i_\alpha = \frac{ni + \alpha + ni\alpha}{n}. \qquad (3.19)$$

Итоговая ставка i_α называется ***брутто-ставкой***.

Если $n = 1$, получим *формулу Фишера*:

$$i_\alpha = i + \alpha + i\alpha. \qquad (3.20)$$

Величина $\alpha + i\alpha$ называется *инфляционной премией* (исходную ставку увеличивают на величину инфляционной премии, чтобы компенсировать обесценение денег).

Из уравнения эквивалентности $ni + \alpha + ni\alpha = ni_\alpha$ можно получить *формулу реальной доходности* в виде годовой простой ставки ссудных процентов для случая, когда первоначальная сумма P была инвестирована под простую ставку ссудных процентов i_α на срок n при уровне инфляции α за рассматриваемый период:

$$i = \frac{ni_\alpha - \alpha}{n + n\alpha}. \tag{3.21}$$

Если использовать обозначение $I_p = 1 + \alpha$, то формулы примут вид

$$\frac{1+nr}{I_p} = 1 + na, \tag{3.22}$$

$$r = \frac{(1+na)I_p - 1}{n},\ a = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{I_p} - 1\right). \tag{3.23}$$

Аналогичные формулы можно получить, поместив первоначальную сумму P под сложные проценты и учтя инфляцию. Уравнение эквивалентности примет вид: $P(1 + i)^n(1 + \alpha) = P(1 + i_\alpha)^n$. Сложная ставка ссудных процентов, под которую нужно положить первоначальную сумму P на срок n, чтобы при уровне инфляции α за рассматриваемый период получить сумму S_α, рассчитывается по формуле

$$i_\alpha = (1+i)\sqrt[n]{1+\alpha} - 1. \tag{3.24}$$

Для вычисления реальной доходности операции в виде сложной годовой ставки ссудных процентов выразим i:

$$i = \frac{1+i_\alpha}{\sqrt[n]{1+\alpha}} - 1. \tag{3.25}$$

Если использовать обозначение $I_p = 1 + \alpha$, то формулы примут вид

$$\frac{(1+r)^n}{I_p} = (1+a)^n,\ r = (1+a)\sqrt[n]{I_p} - 1,\ a = \frac{1+r}{\sqrt[n]{I_p}} - 1. \tag{3.26}$$

Если темп инфляции является постоянным, то: $(1 + r)^n = [(1 + a) \times$ $\times (1 + \alpha)]_n$.

Следовательно,

$$r = a + \alpha + a\alpha,\ \text{а}\ a = \frac{1+r}{1+\alpha} - 1. \tag{3.27}$$

При небольших значениях доходности операции и темпа инфляции $|a| << 1$ и $|\alpha| << 1$ получим: $r \cong a + \alpha$.

Пример 3.3

Найти реальную простую процентную ставку (доходность) при номинальных ставках 60 и 30% годовых и месячных темпах инфляции $\alpha_1 = 5\%$, $\alpha_2 = 2\%$, $\alpha_3 = 4\%$.

Индекс цен за 3 месяца находится следующим образом:

$$I_p = (1 + 0{,}05)(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}04) = 1{,}11384.$$

При $n = 3 / 12 = 0{,}25$ определяем для двух случаев:

$$a = \frac{1}{0{,}25}\left(\frac{1+0{,}25\cdot 0{,}6}{1{,}11384} - 1\right) = 0{,}1299 \text{ или } 12{,}99\%;$$

$$\alpha = \frac{1}{0{,}25}\left(\frac{1+0{,}25\cdot 0{,}3}{1{,}11384} - 1\right) = -0{,}1395 \text{ или } 13{,}95\%.$$

Во втором случае произошла эрозия капитала на 13,95%.

Конверсия (***обмен***) ***валюты*** и наращение процентов могут привести к различным финансовым результатам (как к прибыли, так и к потерям). Факторы, от которых зависит этот результат: курс обмена валюты в начале и в конце операции, инфляция.

Рассмотрим два варианта наращения процентов на денежные средства:

а) $P(V) \to PR \xrightarrow{i} S(r) \to S(v)$ (упрощенный вариант без конверсии: $PV \xrightarrow{j} S(V)$);

б) $P(R) \to p(v) \xrightarrow{j} SV \to S(R)$ (упрощенный вариант без конверсии: $P(R) \xrightarrow{i} S(R)$).

Анализ доходности такой финансовой операции, как покупки валюты, без наращения процентов проводят на основе соотношения

$$C = \frac{P}{K_0}\cdot\frac{K_1}{I_p},$$

где P — сумма в рублях в начале операции; C — сумма в рублях в конце операции; K_0, K_1 — курс обмена в начале и в конце операции (имеет размерность руб/долл., например); I_p — индекс цен за время операции n.

Обозначив за $I_k = \dfrac{K_1}{K_0}$, получим: $C = P\dfrac{I_k}{I_p}$.

Для определения доходности в виде сложной эффективной процентной ставки операции используем принцип эквивалентности финансовых обязательств:

$$P(1+a)^n = P\frac{I_k}{I_p} \Rightarrow a = \sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}} - 1. \qquad (3.29)$$

Доходность равна нулю, если $I_k = I_p$; выше нуля при $I_k > I_p$; ниже нуля в случае $I_k < I_p$.

Определим доходность конверсии валюты с наращением процентов на валютном счете. Уравнение эквивалентности имеет вид

$$C_R = P_R\frac{I_k}{I_p}(1+j)^n = P_R(1+a)^n,$$

где j — сложная годовая ставка наращения СКВ.

Следовательно,

$$a=(1+j)\sqrt[n]{\frac{I_k}{I_p}}-1, \tag{3.30}$$

$$C_V=P_V\frac{1}{I_kI_p}(1+i)^n=P_V(1+a)^n, \tag{3.31}$$

где i — рублевая годовая сложная ставка наращения.

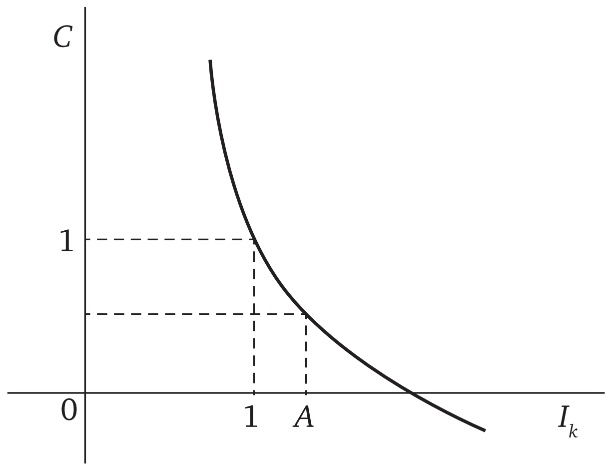

Рис. 3.2. **График зависимости доходности операции от величины коэффициента I_k**

Доходность операции в виде годовой ставки сложных процентов:

$$a=\frac{(1+i)}{\sqrt[n]{I_kI_p}}=-1.$$

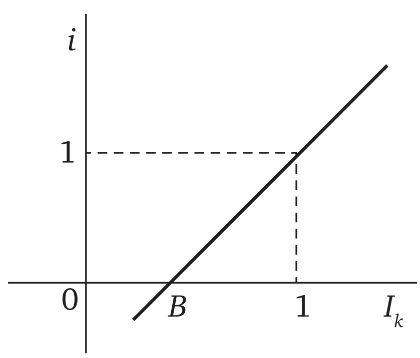

Рис. 3.3. **График зависимости доходности операции от величины коэффициента I_k**

Средние значения ставок также можно находить, решая уравнения эквивалентности. Пусть за периоды $n_1, n_2, \ldots, n_m$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_m$ на один и тот же капитал P, тогда, приравнивая коэффициенты наращения, получим:

$$1+n\overline{i}=1+\sum_t n_t i_t;$$

$$\bar{i} = \frac{\sum_t n_t i_t}{n}, \tag{3.32}$$

где $n = \sum_t n_t$ — общий срок наращения.

Аналогично находят среднюю учетную ставку:

$$\bar{d} = \frac{\sum_t n_t d_t}{n}. \tag{3.33}$$

Приравняем коэффициенты наращения в формулах наращения по ставке сложных процентов:

$$(1+\bar{i})^n = (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_m)^{n_m};$$

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{m} (1+i_t)^{n_t}} - 1. \tag{3.34}$$

Рассмотрим случай, когда одновременно производятся несколько однородных операций с разными ставками i_t и разными начальными суммами P_t (все суммы выданы на один и тот же срок n под простые проценты). Чтобы найти, под какую ставку надо поместить объединенную сумму $\sum P_t$, чтобы получить тот же результат наращения, составим уравнение эквивалентности:

$$\left(\sum P_t\right)(1+n\bar{i}) = \sum P_t(1+n\bar{i});$$

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sum P_t(1+n\bar{i})}{\sum P_t} - 1 \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum P_t(1+n\bar{i}) - \sum P_t}{\sum P_t} = \frac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}. \tag{3.35}$$

Искомая ставка равна взвешенной средней арифметической, а в качестве весов берутся размеры ссуд. Если проценты сложные, то уравнение эквивалентности будет иметь вид: $\left(\sum P_t\right)(1+\bar{i})^n = \sum P_t(1+\bar{i})^n$, а средняя ставка сложных процентов будет равна

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t(1+\bar{i})}{\sum P_t}} - 1. \tag{3.36}$$

За открытие кредита, учет векселей и другие операции часто ***взимаются комиссионные***, которые повышают доходность операции. Пусть ссуда в размере P выдана на срок n. При ее выдаче удерживаются комиссионные.

Величина комиссионных определяется формулой Pg, где g — доля комиссионных в относительных единицах.

Сделка предусматривает начисление простых процентов по ставке i. При определении доходности этой операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$ исходят из того, что наращение величины

$P - Pg$ по этой ставке должно дать тот же результат, что и наращение P по ставке i:

$$(P - Pg)(1 + i_э)^n = P(1 + ni).$$

Следовательно,

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1+ni}{1-g}} - 1. \qquad (3.37)$$

Если требуется охарактеризовать доходность в виде ставки простых процентов, тогда

$$(P - Pg)(1 + ni_э) = P(1 + ni), 1 + ni_э = \frac{1+ni}{1-g}, i_э = \frac{ni+g}{n(1-g)}. \qquad (3.38)$$

Пусть ссуда выдается под сложные проценты и доходность операции определяют в виде ставки сложных процентов. Тогда исходное уравнение для определения $i_{э.сл}$ имеет вид

$$(P - Pg)(1 + i_{э.сл})^n = P(1 + i)^n; i_{э.сл} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{1-g}} - 1. \qquad (3.39)$$

Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке, а доходность определяется в виде ставки сложных процентов, то балансовое уравнение имеет вид

$$(P - Sg)(1 + i_{э.сл})^n = S; S(1 - nd - g)(1 + i_{э.сл})^n = S;$$

$$i_{э.сл} = \frac{1}{\sqrt[n]{1-nd-g}} - 1. \qquad (3.40)$$

Полученные проценты могут ***облагаться налогом***, и это уменьшает реальную наращенную сумму. Обозначим наращенную сумму до выплаты налогов через S, а с учетом выплаты $S^©$, ставка налога на проценты равна g. В случае простых процентов налог равен $Ig = Pnig$.

Найдем наращенную сумму $S^©$ после выплаты налогов:

$$S^© = S - (S - P)g = S(1 - g) + Pg =$$

$$= P(1 + ni)(1 - g) + Pg = P + Pni(1 - g) = P(1 + ni(1 - g)).$$

Окончательно получим:

$$S^© = (1 + ni(1 - g)). \qquad (3.41)$$

Таким образом, учет налога сводится к сокращению процентной ставки: вместо ставки i фактически применяется ставка $(1 - g)i$.

В долгосрочных операциях при начислении налога на сложные проценты возможны следующие варианты:

1) налог начисляется за весь срок сразу, т. е. на всю сумму процентов;

2) сумма налога определяется за каждый истекший год (тогда ежегодная сумма налога будет величиной переменной, так как сумма процентов увеличивается во времени).

В первом случае сумма налога равна $P((1 + i)^n - 1)g$, а наращенная сумма после выплаты налога:

$$S' = S - (S - P)g = S(1 - g) = S(1 - g) + Pg = P((1 + i)^n(1 - g) + g).$$

Рассмотрим второй случай. Обозначим налог за год t как G_t.
Тогда

$$G_t = (S_t - S_{t-1})g = (P(1 + i)^t - (P(1 + i)^{t-1})g = P(1 + i)^{t-1}ig.$$

— за первый год налог составит $G_1 = Pig$;

— за второй год — $\frac{1}{(1+i)^n}$;

— за n-й год — $G_n = P(1 + i)^{n-1}ig$.

Тогда за n лет налог будет выплачен и его величина составит

$$G = \sum_t G_t = \frac{Pig((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} = Pg((1+i)^n - 1). \tag{3.42}$$

Сумма налогов за весь срок не зависит от метода начисления.

Лекция 4
ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ: ПОСТОЯННЫЕ РЕНТЫ

В современной финансовой практике часто применяются не отдельные или разовые платежи, а некоторая их последовательность во времени — денежный поток. Это, например, погашение задолженности в рассрочку, арендная плата, выплата процентов, дивидендов, пенсий, страховых выплат и т. п. Если выплаты ежегодные, то такой поток платежей называются ***аннуитетом***, если платежи производятся несколько раз в году — ***рентой***.

Поток платежей характеризуется следующими параметрами:

1) ***член ренты R*** — размер отдельного платежа;

2) ***период ренты*** — временной интервал между двумя последовательными платежами;

3) ***срок ренты n*** — время от начала первого периода ренты до конца последнего периода;

4) ***процентная ставка i***;

5) ***число p платежей*** в году;

6) ***частота m*** начисления процентов.

Ренты классифицируют по разным критериям, выделяют:

1) ренты ***немедленные*** (начало срока ренты и начало действия контракта совпадают) и ренты ***отсроченные***;

2) ренты с ***ежегодным начислением процентов*** ($m = 1$), ***начислением процентов m раз в году*** и ***непрерывным начислением процентов***;

3) ренты с ***постоянными*** и ***переменными*** членами;

4) ренты ***конечные*** и ***бесконечные***. Если срок ренты более 50 лет, рента считается вечной;

5) рента обычная или ***постнумерандо***, если платежи производятся в конце периода; рента ***пренумерандо***, если платежи производятся в начале периода.

Анализ потока платежей предполагает расчет или наращенной суммы, или современной стоимости. ***Наращенная сумма*** потока платежей S — сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока сложными процентами:

$$S = \sum_{t=1}^{k} R_t (1+i)^{n_k - n_t}, \qquad (4.1)$$

где R_t — ряд платежей, имеющих знак «плюс» или «минус»; n_t — время выплаты с номером $t = 1, 2, \ldots, k$; k — количество выплат; n_k — общий срок выплат; i — сложная процентная ставка наращения (начисляется один раз в году, выплаты производятся в конце периода).

Современная стоимость потока платежей A — это сумма всех выплат, дисконтированных на начало срока этого потока. Современная стоимость потока платежей эквивалентна в финансовом смысле всем платежам, которые охватывает поток:

$$A = \sum_{t=1}^{k} R_t v^{n_t}, \text{ где } v^{n_t} = \frac{1}{(1+i)^{n_t}}. \tag{4.2}$$

В связи с этим данный показатель находит широкое применение в разнообразных финансовых расчетах: планирование погашения долгосрочных займов, реструктурирование долга, оценка и сравнение эффективности производственных инвестиций и т. п.

Несложно убедиться в том, что современную стоимость потока платежей можно получить дисконтированием наращенной суммы:

$$Sv^{n_k} = A. \tag{4.3}$$

Простая рента обладает двумя важными свойствами:

1) все его n-элементов равны между собой: $R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R$;

2) отрезки времени между выплатой / получением сумм R одинаковы.

Рассмотрим ***p-срочную простую ренту постнумерандо с начислением процентов m раз в году***, причем выплаты не совпадают со временем начисления процентов (характеристики ренты R, n, j, $m \neq p \neq 1$).

В этом случае ежегодно p раз производятся платежи через равные промежутки времени. Каждый платеж равен R / p, где R — годовая выплата. Проценты начисляются m раз в году по ставке j, т. е. процент за один период времени равен $\frac{j}{m}$%, срок ренты равен n лет (рис. 4.1).

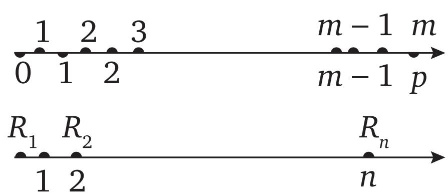

Рис. 4.1. **Расположение моментов выплат и начисления процентов на временно́й оси**

Выведем формулу, выражающую наращенную к моменту n сумму этой ренты. Наращенная сумма на все выплаты года к концу одного года определяется следующим образом:

$$R_1 = \frac{R}{p} + \frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} + \frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{2m/p} + \ldots + \frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)}.$$

На последний платеж проценты не начисляются, и он входит в наращенную сумму без изменения, т. е. в размере R / p. На предпоследний платеж начисляются проценты по ставке j за период, равный $1 / p$ части года, и наращенная к моменту n на этот платеж сумма равна $\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$.

На второй с конца платеж проценты начисляются по ставке j за период, равный $2 / p$ части года, и наращенная к моменту n на этот платеж сумма равна $\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{2m/p}$. Последний платеж делается за $n-\frac{1}{p}$ лет до момента n, т. е. наращенная в момент n на этот платеж сумма равна $\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)}$.

После несложных преобразований получим

$$\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-m/p+m/p}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}. \tag{4.4}$$

Вся наращенная на ренту сумма равна

$$S=R_1\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(n-1)m}+R_2\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(n-2)m}+\ldots+R_1\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}+R_1.$$

Количество начислений до конца ренты на наращенную сумму первого года равно $(n-1)m$, на наращенную сумму второго года $(n-2)m$, …, на наращенную сумму предпоследнего года m, на наращенную сумму последнего года проценты не начисляются и она составит R_1. После упрощения получим

$$\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}. \tag{4.5}$$

При вычислениях использовалась формула возрастающей геометрической прогрессии:

$$S=\frac{a_n q-a_1}{q-1},$$

где первый член прогрессии $a_1 = 1$, знаменатель прогрессии $q = (1 + j / m)^{m/p}$, n-й член прогрессии $a_n = (1 + j / m)^{m(n-1/p)}$.

Чтобы определить современную стоимость ренты A, вычислим современную стоимость за каждый отдельный год в начале этого года:

$$R_1=\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}}+\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)}+\ldots+\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(p-1)m/p}}+$$

$$+\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}=\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}}\cdot\frac{\nu^m-1}{\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}}-1}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\nu^m-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}},\qquad(4.6)$$

где $\nu^m=\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}$.

Современная стоимость всей ренты будет равна

$$A=R_1+R_1\nu^m+R_1\nu^{2m}+\ldots+R^{(n-1)m}=R_1\frac{\nu^{mn}-1}{\nu^m-1}=$$

$$=\frac{R}{p}\cdot\frac{\nu^m-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}}\cdot\frac{\nu^{mn}-1}{\nu^m-1}=R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}.\qquad(4.7)$$

Получив формулы

$$S=R\cdot s^{(p)}_{mn,\,j/m},\qquad(4.8)$$

где $s^{(p)}_{mn,\,j/m}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$ — коэффициент наращения ренты,

и

$$A=R\cdot a^{(p)}_{mn,\,j/m},\qquad(4.9)$$

где $a^{(p)}_{mn,\,j/m}=\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]}$ — коэффициент наращения ренты (значения коэффициентов определяют по таблицам), можно рассмотреть частные случаи постоянной ренты.

Рента p-срочная постнумерандо, проценты начисляются m раз в году, число выплат в году p равно числу начислений процентов m (характеристики ренты R, n, j, $m \neq p \neq 1$).

Наращенная сумма ренты имеет вид

$$S = R \cdot \frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{n} - 1}{j}. \tag{4.10}$$

Современная величина ренты вычисляется по формуле

$$A = R \cdot \frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}. \tag{4.11}$$

Пример 4.1

Рассмотрим 5-летнюю обыкновенную ренту постнумерандо с платежами по 300 рублей. Найти наращенную сумму и современную стоимость ренты, если годовая процентная ставка равна 10%. Проценты начисляются ежемесячно, выплаты осуществляются поквартально.

Для данной задачи $R = 300$, $n = 5$, $m = 12$, $p = 4$, $i = 0{,}1$.

Согласно формуле наращенная сумма равна

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}.$$

В нашем случае

$$S = \frac{300}{4} \cdot \frac{\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{12\cdot 5} - 1}{\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{12/4} - 1} = 1919{,}88.$$

Современная стоимость для p-срочной ренты с начислением процентов m раз в год составит

$$s_{n;\,i}^{p} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}.$$

В нашем случае

$$A = 300 \frac{1-\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{-12\cdot 5}}{4\left[\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{12/4} - 1\right]} = 1166{,}88.$$

Итак, наращенная сумма равна 1919,88 руб., современная стоимость ренты — 1166,88 руб.

Годовая рента постнумерандо определяется характеристиками: член ренты R, срок ренты n, ставка i, число выплат в году $p = 1$, число начислений процентов в году $m = 1$.

Построим схему наращения членов ренты на временно́й оси (рис. 4.2).

Общая формула наращенной суммы ренты (легко получаемая из общей формулы при заданных условиях $p = 1$, $m = 1$, $j = 1$) будет иметь вид

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{4.12}$$

где $s_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ — коэффициент наращения ренты.

Современная ценность ренты равна современной ценности ее наращенной суммы, т. е.

$$A = S \cdot (1+i)^{-n} = R \cdot s_{n;i} \cdot (1+i)^{-n} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^{-n} =$$

$$= R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} R \cdot a_{n;i}, \tag{4.13}$$

где $a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ — коэффициент приведения ренты, показывающий, сколько рентных платежей (R) содержится в современной величине; A — современная ценность денег в момент 0.

Годовая рента*, *постнумерандо*, *начисление процентов m раз в году*, *выплаты p один раз в году определяется характеристиками; член ренты R, срок ренты n, ставка j, число выплат в году $p = 1$, число начислений процентов в году $m \neq 1$.

В этом случае платеж R делается один раз в конце каждого года, а проценты начисляются m раз в год. Это означает, что применяется каждый раз ставка $j \ / \ m$, где j — номинальная ставка процентов.

Общая формула наращенной суммы ренты (получаемая из общей формулы при заданных условиях $p = 1$, $m \neq 1$) будет иметь вид

$$S = R\frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1}, \tag{4.14}$$

или $S = Rs_{mn,\,j/m}$, где $s_{mn,\,j/m} = \dfrac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1}$ — коэффициент наращения ренты.

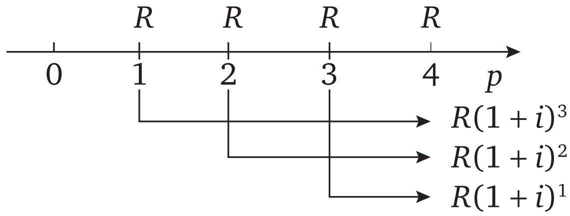

Рис. 4.2. **Расположение моментов выплат и начисления процентов на временно́й оси**

Современная величина ренты вычисляется по формуле:

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}, \tag{4.15}$$

или $S = Ra_{mn,\,j/m}$, где $a_{mn,\,j/m} = \dfrac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$ — коэффициент приведения ренты.

Рента p-срочная постнумерандо, проценты начисляются один раз в году, выплаты p раз в году определяется характеристиками; член ренты R, срок ренты n, ставка i, число выплат в году $p \neq 1$, число начислений процентов в году $m = 1$.

Так называется рента, при которой p раз ежегодно через равные промежутки времени производятся платежи, равные $R\ /\ p$. На накопленную сумму начисляются сложные проценты по годовой ставке i. Наращенная за n лет сумма всей ренты равна:

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = R\cdot s^{p}_{n;\,i}, \tag{4.16}$$

где $s^{p}_{n;\,i} = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$ — коэффициент наращения p-срочной ренты при $m = 1$.

Современная ценность ренты равна современной ценности ее наращенной суммы, т. е.

$$A = S(1+i)^{-n} = R\frac{(1+i)^{n}-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}(1+i)^{-n} = R\frac{1-(1+i)^{n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]} = Ra^{(p)}_{n,\,i}, \tag{4.17}$$

где $a^{(p)}_{n,\,i} = \dfrac{1-(1+i)^{n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$ — коэффициент приведения ренты.

В табл. 4.1 обобщены результаты, полученные для расчета наращенной суммы и современной стоимости для рент постнумерандо.

Таблица 4.1

Количество платежей	**Количество начислений**	S	A
$p = 1$	$m = 1$	$R\dfrac{(1+j)^n-1}{j}$	$R\dfrac{1-(1+j)^n}{j}$
	$m > 1$	$R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}$	$R\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1}$
$P > 1$	$m = 1$	$\dfrac{R}{p}\dfrac{(1+j)^n-1}{(1+j)^{1/p}-1}$	$R\dfrac{1-(1+j)^n}{p\left[(1+j)^{1/p}-1\right]}$
	$m = p$	$R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{j}$	$R\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-nm}}{j}$
	$m \neq p$	$\dfrac{R\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$	$R\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$

Если ***проценты начисляются непрерывно***, характеристиками ренты являются R, n, δ, $p = 1$. Сумма R выплачивается один раз в конце года и на выплаченную сумму начисляются непрерывные проценты по ставке (силе роста) S. Найдем наращенную в момент n сумму этой ренты.

Формулы для вычисления наращенной суммы и современной стоимости ренты с непрерывным начислением процентов получают как предельные случаи:

$$\lim_{m\to\infty} s_{mn,\,j/m}^{(p)} = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}\right)^{n}-1}{p\left[\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}\right)^{1/p}-1\right]} = \frac{e^{jn}-1}{p(e^{\frac{j}{p}}-1)}. \qquad (4.18)$$

Заменив номинальную ставку j на силу роста δ, получим

$$S = Rs_{n,\delta}^{(p)}, \tag{4.19}$$

где $s_{n,\delta}^{(p)} = \dfrac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1)}$ — коэффициент наращения ренты.

Современная стоимость ренты равна

$$A = Ra_{n,\delta}^{(p)}, \tag{4.20}$$

где $a_{n,\delta}^{(p)} = \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn,\,j/m}^{(p)} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1 - \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} = \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1)}$ — коэффициент приведения ренты.

Если $p = 1$, то

$$S = Rs_{n,\delta} = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}, \tag{4.21}$$

$$A = Ra_{n,\delta} = R\frac{1 - e^{\delta n}}{e^{\delta} - 1}. \tag{4.22}$$

Связь между δ и j можно найти, составив уравнение эквивалентности: $\dfrac{\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} = \dfrac{e^{-\delta n} - 1}{p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1)}$. Равенство обращается в тождество при: $\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^{m} = e^{\delta}$.

Отсюда следует:

$$\delta = m\ln\left(1 + \frac{j}{m}\right), \tag{4.23}$$

$$j = m(e^{\frac{m}{\delta}} - 1). \tag{4.24}$$

Если проценты начисляются непрерывно и платежи ренты производятся непрерывно, то, переходя к пределу, получим

$$s_{n;\delta}^{p\to\infty} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\lim\limits_{p\to\infty} p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1)} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}, \tag{4.25}$$

$$a_{n;\delta}^{p\to\infty} = \frac{1 - e^{\delta n}}{\delta}. \tag{4.26}$$

Годовая рента пренумерандо, проценты начисляются один раз в году (характеристики ренты R, i, n, $m = 1$, $p = 1$) (рис. 4.3).

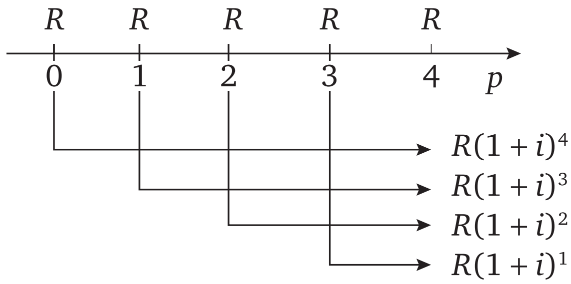

Рис. 4.3. **Расположение моментов выплат и начисления процентов на временно́й оси**

Пусть R — ежегодные платежи, на которые начисляются проценты в начале каждого года по сложной процентной ставке i, n — срок ренты.

Платеж, сделанный в момент n, дает наращенную сумму $R(1+i)$. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент $n - 1$, равна $R(1+i)^2$. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент $n - 2$, равна $R(1 + i)^3$ и т. д. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент 2, равна $R(1 + i)^{n-1}$, а в момент 1 — $R(1 + i)^n$.

Таким образом, наращенная сумма всей ренты в момент n будет равна

$$S = R(1+i) + R(1+i)^2 + R(1+i)^3 + \ldots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n =$$

$$= R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (4.27)$$

Из сравнения рент постнумерандо и пренумерандо ясно, что все формулы для ренты пренумерандо получаются из формул для ренты постнумерандо подстановкой вместо R величины $R(1 + i)$.

Сумма членов ренты пренумерандо больше наращенной суммы ренты постнумерандо в $(1 + i)$ раз, поэтому наращенная сумма ренты пренумерандо равна

$$S_1 = S - (1 + i), \qquad (4.28)$$

где S — наращенная сумма ренты постнумерандо.

Современные величины рент пренумерандо рассчитываются аналогично, т. е.

$$A = A - (1 + i). \qquad (4.29)$$

Если проценты начисляются по номинальной процентной ставке j, а выплаты производятся p раз в году, современная и наращенная стоимость ренты пренумерандо будет равна

$$A_1 = A\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}, \qquad (4.30)$$

$$S_1 = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}. \qquad (4.31)$$

Если платежи ренты производятся в середине периода, то по аналогичной схеме можно получить формулы:

$$A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}, \qquad (4.32)$$

$$S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}. \qquad (4.33)$$

Начало выплат у ***отложенной*** (***отсроченной***) ***ренты*** сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени. Например, погашение задолженности планируется начать спустя обусловленный срок (льготный период). Сдвиг во времени не отражается на величине наращенной суммы. Иначе обстоит дело с современной стоимостью ренты.

Пусть рента выплачивается спустя t лет после некоторого начального момента времени. Современная стоимость ренты на начало выплат (современная стоимость немедленной ренты) равна A. Современная стоимость на начало периода отсрочки в t лет равна дисконтированной на этот срок величине современной стоимости немедленной ренты. Для годовой ренты имеем

$$A_t = A \cdot v^t = Ra_{n;i}v^t, \qquad (4.34)$$

где A_t — современная величина отложенной ренты; A — современная величина немедленной ренты; v — дисконтный множитель за t лет ($v^t = (1 + i)^{-t}$).

Вечной рентой называется финансовая рента с бесконечным числом членов. Например, некоторое благотворительное общество положило в банк определенную сумму денег и отчисляет ежегодно проценты от этой суммы в пользу детского дома. Число платежей, которые получит детский дом, не ограничено, эти платежи могут продолжаться как угодно долго, они образуют «вечную» ренту. Наращенная сумма вечной ренты, каждый член которой равен положительному числу R, бесконечно велика, и говорить об ее величине не имеет смысла. Иначе обстоит дело с современной ценностью вечной ренты. Современной ценностью A_∞ вечной ренты является сумма, которую надо вложить в начальный момент под сложные проценты по данной ставке, чтобы в дальнейшем каждый год (или каждый период начисления процентов) можно было получать с этого вклада сумму R.

Современную ценность вечной ренты можно определить как предел современной ценности конечной ренты при неограниченном увеличении числа членов ренты.

Годовая рента с начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной i:

$$A_{\infty} = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}\lim_{n\to\infty}[1-(1+i)^{-n}] = \frac{R}{i}; \qquad (4.35)$$

p-срочная рента:

$$A_{\infty} = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]} = \frac{R}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}. \qquad (4.36)$$

Если $p = m$, то

$$A_{\infty} = \frac{R}{j}. \qquad (4.37)$$

Лизинг — это один из способов ускоренного обновления основных средств. Он позволяет предприятию получить в свое распоряжение средства производства, не покупая их и не становясь их собственником. Недостаток лизинга — это его более высокая стоимость по сравнению с банковскими кредитами, так как уплачиваемые лизинговые платежи предприятия-лизингополучателя лизинговому учреждению покрывают амортизацию имущества, стоимость вложенных денег и вознаграждение за обслуживание лизингополучателя.

В качестве альтернативного финансового приема лизинг заменяет источники долгосрочного и среднесрочного финансирования, поэтому преимущества и недостатки лизинга сравнивают с преимуществами и недостатками долгосрочных и среднесрочных кредитов.

Пусть n — срок реализации проекта, $K_{\text{н}}$ — ставка налога на прибыль, E_0 — предоплата, r — процентная ставка по кредиту, Q — остаточная стоимость объекта, L_i — периодический лизинговый платеж, S_i — периодический платеж по погашению кредита, P_i — проценты по кредиту в соответствующем периоде, A_i — амортизационные начисления в соответствующем периоде, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей в случае лизинга равна

$$L = E_0 + (1-K_{\text{н}})\sum_{i=1}^{n} L_i/(1+r)^i. \qquad (4.38)$$

Если периодические лизинговые платежи постоянны ($L_i = L_0 = \text{const}$), то мы получаем простую ренту постнумерандо. Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых лизинговых платежей равна

$$L = E_0 + (1-K_{\text{н}})L_0\frac{1-1/(1+r)^n}{r}. \qquad (4.39)$$

В случае покупки за счет кредита чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей равна

$$S = E_0 + \sum_{i=1}^{n} S_i / (1+r)^i + (1-K_{\text{н}}) \sum_{i=1}^{n} P_i / (1+r)^i -$$

$$- K_{\text{н}} \sum_{i=1}^{n} A_i / (1+r)^i - Q / (1+r)^n. \quad (4.40)$$

Если периодические платежи по погашению кредита постоянны ($S_i = S_0 = \text{const}$), а амортизационные начисления равны ($A_1 = A_0 = \text{const}$), то чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей в случае покупки за счет кредита равна

$$S = E_0 + (S_0 - K_{\text{н}} A_0) \frac{1 - 1/(1+r)^n}{r} + (1-K_{\text{н}}) \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(1+r)^i} - \frac{Q}{(1+r)^n}.$$

Если $L < S$, то выгоднее лизинг. Если $L > S$, то выгоднее покупка за счет кредита.

Пример 4.2

Предприятие рассматривает вопрос о приобретении оборудования. Первый вариант — лизинг за 600 тыс. руб. с рассрочкой платежа в течение четырех лет. Второй вариант — покупка на заводе-изготовителе за 480 тыс. руб. Ставка налога на прибыль равна $K_{\text{н}} = 40\%$. Предоплата E_0 и остаточная стоимость оборудования Q равны нулю.

Можно получить кредит в банке под $r = 12\%$ годовых. Используется равномерное начисление износа. Сравним эти варианты.

В случае лизинга ежегодный лизинговый платеж равен $L_0 = 600 / 4 = 150$ тыс. руб. Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых лизинговых платежей L равна

$$L = E_0 + (1-K_{\text{н}}) L_0 \frac{1 - 1/(1+r)^n}{r} =$$

$$= 0 + (1-0{,}4) \cdot 150 \cdot \frac{1 - 1/(1+0{,}12)^4}{0{,}12} \approx 273{,}36 \text{ тыс. руб.}$$

Определим график погашения кредита при покупке оборудования. Заполним таблицу (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Показатели, тыс. руб.	**Год 0**	**Год 1**	**Год 2**	**Год 3**	**Год 4**
Возврат кредита S_0	—	120	120	120	120
Остаток долга	480	360	240	120	0
Проценты по кредиту p	—	57,6	43,2	28,8	14,4

Таблица заполняется следующим образом: ежегодный возврат кредита $S_0 = 480 / 4 = 120$ тыс. руб., каждое число 2-й строки, начиная со 2-го столбца, есть разность предыдущего числа 2-й строки и числа из этого же столбца предыдущей строки, каждое число 2-й строки умножаем на 0,12 и результат пишем в следующем столбце 3-й строки.

Ежегодные амортизационные начисления равны A_0 = (первоначальная стоимость – остаточная стоимость) / 4 = (480 – 0) / 4 = 120 тыс. руб.

Тогда чистая приведенная стоимость посленалоговых платежей в случае покупки за счет кредита равна

$$S = E_0 + (S_0 - K_н A_0)\frac{1-1/(1+r)^n}{r} + (1-K_н)\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(1+r)^i} - \frac{Q}{(1+r)^n} =$$

$$= 0 + (120 - 0,4 \cdot 120)\frac{1-1/(1+0,12)^4}{0,12} +$$

$$+ (1-0,4)\left(\frac{57,6}{1,12} + \frac{43,2}{1,12^2} + \frac{28,8}{1,12^3} + \frac{14,4}{1,12^4}\right) - 0 = 288 \text{ тыс. руб.}$$

Так как 273,36 < 288, то выгоднее лизинг.

Лекция 5
ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ: ПЕРЕМЕННЫЕ РЕНТЫ

Ренты с постоянным абсолютным изменением членов во времени. Пусть изменения размеров членов ренты происходят согласно закону ***арифметической прогрессии*** с первым членом R и разностью a, иначе говоря, они образуют последовательность

$$R,\ R+a,\ R+2a,\ \ldots,\ R+(n-1)a.$$

Современная сумма годовой ренты постнумерандо определяется суммой

$$A = Rv + (R+a)v^2 + (R+2a)v^3 + \ldots + \left[R+(n-1)a\right]v^n = v\sum_{t=0}^{n-1}(R+ta)v^t. \tag{5.1}$$

После преобразований эта сумма принимает вид

$$A = \left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n,i} = \frac{nav^n}{i}, \tag{5.2}$$

где $v = \dfrac{1}{1+i}$ — дисконтный множитель по ставке i.

Чтобы получить наращенную сумму ренты, умножим (5.2) на $(1+i)^n$ и получим

$$S = \left(R+\frac{a}{i}\right)s_{n,i} = \frac{na}{i}. \tag{5.3}$$

Пример 5.1

Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15 млн руб. Последующие платежи увеличиваются каждый раз на 2 млн руб. Начисление процентов производится по 20% годовых. Срок выплат 10 лет.

Решение: По условиям задачи $R = 15$, $a = 2$, $i = 20\%$, $n = 10$. Табличные значения коэффициентов $a_{10;20} = 4{,}192472$, $v^{10} = 0{,}161505$.

Применив формулу (5.2), получим

$$A = \left(15+\frac{2}{0{,}2}\right)4{,}192472 - \frac{10\cdot 2\cdot 0{,}161505}{0{,}2} = 88{,}661 \text{ млн руб.}$$

Используя взаимозависимость A и S, находим

$$S = 88{,}661 \cdot 1{,}2^{10} = 548{,}965 \text{ млн руб.}$$

Влияние динамики платежей очевидно. Например, постоянная рента с $R = 15$ дает накопление в сумме около 390 млн руб., «вклад» прироста платежей в наращенную сумму составил почти 160 млн руб., или примерно 20%.

Переменная р-срочная рента с постоянным абсолютным приростом. Пусть R — базовая величина разовой выплаты, a — *годовой* прирост выплат. В этом случае последовательные выплаты равны

$$R,\ R+\frac{a}{p},\ R+2\frac{a}{p},\ldots,R+(pm-1)\frac{a}{p}.$$

По определению для ренты постнумерандо при начислении процентов p раз в году получим

$$A=\sum_{t=1}^{pn}\left(R+\frac{at}{p}\right)v^{t/p}, \qquad (5.4)$$

$$S=\sum_{t=1}^{pn}\left[R+\frac{a}{p}(t-1)\right](1+i)^{n-t/p}. \qquad (5.5)$$

Пример 5.2

Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться в течение 2 лет — каждый квартал на 25 тыс. руб. Первоначальный объем сбыта за квартал 500 тыс. руб. Определить наращенную сумму к концу срока при условии, что деньги за продукцию поступают постнумерандо.

По условиям задачи $R = 500$, $a\ /\ p = 25$, $i = 20\%$, $n = 2$, $pn = 8$. Наращенная сумма к концу 2 лет составит

$$S=\sum_{t=1}^{8}\left[500+25(t-1)\right]\cdot 1{,}2^{2-t/4}=4865 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть изменения размеров членов ренты происходят согласно ***геометрической прогрессии*** с членами $R, Rq, Rq^2, \ldots, Rq^{n-1}$ (q — знаменатель прогрессии или темп роста). Пусть этот ряд представляет собой ренту постнумерандо. Тогда ряд дисконтированных платежей — $Rv, Rqv^2, \ldots, Rq^{n-1}v^n$.

Получим геометрическую прогрессию с первым членом Rv и знаменателем qv. Сумма членов этой прогрессии равна

$$A=Rv\frac{q^n v^n-1}{qv-1}=R\frac{(qv)^n-1}{q-(1+i)}. \qquad (5.6)$$

Пусть теперь $q = 1 + k$, где k — темп прироста платежей.

После простых преобразований получим

$$A=R\frac{1-\left(\dfrac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}. \qquad (5.7)$$

Заметим, что прирост может быть как положительным ($k > 0$), так и отрицательным ($k < 0$).

Наращенная сумма находится как

$$S = A(1+i)^n = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)} = R\frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i}. \tag{5.8}$$

Пример 5.3

Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15 тыс. руб. Последующие платежи увеличиваются каждый год на 12% ($k = 0{,}12$). Начисление процентов производится по 20% годовых. Срок выплат 10 лет.

По условиям задачи $R = 15$; $k = 0{,}12$; $i = 0{,}2$; $n = 10$.

$$A = 15\cdot\frac{1-\left(\dfrac{0{,}9}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2-0{,}12} = 93{,}448 \text{ тыс. руб.};$$

$$S = 15\cdot\frac{1{,}12^{10} - 1{,}2^{10}}{1{,}12-1{,}2} = 578{,}604 \text{ тыс. руб.}$$

Допустим теперь, что платежи уменьшаются во времени с темпом прироста минус 10% в год ($k = -0{,}1$), тогда

$$A = 15\cdot\frac{1-\left(\dfrac{0{,}9}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2-(-0{,}1)} = 47{,}184 \text{ тыс. руб.};$$

$$S = 47{,}184\cdot 1{,}2^{10} = 292{,}151 \text{ тыс. руб.}$$

Рента p-срочная с постоянными относительными изменениями членов: платежи производятся не один, а p раз в году постнумерандо, проценты начисляются раз в году по ставке i. В этом случае последовательность платежей представляет собой геометрическую прогрессию R, Rq, …, Rq^{np-1}, где q — темп роста за период. Начислим проценты и суммируем результат, получим

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q-(1+i)^{1/p}}. \tag{5.9}$$

Современная стоимость ренты составит

$$A = R\frac{q^{np}v^n - 1}{q-(1+i)^{1/p}}. \tag{5.10}$$

Пример 5.4

Пусть $R = 15$ тыс. руб., $n = 10$, $i = 20\%$. Положим, что платежи увеличиваются с каждым полугодием на 6%. Рента постнумерандо.

Решение. Наращенная сумма и современная стоимость ренты

$$S = 15 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1{,}2^{10}}{1{,}06 - 1{,}2^{0{,}5}} = 1263{,}052 \text{ тыс. руб.};$$

$$A = 15 \cdot \frac{1{,}06^{20} \cdot 1{,}2^{-10} - 1}{1{,}06 - 1{,}2^{0{,}5}} = 203{,}990 \text{ тыс. руб.}$$

Если ***поток платежей непрерывен*** и описывается некоторой функцией $R_t = f(t)$, то общая сумма поступлений за время n равна $\int_0^n f(t)dt$. В этом случае наращенная сумма (при начислении процентов используется процентная ставка в виде силы роста δ) находится как

$$S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt. \tag{5.11}$$

Современная стоимость такого потока определяется как

$$A = \int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt. \tag{5.12}$$

Для того чтобы рассчитать величины A и S, необходимо определить конкретный вид функции изменения платежей и значения ее параметров. Рассмотрим методы расчета современных стоимостей для двух видов функций — линейной и экспоненциальной. Наращенные суммы таких потоков легко определить исходя из соотношения

$$S = Ae^{\delta n}. \tag{5.13}$$

Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей. Функция потока платежей:

$$R_t = R_0 + at, \tag{5.14}$$

где R_0 — начальный размер платежа, выплачиваемого в единицу времени, в котором измеряется срок ренты.

Современная стоимость получена с помощью интегрирования функции потока платежей:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^n (R_0 + at)e^{-\delta t}dt = R_0\int_0^n e^{-\delta t}dt + \int_0^n te^{-\delta t}dt = \\ &= R_0\tilde{a}_{n;\,\delta} + \frac{1}{\delta}(\tilde{a}_{n;\,\delta} - ne^{-\delta n})a = \left(R_0 + \frac{a}{\delta}\right)\tilde{a}_{n;\,\delta} - \frac{a}{\delta}ne^{-\delta n}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

где $\tilde{a}_{n;\,\delta}$ — коэффициент приведения постоянной непрерывной ренты.

Пример 5.5

Намечается в течение 3 лет увеличивать выпуск продукции на 1 млн руб. ежегодно. Базовый уровень выпуска 10 млн руб. Необходимо определить суммарный объем выпуска начисленными процентами. Сила роста 8%.

Определим коэффициент приведения:

$$\tilde{a}_{3;8} = \frac{1 - e^{-0{,}08 \cdot 3}}{0{,}08} = 2{,}66715.$$

Современная стоимость ренты:

$$A = \left(10 + \frac{1}{0{,}08}\right) \cdot 2{,}66715 - \frac{1}{0{,}08} 3e^{0{,}08 \cdot 3} = 30{,}5 \text{ млн руб.}$$

Искомая наращенная сумма:

$$S = 30{,}5 \cdot e^{0{,}08 \cdot 3} = 38{,}8 \text{ млн руб.}$$

Экспоненциальный рост платежей. Функция потока платежей

$$R_t = Re^{qt}, \tag{5.16}$$

где q — непрерывный темп прироста платежей.

Современная величина такой ренты определяется по формуле

$$A = R\int_0^n e^{qt} e^{-\delta t} dt = R\int_0^n e^{(q-\delta)t} dt = R \left.\frac{e^{(q-\delta)t}}{q-\delta}\right|_0^n = R\frac{e^{(q-\delta)t} - 1}{q-\delta}. \tag{5.17}$$

Разность $q - \delta$ определим как

$$q - \delta = \ln\frac{1+k}{1+i}, \tag{5.18}$$

где k — дискретный темп прироста.

Пример 5.6

Ожидается, что прирост доходов составит 5% в год. Каковы современная стоимость и наращенная сумма потока доходов, если $R = 100$, $i = 7\%$, $n = 3$ года?

Из условий задачи следует

$$q - \delta = \ln\frac{1+0{,}05}{1+0{,}07} = -0{,}01887.$$

Таким образом,

$$A = 100\frac{e^{-0{,}01887 \cdot 3} - 1}{-0{,}01887} = 291{,}5;$$

$$S = A(1+i)^3 = 291{,}5 \cdot 1{,}07^3 = 357{,}1.$$

Конверсии рент. В практике иногда сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или даже в ходе его выполнения необходимо в силу каких-либо причин изменить условия выплаты ренты, т. е. сконвертировать условия, предусматриваемые при выплате финансовой ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (выкуп ренты), или, наоборот, замена разового платежа рентой (рассрочка платежа). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну — консолидация рент. Общий случай конверсии — замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, например немедленной ренты на отложенную, годовой — на ежеквартальную и т. д. Перечисленные изменения не могут быть произвольными. Если предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих сторон до и после заключения контракта, то конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности. Расчет платежей при этом основывается на ***уравнении эквивалентности***, которое представляет собой равенство сумм заменяемых и заменяющих платежей, приведенных к одному моменту времени.

Выкуп ренты сводится к замене ренты единовременным платежом. Искомый размер выкупа должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты. Для решения задачи в зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей. Применяемая при расчете современной стоимости процентная ставка должна удовлетворять обе участвующие стороны.

Пример 5.7

Рента постнумерандо с параметрами: величина годового платежа 10 тыс. руб., срок 5 лет, процентная ставка 8%, заменяется разовым платежом. Определить размер платежа.

Размер выкупа ренты должен быть равен современной стоимости ренты, т. е. $A = Ra_{i;n}$:

$$A = 10 \cdot \frac{1-(1+0{,}08)^{-5}}{0{,}08} = 10 \cdot 3{,}9927 = 39{,}927 \text{ тыс. руб.}$$

Рассрочка платежей. Рассмотрим теперь задачу, обратную выкупу ренты. Если есть обязательство уплатить некоторую крупную сумму и стороны согласились, что задолженность будет погашена частями в рассрочку, то последнюю удобно осуществить в виде выплаты постоянной ренты.

Для решения задачи приравниваем современную стоимость ренты, с помощью которой производится рассрочка, сумме долга. Задача обычно заключается в определении одного из параметров этой ренты — члена ренты или ее срока — при условии, что остальные параметры заданы.

Пример 5.8

Есть долговое обязательство на сумму 20 тыс. руб. Кредитор и должник договорились об уплате долга в рассрочку: рента постнумерандо со сроком 3 года под 10% годовых. Определить величину отдельного платежа.

Величина долга приравнивается величине современной стоимости ренты. Тогда величина годового платежа: $R = \frac{A}{a_{i;n}}$:

$$R = \frac{20}{2{,}4869} = 8{,}042 \text{ тыс. руб. в год.}$$

Объединение* (*консолидация*) *рент заключается в замене нескольких рент одной, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству

$$A = \sum_q A_q, \tag{5.19}$$

где A — современная стоимость заменяющей ренты; A_q — современная стоимость q-й заменяемой ренты.

Объединяемые ренты могут быть любыми: немедленными и отсроченными, годовыми и p-срочными и т. д. Что касается заменяющей ренты, то следует четко определить ее вид и все параметры, кроме одного. Далее, для получения строгого баланса условий необходимо рассчитать размер неизвестного параметра, исходя из равенства (5.19). Обычно в качестве неизвестного параметра принимается член ренты или ее срок.

Так, если заменяющая рента постнумерандо является немедленной и задан ее срок n, то

$$R = \frac{\sum A_q}{a_{n;\,i}}. \tag{5.20}$$

Срок для немедленной ренты постнумерандо определяется из соотношения

$$a_{n;\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_q A_q}{R},$$

т. е.

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{\sum A_q}{R} i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{5.21}$$

Для того чтобы задача имела решение, необходимо соблюдать условие

$$\frac{i\sum_q A_q}{R} < 1. \tag{5.22}$$

Пример 5.9

Три ренты постнумерандо — немедленные, годовые — заменяются одной отложенной на 3 года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: R_q = 100; 120; 300 тыс. руб., сроки этих рент: 6; 11 и 8 лет. Сложная ставка — 20%. Вычисления приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Рента (q)	R_q	n_q	I	$a_{n_q;20}$	$Ra_{n_q;20}$
1	100	6	20	3,32551	332,551
2	120	11	20	4,32706	519,472
3	300	8	20	3,83716	1151,148
Итого	520	—	—	—	2002,946

Размер члена заменяющей ренты равен

$$R = \frac{2002{,}946}{a_{7;20}v^3} = \frac{2002{,}946}{3{,}60459 \cdot 1{,}2^{-3}} = 960{,}189 \text{ тыс. руб.}$$

Если бы заменяющая рента была немедленной, то

$$R = \frac{2002{,}946}{3{,}60459} = 555{,}665 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение хотя бы одного из параметров рент означает замену одной ренты другой. Такая замена должна базироваться на принципе финансовой эквивалентности, т. е. должно соблюдаться равенство современных стоимостей обеих рент. Процентная ставка при этом может быть сохранена или изменена. Например, кредитор в обмен на увеличение срока может потребовать некоторое увеличение ставки.

Рассмотрим несколько случаев замены рент.

Замена немедленной ренты на отсроченную. Пусть имеется немедленная рента постнумерандо с параметрами R_1, n_1, процентная ставка равна i. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. т. е. немедленная рента заменяется на отсроченную с параметрами R_2, n_2, t (t не входит в срок ренты). Если в задаче задан срок, то определяется R_2, и наоборот. В общем случае, когда $n_1 \neq n_2$, справедливо равенство $A_1 = A_2$, т. е.

$$R_1 a_{n_1;i} = R_2 a_{n_2;i} v^t. \tag{5.23}$$

Откуда

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} (1+i)^t, \tag{5.24}$$

где t — продолжительность отсрочки.

Пример 5.10

Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями R_1 = 2 тыс. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка — 20% годовых. Определить R_2.

По условию $n_1 = n_2 = 8$, $R_1 = 2$, $t = 2$, $i = 20\%$.

Применяя формулу (5.24), получим $R_2 = 2(1 + 0{,}2)^2 = 2{,}88$ тыс. руб. Таким образом, отказ от выплаты немедленной ренты увеличивает ежегодные выплаты на 0,88 тыс. рублей.

Замена годовой ренты на p-срочную. Пусть годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1 заменяется на p-срочную с параметрами R_2, n_2, p. Если заданы срок заменяющей ренты, ее периодичность и ставка, то

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}^{(p)}}. \tag{5.25}$$

Если необходимо найти срок ренты при заданном размере члена ренты, то из формулы (5.25) находим сначала $a_{n_2;i}^{(p)}$, а затем n_2.

Пример 5.11

Годовая рента постнумерандо с параметрами $R_1 = 2$ тыс. руб., $n_1 = 3$ года заменяется на квартальную с $n_2 = 4$ года. Процентная ставка 20%. Определить размер выплаты второй ренты. Пользуясь формулой (5.25), получим $R_2 = 2 \cdot \frac{a_{3;20}}{a_{4;20}^{(4)}} = 2 \cdot \frac{2{,}10548}{2{,}77552} = 1{,}51791$ тыс. руб.

Общий случай конверсии. Описанные выше методы эквивалентной замены рассматривались применительно к постоянным дискретным рентам, но переход от одного вида к другому возможен для любых потоков платежей. В каждом случае в основу замены должно быть положено равенство соответствующих современных стоимостей потоков платежей.

Пример 5.12

Заменим нерегулярный поток денег постоянной годовой рентой постнумерандо. Пусть поток состоит из платежей R_t, выплачиваемых спустя n_t лет после начала действия контракта. Параметры заменяющей немедленной ренты постнумерандо: R, n. Исходное уравнение эквивалентности будет иметь вид

$$Ra_{n;i} = \sum R_t v^{-n_t}. \tag{5.26}$$

Данное равенство дает возможность определить один из параметров ренты: R или n. Решение обратной задачи — определение членов нерегулярного потока платежей — достигается только подбором величин платежей, удовлетворяющих этому равенству.

Лекция 6
ЦЕННЫЕ БУМАГИ

Ценная бумага — это денежный документ, выражающий связанные с ним имущественные и неимущественные права (удостоверяющий имущественное право или отношение займа владельца документа по отношению к лицу, выпустившему такой документ), который может самостоятельно обращаться на рынке и быть объектом купли-продажи и других сделок, служит источником получения регулярного или разового дохода. Ценные бумаги фактически представляют собой юридические документы, свидетельствующие о праве их владельца на доход или часть имущества фирмы. Приобретая ценную бумагу, инвестор может рассчитывать, как минимум, на два вида доходов: инвестиционный и курсовой. ***Инвестиционный доход*** — это доход от владения ценными бумагами (называемый также дивидендом). ***Курсовой доход*** — это доход, полученный в результате покупки бумаги по одной цене с последующей перепродажей по другой, более высокой цене.

Классификация ценных бумаг. Существующие в современной мировой практике ценные бумаги делятся на два больших класса: основные и производные ценные бумаги.

Основные ценные бумаги — это ценные бумаги, в основе которых лежат имущественные права на какой-либо актив, обычно на товар, деньги, капитал, имущество, различного рода ресурсы и др.

Основные ценные бумаги, в свою очередь, можно разбить на две подгруппы: первичные (бумаги основаны на активах, в число которых не входят сами ценные бумаги. Это, например, акции, облигации, векселя, закладные и др.) и вторичные ценные бумаги (это ценные бумаги на сами ценные бумаги: варранты на ценные бумаги, депозитарные расписки и др.).

В зависимости от критерия, лежащего в основе классификации, существует несколько группировок российских государственных ценных бумаг.

1. ***По процедуре выпуска*** ценные бумаги делятся на эмиссионные и неэмиссионные. Эмиссионные ценные бумаги (акции, облигации, депозитные и сберегательные сертификаты) выпускаются единовременно в большом количестве и имеют в рамках одного выпуска одинаковые свойства. Неэмиссионные ценные бумаги выпускаются отдельными экземплярами.

2. ***По способу реализации имущественных прав владельцев*** различают ценные бумаги на предъявителя, именные и ордерные. Для реализации имущественных прав, связанных с владением ценной бумагой на предъявителя, достаточно ее предъявления. В случае именной ценной бумаги необходима регистрация имени владельца в реестре держателей ценных бумаг и на бланке сертификата ценной бумаги. Передача именной ценной бумаги другому владельцу отражается изменением соответствующей записи в реестре. Ордерные ценные бумаги (например, веселя, депозитные и сберегательные сертификаты КБ) — это долговые ценные бумаги, которые выпускаются в виде отпечатанных на бумаге бланков и предполагают возможность их передачи новому владельцу в соответствии с распоряжением прежнего владельца.

3. ***По срокам обращения***:

— краткосрочные, выпускаемые на срок обычно до 1 года;

— среднесрочные, срок обращения которых растягивается на период обычно от 1 года до 5—10 лет;

— долгосрочные, т. е. имеющие срок жизни обычно свыше 10—15 лет.

4. ***По типу выраженных прав и отношений*** ценные бумаги делятся на долговые и долевые. Долговые ценные бумаги выражают отношение займа и представляют собой долговые обязательства, гарантирующие их владельцам возврат денежных средств в установленный срок с оговоренной ставкой процентов. Долевые ценные бумаги выражают отношения совладения и предоставляют их владельцу право долевого участия как в собственности, так и в прибыли эмитента. Долевыми ценными бумагами являются акции. Акции выпускаются только акционерными обществами.

5. ***По статусу лица***, ***выпустившего ценную бумагу***, различают государственные, муниципальные и частные (корпоративные) ценные бумаги. Государственные ценные бумаги выпускаются от имени правительства, несущего по ним ответственность всем имуществом государства. Муниципальные ценные бумаги выпускаются от имени местных органов управления и имеют конкретное залоговое обеспечение в виде объектов муниципальной собственности. Ценные бумаги, выпускаемые всеми прочими субъектами хозяйствования (предприятиями, организациями, акционерными обществами), относятся к частным (или корпоративным) ценным бумагам.

6. ***По форме существования*** различают ценные бумаги в виде отпечатанных на бумаге бланков и в виде записей на счетах. Преимущественной формой на современных фондовых рынках является вторая. В виде отпечатанных на бумаге бланков выпускаются, как правило, ценные бумаги, требующие указания на бланках специальных реквизитов, например векселя и депозитные сертификаты. Ценные бумаги в виде записей на счетах обычно «хранятся» на специальных счетах депо компьютерных систем, открытых на имя владельцев в так назы-

ваемых депозитариях (централизованных хранилищах) ценных бумаг либо учитываются в специальных реестрах держателей ценных бумаг.

Акционерным обществом признается организация, уставный капитал которой разделен на определенное число акций (ФЗ 208, ст. 2). Уставный капитал общества составляется из номинальной стоимости акций общества, приобретенных акционерами:

$$\text{УК} = P_N N, \tag{6.1}$$

где УК — уставный капитал, руб.; P_N — номинальная стоимость акции, руб.; N — количество акций в уставном капитале, шт.

Номинальная стоимость всех обыкновенных акций общества должна быть одинаковой (ФЗ 208, ст. 25).

Акция — эмиссионная ценная бумага, закрепляющая права ее владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом и на часть имущества, остающегося после его ликвидации.

Акция как вид ценной бумаги может выпускаться только акционерным обществом. Общество вправе размещать обыкновенные акции, а также один или несколько типов привилегированных (ПА).

Различают следующие виды привилегированных акций:

1) кумулятивные. При выпуске ПА эмитент обязан установить срок аккумуляции дивидендов. Определяется максимальный период, в течение которого дивиденды начисляются, но не выплачиваются, накапливаясь к последующей выплате;

2) долевые (с экстра-дивидентом). Владельцы имеют право на дивиденд в размере, не меньшем, чем владельцы обыкновенных акций;

3) с корректируемым (плавающим) дивидендом. Владельцы претендуют на дивиденд не ниже безопасного уровня прибыльности ($i_{\text{б.у.п}}$).

Под безопасным уровнем прибыльности понимают уровень прибыльности, отражающий величину дохода по альтернативному, максимально надежному вложению капитала. Обычно это ставка дохода по государственным облигациям, или норма банковского процента по депозитному вкладу в коммерческом банке высшей категории надежности, или ставка рефинансирования ЦБ.

Дивиденд — это доля прибыли АО, приходящаяся на одну акцию. Дивиденд можно рассматривать как вознаграждение за риск, которому подвергается инвестор, вкладывая деньги в бумаги акционерного общества.

Размер доли распределяемой прибыли и режим выплаты дивидендов утверждается собранием акционеров в зависимости от итогов работы общества.

Дивиденды выражаются либо в абсолютных денежных единицах, либо в процентах. Ставка дивиденда характеризует процент прибыли от номинальной стоимости.

Сумма дивидендов за срок владения акцией, руб.:

$$\sum_{t=1}^{n} Д = P_N i_д n, \tag{6.2}$$

где $i_д$ — ставка дивиденда, %; n — период начисления дивидендов, лет.
Размер дивиденда на одну акцию, руб.:

$$Д = \frac{ЧПР}{N}, \tag{6.3}$$

где ЧПР — чистая прибыль, направленная к распределению, руб.; N — количество акций, шт.

Ставка дивиденда по обыкновенным акциям устанавливается общим собранием акционеров, а между собраниями — советом директоров; рассчитывается по формуле

$$i_д = \frac{Д}{P_N} 100\%. \tag{6.4}$$

Дивиденд по привилегированным акциям определяется при их выпуске в эмиссионном проспекте. Он не выплачивается по акциям, находящимся на балансе общества.

Наличие нескольких этапов в жизни акций, их длительное обращение на рынке обусловливают многообразие цен: номинальную, эмиссионную, рыночную.

На акции указывается номинальная стоимость, которая определяется делением уставного капитала общества на количество акций:

$$P_N = \frac{УК}{N}.$$

Номинальная стоимость выступает как некоторый ориентир ценности бумаги на первичном рынке капитала и является базой расчета ряда оценочных показателей. На основе номинальной стоимости определяется эмиссионная цена, по которой осуществляется первичное размещение акций. Эмиссионная цена может совпадать с номинальной или отличаться.

При размещении бумаги по цене выше номинальной образуется премия (ажио), которая является чистым эмиссионным доходом эмитента. Бумага может продаваться и дешевле номинальной стоимости, т. е. с дисконтом.

На вторичном рынке акции реализуются по рыночной цене, определяемой соотношением спроса и предложения. Цену предложения устанавливает продавец, цену спроса — покупатель. Разница между двумя этими ценами образует маржу (от фр. *marge* — край). Термин «маржа» применяется на рынке ценных бумаг для оценки возможного дохода участников сделки.

Внутри маржи находится цена исполнения сделки, т. е. продажи акции, называемая курсовой. Она рассчитывается по следующей формуле:

$$P_{\text{к}} = \frac{P_N i_{\text{д}}}{i_{\text{б.у.п}}}, \tag{6.5}$$

где $P_{\text{к}}$ — курсовая стоимость акции, руб.; $i_{\text{д}}$ — ставка дохода (дивиденда или процента) или коэффициент; $i_{\text{б.у.п}}$ — безопасный уровень прибыльности или коэффициент.

Участники рынка ценных бумаг, используя различные источники информации и имея неодинаковый опыт в инвестиционном бизнесе, по-разному оценивают требуемый уровень прибыльности, предполагая разную степень инвестиционного риска.

Требуемый уровень прибыльности представляет собой минимальную норму дохода, на которую может согласиться инвестор при покупке финансовых активов. Он состоит из двух частей — безопасного уровня прибыльности и платы за инвестиционный риск:

$$i_{\text{т.у.п}} = i_{\text{б.у.п}} + i_{\text{пл.р}}, \tag{6.6}$$

где $i_{\text{т.у.п}}$ — требуемый уровень прибыльности или коэффициент; $i_{\text{б.у.п}}$ — безопасный уровень прибыльности или коэффициент; $i_{\text{пл.р}}$ — плата за риск или коэффициент.

Плата за риск зависит от среднерыночного уровня прибыльности, отсюда

$$i_{\text{т.у.п}} = i_{\text{б.у.п}} + \beta(i_{\text{р.у}} - i_{\text{б.у.п}}), \tag{6.7}$$

где β — коэффициент; $i_{\text{р.у}}$ — среднерыночный уровень прибыльности или коэффициент.

Показатель β характеризует зависимость между общерыночной прибылью по совокупности всех акций на бирже и прибылью по конкретным акциям, требуемый уровень прибыльности которых рассчитывается.

Действительная стоимость акции зависит от будущих доходов, на которые может рассчитывать инвестор. При этом может использоваться формула

$$P_{\text{д.с.а}} = \frac{\sum Д_0 (1 + \Delta T_{\text{д}})}{i_{\text{т.у.п}} - \Delta T_{\text{д}}}, \tag{6.8}$$

где $P_{\text{д.с.а}}$ — действительная курсовая стоимость, руб.; $\sum Д_0$ — сумма дивидендов за прошлый отчетный период, руб.; $\Delta T_{\text{д}}$ — предполагаемый темп прироста дивидендов в будущем или коэффициент.

Определенная таким образом стоимость акции сравнивается с ее текущим курсом и делается вывод о целесообразности ее приобретения или дальнейшего владения ею.

Если действительная стоимость акции выше ее текущей курсовой стоимости, то такие акции следует покупать, если ниже — избавляться от них (продавать).

На фондовой бирже акции оцениваются по уровню дохода к курсовой стоимости — рендиту. Рендит характеризует процент прибыли от цены приобретения при заданном абсолютном уровне дивиденда:

$$R = \frac{Д}{P_к} 100\%, \tag{6.9}$$

где R — рендит,%; Д — абсолютный уровень дивиденда в денежных единицах; $P_к$ — цена приобретения акции по курсу, руб.

Доходность акции определяется двумя факторами: получением части распределенной прибыли АО в виде дивиденда и возможностью продать бумагу на вторичном рынке по цене большей, чем цена приобретения.

Дополнительный доход при росте курса акции или убыток при падении курса можно определить по формуле

$$\Delta P = P_п - P_0, \tag{6.10}$$

где ΔP — абсолютный размер дополнительно дохода (убытка), руб.; $P_п$ — цена перепродажи, курс в будущем, руб.; P_0 — цена покупки акций (первичные инвестиции), руб.

Индекс курса акции

$$J_к = \frac{P_к}{P_N} 100\%. \tag{6.11}$$

Зная размер дивиденда и дополнительный доход, можно определить совокупный доход за весь период владения акцией:

$$СД = \sum_{t=1}^{n} Д \pm \Delta P, \tag{6.12}$$

где СД — абсолютный размер совокупного дохода, руб.; $\sum_{t=1}^{n} Д$ — сумма дивидендов за весь период владения акцией, руб.; ΔP — прирост (убыток) по курсовой стоимости, руб.

Если акция продана в середине финансового года, то сумма дивидендов делится между прежним и новым владельцами бумаги:

$$Д = P_N i_д \frac{\partial}{К}, \tag{6.13}$$

где Д — доход (дивиденд) покупателя (продавца), руб.; $i_д$ — годовая ставка дивиденда, %, или коэффициент; ∂ — период владения акцией, дн.; К — количество дней в году.

Среднегодовая доходность

$$i_{\text{ср.год}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Д + \Delta P}{P_0 n} 100\%. \qquad (6.14)$$

Абсолютный размер годового дохода

$$\sum Д = Д_{\text{год}} + \frac{\Delta P}{n}. \qquad (6.15)$$

Факторы, определяющие доходность акции, представлены на рис. 6.1.

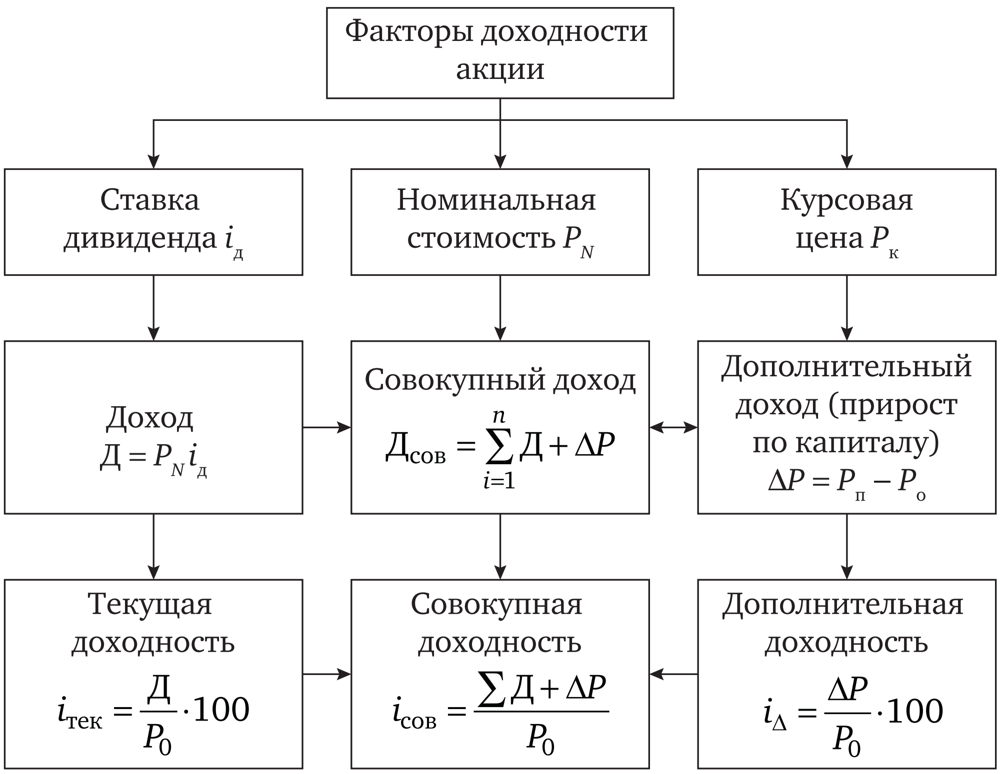

Рис. 6.1. **Виды доходности акции и методы расчета**

Пример 6.1

Акция номиналом 1000 руб. куплена по курсу 250% и по ней выплачивается дивиденд 50% годовых. Определить текущую доходность инвестированных средств.

Цена приобретения акции по курсу 250% составляет

$$P_к = \frac{1000 \cdot 250}{100} = 2500 \text{ руб.}$$

Абсолютный размер дивиденда при ставке 50%: $Д = 0{,}5 \cdot 1000 = 500$ руб.

Текущая доходность бумаги: $R = \frac{500}{2500} = 0{,}2$ или 20%.

Облигация — эмиссионная ценная бумага, закрепляющая право ее держателя на получение от эмитента облигации в предусмотренный ею срок ее номинальной стоимости и зафиксированного в ней процента от этой стоимости или иного имущественного эквивалента.

Облигация может предусматривать иные имущественные права ее держателя, если это не противоречит законодательству РФ.

Таким образом, облигация удостоверяет:

— факт предоставления владельцем бумаги денежных средств эмитенту в долг;

— обязательство эмитента вернуть долг через определенное время;

— право инвестора получать в виде вознаграждения за предоставленные денежные средства определенный процент от номинальной стоимости.

Облигация относится к категории эмиссионной ЦБ. Под ней понимается любая ценная бумага, в том числе бездокументарная, которая характеризуется одновременно следующими признаками:

— закрепляет совокупность имущественных и неимущественных прав, подлежащих удостоверению, уступке и безусловному осуществлению;

— размещается выпусками;

— имеет равные объем и сроки осуществления прав внутри одного выпуска вне зависимости от времени приобретения ценной бумаги.

Под выпуском понимается совокупность ценных бумаг одного эмитента, обеспечивающих одинаковый объем прав владельцам, имеющим одинаковые условия эмиссии (первичного размещения). Все бумаги одного выпуска должны иметь один государственный регистрационный номер.

Объем выпуска облигаций, руб.

$$Q = P_n N, \tag{6.16}$$

где P_N — номинальная стоимость, руб.; N — количество облигаций в выпуске, шт.

Цены на облигации, как и на акции, различны, что обусловлено разными этапами цикла жизни ценных бумаг.

На бланке облигации напечатана номинальная (нарицательная) цена. Она служит базой для дальнейших расчетов и определяется делением общей суммы займа на число выпущенных облигаций:

$$P_N = \frac{Q}{N}. \tag{6.17}$$

Как правило, номинальная стоимость облигаций устанавливается кратной 10, т. е. 10; 100; 1000 руб. и т. д.

На первичном рынке облигации размещаются по эмиссионной цене, которая может быть больше или меньше номинала, а также равна ему. Если цена, по которой инвестор приобретает бумагу, меньше нарицательной стоимости, говорят о дисконте, или скидке. При размещении облигации по цене больше номинала идет речь о премии, или переплате.

На вторичном рынке ценных бумаг облигации продаются и покупаются по рыночной, или курсовой, цене. Величина курса облигации зависит от условий займа и ситуации, сложившейся в данный момент на рынке облигаций:

$$P_{к} = P_n(i_k a_{n,i} + (1 + i)^{-n}), \tag{6.18}$$

где $P_{к}$ — курсовая стоимость, руб.; i_k — купонная ставка, %, или коэффициент; $a_{n,i}$ — коэффициент приведения рентных платежей:

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i_{б.у.п})^{-n}}{i_{б.у.п}}, \tag{6.19}$$

где n — время обращения ценной бумаги (от момента приобретения до момента погашения или продажи), год; $i_{б.у.п}$ — безопасный уровень прибыльности, коэффициент.

Индекс курса облигации определяется по формуле

$$J_{к} = (i_k a_{n,i} + (1 + i_{б.у.п})^{-n})100. \tag{6.20}$$

Доходность облигации определяется двумя факторами:

— вознаграждением за предоставленный эмитенту заем (купонные выплаты);

— приростом курсовой стоимости, который появляется в момент продажи бумаги на вторичном рынке как разница между ценой погашения и ценой приобретения или продажи и покупки бумаги.

Купонные выплаты производятся ежегодно (иногда раз в квартал или в полгода) и выражаются абсолютной величиной:

$$K = P_N i_k n, \tag{6.21}$$

где K — абсолютный размер купонных выплат за период n, руб.; n — период начисления купонного дохода с момента покупки до продажи (или погашения), год.

Купонная доходность — это норма процента, которая указана на ценной бумаге:

$$i_k = \frac{K_{год}}{P_N}100\%. \tag{6.22}$$

Текущая доходность характеризует эффективность выплачиваемого годового процента на вложенный капитал, т. е. инвестиций:

$$i_{тек} = \frac{P_N i_k}{P_0}100\%, \tag{6.23}$$

где $i_{тек}$ — текущая доходность,%; P_N — номинальная стоимость, руб.; P_0 — первоначальный капитал (цена приобретения), руб.

Полная совокупная доходность измеряется отношением всех источников дохода за период займа к вложенному капиталу, %:

$$i_{\text{сов}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} K + \Delta P}{P_0} 100\%, \tag{6.24}$$

где $\sum_{t=1}^{n} K$ — абсолютный размер купонного дохода за период n, руб.; ΔP — прирост по капиталу, разница между ценой приобретения и продажи или погашения, руб.; P_0 — цена приобретения (инвестируемый капитал), руб.

Ставка помещения (или среднегодовая доходность) определяется как отношение суммы источников дохода за год к цене вложения, %:

$$i_{\text{пом}} = \frac{K_{\text{год}} + \left(\frac{P_n - P_0}{n}\right)}{P_0}, \tag{6.25}$$

где $K_{\text{год}}$ — абсолютный размер годового купона, руб.; P_0 — цена приобретения, руб.; $P_{\text{п}}$ — цена последующей продажи, руб.; n — количество лет от момента покупки до продажи или погашения.

Доход по облигациям без выплаты процентов (дисконтные) определяется как разница между ценой погашения (номиналом) и ценой приобретения по формуле

$$i_{\text{ср.год}} = \left(\frac{100}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \tag{6.26}$$

где P_0 — курс облигации, $P_0 < 100$ в момент покупки; n — срок от момента приобретения до момента выкупа.

Доход по облигациям с выплат процентов в конце срока:

$$i_{\text{ср.год}} = \left(\frac{100}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} (1 + i_k) - 1, \tag{6.27}$$

Оценивая облигацию, инвестор может определить ее будущую стоимость по формуле простых или сложных процентов без учета инфляции.

Наращенная стоимость облигации, проценты по которой начисляются и выплачиваются, может быть рассчитана по формулам:

$$S = P_N + \sum_{t=1}^{n} K, \tag{6.28}$$

$$S = P_N (1 + i_k n), \tag{6.29}$$

где S — наращенная стоимость облигации за период n, руб.

Наращенная стоимость облигации, проценты по которой начисляются и присоединяются к сумме долга и выплачиваются при погашении, определяется по формуле

$$S = P_N(1+i_k)^n. \tag{6.30}$$

По приведенным формулам можно определить срок, через который наращенная стоимость достигнет определенной величины, или размер купонной ставки при заданном сроке погашения:

$$n = \frac{S - P_N}{P_N i_k}, \tag{6.31}$$

$$n = \frac{\lg S - \lg P_N}{\lg(1+i_k)}, \tag{6.32}$$

$$i_k = \frac{S - P_N}{P_N n}, \tag{6.33}$$

$$i_k = \sqrt[n]{\frac{S}{P_N}} - 1. \tag{6.34}$$

При инвестировании денежных средств в облигации важным моментом является размер выплат по облигациям. Здесь нужно руководствоваться основным правилом: вложение денег в облигации должно обеспечивать тот же доход, что и помещение капитала в банк.

Пример 6.2

Выпущена облигация с доходом 15% годовых от номинала, курсом 80%, сроком до погашения 5 лет. Найти полную доходность, если номинал и проценты выплачиваются в конце срока.

Решение. $i_{\text{ср.год}} = \dfrac{(1+0{,}15)}{\sqrt[5]{\dfrac{80}{100}}} - 1 = 0{,}202$, или 20,2%.

Вексель — это составленное по установленной законом форме безусловное письменное долговое денежное обязательство, выданное одной стороной (векселедателем) другой стороне (векселедержателю), дающее бесспорное право требовать уплаты обозначенной в векселе суммы по истечении срока, на который он выписан.

Основные характеристики векселя следующие.

1. Абстрактный характер обязательства, выраженного векселем, — обязательства по векселю не зависят от тех событий, в результате которых вексель появился.

2. Безусловный характер обязательства, выраженного векселем, — платеж по векселю не может быть обусловлен наступлением каких-либо событий, т. е. платеж по нему должен быть совершен без соблюдения каких-либо условий.

3. Бесспорный характер обязательства, выраженного векселем, — взыскание по векселю может быть наложено на всех обязанных по данному векселю без суда («без спора»), а только в результате публичного акта.

4. Строго формальный документ — отсутствие любого из обязательных реквизитов делает его недействительным и подчиняет указанные обязательства нормам общего гражданского права по долговым распискам.

5. Всегда письменный документ — вексель составляется только на бумажном носителе.

6. Стороны, обязанные по векселю, несут солидарную ответственность. При неисполнении обязательства основным должником кредитор (векселедержатель) может обратиться за взысканием к любому из прежних держателей векселя.

Простой вексель содержит семь реквизитов, а переводной — восемь.

Обязательные реквизиты простого векселя:

1) наименование «вексель», включенное в текст документа и выраженное на том языке, на котором этот документ составлен;

2) простое и ничем не обусловленное предложение оплатить определенную сумму;

3) указание срока платежа;

4) указание места, в котором должен быть совершен платеж;

5) наименование того, кому или по приказу кого должен быть совершен платеж (векселедержателя);

6) указание даты и места составления векселя;

7) подпись того, кто выдает документ (векселедателя).

Класс векселей достаточно многообразен. Они отличаются по эмитенту, обслуживаемым сделкам и субъекту, производящему оплату (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Классификация векселей

<table>
<tr><th>Вид векселя</th><th colspan="2">Признак классификации</th></tr>
<tr><td>Казначейские</td><td rowspan="2">Эмитент</td><td>Государство</td></tr>
<tr><td>Частные</td><td>Юридические, дееспособные физические лица</td></tr>
<tr><td>Финансовые</td><td rowspan="8">Обслуживаемая сделка</td><td rowspan="5">Финансовые операции</td></tr>
<tr><td>Банковские</td></tr>
<tr><td>Коммерческие</td></tr>
<tr><td>Дружеские</td></tr>
<tr><td>Бронзовые</td></tr>
<tr><td>Товарные</td><td rowspan="3">Товарные сделки</td></tr>
<tr><td>Залоговые</td></tr>
<tr><td>Бланковые</td></tr>
<tr><td>Простой-соло</td><td rowspan="2">Субъект, производящий оплату</td><td>Векселедатель</td></tr>
<tr><td>Переводной тратта</td><td>Трассат-акцептант (третье лицо)</td></tr>
</table>

В переводном векселе обязательно указывается восьмой реквизит — наименование того, кто должен платить (плательщика).

Документ, в котором отсутствует какой-либо из обозначенных перечней, не имеет силы простого или переводного векселя, за исключением случаев, определенных ниже:

а) вексель, срок платежа по которому не указан, рассматривается как подлежащий оплате по предъявлении;

б) при отсутствии особого указания место составления документа считается местом платежа и вместе с тем местом жительства векселедателя (плательщика);

в) вексель, в котором не указано место его составления, признается подписанным в месте, обозначенном рядом с наименованием векселедателя.

При определении номинала векселя и цены обращения на вторичном рынке необходимо учитывать следующие обстоятельства обращения документа.

Держатель долгового обязательства хранит его до срока погашения, а затем предъявляет к оплате и получает как долг, так и вознаграждение за предоставленный кредит (в виде дисконта или процента к номинальной стоимости векселя).

Векселедержатель перепродает вексель на рынке ценных бумаг по действующей рыночной цене, определяемой сложившейся на момент продажи величиной учетной ставки банковского процента.

Владелец бумаги индоссирует вексель в распоряжение банка, не дожидаясь срока погашения, и получает вексельную сумму, уменьшенную на доход в пользу банка.

Коммерческий банк, принявший долговое обязательство от векселедержателя, перепродает его центральному банку по цене, меньшей означенной в документе.

При определении вексельной суммы учитывается срок обращения векселя. Если срок обращения менее 1 года, то применяется формула простых процентов:

$$S = P_0\left(1 + i_{\text{в}}\frac{\partial}{K}\right), \tag{6.35}$$

где S — вексельная сумма при погашении, руб.; P_0 — стоимость товара, руб.; $i_{\text{в}}$ — процент за кредит; ∂ — точное число дней обращения векселя с момента составления до погашения; K — количество дней в году.

Доход в этом случае будет измеряться размером процента, под который совершена коммерческая операция ($J = S - P_0$):

$$J = \frac{P_N i_{\text{в}} \partial}{365}, \tag{6.36}$$

где J — процентный доход, руб.

При размещении векселя с дисконтом (скидки с цены) или перепродаже цена размещения определяется по формуле учета:

$$P' = S - \frac{Sd\partial}{360 \cdot 100}, \tag{6.37}$$

где P' — цена размещения, руб.; d — учетная ставка при покупке финансовых активов; ∂' — количество дней с момента учета до дня погашения.

Финансовый вексель, как правило, размещается с дисконтом, а погашается по номиналу, поэтому абсолютный размер дохода по векселю определяется как разность между номинальной и дисконтной ценами ($D = S - P'$) и по формуле, руб.

$$D = \frac{Sd\partial'}{360 \cdot 100}. \tag{6.38}$$

В векселе по предъявлению, или во столько-то времени от предъявления, векселедатель может обусловить, что на вексельную сумму будут начисляться проценты. Процентная ставка должна быть указана в векселе. При перепродаже такого векселя (или учете в банке) операции начисления процентов и коммерческого учета совмещаются:

$$P'' = P_0 \left(1 + \frac{i_{\text{в}}\partial}{365 \cdot 100}\right)\left(1 - \frac{d_{\text{б}}\partial'}{365 \cdot 100}\right), \tag{6.39}$$

где P'' — цена учета (деньги, которые получит векселедержатель на руки), руб.; $i_{\text{в}}$ — процент кредита по векселю; $d_{\text{б}}$ — ставка учета (перепродажи); ∂ — время обращения векселя, дн.; ∂' — время с момента учета до погашения, дн.; P_0 — стоимость товара, размер ссуды или первоначальные инвестиции, руб.

Доходность векселя за срок займа определяется отношением абсолютного дохода по векселю к цене приобретения векселя:

$$i_{\text{тек}} = \frac{J}{P_{\text{пр}}} 100\%. \tag{6.40}$$

Среднегодовая доходность по формуле обыкновенных процентов:

$$i_{\text{ср.год}} = \frac{360J}{\partial} 100\%. \tag{6.41}$$

При продаже финансового векселя на рынке ценных бумаг до окончания срока долгового обязательства доход держателя делится между продавцом и покупателем по формуле обыкновенных, или точных, процентов:

$$J_{\text{пок}} = \frac{i_r P_N \partial'}{K}, \tag{6.42}$$

где $J_{\text{пок}}$ — доход покупателя, руб.; i_r — рыночная ставка на момент сделки по долговым обязательствам той срочности, которая осталась до погашения векселя; ∂' — число дней от даты сделки до даты погашения векселя.

С одной стороны, доход покупателя не должен быть меньше той суммы, которую он получил бы при рыночной ставке по долговым обязательствам той срочности, которая осталась до погашения векселя. С другой — его реальная прибыль определяется разностью цены погашения (номинала) P_N и цены покупки P_r

$$P_N - P_r = \frac{i_r P_N \partial'}{360}, \tag{6.43}$$

откуда

$$P_r = P_N - \frac{P_N i_r \partial'}{360}. \tag{6.44}$$

Эффективность операции учета векселей обуславливается наличием действенных механизмов снижения рисков операций. Ставка банковского учета (d) должна быть не ниже процентной для аналогичных кредитов при одинаковой временно́й базе и определяется по формуле эквивалентности простой ставки процентов к учетной ставке:

$$d = \frac{i_в}{1 + i_в \dfrac{\partial}{K}}, \tag{6.45}$$

где d — учетная ставка по векселю; ∂ — число дней обращения векселя; $i_в$ — процентная банковская ставка по кредитам; K — число дней в году.

Пример 6.3

Простой 90-дневный вексель на сумму 10 000 руб., датированный 3 августа текущего года, учитывается коммерческим банком 4 сентября по ставке 8%. Определить, какую сумму получит векселедержатель при учете векселя в банке.

Срок с даты учета до даты погашения векселя:

90 – (28 дней августа + 4 дня сентября) = 58 дней.

Дисконт в пользу банка при ставке 8%:

$$D = \frac{8 \cdot 10\,000 \cdot 58}{100 \cdot 360} = 128 \text{ руб.}$$

Первый российский нормативный документ, в котором дано определение производных ценных бумаг, — это Положение о выпуске и обращении ценных бумаг и фондовых биржах в РСФСР, утвержденное постановлением Правительства РСФСР от 28.12.1991 № 78. Согласно этому Положению производные ценные бумаги — любые ценные бумаги, удостоверяющие право их владельца на покупку или продажу ценных бумаг: акций акционерных обществ, облигаций, государственных долговых обязательств и самих производных ценных бумаг.

Производные ценные бумаги — это срочные финансовые документы, в них реализуются права со сроком исполнения на конкретную будущую дату. Использование производных ценных бумаг ориентировано на новые договорные отношения, преодолевающие ограничения, характерные для отношений по поводу традиционных ценных бумаг. Особым свойством производных ценных бумаг является то, что цены на них определяются на основе цен товаров, валюты, ценных бумаг (т. е. на основе цен на базисный актив).

Опцион — ценная бумага, представляющая собой контракт, покупатель которого приобретает право купить или продать актив по фиксированной цене в течение определенного срока, а продавец обязуется по требованию контрагента за денежную премию обеспечить реализацию этого права.

Опцион как экономическое явление представляет собой оформляемое договором право купить, продать (или отказаться от сделки) на протяжении договорного срока и по фиксированной договорной цене определенный объем базисного актива либо получить определенный доход от финансового вложения или денежного займа.

Цена, по которой исполняется опцион, называется ценой исполнения или «страйковой» ценой.

В заключении опционной сделки участвуют две стороны — покупатель и продавец опциона.

Покупатель опциона (держатель опциона) — сторона договора, приобретающая право на покупку, продажу либо на отказ от сделки.

Продавец опциона (надписатель опциона) — сторона договора, обязанная поставить или принять предмет сделки по требованию покупателя.

При покупке опциона покупатель уплачивает продавцу премию. ***Опционная премия*** — это цена приобретения опциона. Премия состоит из двух компонентов — внутренней стоимости и временной стоимости. ***Внутренняя стоимость*** — это разность между текущим курсом актива и ценой исполнения опциона. ***Временна́я стоимость*** — это разность между суммой премии и внутренней стоимостью опциона.

Для расчетов теоретической стоимости опционов применяются достаточно сложные математические формулы. Наиболее часто используется формула Блэка — Шоулза:

$$C = SN(d_1) - xe^{-rT}N(d_2), \tag{6.46}$$

при

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{x} + (r + 0{,}5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{6.47}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma T^{1/2}, \tag{6.48}$$

где C — цена (стоимость) европейского опциона колл, руб.; S — текущая рыночная цена базисного актива, руб.; $N(d)$ — кумулятивное стандартное нормальное распределение; x — цена исполнения опциона, руб.; e — основание натурального логарифма; r — ставка процента, свободная от риска; T — оставшийся срок до исполнения опциона, дн.; σ, σ^2 — стандартное отклонение и дисперсия биржевого кассового курса.

Существуют различные виды опционов. С точки зрения сроков исполнения опционы подразделяются на два типа: американские и европейские.

Американский опцион — это опцион, при котором держатель опциона может реализовать свое право в любое время в пределах опционного срока.

Европейский опцион — это опцион, при котором реализация заложенного в нем права возможна только при наступлении указанного в опционе срока исполнения обязательств.

В зависимости от того, какие права приобретает покупатель опциона, выделяют два вида опционов — опцион на покупку и опцион на продажу.

Опцион на покупку — колл (call) — опцион, который предоставляет покупателю опциона право купить оговоренный в контракте актив в установленные сроки у продавца опциона по цене исполнения или отказаться от этой покупки:

$$\text{ЧД} = (P_\text{к} - E)Q - \text{ПР}, \tag{6.49}$$

где ЧД — чистый доход покупателя, руб.; $P_\text{к}$ — курсовая стоимость базисного актива на бирже в момент реализации опциона, руб.; E — контрактная цена базисного актива в опционе, руб.; Q — объем сделки, шт.; ПР — размер премии, уплачиваемой покупателем, против выписки опциона, руб.

Опцион на продажу — пут (put) — опцион, который предоставляет покупателю опциона право продать продавцу опциона оговоренный в контракте актив в установленные сроки по цене исполнения или отказаться от его продажи:

$$\text{ЧД} = (E - P_\text{к})Q - \text{ПР}. \tag{6.50}$$

Фьючерс — ценная бумага, представляющая собой биржевой контракт, одна сторона которого обязуется купить, а другая — продать определенное количество базисного актива в установленный срок по фиксированной цене.

Фьючерсные контракты появились как реакция финансового рынка на недостатки форвардных контрактов. Форвардные контракты, не являясь стандартизированными документами, не имели высокой ликвидности. Организованный рынок таких контрактов не существовал, а риски невыполнения обязательств контрагентами по контракту были весьма высокими. При наличии общих черт у этих двух видов контрактов есть ряд существенных отличий. Отличительные черты фьючерсных контрактов заключаются в следующем:

— фьючерсный контракт является биржевым договором, разрабатываемым и обращающимся на данной бирже;

— фьючерсный контракт стандартизован по количеству базисного актива, лежащего в его основе, месту и срокам поставки (типичные сроки поставки — март, июнь, сентябрь, декабрь), срокам и форме расчетов, применяемым штрафным санкциям и т. д.;

— исполнение контракта, полнота и своевременность расчетов по фьючерсному контракту гарантируются биржей. В связи с этим расчетная палата предъявляет ряд требований к участникам фьючерсной торговли. При открытии позиции инвестор обязан внести на счет брокерской фирмы некоторую денежную сумму в качестве залога, минимальный размер которой устанавливается расчетной палатой биржи. Эта сумма называется *первоначальной* маржей. Расчетная палата устанавливает также нижний уровень маржи, ниже которого никогда не должна уменьшаться сумма на счете клиента. Расчетная палата в конце каждого торгового дня производит перерасчет позиций инвесторов, переводя сумму выигрыша со счета проигравшей стороны на счет выигравшей стороны. Данная сумма называется *вариационной* (переменной) маржей;

— заключение фьючерсных контрактов производится главным образом не для купли-продажи базисного актива, а в целях получения прибыли от разницы в ценах;

— каждая из сторон фьючерсной сделки может в любой момент до истечения срока контракта ликвидировать свои обязательства по нему путем заключения сделки, противоположной ранее сделанной, иначе говоря, *офсетной сделки*.

Отражением ожиданий инвесторов относительно будущей цены базисного актива является фьючерсная цена.

В зависимости от вида базисного актива выделяют следующие виды фьючерсных контрактов.

Фьючерсный товарный контракт — это контракт на принятие или поставку товара определенного количества и качества по зафиксированной в нем цене на установленную дату. В качестве базисного товара могут выступать зерно, нефть, драгоценные металлы, продовольственные товары и т. д.

Фьючерсный финансовый контракт — это контракт, представляющий собой соглашение, обязывающее купить или продать определенный финансовый инструмент в определенный срок по зафиксированной в нем цене.

В зависимости от вида базисного актива, который лежит в основе финансового фьючерса, выделяют три основных вида фьючерсов.

1. ***Процентные фьючерсы*** — это фьючерсные контракты, основанные на долговых ценных бумагах. На американском рынке самыми распространенными процентными фьючерсами являются фьючерсы на векселя казначейства США, 30-дневные процентные ставки, 90-дневные евро-долларовые депозитные сертификаты, средне- и долгосрочные облигации казначейства США.

Цена на фьючерс, базис которого составляет краткосрочный процент, определяется по правилу: 100 — это зафиксированная в контракте процентная ставка; масштаб движения цены контракта — базовый пункт (тик), равный 0,01%; каждый базовый пункт по каждому типу контрактов имеет одну и ту же абсолютную стоимостную величину:

$$Ц_{б.п} = БП\frac{С_к}{12}Н_к, \quad (6.51)$$

где $Ц_{б.п}$ — стоимостная оценка базового пункта, руб.; БП — базовый пункт (тик), БП = 0,0001; $С_к$ — стандартный срок исполнения контракта (в месяцах); $Н_к$ — стандартный номинал контракта, руб.

Например, $Ц_{б.п} = 0{,}0001 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1\,000\,000 = 25$ руб.

Цена на фьючерс, базис которого составляет долгосрочная процентная ставка, определяется по правилу: 100 — это величина процента, сложившегося на рынке наличных сделок, масштаб цен в этом случае — 1/32 от каждых 100 ед. номинала. Формула расчета имеет следующий вид.

Например, $Ц_{б.п} = \frac{1}{32}(0{,}01 \cdot 5\,000\,000) = 1562{,}5$ руб.

2. ***Валютные фьючерсы*** — это фьючерсные контракты, базисом которых является иностранная валюта. Валютные фьючерсы приобретаются на основе валютного курса. Цена фьючерсного контракта выражается в количестве долларов на единицу валюты. Цена базового пункта определяется следующим образом:

$$Ц_{б.п} = С_з Н_к, \quad (6.52)$$

где $Ц_{б.п}$ — стоимость базового пункта (тика) в долларах США на единицу национальной валюты; $С_з$ — стандартное значение базового пункта, установленное биржей в долларах на единицу валюты.

3. ***Фьючерсы на фондовые индексы*** — это фьючерсные контракты, основанные на показателях всесторонней оценки фондового рынка, подобных индексу «*Standart & Poor's* 500». Наиболее часто используемые в США в качестве основы для фьючерсов индексы — индекс « *Standart & Poor's* 500», составной индекс Нью-Йоркской фондовой биржи, составной индекс «*Value Line*».

Пример 6.4

Текущая цена акций автомобильной компании 5100 руб. Игрок, рассчитывающий на понижение курса этих акций, реализует брокеру, играющему на повышение, европейский опцион на покупку у него 100 акций по фиксированной цене 5200 руб. В день исполнения опциона курс акций составил 6500 руб. Определить финансовый результат от сделки покупателя опциона.

Решение. Стоимость опциона составит 20 000 руб. (100 · 200). Плата за акции равна 520 000 (5200 · 100) руб.

Общие затраты игрока: 520 000 + 20 000 = 540 000 руб.

Выручка от продажи по новому курсу: 6500 · 100 = 650 000 руб.

Чистый доход равен 110 000 (650 000 – 540 000) руб.

Лекция 7
МЕТОДЫ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГОВ

Существует два основных правила погашения задолженности по частям. Первый, который применяется в основном в операциях со сроком более года, называют ***актуарным методом*** (*Actuarial method*). Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница (остаток) идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т. д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Поступление приплюсовывается к следующему платежу. Для случая, показанного на рис. 7.1, получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности (R_3):

$$S_1 = P(1 + t_1 i);\ S_2 = (S_1 - R_1)(1 + t_2 i). \qquad (7.1)$$

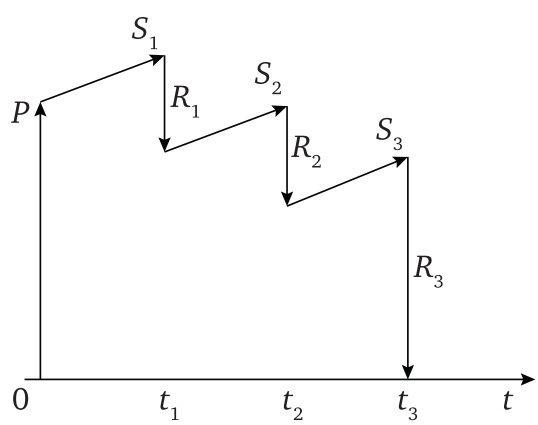

Рис. 7.1. **Контур сбалансированной финансовой операции**

Задолженность на конец срока должна быть полностью погашена. Таким образом,

$$(S_2 - R_2)(1 + t_3 i) - R_3 = 0. \qquad (7.2)$$

Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур. Второй метод назван ***правилом торговца*** (*Merchant's Rule*). Он используется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года. Если иное не оговорено, то при начислении процентов в обоих методах используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней (360 / 360). Иной подход предусматривается правилом торговца. Здесь возможны два варианта. Если срок ссуды не превышает года, то сумма долга с процентами остается неизменной до полного погашения. В свою очередь накапливаются частичные платежи с начисленными на них до конца срока процентами. Последний взнос должен быть равен разности этих сумм. В случае, когда срок превышает год, указанные выше расчеты делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

В общем случае можно воспользоваться следующей формулой:

$$P(1+ni)=\sum_{i=0}^{m} R_i(1+(n-n_i)).$$

Контур операции представлен на рис. 7.2.

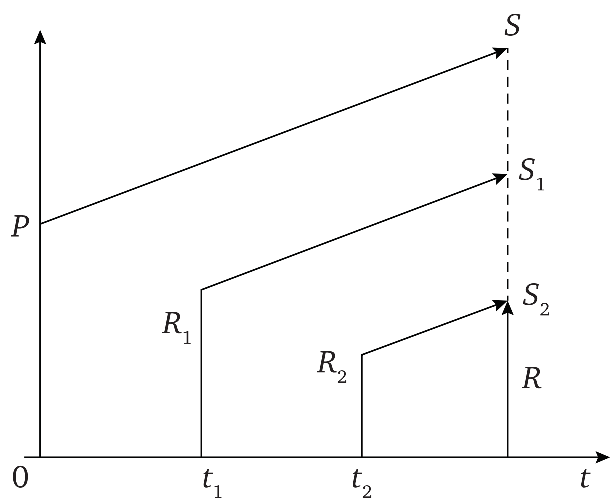

Рис. 7.2. **Контур финансовой операции**

Заметим, что для одних и тех же данных актуарный метод и правило торговца в общем случае дают разные результаты. Остаток задолженности по первому методу немного выше, чем по второму.

Пример 7.1

Имеется обязательство погасить за 1,5 года (с 12.03.1999 по 12.09.2000) долг в сумме 15 млн руб. Кредитор согласен получать частичные платежи. Проценты начисляются по ставке 20% годовых. Частичные поступления характеризуются следующими данными (в тыс. руб.):

12.06.1999 — 500;

12.06.2000 — 5000;

30.06.2000 — 8000;

12.09.2000 — ?

Решение представим в следующей последовательной записи.

12.03.1999	долг	15 000
12.06.1999	долг с процентами	15 750
	поступление	–500
(Поскольку поступившая сумма меньше начисленных процентов (750), то она присоединяется к следующему поступлению.)		
12.06.2000	долг с процентами	18 750
	поступления 500 + 5000	–5500
Остаток долга		13 250
30.06.2000	долг с процентами	13 382,5
	поступление 8000	–8000
Остаток долга		5382,5
12.09.2000	долг с процентами	5597,8

Контур данной операции представлен на рис. 7.3.

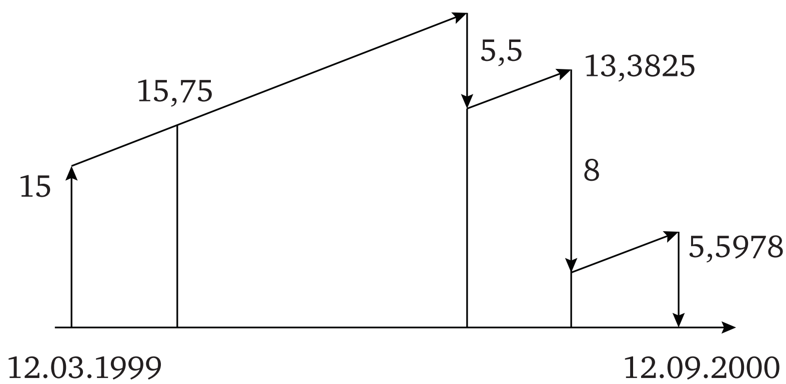

Рис. 7.3. **Контур финансовой операции**

Пример 7.2

Обязательство (1,5 млн руб.), датированное 10.08.1999, должно быть погашено 10.06.2000. Ссуда выдана под 20% годовых. В счет погашения долга 10.12.1999 поступило 800 млн руб. Остаток долга на конец срока согласно (7.1) составит:

$$Q = 1{,}5\left(1 + \frac{10}{12}0{,}2\right) - 0{,}8\left(1 + \frac{6}{12}0{,}2\right) = 0{,}87 \text{ млн руб.}$$

В свою очередь, при применении актуарного метода получим

$$Q = 1{,}5\left(1 + \frac{4}{12}0{,}2\right) - 0{,}8\left(1 + \frac{6}{12}0{,}2\right) = 0{,}88 \text{ млн руб.}$$

Любой вид долгосрочного долга будем называть займом или долгом. ***Банковский кредит*** — это выдача денежных средств в собственность на условиях срочности, возвратности, платности, обеспеченности, дифференцированности и целенаправленности.

Перечислим виды займов:

— займы ***без обязательного погашения***.

Взятая в долг сумма не возвращается, но проценты по займу выплачиваются неограниченное долгое время. Такой вид займа описывает механизм вечной ренты. Величина годового платежа

$$R = Ai, \tag{7.4}$$

где A — сумма современных стоимостей члена потока платежа, i — процентная ставка;

— займы с обязательным ***погашением в один срок***.

Основная сумма долга выплачивается разовым платежом. Проценты кредитору могут выплачиваться разными способами.

— займы ***с погашением в несколько сроков***.

Из перечисленных займов рассмотрим второй. Если по условиям займа должник обязуется вернуть сумму D в конце срока в виде разового платежа, то он должен принять меры для обеспечения этого. При значительном долге обычно создается погасительный фонд. Ежегодно в погасительный фонд вносится сумма R, на которую начисляются проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов за долг по ставке g (простые проценты). В этом случае срочная уплата

$$Y = Dg + R. \tag{7.5}$$

Поскольку фонд должен быть накоплен за n лет, соответствующие взносы образуют постоянную ренту с параметрами R, n, i. Допустим, что речь идет о ренте постнумерандо. Тогда срочная уплата

$$Y = Dg + \frac{D}{s_{i,n}}, \tag{7.6}$$

где коэффициент наращения аннутета $s_{i,n} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, т. е. в фонд систематически вносится сумма, равная:

$$R = \frac{D}{s_{i,n}}. \tag{7.7}$$

Если условия контракта предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то срочная уплата определяется следующим образом:

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s_{i,n}} \tag{7.8}$$

Пример 7.3

Долг в сумме 600 тыс. руб. выдан на 4 года под 6% годовых. Для его погашения создается погасительный фонд. На инвестируемые в нем средства начисляются проценты по ставке 8%. Разработать план погашения долга.

Пусть фонд формируется $n = 4$ года, взносы производятся в конце года равными суммами: $D = 600$ тыс. руб., $g = 6\%$, $i = 8\%$. Находим срочную уплату:

$$Y = 600 \cdot 0{,}06 + \frac{600}{s_{8\%,4}} = 600 \cdot 0{,}06 + \frac{600}{4{,}506} = 169{,}1525.$$

$$s_{8\%,4} = \frac{(1+0{,}08)^4 - 1}{0{,}08} = 4{,}506.$$

Годовой платеж (4) в погасительный фонд $R = 133{,}1525$ тыс. руб.

План погашения долга представлен в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Год	Взнос в погасительный фонд	Накопления в погасительном фонде	Проценты по кредиту	Срочная уплата
1	133,1524827	167,7337803	4	169,1524827
2	133,1524827	155,3090558	4	169,1524827
3	133,1524827	143,8046813	4	169,1524827
4	133,1524827	133,1524827	4	169,1524827
—	Сумма фонда	600	—	—

Немного изменим условие. Пусть ежегодно в погасительный фонд вносится сумма R, на которую начисляются проценты i. Одновременно происходит выплата процентов за долг по ставке g (сложные проценты). В этом случае срочная уплата

$$Y_t = D(1+g)^{t-1}g + R;\ t = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.9)$$

Величина $D(1 + g)^{t-1}g = It$ — процентный платеж, вычисленный по сложным процентам; R — ежегодные взносы в погасительный фонд.

Пример 7.4

Фирма получила кредит 1 млн руб. на 5 лет под 13% годовых (сложные проценты) в банке А. Кредитный контракт предусматривает погашение долга разовым платежом. Одновременно с получением кредита фирма начала создавать погасительный фонд, для чего открыла счет в банке Б. На размещенные средства банк начисляет 15% годовых. Определить ежегодные расходы фирмы по амортизации долга при условии, что в погасительный фонд ежегодно вносятся равные суммы.

Решение. Параметры финансовой операции: $D = 1000$ тыс. руб., $g = 13\%$, $i = 15\%$, $n = 5$ лет. Взносы (4) в погасительный фонд составят:

$$R = \frac{1000}{s_{i,n}} = \frac{1000}{6{,}742} = 148{,}32;$$

$$s_{15\%,5} = \frac{(1+0{,}15)^5 - 1}{0{,}15} = 6{,}742.$$

Накопления на конец года в погасительном фонде на первый год $S_1 = R_1$.

План погашения кредита представлен в табл. 7.2.

В рассматриваемом примере фирма-заемщик с выгодой для себя реализовала кредитную операцию, так как она на взносы в погасительный фонд получила более высокие проценты, чем платила по займу ($i > g$). В результате общая сумма расходов по погашению долга составила 1584,0129 тыс. руб., что значительно меньше, чем если бы фирма погасила долг разовым платежом:

$$\Delta D = 1000 \cdot 1{,}13^5 - 1584{,}0129 = 258{,}4222 \text{ тыс. руб.}$$

Таблица 7.2

Год	Выплата процентных платежей	Взнос в погасительный фонд	Накопления в погасительном фонде	Срочная уплата
1	130,0000	148,3156	148,3156	278,3156
2	146,9000	148,3156	318,8784	295,2156
3	165,9970	148,3156	515,0258	314,3126
4	187,5766	148,3156	740,5952	335,8922
5	211,9616	148,3156	1000,0000	360,2771

Создание погасительного фонда выгодно даже в том случае, если $i < g$. Предположим, что процентная ставка на взносы в погасительный фонд $i = 9\%$, остальные параметры финансовой операции такие же, тогда расходы по амортизации займа составят 1677,8975 тыс. руб., отсюда

$$\Delta D = 1000 \cdot 1{,}13^5 - 1677{,}8975 = 164{,}5377 \text{ тыс. руб.}$$

Рассмотрим третий случай, когда долг погашается в несколько сроков.

В кредитном контракте может быть оговорено условие — производить погашение основного долга равными ежегодными платежами. В этом случае размеры платежей по основному долгу будут равны.

Остаток основного долга D_k в начале k-го расчетного периода определяется как

$$D_k = D - R(k-1). \tag{7.10}$$

Величина срочной уплаты в каждом расчетном периоде

$$Y_k = \frac{D}{n} + D_k g. \tag{7.11}$$

Пример 7.5

Кредит размером 750 тыс. руб. выдан на 5 лет под 13% годовых. По условиям контракта погашение основного долга должно производиться равными платежами, начисление процентов — в конце года. Составить план погашения кредита.

$R = 750 / 5 = 150$ тыс. руб. — годовая уплата основного долга. Остаток основного долга рассчитаем по формуле (7.10), годовые срочные уплаты рассчитаем по формуле (7.11).

План погашения долга представлен в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Год	Долг	Процентный платеж	Годовые платежи по долгу	Годовая срочная уплата
1	750	97,5	150	247,5
2	600	78,0	150	228,0
3	450	58,5	150	208,5
4	300	39,0	150	189,0
5	150	19,5	150	169,5
Итого	—	292,5	750	1042,5

Этот метод погашения займа называется методом прямолинейного возвращения капитала.

Погашение долга равными срочными уплатами. Первый этап разработки плана погашения — определение размера срочной уплаты. Далее эта величина разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение долга. После этого легко найти остаток задолженности на любой промежуток времени.

Периодическая выплата постоянной суммы Y равнозначна ренте с параметрами D, $R = Y$, g. Приравняв сумму долга к современной стоимости этой ренты, находим размер срочной уплаты:

$$Y = \frac{D}{a_{g,n}}, \tag{7.12}$$

где $a_{g,n}$ — коэффициент приведения аннуитета, вычисляется как:

$$a_{g,n} = \frac{1-(1+g)^{-n}}{g}. \tag{7.13}$$

Аннуитет Y содержит выплату основного долга и процентный платеж на остаток займа. Остаток долга уменьшается с каждой выплатой. Поэтому можно сделать вывод, что процентные платежи уменьшаются, а выплаты основного долга увеличиваются из периода в период.

Рассмотрим взаимосвязь между двумя выплатами займа. Если взять два следующих друг за другом расчетных периода, d_k и d_{k+1} — выплаты k-го и $(k + 1)$-го периодов, то можно записать:

$$\begin{aligned} Y &= D_{k-1}g + d_k; \\ Y &= (D_{k-1} - d_k)g + d_{k-1}, \end{aligned} \tag{7.14}$$

откуда $d_{k+1} = d_k(1 + g)$. Следовательно, выплаты образуют геометрическую прогрессию и $(k + 1)$-я выплата равна

$$d_{k+1} = d_1(1+g)^k. \tag{7.15}$$

Таким образом, если заем погашается одинаковыми аннуитетами, выплаты растут в геометрической прогрессии.

Платежи по погашению долга образуют ряд: d_1, $d_1(1 + g)$, ..., $d_1(1 + g)n - 1$.

С использованием этого ряда сумма погашенной задолженности на конец года t:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1+g)^k = d_1 a_{g,t}. \tag{7.16}$$

Пример 7.6

Кредит размером 300 тыс. руб. выдан на 5 лет под 10% годовых. Погашение основного долга производится равными срочными уплатами, т. е. рентой с параметрами: Y, $n = 5$, $g = 10\%$.

Решение:

$$a_{10\%,5} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 3{,}791.$$

По формуле (7.12) размер срочной уплаты: $Y = \dfrac{300}{3{,}791} = 79{,}139.$

План погашения долга представлен в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Год	Остаток долга	Процентный платеж	Годовой расход по погашению долга	Годовая срочная уплата
1	300,00000	30,00000	49,13924	79,13924
2	250,86076	25,08608	54,05317	79,13924
3	196,80759	19,68076	59,45849	79,13924
4	137,34910	13,73491	65,40433	79,13924
5	71,94477	7,19448	71,94477	79,13924
Итого	956,96221	—	300,00000	395,69622

Ипотечные ссуды. Ссуды под залог недвижимости, или ипотеки, получили широкое распространение в странах с развитой экономикой. В такой сделке владелец имущества получает ссуду у залогодержателя. В случае, если владелец имущества отказывается от погашения ссуды или не полностью погашает задолженность, то залогодержатель имеет право возместить ущерб из стоимости заложенного имущества. Существует несколько ипотечных ссуд, которые различаются методами погашения задолженности.

Рассмотрим стандартный вид ипотеки. Заемщик получает от залогодержателя (кредитора) некоторую сумму под залог недвижимости. Далее он погашает долг вместе с процентами равными, обычно ежемесячными, взносами. Взносы могут быть постнумерандо или пренумерандо. В договоре обычно устанавливается ежемесячная ставка процента, редко — годовая номинальная.

В осуществлении ипотеки при покупке (строительстве) объекта участвуют три агента: продавец, покупатель (должник), кредитор (рис. 7.4).

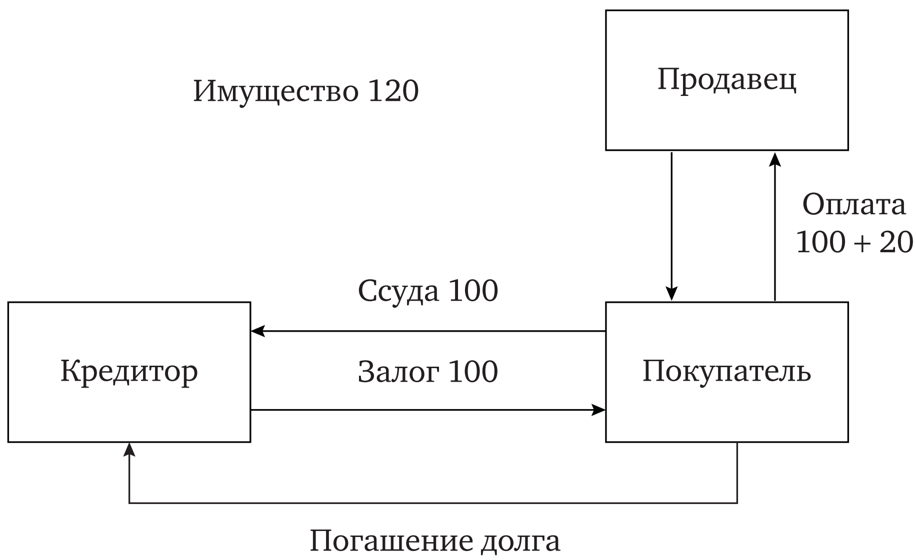

Рис. 7.4. **Взаимодействие сторон при ипотеке**

Продавец получает от покупателя за некоторое имущество его стоимость, равную 120 ден. ед. Для того, чтобы расплатиться, покупатель получает ссуду 100 ден. ед. и добавляет собственные средства 20 ден. ед. Задача заключается в определении ежемесячных погасительных платежей R и остатка задолженности на момент очередного ее погашения вплоть до полного погашения долга.

Пусть D — общая сумма ипотечного кредита, n — срок ипотеки в годах, погасительные платежи R вносятся ежемесячно, общее число платежей $N = 12n$, i — месячная процентная ставка.

Размер одной срочной уплаты для ренты постнумерандо

$$R = \frac{D}{a_{i,n}}. \tag{7.17}$$

В месяце с номером t сумма, идущая на погашение задолженности, составит

$$d_t = d_{t-1}(1+i) = d_1(1+i)^{t-1};\ d_1 = R - Di. \tag{7.18}$$

Сумма погашения задолженности за t месяцев

$$W_t = d_1 + d_2 + \ldots + d_t = d_1 \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{k-1} = d_1 s_{i,t}. \tag{7.19}$$

Остаток долга на начало (t + 1)-го месяца находится следующим образом:

$$D_t = D - W_t = D - d_1 \cdot s_{i,t} = D - (R - Di) \cdot s_{i,t}. \qquad (7.20)$$

Пример 7.7

Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 3 млн руб. Погашение ежемесячное, постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 13%.

N = 120, i = 0,010833. Для этих условий ежемесячные расходы должника:

$$R = \frac{D}{a_{i,n}} = \frac{3\,000\,000}{66{,}974} = 44\,793{,}22 \text{ руб.}$$

Проценты за первый месяц: 3 000 000 · 0,010833 = 32 500 руб. На погашение долга (14) остается d_1 = 44 793,22 – 32 500 = 12 293,22 руб.

Результаты вычислений по формулам (7.17)—(7.20) приведен в таблицах приложения (табл. П.1—П.3).

Погашение потребительского кредита. Потребительский кредит предоставляется населению для покупки предметов личного потребления. Такой кредит может быть предоставлен с отсрочкой платежа и последовательным разовым погашением. При погашения кредита в рассрочку проценты начисляются на всю сумму кредита, а сумма задолженности равномерно погашается на протяжении всего срока.

Рассмотрим погашение потребительского кредита равными выплатами.

Наращенная сумма долга определяется по формуле

$$S = P(1 + in), \qquad (7.21)$$

а сумма разового погасительного платежа q будет зависеть от числа погасительных платежей в году m. Разовый погасительный платеж выглядит как

$$q = \frac{S}{nm}. \qquad (7.22)$$

Так как проценты начисляются на всю сумму первоначального долга в течение всего срока погашения, то, несмотря на уменьшение величины долга с каждым платежом, фактически процентная ставка оказывается значительно выше ставки, предусмотренной при заключении сделки.

Пример 7.8

Телевизор ценой 10 тыс. руб. продается в кредит на год под 10% годовых. Погасительные платежи вносятся через каждые 3 месяца. Определить размер разового погасительного платежа.

Сумма, подлежащая погашению (7.21):

$$S = 10(1 + 1 \cdot 0{,}1) = 11 \text{ тыс. руб.}$$

Разовый погасительный платеж (7.22), следовательно,

$$q = \frac{11}{1 \cdot 4} = 2{,}75 \text{ тыс. руб.}$$

Рассмотрим погашение потребительского кредита изменяющимися суммами.

В таких видах кредитов возникает задача определения суммы на погашение основного долга и суммы процентных платежей. Если сумма кредита выдана на год, погашение производится ежемесячными платежами, то можно воспользоваться «правилом 78». Это правило получила такое название оттого, что сумма порядковых номеров месяцев равна 78 (1 + 2 + … + 12 = 78). В соответствии с этим правилом уплата процентов при первом платеже составит $\frac{12}{18}$ от общей начисленной суммы, а оставшаяся часть пойдет на уплату основного долга. При втором платеже на оплату процентов пойдет $\frac{11}{18}$ общей начисленной суммы и т. д.

Пример 7.9

Кредит в сумме 30 тыс. руб. выдан на 6 месяцев под простые проценты 15% годовых. Погашение производится ежемесячными платежами. Составить план погашения задолженности.

Наращенная сумма в конце периода составит

$$S = 30(1 + 0{,}15 \cdot 0{,}5) = 32{,}25 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма начисленных процентов

$$I = Pin = 30 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}5 = 2{,}25 \text{ тыс. руб.}$$

Ежемесячные выплаты (7.22) составят

$$q = \frac{32\,250}{6} = 5375 \text{ руб.}$$

Сумма порядковых номеров месяцев 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Следовательно, из первого платежа в счет уплаты процентов идет $\frac{6}{21} =$ $= 285{,}71$ руб. общей суммы начисленных процентов. Сумма, идущая на погашение основного долга, составляет: 5375 – 285,71 = 5089,29 руб.

Расчетные данные приведены в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Доля погашаемых процентов	Сумма погашения процентных платежей	Сумма погашения основного долга	Остаток основного долга на начало месяца
6 / 21	285,7142857	5089,285714	30 000

Окончание табл. 7.5

Доля погашаемых процентов	**Сумма погашения процентных платежей**	**Сумма погашения основного долга**	**Остаток основного долга на начало месяца**
5 / 21	238,10	5136,904762	24 910,71429
4 / 21	190,4761905	5184,52381	19 773,80952
3 / 21	142,8571429	5232,142857	14 589,28571
2 / 21	95,23809524	5279,761905	9357,142857
1 / 21	47,61904762	5327,380952	4077,380952
Итого	1000	31 250	

ПРАКТИКУМ

Часть I
ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1. Описать смысловое значение индекса цен и темпа инфляции.
2. Записать формулу для вычисления индекса цен за несколько периодов.
3. Записать формулу для вычисления среднего индекса цен за несколько периодов.
4. Как определяется обесцененная инфляцией сумма при начислении по простым и сложным процентам?
5. Что такое эрозия капитала?
6. Описать связь брутто-ставки с доходностью для простых и сложных процентов.
7. От каких факторов зависит доходность финансовой операции, связанной с покупкой валюты?
8. Каков содержательный смысл параметров, входящих в формулу для расчета доходности, при покупке валюты с последующим наращением по сложной процентной ставке?
9. Каков содержательный смысл параметров, входящих в формулу для расчета доходности, при конверсии свободно конвертируемой валюты (СКВ) в рубли с последующим наращением?
10. Как изменяется стоимость денег во времени?
11. Что такое проценты, процентная ставка и наращенная сумма?
12. В чем состоит разница между простой и сложной процентными ставками?
13. Записать формулы для вычисления наращенных сумм при наращении по простой и сложной ставкам наращения.
14. Описать методы расчета срока ссуды при начислении по простым процентам.
15. Что такое реинвестирование?
16. Что такое дисконтирование по простым и сложным процентам?
17. В чем разница между дисконтированием и дисконтом?
18. Дать определение учетной ставки по простым и сложным процентам.
19. Записать формулы для вычисления выплачиваемых банком сумм при учете векселя по простым и сложным процентам.
20. Записать формулы для срока ссуды и величины процентной ставки при начислении по простым и сложным процентам.
21. Дать определение номинальной процентной ставки.

22. Записать формулу для вычисления наращенной суммы при начислении по номинальной процентной ставке.

23. Каково содержание финансово-коммерческой операции?

24. Каковы показатели финансово-коммерческой операции?

25. Приведите пример механизма развития финансово-коммерческой операции по схеме простых процентов.

26. Каков механизм развития коммерческих операций по схеме сложных процентов?

27. Как следует учитывать инфляцию в коммерческих операциях?

28. Как можно использовать вексель в коммерческих операциях?

29. Поясните на моделях утверждение коммерческой сферы: «Сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра».

30. Как следует сравнивать финансово-коммерческие операции?

31. Каким образом можно использовать операции с ценными бумагами в коммерческом деле?

Простые и сложные проценты

1. Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана на полгода по простой ставке 20% годовых. Определить проценты и наращенную сумму.

2. Ссуда 25 тыс. руб. выдана на срок 0,7 года под простые проценты 18% годовых. Определить проценты и наращенную сумму.

3. Ссуда в размере 8 млн руб. выдана с 28 января по 15 июня включительно под простые проценты 22% годовых. Определить величину долга в конце срока тремя методами.

4. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 9 тыс. руб., вырос до 10 тыс. руб. при условии, что простая ставка наращения равна 18,5% годовых при $K = 365$?

5. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 12 тыс. руб. через 300 дней. Первоначальная сумма долга — 10 тыс. руб. Определить доходность ссудной операции в виде простой годовой ставки наращения при $K = 360$.

6. Депозит рассчитывается по схеме простых процентов с годовой ставкой 20%. За какое время первоначальная сумма увеличится в 3 раза?

7. Сумма 2 млн руб. взята в долг на срок 3 года 9 месяцев с годовой процентной ставкой 10 при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет возвратить кредитору, если расчет производится по схеме простых процентов с поквартальным реинвестированием процентов?

8. Заемщик получил ссуду 3 млн руб., которую должен погасить одним платежом через 1,5 года. Расчет производится по схеме простых процентов, причем первые 0,75 года годовая ставка равна 13%, а в оставшееся время годовая ставка равна 17%. Найти сумму, возвращаемую кредитору.

9. Заемщик получил 9 марта 2005 г. ссуду 600 тыс. долл., возвратить которую необходимо 29 июля 2005. Расчет производится по схеме простых процентов с 13%-ной годовой ставкой. Какую сумму должен возвратить заемщик кредитору при расчете по: а) английскому; б) французскому; в) немецкому способу?

10. За срок займа сумма обыкновенных процентов по банковскому векселю составила 15 тыс. руб. Определить сумму точных процентов при условии, что год високосный, используя прямое и обратное соотношение обыкновенных и точных процентов.

11. Годовая ставка при начислении обыкновенных процентов но депозитному 30-дневному сертификату номиналом 100 тыс. руб. равна 10%. Год високосный. Определить: а) размер годовой ставки при начислении точных процентов, обеспечивающей доход, равный коммерческим процентам (используя прямое и обратное соотношение обыкновенных и точных процентов); б) сумму обыкновенных и точных процентов, выплаченных при погашении сертификата.

12. Сберегательный сертификат выдан на 180 дней под 60% годовых с погашением по 50 тыс. руб. Год не високосный. Определить доход держателя сертификата.

13. На какой срок должен быть выпущен сберегательный сертификат номиналом 10 тыс. руб., если сумма погашения при 8% годовых составляет 10,5 тыс. руб.? Год не високосный.

14. Найти величину процентов и наращенную сумму, если на депозит внесены 500 тыс. руб. на 3 года по простой ставке 10% годовых.

15. Ссуда получена 15 марта и должна быть возвращена 5 июля. Размер ссуды — 20 тыс. руб. Простая ставка — 15% годовых. Найти совокупный долг (первоначальная ссуда с процентами), исходя из: а) английской, б) французской, в) германской практик определения процентов.

16. Через 5 лет величина денежного вклада возросла до 500 долл. За данный период начислены простые проценты в сумме 150 долл. Найти величину процентной ставки.

17. На какой период должна быть выдана ссуда, чтобы долг возрос в 1,5 раза при начислении простых процентов по ставке 15% годовых?

18. Начальная сумма долга 200 тыс. руб. В погашение долга должно быть выплачено 250 тыс. руб. через 80 дней. Определить доходность данной операции для кредитора, если $K = 360$.

19. Вклад размещен в банке на период с 20 июня по 15 сентября. Определить количество дней для начисления процентов при: а) германской; б) французской; в) английской практиках.

20. На депозите размещена сумма 10 тыс. руб. Первые 3 месяца начисляются простые проценты по ставке 24% годовых, далее наращенная сумма реинвестируется на следующие 3 месяца с начислением простых процентов по ставке 36%. Определить величину вклада на конец 6 месяца.

21. Кредит в размере 20 тыс. руб. выдается на 3,5 года. Ставка процентов за первый год — 15%, за каждое последующее полугодие она увеличивается на 1%. Определить множитель наращения и наращенную сумму.

22. Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана на полгода по простой ставке 20% годовых. Определить наращенную сумму.

23. Ссуда равна 15 тыс. руб., срок — 3,2 года, простые проценты по ставке — 11,2% годовых. Определить проценты и сумму накопленного долга.

24. Сумма в размере 3,2 млн руб. выдана с 11 февраля по 2 августа включительно под 16% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? При решении применить три метода.

25. 3 марта на счет поступило 3 млн руб., 5 июля было снято 1,5 млн руб., 2 сентября поступило 4 млн руб. Найти сумму на счете на конец года. Ставка — 14% годовых.

26. Движение средств на счете характеризуется следующими данными: 20 февраля поступило 13 тыс. руб., 6 июня снято 6 тыс. руб., 15 сентября поступило 2 тыс. руб., 2 октября снято 8 тыс. руб., 18 октября поступило 2 тыс. руб., 12 ноября поступило 4 тыс. руб. Найти сумму на счете на конец года. Простая ставка —16% годовых.

27. В кредитном договоре — на сумму 1 млн руб. и сроком на 4 года — зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20% годовых. Рассчитать наращенную сумму.

28. Депозит рассчитывается по схеме сложных процентов с годовой ставкой 10%. За какое время первоначальная сумма увеличится в 5 раз?

29. Какой величины достигнет долг, равный 6 тыс. руб., через 4 года при росте по сложной ставке наращения 18,5% годовых?

30. Какой величины достигнет долг, равный 8 тыс. руб., через 4,6 года при росте по сложной ставке наращения 20% годовых? Рассчитать непосредственно и по смешанной схеме.

31. Какой величины достигнет долг, равный 15 тыс. руб., через 5,7 года при росте по сложной ставке наращения 20% годовых?

32. На сумму 15 тыс. руб. начисляются проценты по сложной годовой ставке 22% в течение 3,5 лет. Определить силу роста и наращенную сумму при дискретном и непрерывном начислении.

33. Определить современную стоимость суммы 25 тыс. руб., выплаченной через 2,8 года, при линейном изменении силы роста 0,12 и приросте силы роста 0,1.

34. За какой срок сумма 25 тыс. руб. достигнет 40 тыс. руб. при начислении по сложной ставке 18% годовых? Рассмотреть случаи помесячного начисления процентов и раз в году.

35. Финансовый инструмент куплен за 25 тыс. руб., его выкупная цена через 1,8 года составит 35 тыс. руб., проценты начисляются один

раз в месяц. Определить доходность операции в виде номинальной ставки и годовой ставки сложных процентов.

36. За какой срок сумма 22 тыс. руб. достигнет 50 тыс. руб. при непрерывном начислении процентов? Сила роста во времени изменяется по линейному закону, начальное значение силы роста 0,12, а прирост силы роста 0,1.

37. Определить начальное значение силы роста при ее линейном изменении во времени, если долг за 2,5 года увеличится с 8 тыс. до 15 тыс. руб. при приросте силы роста 0,1.

38. Какой величины достигнет долг, равный 8 тыс. руб., через 4,6 года при росте по сложной ставке наращения 20% годовых?

39. В долг на 3 года получены 100 тыс. руб. Определить сумму, подлежащую выплате через 3 года, при сложной ставке 15% годовых.

40. Первоначальная сумма долга равняется 25 тыс. руб. Определить величину наращенной суммы через 3 года при применении декурсивного и антисипативного способов начисления процентов. Годовая ставка —18%.

41. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых?

42. Кредит в размере 3 млн руб. выдан на 2 года и 160 дней под 16,5% сложных годовых. Определить сумму долга на конец периода смешанным методом.

43. Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

44. Клиент внес в банк 2,5 тыс. руб. под 9,5% годовых. Через 2 года и 270 дней он изъял вклад. Определить полученную им сумму при использовании банком сложных процентов и смешанного метода.

45. На сберегательном счете в банке лежат 200 руб. Какая сумма будет находиться на данном счете через 3 года, если в расчетах используется сложная ставка 12% годовых?

46. Сколько лет необходимо для увеличения начальной суммы в 3 раза, если применяется сложная ставка 10% годовых?

47. За сколько лет первоначальная сумма увеличится в 4 раза, если в расчетах используется сложная ставка 20% годовых?

48. По какой ставке сложных процентов следует разместить денежные средства на депозите, чтобы через 3 года начальная сумма возросла в 6 раз?

49. Через 5 лет величина денежного вклада возросла до 800 долл. За данный период начислены сложные проценты в сумме 250 долл. Найти величину процентной ставки.

50. Какой величины достигнет сумма 400 тыс. руб. на депозите через 2 года, если эта сумма размещена по сложной ставке 15% при поквартальном начислении?

51. На первые 2 года кредитного периода установлена сложная ставка 10%, на последующие 3 года — 12%. Найти коэффициент (множитель) наращения за весь период.

52. За какой срок первоначальный капитал в 50 тыс. руб. увеличится до 200 тыс. руб., если: а) на него будут начисляться сложные проценты по ставке 18% годовых; б) проценты будут начисляться ежеквартально по ставке 20% годовых?

53. Заемщик получил ссуду 3 млн руб., которую должен погасить одним платежом через 1,5 года. Расчет производится по схеме сложных процентов, причем первые 0,75 года годовая ставка равна 13%, а в оставшееся время годовая ставка — 17%. Найти сумму, возвращаемую кредитору.

54. Какой величины достигнет долг 10 млн руб. через 5 лет при росте по сложной ставке 15% годовых?

55. Кредит 500 тыс. руб. выдан на 2 года и 154 дня под 18% сложных годовых. Какой будет сумма долга на конец года? Произвести расчеты двумя способами.

56. Какой величины достигнет долг, равный 4,5 млн руб., через 6 лет при росте по сложной ставке 18% годовых с начислением процентов: а) помесячно; б) поквартально?

57. Сумма 2 млн руб. взята в долг на срок 4,8 года с годовой ставкой 10% при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет возвратить кредитору, если расчет производится по:

а) по схеме простых процентов;
б) по схеме сложных процентов;
в) по смешанной схеме;
г) по схеме непрерывных процентов?

58. Какая сумма больше: 1700 руб. сейчас или 1970 руб. через 1,5 года, если для расчетов применяется:

а) простая процентная ставка 10%;
б) сложная процентная ставка 10%;
в) простая учетная ставка 10%;
г) сложная учетная ставка 10%?

59. За 8 лет первоначальная сумма вклада выросла в 5 раз. Найти годовую процентную ставку, если при расчете используется схема: а) простых, б) сложных, в) непрерывных процентов.

60. Скорость роста банковского вклада прямо пропорциональна размеру вклада с коэффициентом пропорциональности 0,02. Найти сумму на счете через 4 года, если первоначальная сумма вклада составляет 10 тыс. руб.

61. Логарифмическая производная от капитала по времени равна функции $2 / t$. В момент времени $t = 1$ капитал составляет 1 млн руб. Найти капитал в момент времени $t = 5$.

62. Имеются два обязательства. Условия первого: выплатить 400 руб. через четыре месяца; условия второго: выплатить 450 руб. через восемь месяцев. Можно ли считать их равноценными?

63. Депозит в размере 50 тыс. руб. внесен в банк на 3 года, под 10% годовых (сложные проценты); начисление процентов производится ежеквартально. Определить наращенную сумму.

64. На сумму 60 тыс. руб. ежеквартально по ставке 12% годовых начисляются сложные проценты в течение 14 месяцев. Определить величину наращенной суммы смешанным методом.

Эффективная ставка процентов

1. Определить эффективную процентную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму через 2 года, как и при использовании номинальной ставки 8% при полугодовом начислении процентов.

2. Рассчитать эффективные процентные ставки при ежегодном, полугодовом, ежеквартальном начислении процентов, если номинальная ставка составляет 5%.

3. Рассчитать эффективную ставку сложных процентов, если номинальная ставка равна 14% и начисление процентов происходит ежемесячно.

4. Облигация достоинством 10 тыс. руб. выпущена на 5 лет при номинальной ставке 5%. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в месяц.

5. Облигация достоинством 20 тыс. руб. выпущена на 6 лет при номинальной ставке 5%. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в полугодие.

6. Облигация достоинством 5 тыс. руб. выпущена на 2 года при номинальной ставке 5%. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в квартал.

7. Облигация номиналом 15 тыс. руб. выпущена на 4 года при номинальной ставке 6%. Рассчитать эффективную учетную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в месяц.

8. Облигация номиналом 20 тыс. руб. выпущена на 5 лет при номинальной ставке 6%. Рассчитать эффективную учетную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в полугодие.

9. Облигация номиналом 10 тыс. руб. выпущена на 3 года при номинальной ставке 6%. Рассчитать эффективную учетную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в квартал.

10. Рассчитать эффективные учетные ставки при ежегодном, полугодовом, ежеквартальном начислении процентов, если номинальная ставка составляет 4%.

11. Чему равна эффективная ставка, если номинальная ставка составляет 20% годовых при поквартальном начислении процентов?

12. Определить годовую номинальную ставку при ежеквартальном начислении процентов, если эффективная ставка равна 30%.

13. В банк положена сумма 50 тыс. руб. сроком на 1 год по годовой ставке 16%. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную ставку для ежемесячного начисления процентов.

14. В банк положена сумма 40 тыс. руб. сроком на 1 год по ставке 15% годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную ставку для ежеквартального начисления процентов.

15. В банк положена сумма 30 тыс. руб. сроком на 1 год по ставке 14% годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную ставку для полугодового начисления процентов.

16. Эффективная ставка при полугодовом начислении процентов составила 16%. Найти годовую номинальную процентную ставку.

17. Эффективная ставка при полугодовом начислении процентов составила 18%. Найти годовую номинальную учетную ставку.

18. Определить эффективную учетную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму через 2 года, как и при использовании номинальной ставки 18% при ежеквартальном начислении процентов.

19. Каким должен быть размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 30% при поквартальном начислении процентов?

Математическое и банковское дисконтирование

1. 20 тыс. руб. должны быть выплачены через 4 года. Найти современную стоимость, учитывая сложную ставку 10% годовых.

2. Определить современную (приведенную) величину суммы 100 тыс. руб., выплаченной через 3 года, при использовании ставки сложных процентов — 20% годовых.

3. С целью возврата долга (с процентами) необходимо уплатить 5 тыс. долл. Деньги в долг получены под 12% (простая ставка) годовых на 60 дней. Найти начальную сумму долга (временна́я база — 360 дней).

4. Вексель 300 тыс. долл. учитывается за 2 года до погашения по сложной учетной ставке 10% годовых. Найти сумму, полученную векселедержателем, и величину дисконта.

5. Ставка по облигации номиналом 5 тыс. руб. — 6%. Определить число лет, необходимое для удвоения стоимости облигации, применив сложные проценты по: а) процентной ставке; б) учетной ставке.

6. Вексель стоимостью 100 тыс. руб. учтен банком за 2 года до погашения по сложной ставке 30% годовых. Какую сумму получит векселедержатель при использовании в расчетах сложной учетной ставки?

7. Вексель выдан на сумму 10 тыс. долл. и учтен в банке за 20 дней до погашения по простой учетной ставке 20% годовых. Найти сумму, полученную векселедержателем (временна́я база — 360 дней).

8. Вексель на сумму 500 тыс. руб. учтен 1 марта. Срок погашения векселя — 15 августа. Векселедержатель получил за него 480 тыс. руб. Чему равна простая учетная ставка?

9. Рассчитать учетную ставку, которая обеспечивает доход в 6 тыс. руб., если сумма в 10 тыс. руб. выдается в ссуду на полгода.

10. Сберегательный сертификат номиналом 10 тыс. руб. выдан на 120 дней с погашением в сумме 12 тыс. руб. За временну́ю базу принять 360 дней. Определить: а) учетную ставку; б) процентную ставку.

11. По сберегательному сертификату, выданному на 210 дней, начисляется дисконт в размере 12% от суммы погашения. Год не високосный. Определить: а) учетную ставку; б) процентную ставку.

12. Переводной вексель выдан на сумму 500 тыс. руб. с уплатой 19 декабря. Векселедержатель учел вексель в банке 25 октября по учетной ставке 8%. Определить сумму, полученную векселедержателем, и размер дисконта в пользу банка.

13. Вексель, выданный на 120 дней, с обязательством уплатить 50 тыс. руб. учитывается по ставке 8%. Определить приведенную величину наращенной стоимости и размер дисконта при математическом дисконтировании и коммерческом учете.

14. Вексель на 100 тыс. руб., с обязательством уплатить через 180 дней 8% (простых) годовых, учтен банком за 90 дней до наступления срока платежа по учетной ставке 6%. Определить сумму, полученную векселедержателем, и размер дисконта в пользу банка.

15. Сберегательный сертификат номиналом 30 тыс. руб. под 60% годовых выдан на 180 дней и учтен за 120 дней до даты погашения по учетной ставке 75%. Определить: а) сумму, полученную держателем сертификата, при досрочном учете сертификата банком; б) доходы держателя сертификата и банка.

16. Вексель номинальной стоимостью 500 тыс. руб. был учтен в банке за 90 дней до срока погашения по учетной ставке 16% годовых. Определить дисконтируемую величину векселя, используя антисипативный метод начисления процентов.

17. Вексель был учтен за 15 дней до срока погашения по ставке 18% годовых. В результате учета владелец векселя получил 4,0625 тыс. руб. Определить номинальную стоимость векселя.

18. Определить, какую сумму необходимо поместить на депозит, чтобы через 3 года владелец депозита получил 4 млн руб. Применяемые процентные ставки: а) 8% годовых; б) 12% годовых.

19. Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс. руб. Кредит выдан под 16% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временна́я база равна 365 дням?

20. Вексель выдан на сумму 1 млн руб. с уплатой 17 ноября 2003 г. Владелец векселя учел его в банке 23 сентября 2003 по учетной станке 20%. Определить полученную при учете сумму.

21. Вексель номинальной стоимостью 5 млн руб. учтен за 15 дней до срока погашения по учетной ставке 18% годовых. Определить дисконт и дисконтированную величину.

22. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях, чтобы долг, равный 100 тыс. руб., вырос до 120 тыс. руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25% годовых?

23. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 110 тыс. руб. через 120 дней. Первоначальная сумма долга 90 тыс. руб. Определить доходность операции для кредитора в виде ставки процента и учетной ставки.

24. Стороны договорились о том, что из суммы ссуды, выданной на 210 дней, удерживается дисконт в размере 12%. Определить цену кредита в виде годовой ставки простых процентов и учетной ставки, если $K = 360$.

25. Кредит выдается под простую ставку 14% годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком, и сумму процентных денег, если величина кредита составляет 40 тыс. руб.

26. Найти дисконтный множитель $(1 + i)^{-t}$ при $t = 2, 3, 4, 5$ и $i = 20\%$.

27. Владелец векселя номинальной стоимостью 800 руб. и сроком обращения 1 год предъявил его банку-эмитенту для учета за 60 дней до даты погашения. Банк учел его по ставке 18% годовых (проценты простые). Определить дисконтированную величину и величину дисконта, если временна́я база 360 дней.

28. Вексель в сумме 4 тыс. руб. должен быть погашен через 80 дней с процентами 9% годовых. Владелец учел его в банке за 10 дней до наступления срока по учетной ставке 12%. Найти полученную после учета векселя сумму и величину дисконта.

29. Определить современную стоимость 20 тыс. руб., которые должны быть выплачены через 4 года, если в течение этого периода на первоначальную сумму начислялись сложные проценты под 8% годовых: а) ежегодно; б) ежеквартально.

30. Долговое обязательство на сумму 16 тыс. руб. со сроком погашения через 2 года было передано в банк для учета. Дисконтирование производилось по ставке $f = 10\%$ при $m = 4$. Определить величину дисконта.

31. Долговое обязательство в сумме 2 млн руб. должно быть погашено через 90 дней с процентами (12% годовых). Владелец обязательства учел его в банке за 15 дней до наступления срока по учетной ставке 13%. Определить сумму после учета обязательства.

32. Через 1 год владелец векселя, выданного коммерческим банком, должен получить по нему 220 тыс. руб. Какая сумма была внесена в банк в момент приобретения векселя, если доходность векселя должна составить 12% годовых?

33. Вексель, выданный на сумму 5500 руб., учтен за 90 дней до погашения. Владелец векселя получил 4900 руб. Определить доходность банка в виде простой учетной ставки.

34. Через 159 дней должник уплатит 8,5 тыс. руб. Кредит выдан под простые проценты 19% годовых. Определить первоначальную сумму долга и дисконт при условии, что временна́я база равна 360 дням.

35. Вексель, имеющий номинальную стоимость 8 тыс. руб., учтен в банке по ставке 18,5% годовых за 132 дня до его погашения. Определить сумму, полученную владельцем векселя при учете.

36. Вексель на сумму 1 млн руб. со сроком погашения 1 сентября 2005 г. учитывается банком 1 июня 2005 г. по простой учетной ставке 18%. Найти: а) дисконтированную цену векселя, используя способ расчета 365 / 360; б) доходность D_1 этой финансовой операции для банка.

37. Через 4 года долг с учетом процентных денег достиг 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка — 15%. Сколько денег было взято в долг, если начислялись проценты: а) простые; б) сложные; в) непрерывные?

38. Через 4 года долг с учетом процентных денег достиг 100 тыс. руб. Годовая учетная ставка — 15%. Сколько денег было взято в долг, если начислялись проценты: а) простые, б) сложные?

39. В момент выдачи ссуды удерживается дисконт в размере 10%. Ссуда выдается на срок 144 дня по схеме простых процентов. Найти годовую учетную ставку, если год считается равным 360 дням.

40. Какой годовой учетной ставке соответствует годовая ставка 60%?

41 Какой годовой процентной ставке соответствует годовая учетная ставка 20%?

42. Сумма 12 тыс. руб. выплачивается 2,4 года. Номинальная ставка процентов — 16% годовых. Определить современную стоимость при ежеквартальном начислении процентов.

43. Вексель на сумму 20 тыс. руб., срок платежа по которому наступает через 1,8 года, учтен по сложной процентной ставке 18% годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя при учете, и учет при ежегодном и ежемесячном дисконтировании.

44. Переводной вексель был выдан на сумму 15 млн руб. с уплатой 15 октября. Владелец векселя учел его в банке 3 сентября по учетной ставке 9%. Найти сумму, полученную при учете векселя, и размер дисконта.

45. Из суммы ссуды, выданной на 155 дней, удерживается дисконт в размере 20%. Определить цену кредита в виде годовой ставки простых процентов и учетной ставки. Временна́я база — 360 дней.

46. Долговое обязательство на 10 млн руб., срок оплаты которого наступит через 3 года, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 13% годовых. Найти размер полученной за долг суммы и величину дисконта. Определить сумму, полученную при помесячном учете по номинальной учетной ставке 13%, и эффективную учетную ставку.

47. За 8 лет первоначальная сумма вклада выросла в 5 раз. Найти годовую учетную ставку, если при расчете используется схема: а) простых, б) сложных процентов.

48. Сумма 2 млн руб. взята в долг на срок 4,8 года с годовой учетной ставкой 10% при условии погашения долга одним платежом в конце срока. Какую сумму нужно будет возвратить кредитору, если расчет производится по схеме: а) простых, б) сложных процентов?

49. Определить современное значение суммы в 120 тыс. руб., которая будет выплачена через 2 года при использовании сложной учетной ставки 16% годовых.

Эквивалентность процентных ставок (средние ставки)

1. Учетная ставка — 20% годовых. Найти эффективность учетной операции в виде простой процентной ставки наращения, если вексель учтен за год до погашения.

2. Определить простую учетную ставку, эквивалентную годовой простой процентной ставке 25%, при сроке учета 150 дней (временна́я база — 360 дней).

3. Ссуда выдана на 2 года под простые проценты по ставке 12% годовых. Найти эквивалентную ставку сложных процентов.

4. Вексель учитывается по простой учетной ставке 12% за 90 дней до погашения. Предполагается перейти к сложной учетной ставке. Какую сложную ставку нужно установить, чтобы финансовое положение банка не изменилось?

5. Найти годовую ставку простых процентов, на которую можно заменить номинальную годовую ставку 10%, если начисление по ней производится по полугодиям в течение 3 лет.

6. Простая ставка — 50%. Найти эквивалентную сложную ставку для двухлетнего периода.

7. Денежные средства положены на депозиты в три банка в равных размерах по ставкам простых процентов 10, 15 и 18% соответственно на 3, 6 и 9 месяцев. Какой размер ставки приведет к аналогичному наращению исходной суммы, если ее полностью разместить в один из банков на 18 месяцев?

8. Для первых 3 лет ссуды применяется сложная ставка 10%, для следующих 2 лет — 16%. Найти среднюю ставку за весь период ссуды.

9. Первые 2 года начисляются сложные проценты по ставке 20%, вторые 3 года — 30%, следующий год — 40%. Найти среднегодовую процентную ставку.

10. Банк осуществляет учет векселей по простой учетной ставке 20% годовых. Вексель учитывается за 30 дней до погашения. Какой величине простой ставки наращения эквивалентна данная учетная ставка?

11. Сложная ставка — 60%. Период времени — 3 года. Найти эквивалентную простую процентную ставку.

12. Договор предусматривает использование в течение первых 3 месяцев простой ставки на уровне 15%, следующих 4 месяцев — 20% и последующих 5 месяцев — 25%. Найти среднюю ставку за рассматриваемый период.

13. Используются сложные ставки процента: в первые 2 года — 20%, в следующие 3 — 25%, а в последующие 4 года — 30%. Найти среднюю ставку в целом за рассматриваемый период.

14. Срок уплаты по долговому обязательству — полгода, учетная ставка равна 25%. Какова доходность данной операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

15. Кредит на 2 года предоставляется под 16%-ную ставку сложных процентов. Начисление происходит ежеквартально. Определить эквивалентную ставку простых процентов.

16. Контракт предусматривает переменную по периодам ставку простых процентов: 20, 22 и 25. Продолжительность последовательных периодов начисления процентов: 2, 3 и 5 месяцев. Какой размер ставки приведет к аналогичному наращению исходной суммы?

17. Для первых 2 лет ссуды применяется ставка, равная 15%, для следующих 3 — 20%. Определить среднюю ставку за весь срок ссуды.

18. Вексель учтен за год до даты его погашения по учетной ставке 15%. Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки?

19. Найти величину учетной ставки, эквивалентной годовой процентной ставке 40% и $K = 365$, при условии, что срок учета равен 255 дням.

20. Для первых 2 лет ссуды применяется ставка 8%, для следующих 3 — 10%. Найти среднюю ставку за весь срок ссуды.

21. Простая процентная ставка депозита равна 20% годовых, срок депозита — 0,5 года. Определить доходность финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки.

22. Номинальная ставка процента при начислении один раз в квартал равна 16% годовых. Определить эффективную ставку.

23. Определить силу роста для сложной процентной ставки наращения 20% годовых.

24. При возвращении долга (с процентами) необходимо уплатить 5 тыс. долл. Деньги были получены в долг под 12% (простая ставка) годовых на 60 дней. Найти начальную сумму долга, если $K = 360$.

25. Вексель выдан на сумму 10 тыс. долл, и учтен в банке за 20 дней до погашения по простой учетной ставке 20% годовых. Найти сумму, полученную векселедержателем (временна́я база — 360 дней).

26. Переводной вексель выдан на сумму 500 тыс. руб. с уплатой 19 декабря. Векселедержатель учел вексель в банке 25 октября по учетной ставке 8%. Определить сумму, полученную векселедержателем, и размер дисконта в пользу банка.

27. Сберегательный сертификат номиналом 10 тыс. руб. выдан на 120 дней с погашением в сумме 12 тыс. руб. За временну́ю базу принять 360 дней. Определить: а) учетную ставку; б) процентную ставку.

28. В долг на 3 года получены 100 тыс. руб. по ставке сложных процентов 15% годовых. Определить сумму, подлежащую выплате через 3 года.

29. Определить современное значение суммы в 120 тыс. руб., которая будет выплачена через 2 года, при использовании сложной учетной ставки 16% годовых.

30. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5% годовых?

31. Кредит в размере 3 млн руб. выдан на 2 года и 320 дней под 16,5% сложных годовых. Определить сумму долга двумя способами.

32. Клиент внес в банк 2,5 тыс. руб. под 9,5% годовых. Через год и 270 дней он изъял вклад. Определить полученную им сумму при использовании банком сложных процентов двумя способами.

33. На сберегательном счете в банке лежит сумма 200 руб. Какая сумма будет находиться на этом счете через 3 года, если в расчетах используется сложная ставка 12% годовых?

34. За сколько лет первоначальная сумма увеличится в 4 раза, если в расчетах используется сложная ставка 20% годовых?

35. По какой ставке сложных процентов следует разместить денежные средства на депозите, чтобы через 3 года начальная сумма возросла в 6 раз?

36. Через 5 лет величина денежного вклада возросла до 800 долл. За данный период начислены сложные проценты в сумме 250 долл. Найти величину процентной ставки.

37. Какой величины достигнет сумма 400 тыс. руб. на депозите через 2 года, если эта сумма размещена по ставке сложных процентов 15% при поквартальном начислении процентов?

38. Вексель стоимостью 100 тыс. руб. учтен банком за 2 года до погашения по сложной ставке 30% годовых. Какую сумму получит векселедержатель при использовании в расчетах сложной учетной ставки?

39. За какой срок первоначальный капитал 50 тыс. руб. увеличится до 200 тыс. руб., если: а) на него будут начисляться сложные проценты по ставке 18% годовых; б) проценты будут начисляться ежеквартально по ставке 20% годовых?

40. Вексель 300 тыс. долл. учитывается за 2 года до погашения по сложной учетной ставке 10% годовых. Найти сумму, полученную векселедержателем, и величину дисконта.

41. Рассчитать эффективные процентные ставки при ежегодном, полугодовом, ежеквартальном начислении процентов, если номинальная ставка составляет 5%.

42. Рассчитать эффективную ставку сложных процентов, если номинальная ставка равна 14% и начисление процентов происходит ежемесячно.

43. Облигация достоинством 10 тыс. руб. выпущена на 5 лет при номинальной ставке 5%. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в месяц.

44. Облигация достоинством 20 тыс. руб. выпущена на 6 лет при номинальной ставке 5%. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в полугодие.

45. Облигация достоинством 5 тыс. руб. выпущена на 2 года при номинальной ставке 5%. Рассчитать эффективную процентную ставку и определить наращенную стоимость по эффективной ставке, если начисление процентов производится один раз в квартал.

46. Годовая процентная ставка начисления сложных процентов за кредит установлена на уровне 0,08 с надбавкой 0,5% от суммы ссуды

в первые 2 года и 0,8% в следующие 2. Определить величину множителя наращения к концу срока кредита.

47. Какой величины достигнет долг, равный 19 400 руб., через 3 года при условии, что в первый год ставка составляет 13%, во второй — 11,5%, в третий — 8,6%?

48. В кредитном договоре на сумму 250 тыс. руб. и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20% годовых на первую половину срока, 18% годовых на последующие 1,5 года и далее 17,7% годовых. Рассчитать наращенную сумму.

49. Какой величины достигнет долг, равный 15 тыс. руб., через 5,7 года при росте по сложной ставке 16,5% годовых при начислении процентов: а) раз в году; б) раз в месяц?

50. Ссуда 20 млн руб. предоставлена на 28 месяцев. Проценты сложные, ставка — 60% годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Вычислить наращенную сумму.

51. Ссуда размером 2 млн руб. предоставлена на 4 года под 40% годовых. Проценты начисляются ежеквартально и капитализируются. Вычислить наращенную сумму.

52. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

53. Каков размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25% при помесячном начислении процентов?

54. Эффективная процентная ставка равна 0,06. Определить номинальную процентную ставку при начислении сложных процентов за 6 периодов в году.

55. Сумма 12 тыс. руб. выплачивается через 2,4 года. Номинальная ставка процентов — 16% годовых. Определить современную стоимость при ежеквартальном начислении процентов.

56. Сумма в 5 млн руб. будет выплачена через 5 лет. Определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12% годовых.

57. Через 10 лет по обязательству будет выплачена сумма 10 млн руб. Определить современную стоимость обязательства при условии, что применяется ставка сложных процентов 10% годовых.

58. Через 5 лет по векселю должна быть выплачена сумма 1 млн руб. Банк учел вексель по сложной учетной ставке 10% годовых. Определить дисконт.

59. Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Определить: а) размер полученной за долг суммы и величину дисконта; б) сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15%, и эффективную учетную ставку.

60. На сумму 15 тыс. руб. начисляются проценты по сложной годовой ставке 22% в течение 3,5 лет. Определить силу роста и наращенную сумму при дискретном и непрерывном начислении.

61. Вклад, на который в течение 2 лет непрерывно начислялись сложные проценты по силе роста d, а в последующие 4 года по силе роста $2d$, удвоился. Найди величину силы роста d.

62. На первоначальный вклад 2000 ден. ед. в течение 3 лет непрерывно начисляли сложные проценты по силе роста 0,06. Затем еще в течение 4 лет — по силе роста 0,08. Найти величину вклада через 7 лет.

63. При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 24% годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов: а) ежемесячно; б) поквартально?

64. Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20%?

65. Годовая ставка сложных процентов равна 15%. Чему равна эквивалентная сила роста?

66. Какой годовой учетной ставке соответствует годовая процентная ставка 60%?

67. Какой годовой процентной ставке соответствует годовая учетная ставка 20%?

68. Для первых 2 лет ссуды применяется ставка 8%, для следующих 3 — 10%. Найти среднюю ставку за весь срок ссуды.

69. Выданы две ссуды: P_1 = 1 тыс. руб., P_2 = 2 тыс. руб. Первая выдана под 10% годовых, вторая — под 15%, сроки ссуд равны 2 годам. Найти среднюю ставку за весь срок ссуды.

70. При выдаче ссуды на 180 дней под 8% годовых (проценты простые) кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов, если $K = 365$?

71. Вексель учтен по ставке 10% за 160 дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5%. Временна́я база учета — 360 дней. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов?

72. Ставка налога на проценты равна 2%. Процентная ставка — 8% годовых, срок начисления — 3 года. Первоначальная сумма ссуды — 1000 руб. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты.

Ломбардный кредит

1. 18 апреля заемщик обратился за получением ломбардного кредита и предоставил в залог ценности на сумму 100 тыс. руб. Сумма ломбардного кредита составляет 80% от стоимости залога, процентная ставка — 12% годовых. Определить величину кредита.

2. 18 июля заемщик перечислил 25 тыс. руб. Распределить эту сумму на выплату основного долга и проценты. Найти остаток долга, используя условия задачи 1.

3. Клиент обратился в банк 16 марта для получения ломбардного кредита и предоставил в залог 150 ед. ценных бумаг. Величина займа рассчитывается исходя из 80% их курсовой стоимости. Процентная

ставка составляет 9%, а затраты банка по обслуживанию долга — 200 руб. На какой кредит может рассчитывать клиент банка, если курс его ценных бумаг составляет 300 руб.?

4. Заемщик выплатил 16 июня только одну часть долга — 600 руб., и продлил погашение кредита еще на 3 месяца. Определить: а) каков остаток долга и проценты за него; б) сколько всего должник заплатит кредитору.

5. Заемщик 16 июня (вовремя) перечислил 15 тыс. руб. Распределить эту сумму на выплату основного долга и проценты. Найти остаток долга.

6. Заемщик не сумел погасить долг вовремя. 20 декабря он производит выплату основного долга в сумме 5349,19 тыс. руб. Отдельно заемщик выплачивает проценты. Сколько всего выплатит заемщик и каков остаток долга? (Если выплата просрочена, то процентная ставка повышается на 1%.)

7. Заемщик не выплатил долг вовремя (16 марта) и только 26 марта перечислил в счет погашения основного долга и процентов по нему 5000 руб. Как распределяется эта сумма на величину основного долга и процентов по нему? Каков остаток долга?

8. Выплата долга просрочена, а процентная ставка изменилась в связи с новой банковской политикой. Заемщик сделал выплату основного долга в сумме 1133 руб. не 16 июня, а только 6 июля и отдельно выплатил проценты. Сколько всего он заплатил, если 26 июня процентная ставка увеличилась на 1%?

9. Заемщик заплатил 6 июля 1242,93 тыс. руб., но 26 июня процентная ставка увеличилась на 1%. Сколько из этой суммы составляет выплата основного долга, а сколько процентный платеж? Каков остаток долга?

10. Долг обеспечен 150 облигациями и равен 45 тыс. руб. Срок погашения наступил 14 октября. Процентная ставка составляет 8% годовых. Заемщик не погасил долг вовремя, а 24 октября принес еще 300 облигаций и 100 акций в залог под новый заем. Предыдущий долг будет погашаться из нового займа с учетом первоначального обеспечения в 150 облигаций. На какую величину кредита может рассчитывать заемщик, если величина кредита составляет 80% курсовой стоимости ценных бумаг, курс облигаций — 350 руб., акций — 180?

11. Ломбард предоставляет кредиты под залог ювелирных изделий исходя из 50% текущей рыночной стоимости изделия на основе годовой учетной ставки 30% на срок 3 месяца. Клиент передал в ломбард золотой браслет. Эксперт ломбарда оценил рыночную стоимость браслета в 10 тыс. руб. Какую сумму получит клиент и какую сумму он должен возвратить ломбарду?

Расчеты в условиях инфляции

1. Каждый месяц цены растут на 1,5% (2%). Каков ожидаемый уровень инфляции за год?

2. Уровень инфляции в марте составил 2% (3%), в апреле — 1% (5%), в мае — 3% (3%). Чему равен индекс инфляции за рассматриваемый период?

3. Период начисления — 3 (6) месяца, ожидаемый ежемесячный уровень инфляции — 2% (1,5%). Под какую простую ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность 5% (6%) годовых (проценты простые)?

4. Первоначальная сумма положена на срок апрель — июнь (январь — июнь) под простую ставку ссудных процентов 15% (25%) годовых. Уровень инфляции в апреле составил 1%, в мае — 1,5%, в июне — 2% (в январе составил 0,5%, в феврале — 2%, в марте — 1%, в апреле — 0,5%, в мае — 3%, в июне — 1%). Какова реальная доходность в виде годовой процентной ставки ссудных процентов?

5. Период начисления — 3 (2) года, ожидаемый ежегодный уровень инфляции — 14% (12%). Под какую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность 5% (6%) годовых (проценты сложные)?

6. Первоначальная сумма положена на 3 (2) года под сложную ставку ссудных процентов 20% (15%) годовых. Уровень инфляции за первый год составил 16% (12%), за второй год — 14% (14%), за третий год — 13% (15%). Какова реальная доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов?

7. Месячный темп инфляции составляет $H_{1-12} = 4\%$, $H_1 = 4\%$, $H_2 = 4\%$, $H_3 = 4\%$. Для каждого случая найти индекс цен и темп инфляции за 12 и 3 месяца соответственно. Определить обесцененную наращенную сумму, если на сумму 10 тыс. руб. в течение указанных сроков начислялась простая процентная ставка 50% годовых. Годовой дивизор равен 360. Определить процентную ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.

8. Найти реальную простую процентную ставку (доходность) при номинальных ставках 60 и 30% годовых и месячных темпах инфляции $H_1 = 5\%$, $H_2 = 2\%$, $H_3 = 4\%$.

9. Найти сложную номинальную процентную ставку при доходности 15% годовых и годовых темпах инфляции за 3 года для случаев $H_1 = 90\%$, $H_2 = 80\%$, $H_3 = 60\%$ и $H_t = 80\% = \text{const}$.

10. Кредит в размере 50 тыс. руб. выдан на 2 года. Реальная доходность операции должна составлять 20% годовых по сложной ставке ссудных процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 15% в год. Определить множитель наращения, сложную ставку процентов, учитывающих инфляцию и наращенную сумму.

11. Первоначальный капитал в размере 2 млн руб. выдается на 3 года, проценты начисляются в конце каждого квартала по номинальной ставке 18% годовых. Определить номинальную ставку процентов и наращенную сумму с учетом инфляции, если ожидаемый годовой уровень инфляции составит 19%.

12. При выдаче кредита должна быть обеспечена реальная доходность операции, определяемая учетной ставкой 20% годовых. Кредит выдается на полгода, за которые предполагаемый индекс инфляции составит 1,4. Рассчитать значение учетной ставки, компенсирующей потери при инфляции.

13. Определить реальную доходность финансовой операции, если при уровне инфляции 8% в месяц выдается кредит на 2 года по номинальной ставке сложных процентов 15% годовых. Проценты начисляются ежеквартально.

14. Определить, какой реальной убыточностью обладает финансовая операция, если при уровне инфляции 18% в год капитал вкладывается на один год под номинальную ставку ссудных процентов 5% годовых при ежемесячном начислении.

15. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная ставка оказалась равной 6%?

16. Банк выдал на 6 месяцев кредит 5 млн руб. Ожидаемый месячный уровень инфляции — 2%, требуемая реальная доходность операции — 10% годовых. Определить ставку процентов по кредиту с учетом инфляции, размер наращенной суммы и величину процентного платежа.

17. Кредит в размере 10 млн руб. выдан на 2 года. Реальная доходность должна составлять 11% годовых (сложные проценты). Расчетный уровень инфляции — 16% в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита, а также наращенную сумму.

18. Кредит 12 тыс. руб. выдан на 3 года. На этот период прогнозируется рост цен в 2,2 раза. Определить ставку процентов при выдаче кредита и наращенную сумму долга, если реальная доходность должна составлять 12% годовых по ставке сложных процентов.

19. Цены за каждый месяц растут на 8%. Найти годовой уровень инфляции.

20. Постоянный темп инфляции — 5% в месяц. Определить годовой темп инфляции.

21. Приросты цен по месяцам составили 1,5, 1,2 и 0,5%. Определить индекс цен за 3 месяца.

22. На сумму 1,5 млн руб. в течение 3 месяцев начисляются проценты по ставке 28% годовых. Наращенная сумма равна 1,605 млн руб. Ежемесячная инфляция характеризуется темпами 2,5, 2,0 и 1,8%. Определить индекс цен и наращенную сумму с учетом обесценивания.

23. При уровне инфляции 50% в год капитал вкладывается на 1 год под номинальную ставку 15% (начисление процентов ежеквартальное). Какова реальная доходность этой операции?

24. Инфляция за год составляет 60%. Определить уровень инфляции за квартал.

25. Кредит 6 тыс. руб. выдан на 3 года. На этот период прогнозируется рост цен в 1,4 раза. Определить ставку процентов при выдаче

кредита и наращенную сумму долга, если реальная доходность должна составлять 12% годовых по ставке простых процентов.

26. Капитал вкладывается на 2 года при уровне инфляции 30% в год под номинальную ставку 15%, начисление процентов ежегодное. Какова реальная доходность этой операции?

27. На данный момент получено 150 тыс. руб. За 2 предшествующих года цены увеличились в 1,5 раза. Определить реальную покупательную способность двухлетней давности.

28. Какую ставку должен назначить коммерческий банк, чтобы при годовой инфляции 40% реальная ставка оказалась 14%?

29. Найти реальный доход вкладчика, если на депозит положено 25 млн руб. на 3 года по сложной ставке 20% годовых с ежемесячным начислением процентов при квартальной инфляции, равной 3% в среднем за данный период.

30. На 3 года выдан кредит в 30 млн руб. Реальная доходность должна составлять 15% годовых (сложные проценты). Расчетный уровень инфляции — 16% в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита, а также наращенную сумму.

31. Найти месячный темп инфляции, если за 2 месяца цена товара увеличилась с 6250 до 6760 руб.

32. Месячный темп инфляции равен 2%. Сколько стоил товар полгода назад, если сейчас его цена равна 5405,58 руб.?

33. В течение первых 3 месяцев темп инфляции был равен 3%, а в течение следующих 2 месяцев — 4%. На сколько процентов увеличились цены за 5 месяцев?

34. Месячная заработная плата 1 февраля 1996 г. составила 900 тыс. руб., а цена товара — 18 тыс. руб. 1 августа 1996 г. заработная плата достигла 1 млн руб., а цена товара повысилась до 36 тыс. руб. Среднемесячный темп инфляции в рассматриваемый период составлял 10%. Как изменилась (в рублях и процентах) реальная цена товара с учетом инфляции, и как изменилась реальная заработная плата за рассматриваемый период?

35. Темпы инфляции за прошедший год по месяцам составили соответственно 7, 5, 6, 9, 10, 12, 6, 8, 7, 11, 9, 7%. Определить:

а) средний ежемесячный темп инфляции;

б) общий уровень инфляции за год;

в) на сколько процентов возросли цены с 1 января по 1 апреля;

г) во сколько раз возросли цены на 1 ноября по отношению к ценам на 1 февраля;

д) на сколько процентов цены на 1 июня будут ниже цен на 1 октября.

36. Известны номинальные цены на 1 марта товаров A, B и C — соответственно 10, 9 и 11 тыс. руб.; а на 1 сентября — соответственно 21, 20 и 22 тыс. руб. Определить:

а) на сколько процентов изменились реальные цены товаров за этот период; как изменились относительные цены товаров B и C к товару A;

б) какие из указанных товаров стали относительно дешевле (дороже) в ходе инфляционного процесса и на сколько процентов.

37. Кредит в 10 тыс. руб. выдан на два года. Реальная доходность должна составлять 11% годовых (проценты сложные). Расчетный уровень инфляции — 16% в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита, а также наращенную сумму.

38. При уровне инфляции 80% в год капитал вкладывается на 1 год под номинальную ставку 50%, начисление процентов ежемесячное. Какова реальная доходность этой операции?

Операции с валютой

1. Доллары были приобретены по курсу 6 руб/долл. и через 1,2 года проданы по 6,6 руб/долл. (6,9 руб/долл.). Темп инфляции за этот промежуток времени составил 12%. Определить доходность финансовой операции.

2. В условиях задачи 1 положить сложную ставку наращения СКВ, равную 14% годовых.

3. Доллары были проданы по курсу 6 руб/долл., а полученная сумма помещена на депозит по сложной процентной ставке 10% (40%) годовых. Через 1,2 года наращенная сумма была истрачена на покупку долларов по курсу 6,6 руб/долл. Темп инфляции доллара за этот промежуток времени составил 4%. Определить доходность финансовой операции.

4. Предполагается поместить 2 тыс. долл. на рублевом депозите. Курс продажи на начало срока депозита — 28,56 руб. за 1 долл.; курс покупки доллара в конце операции — 29,30 (28,02) руб. Процентные ставки $i = 22$, $j = 15$ (14). Схема расчета 30 / 360. Срок депозита — месяц.

5. Заемщик в Москве договорился с кредитором в Нью-Йорке о покупке девизы[1] 5 млн руб. В Москве 1 долл. стоит 29,22 руб., а в Нью-Йорке — 29,68 руб. Какой из способов предоставления и возврата долга (в Москве или в Нью-Йорке) кредитору наиболее выгоден?

6. Заемщик в Москве должен возвратить кредитору в Париже долг 200 тыс. евро. Курсы обмена валют в четырех странах приведены в табл. I.1. Какой девизой (в какой валюте) заемщику выгоднее всего оплатить долг?

Таблица I.1

Страна	Сумма	Рубль	Евро
Россия	100 руб.	100	2,91
Франция	100 евро	3440	100
Великобритания	100 ф. ст.	5138	145
США	100 долл.	2906	84

[1] Девиза — платежные и кредитные документы (банкноты, векселя, чеки, переводы, аккредитивы и т. д.), предназначенные для международных расчетов.

Консолидация платежей

1. Фирма получила кредит на сумму 90 тыс. руб. под 10% годовых (простые проценты). Кредит должен быть погашен двумя платежами: первый — 500 тыс. руб. с процентами через 90 дней, второй — 400 тыс. руб. с процентами через 120 дней. Впоследствии фирма договорилась с кредитором об объединении платежей в один со сроком погашения через 150 дней. Определить размер консолидированного платежа, если $K = 360$.

2. Фирма в погашение задолженности банку за предоставленный под 15% годовых (простые проценты) кредит, полученный 1 января, должна произвести три платежа — 2, 2,7 и 3,3 млн руб. в сроки 20 апреля, 25 мая, 15 июня соответственно. Фирма предложила банку объединить все платежи и один и погасить его 1 июня. Определить размер консолидированного платежа, если $K = 365$.

3. Два платежа 1,7 и 1,3 млн руб. со сроками погашения 1 год 30 дней и 1 год 45 дней, отсчитываемыми от одной даты, заменяются одним платежом со сроком 1 год 75 дней. Стороны согласились на консолидацию платежей при использовании ставки сложных процентов 9%. Определить консолидированную сумму.

4. Фирма имеет ряд финансовых обязательств перед одним кредитором — 2,5, 3,1 и 2,7 млн руб., которые должна погасить через 40, 70 и 160 дней соответственно после 1 января текущего года. По согласованию стороны решили заменить их одним платежом, равным 9 млн руб., с продлением срока оплаты, используя процентную ставку 12%. Определить современную величину объединяемых платежей.

5. Платежи в размере 2,5, 3,1 и 2,7 млн руб. должны быть внесены через 40, 70 и 160 дней соответственно после 1 января текущего года. Достигнуто соглашение на объединение платежей без увеличения итоговой суммы. Определить срок уплаты консолидированного платежа.

6. Предстоящие платежи и сроки уплаты, исчисленные от одной даты, равны: $S_1 = 1{,}2$ млн руб., $n_1 = 35$ дней; $S_2 = 1{,}5$ млн руб., $n_2 = 55$; $S_3 = 2{,}3$ млн руб., $n_3 = 75$. Достигнуто соглашение об объединении трех платежей в один, равный 5,5 млн руб., с учетной ставкой 7%. Определить срок уплаты консолидированного платежа.

7. Два платежа: $S_1 = 1{,}4$ млн руб. и $S_2 = 1{,}9$ млн руб. со сроками погашения $n_1 = 2$ года, $n_2 = 3$ года, объединяются в один — 4 млн руб., с использованием сложной процентной ставки 6%. Определить срок уплаты консолидированного платежа.

8. Суммы в размерах 5, 10 и 15 млн руб. должны быть выплачены соответственно через 40, 90 и 100 дней. Принято решение заменить их одним платежом 50 млн руб. Найти срок консолидированного платежа при использовании в расчетах процентной ставки 20%.

9. Два платежа 1 и 0,5 млн руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Стороны согласились на применении при конверсии простой ставки, равной 20%. Определить консолидированную сумму, если $K = 365$.

10. Суммы в размере 10, 20 и 15 млн руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом. Определить современную стоимость заменяемых платежей при условии, что процентная ставка — 10% и $K = 365$.

11. Платежи 100, 150 и 180 млн руб. с выплатами через 30, 50 и 70 дней соответственно заменяются одним платежом 450 млн руб. Найти срок консолидированного платежа, если в расчетах используется простая ставка 20% и $K = 365$.

12. Объединяются три платежа — 3, 5 и 10 млн руб. со сроками уплаты через 1, 2 и 3 года в один платеж — 16 млн руб. В расчетах используется сложная ставка 10% годовых. Найти срок консолидированного платежа.

13. Долг разделен на две суммы — 20 и 10 млн руб., которые по начальному соглашению должны быть выплачены соответственно 1 апреля и 1 сентября. Впоследствии порядок выплат был изменен: 1 июня должны быть выплачены 15 млн руб., а оставшаяся сумма — 1 декабря. Найти оставшуюся часть долга при использовании в расчетах простой ставки 15% годовых (временна́я база — 365 дней, точное число дней ссуды). Принять за базовую дату приведения момент выплаты 10 августа.

14. По начальному договору должна быть произведена выплата 50 млн руб. через 4 года. Эти условия изменены следующим образом: через первые 2 года выплатить 30 млн руб., а оставшуюся сумму — через следующие 3 года. В расчетах используется сложная ставка 10% годовых. Найти оставшуюся сумму.

15. Предприниматель должен выплатить своему смежнику за поставку продукции 100 тыс. руб. через 3 месяца, еще 200 тыс. через 5 месяцев и 150 тыс. через последующие 2 месяца. Предприниматель предлагает сделать выплату одним платежом в сумме 470 тыс. руб. К какому сроку он должен сделать эту выплату, если в расчетах учитывается сложная ставка 45% годовых?

16. По условиям договора Сидоров должен выплатить Петрову 5 тыс. руб. сегодня и 3 тыс. руб. через 2 года. Сидоров предлагает изменить условия платежа следующим образом: вернуть 30% совокупной выплаты через 1 год, а оставшуюся сумму — через следующие 2 года. Какими должны быть новые платежи, чтобы финансовые взаимоотношения сторон не изменились при использовании в расчетах сложной ставки 30% годовых?

17. По первоначальному обязательству необходимо заплатить 20 марта сумму 50 тыс. руб., а 25 августа — 30 тыс. руб. После пересмотра данного обязательства было решено заплатить 40 тыс. руб. 5 мая, а остальную сумму — 25 сентября. Определить величину оставшейся выплаты, если в расчетах использовалась простая ставка 40% годовых. Все выплаты привести к дате последнего платежа.

18. Предприятие обязалось уплатить своему поставщику за поставленные материалы 3 млн руб. через 3 месяца после поставки, 2 млн —

через 4 месяца и 3 млн — через 6 месяцев. Далее стороны решили объединить платежи и выплатить единую сумму через 5 месяцев после поставки. Чему равна величина этого платежа при начислении простых процентов по ставке 30%?

19. В банк положены 300 тыс. руб., на которые ежемесячно начисляются сложные проценты по ставке 24%. Через 4 месяца были сняты 5 тыс. руб., а через 8 месяцев вклад был закрыт. Какая сумма была на счете к моменту закрытия вклада (решить задачу при помощи дисконтирования)?

20. Платежи 10 и 15 млн руб. со сроком уплаты соответственно через 2 года и 5 лет объединяются в один со сроком уплаты через 4 года. В расчетах используется сложная ставка 15%. Найти размер консолидированного платежа.

21. Два платежа — 1000 и 500 руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней — объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны согласились на применение простой ставки, равной 10% годовых. Найти консолидированную сумму долга ($K = 365$).

22. Платежи в 1000 и 2000 руб. со сроками уплаты 2 и 3 года соответственно объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20%. Найти сумму консолидированного платежа.

23. Имеются два кредитных обязательства — 500 и 600 руб. со сроками уплаты соответственно 1 октября и 1 января (нового года). По согласованию сторон обязательства были пересмотрены на новых условиях: первый платеж в размере 700 руб. должник вносит 1 февраля, остальной долг он выплачивает 1 апреля. При расчетах используется простая процентная ставка 10% годовых. Определить величину второго платежа — P_0. Базовая дата (дата приведения) — 1 января (нового года); 1 октября — 274-й порядковый день в году; 1 января — 356-й или 1-й день в году; 1 февраля — 32-й день в году; 1 апреля — 91-й день.

24. Кредитор предоставил заемщику четыре ссуды по схеме простых процентов с годовой процентной ставкой 20%, параметры которых указаны в табл. I.2.

Таблица I.2

Номер ссуды	Размер ссуды, руб.	День выдачи	День погашения
1	100 000	01.06.2005	01.10.2005
2	200 000	01.07.2005	01.11.2005
3	200 000	01.08.2005	01.12.2005
4	500 000	01.09.2005	01.01.2006

После получения последней ссуды заемщик захотел консолидировать все ссуды. Используя способ расчета 365 / 360, найти дату консолидированного платежа и определить, какую сумму денег заемщик должен выплатить кредитору в этот день.

25. Три платежа: 5 тыс. руб. со сроком 130 дней, 3 тыс. со сроком 165 дней и 8 тыс. со сроком 320 дней, заменяются одним со сроком 250 дней. Стороны договорились об использовании простой процентной ставки 20% годовых. Определить сумму консолидированного платежа, если годовой дивизор — 365 дней.

26. Три платежа: 5 тыс. руб. со сроком 2 года, 4 тыс. руб. со сроком 4 года и 6 тыс. руб. со сроком 5 лет, заменяются одним со сроком 3 года. Стороны договорились об использовании сложной процентной ставки 25% годовых. Определить сумму консолидированного платежа.

27. Три платежа: 8 тыс. руб. со сроком 130 дней, 10 тыс. руб. со сроком 160 дней и 4 тыс. руб. со сроком 200 дней, заменяются одним в размере 21 тыс. руб. Стороны договорились об использований простой процентной ставки 20% годовых. Определить срок консолидированного платежа, если годовой дивизор — 365 дней.

28. Три платежа: 2 тыс. руб. со сроком 2 года, 4 тыс. руб. со сроком 3 года и 3 тыс. руб. со сроком 4 года, заменяются одним в размере 8 тыс. руб. Стороны договорились об использовании сложной процентной ставки 18% годовых. Определить срок консолидированного платежа.

Доходность финансовых операций

1. Ссуда 1 млн руб. выдана на 240 дней (годовой дивизор — 360 дней) под простые проценты по ставке 12% годовых. При выдаче ссуды кредитором удержаны комиссионные в размере 10 тыс. руб. Определить полную доходность финансовой операции.

2. Ссуда выдана на 4 (2) года под сложные проценты по ставке 12% годовых. При выдаче ссуды кредитором удержаны комиссионные в размере 0,8% от суммы ссуды. Определить полную доходность финансовой операции.

3. Вексель учтен по простой учетной ставке 10% годовых за 240 дней до наступления срока погашения. За 150 дней до погашения этот вексель продан с дисконтированием по простой учетной ставке 12% (17%) годовых. Временна́я база учета равна 360 дней, временна́я база наращения — 365 дней. Определить доходность финансовой операции в виде простой ставки наращения.

4. Депозитный сертификат куплен за 240 дней до наступления срока погашения за 800 руб. За 150 дней до погашения этот депозитный сертификат продан за 820 руб. Временна́я база принимается равной 365 дням. Определить доходность финансовой операции в виде простой ставки наращения.

5. Депозитный сертификат со сроком 240 дней с номинальной стоимостью 1000 руб. с объявленной ставкой сертификата 10% годовых приобретен в момент эмиссии. За 150 дней до погашения этот депозитный сертификат продан за 1020 (990) руб. Годовой дивизор — 365 дней. Определить цену сертификата в момент погашения и доходность финансовой операции в виде простой ставки наращения.

6. Депозитный сертификат куплен за 150 дней до наступления срока погашения за 1020 (1100) руб. Номинальная стоимость этого сертификата — 1000 руб., срок с момента выпуска до момента погашения — 240 дней, объявленная ставка — 10% годовых. Годовой дивизор — 365 дней. Определить доходность финансовой операции в виде простой ставки наращения.

7. Потребительский кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 4 года по ставке 8% годовых. Погасительные платежи выплачиваются ежемесячно. Определить величину ежемесячных выплат и полную доходность кредитора.

8. Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 2 года по сложной процентной ставке 8% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 5 тыс. руб. Проценты выплачиваются раз в полгода. Определить полную доходность кредитора.

9. Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 2 года по сложной процентной ставке 8% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 5 тыс. руб. Проценты выплачиваются раз в году. Определить полную доходность кредитора.

10. Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 2 года по сложной процентной ставке 8% годовых. Проценты выплачиваются раз в полгода. Определить полную доходность кредитора.

11. Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 2 года по сложной процентной ставке 8% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 5 тыс. руб. Проценты и основной долг выплачиваются раз в полгода, сумма расходов постоянна. Определить полную доходность кредитора.

12. Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на 2 года по сложной процентной ставке 8% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 5 тыс. руб. Проценты и основной долг выплачиваются раз в год, сумма расходов постоянна. Определить полную доходность кредитора.

13. Фирме предоставлен кредит на срок 5 лет с расчетом по схеме сложных процентов с годовой процентной ставкой 10%. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,8% от суммы кредита. Определить доходность этой финансовой операции для кредитора. Рассчитать, на сколько процентов удержание комиссионных повышает доходность финансовой операции для кредитора.

14. Фирме предоставлен кредит на срок 270 дней с расчетом по схеме простых процентов с годовой процентной ставкой 12%. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 1% от суммы кредита. Годовой дивизор — 360 дней. Определить доходность этой финансовой операции для кредитора. Рассчитать, на сколько процентов удержание комиссионных повышает доходность финансовой операции для кредитора.

15. Вексель на сумму 500 тыс. руб. учитывается банком за 3 месяца до момента погашения по годовой учетной ставке 12%. Считая, что

в году 12 месяцев по 30 дней, найти доходность этой финансовой операции для банка.

Индивидуальные задания к части I

№ 1. Применение простых и сложных процентов в банковской практике

Вклад в сумме P внесен в банк в момент времени d_i, m_i, y_i, (d_i — номер дня, m_i — номер месяца, y_i — номер года) под r% годовых. Рассчитать и проанализировать конечные суммы выплат на указанные даты изъятия (табл. I.3):

а) при начислении простых процентов;
б) начислении сложных процентов;
в) непрерывном начислении процентов;
г) использовании комбинированной схемы;
д) капитализации сложных процентов, происходящей m раз в год.

Таблица I.3

Вариант	Параметры финансовой операции (вклада)					
	дата вклада	дата 1 изъятия	дата 2 изъятия	P, тыс. руб.	r, %	m
1	12.05.2001	20.08.2002	05.08.2003	260	14	4
2	22.03.2001	10.07.2002	13.07.2003	60	17	2
3	02.05.2001	20.06.2002	26.09.2003	40	15	3
4	09.06.2001	20.11.2002	05.12.2003	350	18	2
5	18.03.2001	10.04.2002	13.11.2003	66	22	1
6	08.04.2001	07.07.2002	26.09.2003	30	7	6
7	17.02.2001	20.11.2002	05.03.2003	50	6	5
8	22.03.2001	10.09.2002	13.07.2003	60	13	2
9	02.05.2001	09.08.2002	26.09.2003	40	12	4
10	09.09.2001	20.11.2002	05.12.2003	11	16	2

№ 2. Расчеты в условиях инфляции

Известен прирост цен за первые 3 месяца анализируемого года. Вклад в сумме $S(0)$ внесен в банк 1 января анализируемого года под r% годовых. Данные для каждого варианта приведены в табл. I.4.

1. Рассчитать покупательную способность конечной суммы выплаты банком клиенту через период T лет при начислении по схеме: а) простых процентов; б) сложных процентов.
2. Определить темп и индекс инфляции за I квартал года.
3. Определить темп и индекс инфляции за период T лет при условии постоянного поквартального уровня инфляции.

4. Определить среднегодовой темп и индекс инфляции по приросту цен за первые 3 месяца.

5. Рассчитать покупательную способность конечной суммы выплаты банком денег клиенту через период T лет при начислении процентов по схеме простых процентов и прогнозируемой инфляции.

6. Рассчитать покупательную способность конечной суммы выплаты банком денег клиенту через период T лет при начислении процентов по схеме сложных процентов и прогнозируемой инфляции.

7. Рассчитать брутто-ставки для схемы простых и сложных процентов.

8. Проанализировать полученные результаты.

Таблица I.4

Вариант	Прирост цен по месяцам, %			Сумма вклада $S(0)$, тыс. руб.	Банковская ставка r, %	Период T, лет
	январь	февраль	март			
1	1,5	2,3	0,5	30	13	2,0
2	0,8	1,2	2,2	50	12	3,0
3	1,4	2,1	1,4	60	16	1,0
4	2,4	2,6	3,2	40	10	1,75
5	2,3	3,5	1,7	11	9	2,25
6	1,5	2,3	2,6	86	23	2,5
7	1,2	1,5	2,3	44	8	2,75
8	2,1	0,2	1,5	50	10	3,25
9	2,3	2,3	1,2	150	27	1,5
10	1,2	1,2	2,3	66	11	1,25

№ 3. Операции с валютой

Предполагается поместить P_V миллионов долларов на рублевом депозите. Курс продажи на начало срока депозита — K_0 за 1 долл.; курс покупки доллара в конце операции — $K_1^{(1)}(K_1^{(2)})$ руб. Процентные ставки — i_r, i_v%. Схема расчета — 30 / 360. Срок депозита — m месяцев. Ежемесячный постоянный темп инфляции составляет α_r, α_v%.

Необходимо разместить на валютном: депозите сумму в миллионах рублей P_R, конвертировав ее предварительно в доллары (табл. I.5).

Найти наращенную стоимость вкладов.

Таблица I.5

Вариант	K_0	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(2)}$	P_r	P_v	i_r	i_v	α_r	α_v	m
1	29,3	32,5	29,0	2,0	1,0	15	12	1,0	2,5	3
2	28,4	31,1	28,2	3,0	0,8	16	14	2,0	1,5	4

Окончание табл. I.5

Вариант	K_0	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(2)}$	P_r	P_v	i_r	i_v	α_r	α_v	m
3	28,5	31,2	28,4	1,7	0,6	14	24	3,0	2,0	6
4	29,2	30,5	29,1	1,5	1,2	12	14	2,0	2,0	12
5	29,5	31,6	28,8	4,2	1,3	13	16	1,5	2,5	6
6	28,2	30,8	27,6	2,5	0,9	20	21	1,0	1,5	3
7	28,9	29,9	28,4	2,4	0,6	22	16	0,5	2,0	4
8	27,8	32,5	27,5	2,6	1,4	18	17	2,5	3,0	8
9	29,1	31,2	27,8	5,0	2,5	19	20	2,0	2,5	9
10	29,6	32,0	27,2	2,2	0,7	23	24	1,0	1,0	12

Часть II
ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Потоки платежей

1. Пусть имеется график платежей: 1 января 1999 г. — 20 тыс. руб., 1 июня 1999 г. — 30 тыс., 1 января 2000 г. — 10 тыс., 1 января 2001 г. — 40 тыс. Определить сумму задолженности на 1 января 2001 г. и ее современную стоимость на момент выплаты первой суммы при ставке наращения 15% годовых.

Постоянные ренты

1. В течение 7 лет в фонд в конце каждого года поступают средства по 10 тыс. руб., на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

2. В условиях задачи 1 предположить, что проценты начисляются поквартально. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

3. В условиях задачи 1 предположить, что выплаты производятся поквартально. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

4. В условиях задачи 1 предположить, что проценты начисляются, а выплаты производятся ежемесячно. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

5. В условиях задачи 1 предположить, что проценты начисляются, а выплаты производятся ежемесячно. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

6. В условиях задачи 1 предположить, что проценты начисляются ежемесячно (поквартально), а выплаты производятся поквартально. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

7. В фонд в течение 7 лет в конце каждого года поступают средства по 10 тыс. руб., на которые начисляются проценты по силе роста 15%

годовых, причем выплаты производятся поквартально (раз в году), а проценты начисляются непрерывно. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

8. В фонд в течение 7 лет в конце каждого года поступают средства по 10 тыс. руб., на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются непрерывно. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

9. В фонд в течение 7 лет ежегодно в начале каждого года поступают средства по 10 тыс. руб., на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить коэффициент наращения ренты и величину фонда на конец срока. Определить коэффициент приведения ренты и современную стоимость фонда.

10. Создается фонд, в который делаются взносы в течение 10 лет один раз в конце года по 50 тыс. руб. На собранные средства начисляются проценты по сложной ставке 10%. Определить размер фонда к концу срока.

11. Найти наращенную сумму ренты при условии, что процент начисляется ежеквартально. Взносы делаются в течение 10 лет один раз в конце года по 40 тыс. руб. Сложная годовая ставка равна 12%.

12. Для создания премиального фонда один раз в год производятся взносы 4 тыс. руб. На вносимые средства начисляются проценты по сложной ставке 6% годовых. Определить размер фонда через 5 лет, если начисление процентов происходит 2 раза в году.

13. Создается фонд на основе ежегодных отчислений в начале года 10 тыс. руб. в течение 5 лет по сложной процентной ставке 20%. Найти сумму фонда к концу периода.

14. Заменить 10-летнюю годовую ренту с годовым платежом 600 долл. на 7-летнюю. Ставка — 8% в год.

15. Заем был взят под 16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 долл. в течение 2 лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до 6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть размер выплаты?

16. Что выгоднее купить: оборудование стоимостью 20 тыс. долл. или арендовать его на 8 лет с ежегодным арендным платежом 3 тыс. долл., если ставка процентов — 6%, а норматив доходности — 15%? Обосновать решение.

17. Покупатель предложил два варианта расчета при покупке квартиры:

а) 5 тыс. долл. немедленно, а затем 1 тыс. долл. в течение 5 лет;

б) 8 тыс. долл. немедленно, и затем по 300 долл, в течение 5 лет. Годовая ставка — 5%. Выбрать более выгодное решение.

18. Страховая компания, заключившая договор с производственной фирмой на 3 года, поступающие ежегодные взносы — 5 млн руб. — помещает в банк под 15% годовых с начислением процентов по полугодиям. Определить сумму, полученную страховой компанией по этому контракту.

19. Фирмой предусматривается создание в течение 3 лет фонда развития в размере 150 тыс. руб. Фирма имеет возможность ассигновать на эти цели ежегодно 41,2 тыс. руб., помещая их в банк под 20% (сложных) годовых. Какая сумма потребовалась бы фирме для создания фонда в 150 тыс. руб., если бы она ее поместила в банк на 3 года под 20% годовых?

20. Семья хочет накопить 12 тыс. долл. на покупку машины, вкладывая в банк 1000 долл. ежегодно. Годовая ставка в банке — 7%. Определить период, за который накопится нужная сумма.

21. Для мелиоративных работ государство перечисляет фермеру 500 долл. в год. Деньги поступают на специальный счет и на них начисляют каждые полгода 4% сложных годовых. Сколько накопится на счете через 5 лет?

22. Каждые полгода на банковский счет писателя издательство перечисляет 2 тыс. руб., на которые банк начисляет каждые полгода 7% годовых. Сколько будет на счете через 4 года?

23. Какая сумма предпочтительнее при ставке 6%: 1000 долл. сегодня или 2000 долл. через 8 лет?

24. Сын имел в банке счет 50 тыс. руб., на которые ежемесячно начислялись 0,8%. Сын уехал в командировку за границу, доверив отцу за 10 лет истратить весь его счет. Сколько будет получать в месяц отец?

25. В ходе судебного заседания выяснилось, что по вине пенсионного фонда города N в течение 10 лет недоплачивали 100 руб. пенсии ежемесячно. Суд обязал фонд выплатить всю задолженность с процентами (12% сложных годовых). Какова сумма выплаты?

26. В ходе судебного заседания выяснилось, что город N недоплачивал налогов 100 руб. ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние 2 года налоги вместе с процентами (3% ежемесячно). Какую сумму заплатит город N?

27. Семья собирается через 6 лет купить дачу за 12 тыс. долл. Какую сумму (равномерно) ей нужно каждый год из этих 6 лет добавлять на счет в банке, если годовая ставка процентов 8%?

28.Заменить годовую 10-летнюю ренту с годовым платежом 1000 долл. на ренту с полугодовым платежом по 600 долл. и найти n. Годовая ставка — 8%.

29. Формируется фонд на основе ежегодных отчислений в сумме 5 млн руб. с начислением на них процентов по сложной ставке 20%. Определить фонд через 8 лет.

30. В фонд в течение n лет поступают одинаковые платежи. Начисление процентов происходит раз в году. Платежи производятся p раз

в год. Найти коэффициент наращения ренты при процентной ставке в i%. Расчетные данные приведены в табл. II.1.

Таблица II.1

Вариант	n	p	i
1	5	4	10
2	7	2	15
3	6	12	12
4	8	1	13
5	9	4	14
6	7	4	15
7	10	2	10
8	11	12	11
9	8	2	12
10	9	4	13

31. Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке 14% годовых для накопления через 3 года суммы 50 тыс. руб.

32. Взят кредит на сумму 50 тыс. руб. сроком на 4 года под 15% годовых. Найти размер ежегодных погасительных платежей в конце года.

33. Размер ежегодных платежей — 5 тыс. руб., процентная ставка — 12% годовых, наращенная сумма — 30 тыс. руб. Определить срок простой ренты.

34. Определить срок погашения кредита в 30 тыс. руб. при ежегодных платежах 9 тыс. руб. и процентной ставке 15% годовых для рент пренумерандо и постнумерандо.

35. Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год 5 тыс. руб., чтобы через 5 лет накопить сумму 40 тыс. руб.

36. Простая рента с ежегодными платежами 1000 руб., процентной ставкой 12% годовых и сроком 4 года отложена на 2 года. Найти наращенную сумму и наращенную стоимость ренты.

37. Сумму 50 тыс. руб. под 4% годовых инвестировали. Найти размер ежегодных выплат в конце каждого года.

Переменные потоки платежей

1. Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 2,5 тыс. руб. (уменьшаться на 2,5 тыс. руб.) в течение 10 лет при поступлении денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 тыс. руб. Начисление процентов производится по ставке 12% годовых. Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

2. Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 5% (или уменьшаться на 5%) в течение 10 лет при поступлении денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 тыс. руб. Начисление процентов производится по ставке 12% годовых. Определить современную стоимость и наращенную сумму переменного потока платежей.

3. Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей имеет параметры: базовый уровень выпуска $R = 20$ тыс. руб. в год, ежегодное увеличение потока платежей — 1000 руб., сила роста — 10%. Срок этого потока платежей составляет 5 лет. Определить современную стоимость и наращенную сумму этого потока платежей.

4. Экспоненциально изменяющийся непрерывный поток платежей имеет параметры: базовая выплата $R = 20$ тыс. руб. в год, $b = 0{,}05$ ($b = 0{,}15$), сила роста $\delta = 10\%$. Срок этого потока платежей составляет 5 лет. Определить современную стоимость и наращенную сумму этого потока платежей.

5. Экспоненциально изменяющийся непрерывный поток платежей имеет параметры: базовая выплата $R = 20$ тыс. руб. в год, $b = 0{,}10$, сила роста $\delta = 10\%$. Срок этого потока платежей составляет 5 лет. Определить современную стоимость и наращенную сумму этого потока платежей.

6. В фонд в конце каждого года поступают средства в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно (раз в году). Наращенная сумма в конце срока составит 100 тыс. руб. Определить коэффициент наращения ренты и годовую выплату.

7. В фонд ежегодно поступают средства в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются непрерывно. Современная стоимость ренты составляет 50 тыс. руб. Определить коэффициент приведения ренты и ее ежегодную выплату.

8. В фонд ежегодно поступают средства в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся и проценты начисляются непрерывно. Современная стоимость ренты составляет 50 тыс. руб. Определить коэффициент приведения ренты и ее ежегодную выплату.

9. В фонд ежегодно в начале года (в середине года) поступают средства в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно (раз в году). Наращенная сумма в конце срока составит 100 тыс. руб. Определить годовую выплату ренты.

10. Спустя 3 года после образования фонда в него начинают поступать средства в конце каждого года в течение последующих 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых. Величина фонда в конце срока составляет 30 тыс. руб. Определить величину ежегодных выплат.

11. Бесконечная рента куплена за 100 тыс. руб. На выплаты ренты начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить:

а) квартальную и годовую выплату ренты при ежемесячном начислении процентов и поквартальных выплатах;

б) квартальную и годовую выплаты ренты при начислении процентов раз в году и поквартальных выплатах;

в) годовую выплату ренты при начислении процентов и выплатах раз в году.

12. Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год на 2,5 тыс. руб. в течение 10 лет при поступлении денег в конце каждого года. Первая выплата равна 50 тыс. руб. Начисление процентов производится по ставке 12% годовых. Современная стоимость переменного потока платежей равна 300 тыс. руб. Определить выплату, сделанную в конце первого года.

13. Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться каждый год по закону арифметической прогрессии в течение 10 лет при поступлении денег в конце каждого года. Начисление процентов производится ио ставке 12% годовых. Выплата в конце первого года переменного потока платежей равна 44 тыс. руб. Современная стоимость переменного потока платежей — 300 тыс. руб. Определить постоянное годовое приращение выплат.

14. В фонд ежегодно поступают средства, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно. Величина фонда на конец срока составит 100 тыс. руб., годовая выплата — 10 тыс. руб. Определить срок ренты.

15. Долг в размере 50 тыс. руб. погашается равными частями в конце каждого квартала по 2,5 тыс. руб. На взносы начисляются проценты раз в году по ставке 15% годовых. Определить время погашения долга.

16. В фонд ежегодно поступают средства, на которые начисляются проценты по силе роста 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются непрерывно. Величина фонда на конец срока составит 100 тыс. руб., годовая выплата — 10 тыс. руб. Определить срок ренты.

17. Пусть дана рента постнумерандо сроком 7 лет, первый член которой равен 40 тыс. руб. Процентная ставка — 15% годовых. Платежи увеличиваются с каждым кварталом на 3%. Определить наращенную сумму.

Финансовая эквивалентность обязательств (консолидация рент)

1. Три платежа: 8 тыс., 10 тыс. и 4 тыс. руб. с выплатами 1 апреля, 15 июня и 1 сентября 2009 г. соответственно, — заменяются двумя, причем 1 июля выплачивается 20 тыс. руб., а остаток — 1 декабря этого

же года. Стороны договорились об использовании простой процентной ставки 25% годовых, годового дивизора 360, количестве дней в месяце 30. Определить остаток долга при базовых датах: 1 апреля, 1 июля и 1 декабря.

2. Три платежа: 8 тыс., 10 тыс. и 4 тыс. руб. с выплатами 1 апреля, 15 июня и 1 сентября 2009 г. соответственно, — заменяются двумя с выплатами 20 тыс. руб. 1 июля 2009 г. и 2,6 тыс. руб. Стороны договорились об использовании простой процентной ставки 25% годовых, годового дивизора 360, количестве дней в месяце 30. Определить дату выплаты суммы в 2,6 тыс. руб.

3. Три платежа: 2 тыс., 4 тыс. и 3 тыс. руб. со сроками 2, 3 и 4 года соответственно, заменяются двумя, причем через 1 год выплачивается 2 тыс. руб., а остаток — через 5 лет. Пересчет осуществляется по сложной процентной ставке 25% годовых. Определить остаток долга.

4. Три платежа: 2 тыс., 4 тыс. и 3 тыс. руб. со сроками 2, 3 и 4 года соответственно, — заменяются двумя с выплатами 2 тыс. руб. через 1 год и 8,5 тыс. руб. Пересчет осуществляется по сложной процентной ставке 25% годовых. Определить срок выплаты суммы 8,5 тыс. руб.

5. Три платежа: 2 тыс. , 4 тыс. и 3 тыс. руб. со сроками 2, 3 и 4 года соответственно, — заменяются рентой с ежеквартальными выплатами в году со сроком 5 лет. Пересчет осуществляется по сложной процентной ставке 18% годовых. Определить ежеквартальную выплату.

6. Три ренты заменяются одной срочной с ежемесячными выплатами 3000 руб. в месяц. Параметры заменяемых рент:

— годовая рента с ежегодными выплатами 10 тыс. руб. в год в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых;

— годовая рента с ежегодными выплатами 10 тыс. руб. в год в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых, причем проценты начисляются поквартально;

— годовая рента с ежегодными выплатами 10 тыс. руб. в год в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно.

Пересчет осуществляется по сложной процентной ставке 18% годовых. Определить срок заменяющей ренты.

7. Три немедленные годовые ренты постнумерандо заменяются одной, отложенной на 4 года рентой постнумерандо. Срок заменяющей ренты — 8 лет, включая отсрочку. Характеристики рент: ежегодные выплаты 80 тыс., 150 тыс. и 310 тыс. руб., 2 года, 5 и 10 лет соответственно. Пересчет осуществляется по сложной процентной ставке 20% годовых. Определить размер платежа заменяющей ренты.

8. Консолидируются ренты, предусматривающие годовые платежи 1 тыс., 2 тыс., 5 тыс. и 3 тыс. руб. Сроки этих рент 8, 11 и 14 лет, процентная ставка у заменяющей ренты — 8% годовых. Чему равен срок заменяющей ренты, если выплаты определены в размере 4 тыс. руб.?

9. Пусть немедленная рента постнумерандо 2 млн руб. и сроком 6 (12) лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Определить размер платежа заменяющей ренты.

10. Рента с условиями $R = 2$ млн руб., $n = 5$ (7) лет и $i = 12\%$, откладывается на 2 года без изменения сумм выплат. Найти новый срок ренты.

11. Пусть $R_1 = 2$, $n_1 = n_2 = n$ ($n_1 = 2$, $n_2 = 4$). Если годовая рента постнумерандо заменяется на квартальную, то при неизменности срока ренты и при условии $i = 12\%$ разовый платеж составит R. Найти величину разового платежа.

12. Годовая рента постнумерандо с 2 тыс. руб., $n_1 = 8$ лет заменяется на полугодовую со сроком 10 лет. Ставка — 20%. Определить размер выплат новой ренты.

Барьерные значения экономических показателей

1. Дать определение барьерного экономического показателя. Привести примеры барьерных экономических показателей.

2. В чем состоит основная идея метода барьерной (критической) точки? Какие пороговые значения можно определить этим методом? Как получают исходные данные для построения модели?

3. При каких условиях необходимо перейти от линейной модели барьерной точки к нелинейной? Как определяют вид функций затрат (стоимости) и их параметры?

4. Вывести формулу для вычисления барьерной ставки при сравнении денежных сумм (рассмотреть случаи начисления простых и сложных процентов).

5. Как модифицируется модель барьерной точки в условиях неопределенности? Как применяется сценарный подход при решении задачи определения барьерных показателей?

6. Как следует модифицировать задачу определения барьерного объема выпуска продукции, чтобы можно было применить бухгалтерский и финансовый подходы для ее решения?

7. В чем специфика бухгалтерского и финансового подходов? Почему применение этих методов дает разные результаты?

8. Как модифицируется бухгалтерский метод, если параметры модели зависят от времени?

Конверсия рент

1. Заменить годовую 10-летнюю ренту с годовым платежом 1000 долл. на ренту с полугодовым платежом по 600 долл. Годовая ставка — 8%. Найти срок ренты n.

2. Заменить 10-летнюю годовую ренту с годовым платежом 600 долл. на 7-летнюю. Ставка — 8% в год.

3. Каким должен быть платеж конечной годовой ренты длительностью 8 лет, чтобы ее современная величина была 16 тыс. руб. при ставке 10% годовых?

4. Заем был взят под 16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 ден. ед. в течение 2 лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до 6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть размер выплаты?

5. Первоначальный аннуитет имеет параметры R_1 = 2,5 тыс. руб., i = 8%, n_1 = 6 лет. Он заменяется на ренту с параметрами i = 10%, n_2 = 9 лет. Найти R_2.

6. Пусть немедленная рента постнумерандо с ежегодным платежом R = 3 тыс. руб., i = 8% откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Как изменится размер ежегодного платежа?

7. Рента с параметрами R = 1,5 тыс. руб., n_1 = 5 лет, i = 10% откладывается на 3 года без изменения размера ежегодного платежа. Найти новый срок и сбалансировать результат.

8. Объединяются три аннуитета с параметрами: R_1 = 1500 руб., $n_1 = 11$, $i_1 = 0{,}05$; R_2 = 800 руб., $n_2 = 6$, $i_2 = 0{,}08$; R_3 = 2700 руб.; $n_3 = 10$, $i_3 = 0{,}06$. Требуется заменить эти три ренты аннуитетом с параметрами $n = 10$, $i = 0{,}10$. Определить размер годового платежа. Какой вариант выгоднее?

9. Первоначальный аннуитет имеет параметры: R_1 = 2000 руб., i = 9%, n_1 = 5 лет. Он заменяется на ренту с параметрами i = 9%, n_2 = 8 лет. Найти R_2.

10. Пусть немедленная рента постнумерандо с ежегодным платежом R_1 = 2 тыс. руб., i = 9% откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Определить, как изменится размер ежегодного платежа.

11. Рента с параметрами R = 2 тыс. руб., n_1 = 5 лет, i = 9% откладывается на 2 года без изменения размера ежегодного платежа. Найти новый срок и сбалансировать результат.

12. Объединяются три аннуитета с параметрами: $R_1 = 1000$, $n_1 = 10$, $i_1 = 0{,}06$; $R_2 = 500$, $n_2 = 8$, $i_2 = 0{,}05$; $R_3 = 2000$, $n_3 = 12$, $i_3 = 0{,}05$. Требуется заменить эти три ренты аннуитетом с параметрами $n = 10$, $i = 0{,}06$. Определить размер годового платежа. Какой вариант выгоднее?

Погашение задолженностей

1. Пусть вкладчик открывает счет с начальной суммой 1000 руб. и ставкой 20% годовых. Полагая, что $t_0 = 0$ и считая допустимым отрицательное сальдо счета (основного и полного), найти по коммерческому и актуарному правилу состояния счета на конец года для каждого года из 5 лет, если операции вкладчика со счетом описываются потоком в годовой шкале:

$$CF = \{(1, 200), (2, -1500), (3, 900), (4, -200), (5, 200)\}.$$

2. В соответствии с обязательством долг в сумме 100 тыс. руб. должен быть погашен в течение 3 лет. Проценты начисляются по слож-

ной ставке 14% годовых. Погашение долга производится частичными платежами: в конце первого года выплачивается сумма 20 тыс. руб., в конце второго — 50 тыс., остаток — в конце третьего года. Определить сумму, выплачиваемую в конце срока.

3. Ссуда в размере 10 тыс. руб. выдана 1 февраля до 1 августа включительно под простые проценты — 18% годовых. В счет погашения долга 16 апреля поступило 6 тыс. руб., а 16 июня — 100 руб. Определить остаток долга на конец срока актуарным методом и по «правилу торговца».

4. Долг в сумме 1 млн руб., выданный под 12% годовых, выплачивается равными частями в течение 4 лет в конце каждого года. Для его погашения создается фонд, в котором на инвестируемые средства начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить размеры срочных выплат при ежегодной выплате процентов и при выплате процентов в конце срока.

5. Долг в сумме 1 млн руб. выдан под 12% годовых на 4 года. Долг выплачивается равными частями в течение последних 2 лет в конце года. Для погашения долга создается фонд, в котором на инвестируемые средства начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить размеры срочных выплат при ежегодной выплате процентов.

6. Сумму долга в 1 млн руб. необходимо погасить в течение 4 лет равными суммами. Выплаты основного долга производятся и проценты на долг по ставке 12% годовых начисляются в конце каждого года. Составить план погашения долга.

7. Сумму долга в 1 млн руб. необходимо погасить в течение 4 лет равными срочными уплатами. Срочные уплаты производятся в конце каждого года. Проценты на долг начисляются по ставке 12% годовых. Составить план погашения долга.

Сравнение коммерческих контрактов

1. На покупку товара ценой 50 тыс. руб. существуют два альтернативных контракта со следующими характеристиками.

Контракт 1: цена товара — 600 тыс. руб., срок кредита — 11 лет, из них льготный период — 3 года, проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода, ставка кредита — 12%, основная задолженность погашается в конце срока, проценты выплачиваются ежегодно.

Контракт 2: цена товара — 601 тыс. руб., срок кредита — 8 лет, из них льготный период — 3 года, проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода, ставка кредита — 11,5%, основная задолженность погашается в конце срока, проценты выплачиваются ежегодно.

Выбрать контракт, наиболее приемлемый для покупателя при ставке сравнения 17%.

2. На покупку товара ценой 50 тыс. руб. существуют два альтернативных контракта со следующими характеристиками.

Контракт 1: срок выплаты — 5 лет, процентная ставка — 12%.

Контракт 2: срок выплаты — 8 лет, ставка — 15%.

Сравнить контракт и выбрать наиболее выгодный.

3. Предлагается один и тот же товар по цене 80 тыс. руб., но с различными вариантами погашения кредита (табл. II.2).

Таблица II.2

Характеристики контракта	I вариант	II вариант
Цена P, тыс. руб.	90	90
I аванс при заключении контракта, тыс. руб.	5	6
II аванс через 6 месяцев, тыс. руб.	4	8
Льготный период L, лет	—	6
Ставка за кредит i, %	11	11
Срок аннуитета n, лет	6	10
Ставка сравнения q, %	13	13

Во втором варианте выплаты процентов в конце льготного периода. Сравнить варианты и выбрать наиболее выгодный.

4. Предлагается один и тот же товар с двумя вариантами уплаты (табл. II.3).

Таблица II.3

Характеристики контракта	I вариант	II вариант
Цена P, тыс. руб.	11,5	12
Аванс Q, тыс. руб.	2	3
Срок поставки t, лет	1	1
Срок кредита n, лет	9	11
Льготный период L, лет	2,5	3
Ставка за кредит i,%	11	10
Ставка сравнения q,%	14	14

Проценты за кредит выплачиваются в конце каждого года. Сравнить варианты и выбрать наиболее выгодный.

5. Условия двух контрактов следующие: $P_1 = 13\ 000$; $L_1 = 9\%$; $n_1 = 6$ лет; $P_2 = 14\ 000$; $L_2 = 8{,}5\%$; $n_2 = 4$ года, где L — льготный период. Определить предельные параметры второго контракта, приняв ставку сравнения за $q = 11\%$.

6. Пусть $P_1 = 5000$; $i_1 = 8\%$; $n = 5$; $P_2 = 5500$; $n = 5$. Найти i_2.

7. Условие базового варианта контракта: $P_1 = 15$ тыс. руб.; $i_1 = 10\%$; $n_1 = 8$ лет, погашение задолженности равными платежами в конце года. Второй контракт: $P_2 = 16$ тыс. руб.; $n_2 = 10$ лет. При какой минимальной ставке этот вариант будет конкурентоспособен?

8. Пусть $P_1 = 15$ тыс. руб.; $i_1 = 10\%$; $n_1 = 8$ лет; $i_2 = 9\%$; $n_2 = 10$ лет. Оценить предельное значение цены, т. е. найти P_2.

Индивидуальные задания к части II

№ 1. Расчет параметров постоянных рент

1. Размер ежегодных платежей R руб., срок n лет, проценты начисляются по сложной процентной ставке i% годовых. Найти наращенную сумму и современную стоимость простых рент постнумерандо и пренумерандо. Преобразовать эту простую ренту в общую ренту (проценты начисляются m раз в году, p платежей в году). Значения параметров ренты см. в табл. II.9.

2. Найти наращенную сумму и современную стоимость простых рент постнумерандо и пренумерандо, если размер ежегодных платежей W руб., срок n лет, проценты начисляются по сложной процентной ставке i% годовых: а) проценты начисляются m раз в году по ставке i / m%; б) p платежей в году; в) проценты начисляются m раз в году по ставке i / m%, p платежей в году.

3. Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке i% годовых для накопления через n лет суммы S руб.

4. Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке i% годовых для погашения в течение n лет долга A руб.

5. Размер ежегодных платежей — R руб., сложная процентная ставка — i% годовых, наращенная сумма — 5 руб. Определить сроки простых рент постнумерандо и пренумерандо.

6. Размер ежегодных платежей — R руб., сложная процентная ставка — i% годовых, современная стоимость — A руб.. Определить сроки простых рент постнумерандо и пренумерандо.

7. Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год R руб., чтобы через n лет накопить сумму 5 руб. (для рент постнумерандо и пренумерандо).

8. Определить, под какую процентную ставку нужно вносить каждый год R руб., чтобы через n лет погасить долг A руб. (для рент постнумерандо и пренумерандо).

9. Простая рента с ежегодными платежами R руб., сложной процентной ставкой i% годовых и сроком n лет отложена на t лет. Найти наращенную сумму и современную стоимость ренты.

10. Найти наращенную сумму и современную стоимость общей ренты (проценты начисляются от раз в году, p платежей в году). Размер платежей — W руб., срок — n лет, проценты начисляются по сложной процентной ставке i% годовых. Заменить эту ренту простой рентой.

11. Современная стоимость бессрочной ренты постнумерандо — A руб., сложная процентная ставка — i% годовых. Найти размер ежегодных выплат.

12.Найти современную стоимость общих бессрочных рент постнумерандо и пренумерандо (проценты начисляются m раз в году по ставке i / m%, p платежей в году). Размер платежей W руб. Индивидуальные данные приведены в табл. II.4.

Таблица II.4

Вариант	R	n	i	S	A	t	W	m	p
1	1500	4	16	7300	7300	2	1500	2	3
2	1600	4	11	8200	8200	3	1600	4	2
3	1700	5	17	9400	9400	4	1700	12	6
4	1800	5	18	10 300	10 300	3	1800	4	3
5	1900	4	9	7900	7900	4	1900	12	4
6	2000	3	13	6800	6800	3	2000	2	12
7	2100	4	19	8700	8700	2	2100	12	2
8	2200	3	8	6700	6700	2	2200	2	6
9	2300	3	7	7800	7800	4	2300	4	8
10	2400	3	14	9200	9200	3	2400	12	4

№ 2. Постоянные ренты

1. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение n лет. Размер разового платежа R млн руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке j процентов годовых.

Предположим, что:

— проценты начисляются m раз в году;

— платежи выплачиваются p раз в году;

— выплата членов ренты производится m раз в году и начисление процентов производится p раз в году;

— проценты начисляются непрерывно с силой роста δ;

— проценты начисляются в начале срока;

— проценты начисляются в середине срока.

Какой будет величина фонда на конец срока? Какова современная стоимость фонда?

Индивидуальные данные приведены в табл. II.5.

Таблица II.5

Вариант	n, лет	j, %	R, млн руб.	m	P	δ
1	5	15	5	3	3	10
2	6	12	7	4	4	15
3	7	14	6	б	5	16
4	5	10	4	12	6	17

Окончание табл. II.5

Вариант	*n*, лет	*j*, %	*R*, млн руб.	*m*	*P*	δ
5	8	9	3	4	7	5
6	9	8	8	3	8	7
7	3	15	9	2	9	9
8	5	13	12	12	10	8
9	7	14	10	3	12	6
10	9	15	12	6	3	12

№ 3. Определение барьерных значений экономических показателей

1. В табл. II.6 приведены исходные данные для расчета барьерного выпуска (все величины, кроме $d = \text{const}$, переменные).

Таблица II.6

t	*P*	*C*	*f*	*d*
1	65	29	18	28
2	60	30	17	28
3	60	31	17	28
4	54	31	16	28
5	52	33	14	28

Для дисконтирования применяется ставка 12%. Найти величину барьерного выпуска.

2. В табл. II.7 содержатся данные о затратах, стоимости продукции и ожидаемой прибыли.

Таблица II.7

Q	*F*	*c*	*P*	*S*	*V*	*P*
0	100	—	—	100	—	—
5	100	30	50	250	250	0
10	100	27	50	370	500	130
15	100	22	45	430	675	145
20	100	20	40	500	800	300
25	100	20	30	600	750	150

Оценить коэффициенты уравнений регрессии (линейных и нелинейных) и найти барьерный выпуск продукции.

№ 4. Погашение задолженностей

1. 1 февраля 2006 г. Сидоров приобрел компьютер стоимостью 106 тыс. руб. в кредит на 1 год под простые (сложные) проценты со став-

кой 18% годовых. Первый взнос в размере 56 тыс. руб. в счет погашения долга был внесен 1 мая 2006 г.. Затем 10 июня 2006 г. поступил платеж в размере 500 руб. Определить остаток долга на конец срока актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

2. Сидоров берет в банке кредит на покупку автомобиля под простые (сложные) проценты со ставкой 17% годовых. Величина ссуды 1,5 млн руб. Кредит взят с 1 октября 2007 г. по 7 марта 2008 г. В счет погашения долга 1 ноября 2007 г. на счет поступила сумма 900 тыс. руб., 26 декабря 2007 г. — 400 тыс. руб., а 14 февраля 2008 г. — 5000 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

3. Сидорову необходимо 70 млн руб. для покупки квартиры в центре города. Эту сумму он берет в банке как кредит на покупку автомобиля под простые (сложные) проценты со ставкой 15% годовых. Кредит выдан с 1 октября 2007 г. по 8 марта 2008 г. В счет погашения долга 1 ноября 2007 г. внесено 40 млн руб., 25 декабря 2007 г. — 20 млн руб., а 14 февраля 2008 г. — 200 тыс. руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

4. Сидоров взял ссуду в банке на покупку мебели под простые (сложные) проценты со ставкой 17% годовых с 1 февраля по 1 декабря 2005 г. на сумму 120 тыс. руб. Было произведено три выплаты: 17 апреля 2005 г. поступило 25 тыс. руб., 18 июля 2005 г. — 3 тыс. руб., 23 ноября 2005 г. — 50 тыс. руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

5. Сидоров берет в банке кредит на покупку норковой шубы под простые (сложные) проценты со ставкой 19% годовых. Величина ссуды 95 тыс. руб. Кредит взят с 15 ноября 2007 г. по 7 марта 2008 г. В счет погашения долга 1 декабря 2007 г. поступило 50 тыс. руб., 20 января 2008 г. — 30 тыс. руб., а 15 февраля 2008 г. — 150 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

6. Кредит в 12 тыс. руб. выдан 1 сентября 2006 г. сроком на год под простые (сложные) проценты со ставкой 15% годовых. В счет погашения долга 10 ноября 2006 г. поступило 4000 руб., 2 февраля 2007 г. — 200 руб., 13 июня 2007 г. — 3500 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

7. Сидоров приобрел плазменный телевизор. Кредит на эту сумму он взял в банке под простые (сложные) проценты со ставкой 14% годо-

вых. Ссуда выдана с 5 января по 5 ноября 2006 г. В счет погашения долга производились следующие выплаты: 14 марта 2006 г. — 20 тыс. руб., 2 июня 2006 г. — 15 тыс. руб., 7 сентября 2006 г. — 250 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

8. Сидоров берет в банке кредит на покупку двух велосипедов под простые (сложные) проценты со ставкой 14% годовых. Величина ссуды 400 тыс. руб. Кредит взят с 1 января по 31 декабря 2009 г. В счет погашения долга 12 марта 2009 г. поступило 200 тыс. руб., 16 июня 2009 г. — 70 тыс. руб., а 25 сентября 2009 г. — 400 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

9. Предприниматель взял 1 февраля 2004 г. в банке ссуду 300 тыс. руб. на развитие бизнеса под простые (сложные) проценты со ставкой 18% годовых. Вернуть долг следует 12 декабря 2004 г. В счет погашения 5 мая 2004 г. поступило 90 тыс. руб., 28 июня 2004 г. — 50 тыс. руб., 10 сентября 2004 г. — 1000 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

10. Сидоров 24 апреля 2006 г. взял ссуду на покупку мобильного телефона в размере 30 500 руб. под простые (сложные) проценты со ставкой 12% годовых до 24 апреля 2007 г. В счет погашения 25 июня 2006 г. поступило 600 руб., 23 сентября 2006 г. — 11 тыс. руб., 25 декабря 2006 г. — 9500 руб., 20 марта 2007 г. — 8500 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

11. Долг в сумме 200 тыс. руб. выдан на 5 лет под 6% годовых. Для его погашения создается фонд. На инвестируемые в нем средства начисляются проценты по ставке. Разработать план погашения долга.

12. Фирма получила кредит 80 тыс. руб. на 4 года под 6% сложных годовых в банке *N*. Кредитный контракт предусматривает погашение долга разовым платежом. Одновременно с получением кредита фирма начала создавать погасительный фонд, для чего открыла счет в банке *K*. На размещенные средства банк *K* начисляет 10% годовых. Определить ежегодные расходы фирмы по амортизации долга при условии, что в погасительный фонд вносятся ежегодно равные суммы.

13. Кредит размером 50 тыс. руб. выдан на 5 лет под 6% годовых. По условиям контракта погашение основного долга должно производиться равными платежами, начисление процентов — в конце года. Составить план погашения кредита.

14. Кредит размером 45 тыс. руб. выдан на 5 лет под 8% годовых. По условиям контракта погашение основного долга производится рав-

ными срочными уплатами, т. е. рентой с параметрами Y (неизвестная величина), $n = 5$, $i = 8\%$. Разработать схему погашения долга.

15. Кредит в размере 250 тыс. руб. должен быть погашен в течение 5 лет ежегодными выплатами. Ставка 10% годовых, начисление процентов 1 раз в конце года. Платежи, обеспечивающие погашение основного долга, должны увеличиваться в геометрической прогрессии на 5% ежегодно. Составить план погашения кредита.

16. Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 150 тыс. руб. Погашение ежемесячное, постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 15%. Разработать схему погашения долга.

17. Ипотека задана следующими условиями: $D = 200$ тыс. руб.; $n = 15$; $R = 2000$; $i = 3\%$; $P_n = 150$. Найти размер шарового платежа.

18. Ипотека задана следующими условиями: $A = 150$ тыс. руб.; $n = 12$; $B = 60$ тыс. руб.; $i = 3\%$; $P_n = 150$. Найти размер срочной уплаты.

19. Сумма задолженности по договору ипотеки — 300 тыс. руб., общий срок погашения — 20 лет (240 месяцев); предусматривается рост платежей в течение 90 месяцев; ставка за ссуду — 12% годовых; ежегодный прирост платежей — 5%. Разработать график погашения долга.

20. Стоимость закладываемого имущества —180 тыс. руб. Продавец получает за счет ссуды 120 тыс. руб. и от покупателя 6 тыс. руб., срок ипотеки — 12 лет. Покупатель открывает специальный счет (20 тыс. руб.). На счет начисляются проценты по ставке 8% годовых (начисление ежемесячное), списание производится 18 месяцев, сумма списания уменьшается на 1% в месяц. Составить план погашения кредита.

21. Холодильник ценой 4 тыс. руб. продается в кредит на год под 12% годовых. Погасительные платежи вносятся через каждые 3 месяца. Определить размер разового погасительного платежа.

22. Кредит в сумме 12 тыс. руб. выдан на 6 месяцев под 18% годовых (проценты простые). Погашение задолженности производится ежемесячными платежами. Составить план погашения задолженности.

№ 5. Ипотечные ссуды

1. Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 450 тыс. руб. Погашение ежемесячное, постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 15%. Составить план погашения долга.

2. Сумма задолженности по договору ипотеки — 400 тыс. руб., общий срок погашения — 20 лет (240 месяцев); предусматривается рост платежей в течение 120 месяцев; процентная ставка за ссуду — 10% годовых; ежегодный прирост платежей — 4%. Разработать график погашения долга.

3. Стоимость закладываемого имущества 190 тыс. руб. Продавец получает за счет ссуды 120 тыс. руб. и от покупателя 70 тыс. руб., срок ипотеки —13 лет. Покупатель открывает специальный счет (20 тыс.

руб.). На счет начисляются проценты по ставке 9% годовых (начисление ежемесячное), списание производится 18 месяцев, сумма списания уменьшается на 1,5% в месяц. Составить план погашения кредита.

4. Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 190 тыс. руб. Погашение ежемесячное, постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 12%. Составить план погашения долга.

5. Сумма ипотечного долга — 400 тыс. руб. Срок погашения — 20 лет (240 месяцев) — разбит на два периода продолжительностью 90 и 150 месяцев. Ставка — 7% годовых (проценты сложные). Погашение кредита производится ежемесячно. По условиям контракта ежегодный прирост срочных уплат составляет 2% в первом периоде. Во втором периоде погашение производится равными срочными уплатами. Составить план погашения кредита.

6. Размер ипотечного кредита — 170 тыс. руб. Срок ипотеки — 12 лет. Заемщик открывает специальный счет на сумму 50 тыс. руб., на который начисляются ежемесячно проценты по ставке 14% годовых. Списание средств со счета идет ежемесячно в течение 3 лет, сумма списаний ежемесячно уменьшается на 3%. Ставка за кредит — 7% годовых. Разработать график помесячного погашения задолженности.

7. Сумма задолженности по договору ипотеки — 300 тыс. руб., общий срок погашения — 20 лет (240 месяцев); предусматривается рост платежей в течение 150 месяцев; ставка за ссуду — 16% годовых; ежегодный прирост платежей — 4%. Разработать график погашения долга.

8. Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 250 тыс. руб. Погашение ежемесячное, постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 9%. Составить план погашения долга.

9. Размер ипотечного кредита — 200 тыс. руб. Срок ипотеки — 15 лет. Заемщик открывает специальный счет на сумму 40 тыс. руб., на который начисляются ежемесячно проценты по ставке 7% годовых. Списание средств со счета идет ежемесячно в течение 1,5 лет, сумма списаний ежемесячно уменьшается на 3%. Ставка за кредит — 8% годовых. Разработать график помесячного погашения задолженности.

10. Сумма ипотечного долга 500 тыс. руб. Срок погашения — 20 лет (240 месяцев) — разбит на два периода продолжительностью 80 и 160 месяцев. Процентная ставка — 9% годовых (проценты сложные). Погашение кредита производится ежемесячно. По условиям контракта ежегодный прирост срочных уплат — 4% в первом периоде. Во втором периоде погашение производится равными срочными уплатами. Составить план погашения кредита.

Часть III
ЦЕННЫЕ БУМАГИ

Облигации

1. Курс облигаций номиналом 500 руб. составляет 75. Определить цену облигации.

2. Доход по облигациям номиналом 1000 руб. выплачивается каждые полгода по ставке 50% годовых. Вычислить сумму дохода по каждой выплате.

3. Облигации номиналом 1000 руб. и сроком обращения 90 дней продаются по курсу 85. Определить сумму дохода от покупки пяти облигаций и доходность финансовой операции, если годовой дивизор — 360.

4. Облигации номиналом 1000 руб. и сроком обращения 180 дней были приобретены в момент их выпуска по курсу 65 и проданы через 90 дней по курсу 85. Определить доходность к погашению и текущую доходность в результате продажи, если годовой дивизор — 360.

5. Облигация куплена по курсу 95 и будет погашена через 10 лет. Проценты по облигации выплачиваются в конце срока по сложной ставке 5% годовых. Определить доходность приобретения облигации.

6. Банковская ставка по депозитам составит 10%, а банковская ставка по кредитам — 15%. Определить процент по облигациям, установленный при выпуске при условии, что их курс равен 98.

7. Банк А выдал банку Б межбанковский валютный кредит под залог облигаций внутреннего государственного валютного займа третьего транша. Сумма кредита определяется путем оценки облигаций по текущей рыночной стоимости за вычетом из полученной суммы дисконта (в целях страхования от ценовых рисков).

Дата выдачи кредита — 30 октября, дата погашения кредита и процентов по нему — 13 ноября. Процентная ставка по кредиту составляет 13% годовых на 360 дней в году, срок кредита рассчитывается на основе полного количества календарных дней. Сумма облигаций по номиналу — 1 млн долл. США. Курс облигаций — 81, размер дисконта — 10%. Банк Б попросил банк А погасить непогашенные купоны по облигациям за 1 год и произвести расчеты по полученному купонному доходу 13 ноября (на облигации ежегодно начисляется купонный доход из расчета 3% от номинала). За погашение купонов банк А возьмет комиссию в размере 1% от суммы купонного дохода. В день погашения кредита банки договорились оформить новый кредит под заложенные облигации с переоценкой облигаций по курсу 81,7. Стороны договорились произвести 13 ноября взаиморасчеты.

Определить, какой банк должен платить 13 ноября и какую сумму.

8. Брокеру фондовой биржи ММВБ поступило распоряжение 3 октября о размещении 2 млрд руб. на рынке ГКО при следующих условиях:

— вложение денежных средств проводить только в краткосрочные выпуски (со сроком обращения меньше полугода);

— доля каждого выпуска в общем пакете должна занимать только часть объема капиталовложения и не превышать 30%;

— продать весь пакет необходимо 4 ноября и вернуть деньги инвестору 5 ноября.

На торгах 4 ноября по краткосрочным выпускам ГКО номиналом 1 млн руб. сложились следующие цены (табл. III.1).

Таблица III.1

Номер выпуска	Дата погашения	Цена от номинала (курс), %
21067	13.11.1996	95,86
21068	20.11.1996	95,00
21069	18.12.1996	91,78
21070	03.01.1997	89,44
21071	22.01.9719	86,85

Сформировать пакет ГКО, исходя из условия получения максимальной доходности. Рассчитать средневзвешенную доходность пакета. Выявить зависимость между доходностью ценной бумаги и сроком, оставшимся до ее погашения.

9. Утром 29 октября брокеру поступило распоряжение срочно продать (на сегодняшних торгах) весь пакет ГКО, сформированный по условиям предыдущего примера. 29 ноября на торгах по краткосрочным выпускам ГКО сложились следующие цены (табл. III.2).

Таблица III.2

Номер выпуска	Дата погашения	Цена от номинала (курс), %
21067	13.11.1996	98,53
21068	20.11.1996	97,80
21069	18.12.1996	94,86
21070	03.01.1997	93,04
21071	22.01.1997	90,22

Номинал каждой ценной бумаги — 1 млн руб.

В силу специфики расчетов на ММВБ и расчетов с инвестором средства от реализации пакета поступят на счет инвестора на второй рабочий день от момента реализации.

Определить доход в рублях, полученный от вложения в ГКО, а также доходность в процентах годовых (из расчета 360 дней в году и полного количества дней в периоде) по данной финансовой операции с позиции инвестора.

10. Перечислить виды облигаций по методу обеспечения, по сроку, по способу выкупа облигации и по методу выплаты дохода.

11. Дать определение курса облигации.

12. Какие свойства облигаций определяют их рейтинг?

13. В чем состоит различие купонной, текущей и полной доходности облигаций?

14. Вечная рента, приносящая 5% дохода, куплена по курсу 84. Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются: а) раз в году; б) по полугодиям?

15. Корпорация выпустила облигации с нулевым купоном с погашением через 5 лет. Курс реализации — 55. Чему равна доходность облигации на дату погашения?

16. Облигация, приносящая 10% годовых относительно номинала, куплена по курсу 65, срок погашения — 4 года. Какой будет полная доходность для инвестора, если номинал и проценты выплачиваются в конце срока?

17. Как определяется доходность облигаций с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока?

18. Как корректируются формулы для вычисления рыночной цены и курса облигации с выкупной ценой, отличающейся от номинала?

19. Как зависят показатели доходности облигаций от курса?

20. Как корректируются формулы для вычисления рыночной цены и курса облигации при учете налогов?

21. Как можно приближенно оценить полную доходность облигации с учетом налоговых выплат, если известна ставка помещения без учета налогов?

22. Каков экономический смысл показателя, называемого «средний арифметический срок»?

23. Как средний арифметический срок связан с понятием кредитной услуги?

24. Найти средний арифметический срок для двух облигаций с выплатами по купонам 6 и 8% от номинала со сроком оборота 10 лет.

25. Каков экономический смысл показателя, называемого «средний срок дисконтированных платежей»?

26. Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в году по норме 10%, куплена по курсу 72. Полная доходность облигации равна. Дисконтировать платежи по этой ставке и найти срок дисконтированных платежей.

27. Дать определение модифицированного среднего срока дисконтированных платежей и объяснить его экономический смысл.

28. Известно, что средний срок дисконтированных платежей равен 4,25 года, а ставка помещения составляет 18,5%. Как изменится курс облигации при ожидаемом повышении рыночного процента с 18,5 до 20%?

29. Описать экономический смысл операции оценивания облигаций.

30. Пусть облигация приносит ежегодно 7% годовых. Каким будет расчетный курс инвестиций при условии, что доход будет поступать достаточно продолжительное время, а ставка помещения составит 13%?

31. Пусть текущий доход от облигации выплачивается вместе с номиналом в конце срока; срок облигации — 4 года, купонный процент — 7%, начисление процентов поквартальное, ставка помещения — 9%. Чему равен курс облигации?

32. Как влияет изменение купонной ставки на курс облигации (с учетом срока облигации)? Какова тактика инвесторов при изменении ставки?

33. Как влияет изменение уровня рыночной ставки на курс облигации?

34. Как влияет на курс облигации изменение срока облигации?

Акции

1. Банк объявил, что дивиденды по его акциям за прошедший год составляют 20% годовых по обыкновенным акциям и 30% годовых по привилегированным. Определите сумму дивиденда на одну привилегированную акцию номиналом 3000 руб. и одну обыкновенную акцию номиналом 1000 руб.

2. Определите ожидаемый доход от покупки акции номиналом 1000 руб. от ежегодного получения дивидендов в размере 20% годовых и ежегодного роста стоимости на 10% от номинала, если акция будет продана через 5 лет, а также доходность операции.

3. АО с уставным фондом 1 млн руб. имеет следующую структуру капитала: 85 обыкновенных акций и 15 привилегированных. Размер прибыли к распределению между акционерами составляет 120 тыс. руб. Фиксированный дивиденд по привилегированным акциям составляет 10%. Определите дивиденды для владельца обыкновенной акции.

4. Балансовая прибыль АО с уставным фондом 2 млн руб., полученная от производственной деятельности, составила 10 млн руб. Собрание акционеров постановило, что оставшуюся после уплаты налогов прибыль следует распределить так: 20% на развитие производства, а 80% на выплату дивидендов. Определить курс акций, если банковский процент составляет 80%, номинал акции — 100 руб., а ставка налога на прибыль — 32%.

5. Рассчитать реальную стоимость предприятия на 1 июля, а также стоимость одной акции АО «Дорстрой» номиналом 50 руб. на основе следующих данных: уставный капитал — 2 115 000 руб.; активы по балансу предприятия — 3 000 475 руб.; непроизводственные основные средства других отраслей — 43 266 000 руб.; балансовая прибыль за отчетный период — 99 115 руб.; начисленная за период амортизация — 4328 руб.; платежи в бюджет за отчетный период — 34 690,2 руб.; средства,

направленные на погашение кредитов и уплату процентов по ним — 9 700 000 руб.; норма дисконта — 0,2; кредиты и другие заемные средства — 515 904 руб.; убытки (по балансу) — 112 531 руб.; курс доллара на дату баланса 1 июля 1996 г. — 5115 руб.; средний курс доллара США за период — 4856 руб.; коэффициент риска (учитывающий нефинансовые критерии) — 0,2.

6. По обращающимся привилегированным акциям выплачиваются ежегодные дивиденды 120 руб. Цена этой акции — 960 руб. Определить доходность акции.

7. Рыночная цена акции в настоящий момент — 100 руб. Ожидаемая цена акции в конце текущего года — 105 руб., а ожидаемый дивиденд в текущем году — 10 руб. Определить ожидаемую дивидендную доходность, ожидаемую доходность за счет изменения цены акции и ожидаемую доходность по акции в текущем году.

8. Дивиденд, выплачиваемый ежегодно по акции нулевого роста, равен 400 руб. Ожидаемая норма прибыли — 5%. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции.

9. Курс акции нулевого роста в настоящий момент — 400 руб., а последний из уже выплаченных дивидендов — 40 руб. Определить норму прибыли (доходность) этой акции.

10. Последний из уже выплаченных дивидендов по акциям нормального роста — 400 руб., а ожидаемый темп роста дивидендов —10%. Определить дивиденд, который акционер ожидает получить в текущем году.

11. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции нормального роста при требуемом уровне доходности 12%.

12. Рыночная цена акции нормального роста в настоящий момент равна 1000 руб. Ожидается, что дивиденд в текущем году будет равен 50 руб., а темп роста — 7%. Определить ожидаемую норму прибыли (доходность) этой акции.

13. Период избыточного роста — 5 лет, темп роста доходов и дивидендов в течение периода избыточного роста — 20%, постоянный темп роста после периода избыточного роста — 5%, последний из уже выплаченных дивидендов — 400 руб., требуемая норма прибыли — 10%. Определить теоретическую (внутреннюю) цену акции избыточного роста.

14. В уплату за товар $P = 1\,000\,000 + 10\,000n$ руб. выписано $4n$ векселей с погашением по полугодиям. Процентная ставка за кредит $(10 + n)$% годовых. Определить процентные платежи и суммы векселей двумя методами:

а) проценты начисляются на остаток задолженности (срок, на который они начисляются, начинается с момента погашения предыдущего векселя);

б) проценты начисляются на ту часть долга, которая покрывается векселем (срок исчисляется от начала сделки и до момента погашения векселя).

15. Предприятию нужно погасить задолженность 60 тыс. руб. через 6 лет. Для погашения долга предполагается использовать два типа бескупонных облигаций номиналом 1000 руб., одна из которых имеет срок до погашения 9 лет, а вторая — 4 года. Текущая ставка процента составляет 11%. Определить структуру портфеля облигаций при условии, что дюрация портфеля совпадает с периодом до погашения обязательств предприятия.

Пусть через год текущая ставка процента равна 10%. Определить структуру портфеля облигаций при условии, что дюрация портфеля совпадает с периодом до погашения обязательств предприятия.

Индивидуальные задания к части III

№ 1. Лизинг и форфейтные операции

В табл. III.3 приведены исходные данные для расчета лизинговых платежей. Условия лизинга:

а) выплаты образуют постоянную ренту постнумерандо (пренумерандо) при условии, что применяются сложные проценты;

б) первый платеж в k раз больше остальных;

в) выплачивается аванс A;

г) лизинговый контракт предусматривает выкуп имущества по остаточной стоимости, доля которой в стоимости имущества равна s;

д) согласно контракту выплачивается аванс A и предусматривается выкуп имущества по остаточной стоимости, доля которой в стоимости имущества равна s.

Составить график погашения задолженности при условии m.

Таблица III.3

Вариант	Стоимость имущества K, тыс. руб.	Срок контракта n, мес.	Норма доходности i, %	k	A	s	m
1	1500	36	1	2	200	0,2	А
2	2000	48	2	1,5	300	0,3	Б
3	1800	24	1	2	100	0,1	В
4	2200	40	1,5	3	500	0,15	Г
5	2500	42	3	1,5	600	0,25	А
6	3000	30	2,5	2,5	700	0,4	Д
7	2700	60	2	3	500	0,2	Б
8	1900	48	1,5	3,5	200	0,1	А
9	2100	36	3	2	300	0,25	В
10	2800	50	2,5	2,5	400	0,15	Г

Часть IV
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. «Инвестсбербанк» предоставлял валютные кредиты под 30% годовых, а рублевые кредиты — под 36% годовых. Какой вариант кредита на сумму 100 тыс. долл. предпочтительнее взять заемщику на 2 года, если в январе 1998 г. курс покупки в обменном пункте валюты составлял 6 руб. за доллар (США)?

2. Банки предлагали специальные долгосрочные кредиты на покупку автомобиля на следующих условиях: максимальный срок кредита — 10 лет, максимальная сумма кредита — 10 тыс. долл. Для получения кредита необходимо иметь гарантию поручителя.

Первый вариант: ставка начисления — 15% к сумме в долларах или 24% к сумме в рублях.

Второй вариант: в момент выдачи кредита выплачивается 30% стоимости автомобиля, а 70% его стоимости — сумма кредита, тогда ставка процента — 20% от суммы долларового кредита.

Третий вариант: срок кредита — 1,5 года, предоплата — 30% от стоимости автомобиля, сумма кредита — 70% от стоимости, ставка — 20% годовых.

Четвертый вариант: срок кредита — 1 год, сумма кредита — неограниченна, предоплата — 30%; сумма кредита — 70%, ставка процента — 18—25% годовых в зависимости от суммы кредита.

Определить наиболее выгодный вариант покупки автомобиля стоимостью 6000 долл.

3. Московский банк предлагал ипотечные ссуды на срок до 10 лет под залог покупаемой недвижимости для физических лиц на условиях оплаты заемщиком 30% стоимости, например, квартиры, на момент получения кредита; сумма кредита при наличии 4—5 гарантов (физических или юридических лиц) — 70%.

Построить сетевую модель взаимодействия участников операции по покупке квартиры под залог квартиры стоимостью 30 тыс. долл. США и провести финансовые расчеты. Ставка процентов по валютному кредиту — 15%, по рублевому кредиту — 24%.

4. Под какой процент, когда и на какой срок могла взять кредит на сумму 4450 долл. для приобретения автомобиля ВАЗ2106 в сентябре 1998 г. через фирму «INTO» студентка 3 курса УФФ МГУК у 50 студентов своего потока, если обменный пункт покупал доллар 8 сентября 1998 г.

по цене 21,5 руб., а 15 сентября 1998 г. продавал по цене 10,8 руб. за доллар?

5. В контракте за оплату коммерческих услуг можно записать к получению либо непосредственно в момент совершения операции 500 тыс. руб., либо через 6 месяцев — 1,5 млн руб.

Определить минимальную сумму, которую выгодно получить в момент совершения операции, если банковская ставка составляет сложные 80% годовых.

6. Автобанк принимает вклады до востребования под 12% годовых. Определить эквивалентное значение учетной ставки при учете векселя в день его погашения со сроком обращения 200 дней и количестве дней в году 360, чтобы обеспечить эквивалентную доходность при приеме вкладов до востребования.

7. Страховая компания заключила договор с фирмой «Прогресс» на страховку ее бензозаправочных станций сроком на 3 года. Поступающие ежегодные взносы по 5 млн руб. размещаются в банке, обслуживающем страховую компанию, под сложные 15% годовых с ежеквартальным начислением процентов. Определить сумму, полученную страховой компанией, при условии отсутствия страховых случаев.

8. Выбрать вариант формирования договора с банком, обслуживающим фирму, для создания фонда модернизации основных фондов в размере 200 млн руб.:

а) внесение рентных платежей по полугодиям в течение 3 лет под сложные 20% годовых с ежеквартальным начислением процентов;

б) внесение рентных платежей также по полугодиям под сложные 20% годовых с начислением процентов по полугодиям. Определить современную величину ренты наиболее выгодного варианта.

9. Банк заключил с фирмой факторинговую сделку, по которой приобрел долговое обязательство за изготовленное и проданное фирмой оборудование по рентной ставке 8%. По обязательству фирма должна получить с покупателя вместе с начисленными процентами в течение года 100 тыс. руб., выплачиваемых ежеквартально по 25 тыс. руб. Определить сумму, полученную фирмой в банке.

10. По контракту заказчик через 2 года после окончания строительства здания строительной фирмой производит оплату в течение 3 лет равными ежегодными платежами по 8000 руб. Постнумерандо проценты начисляются из расчета 20% годовых. Определить выигрыш заказчика.

11. По кредитному договору фирма выплачивает по полугодиям пренумерандо по 8000 руб. банку в течение 2 лет. Проценты начисляются ежеквартально по сложной ставке 15% годовых. Определить сумму, выплаченную фирмой банку.

12. ЗАО «Прогресс», имея пакет из 80 облигаций номиналом 1000 руб., купоном 8%, дисконтом 15% и 35 облигаций номиналом 500 руб., купоном 10%, ажио 5%, решило инвестировать полученный годовой доход

в акции курсовой стоимостью 100 руб. Определить, какое количество акций можно приобрести на полученную сумму.

13. Облигация номиналом 1000 руб. приобретена с дисконтом 20%. Купонный процент — 10% годовых. Определить рыночную стоимость облигации по прошествии 4 лет при условии, что в момент приобретения до погашения оставалось 5 лет.

14. Клиент, имея пакет из 50 облигаций номиналом 500 руб., с дисконтом 25% и купоном 7% и 25 облигаций номиналом 300 руб., купоном 10% и ажио 3%, решил полученную прибыль за год инвестировать в покупку акций курсовой стоимостью 500 руб. Определить, какое количество акций может приобрести клиент.

15. Привилегированные акции номиналом 10 тыс. руб. были куплены в количестве 10 шт. по цене 12 тыс. руб. и через 2 года по цене 25 тыс. руб. за шт. Дивиденд по акциям за первый год составил 40% годовых, за второй — 60% годовых. Рассчитать доход, полученный по акциям, и доходность их купли-продажи в виде эффективной ставки простых и сложных процентов.

16. Акционерное общество с уставным фондом 1 млн руб. в составе капитала имеет 85 обыкновенных и 15 привилегированных акций. Прибыль к распределению между акционерами составляет 120 тыс. руб. Фиксированная ставка дивиденда по привилегированным акциям — 10%. Определить величину дивиденда владельцев обыкновенными акциями.

17. АО в 1992 г. выпустило 100 тыс. обыкновенных акций номинальной стоимостью 100 руб. Инвестор приобрел в 1993 г. пакет, состоящий из 100 шт. этих акций, по цене 150 руб. за акцию. Рыночная цена в настоящее время — 300 руб. Ставка дивиденда по акциям равна 60%. Рассчитать текущую доходность пакета акций инвестора.

18. Сидоров через 28 лет уйдет на пенсию. Он планирует иметь в пенсионном фонде к тому времени 200 тыс. долл. Определить, сколько Сидоров будет ежеквартально отчислять в фонд, если ежеквартальная сложная ставка 14%. Сколько он реально внесет в фонд? Какую сумму процента Сидоров получит, храня деньги в фонде?

19. Георгий купил новый трактор за 32 650 долл. с рассрочкой по годовой сложной ставке 13%. Он погасит сумму задолженности в течение 5 лет. Показать поток отчислений, ежегодную сумму платежей и общую сумму выплаченных процентов.

20. Геннадий купил новый дом за 145 тыс. долл. Первоначальный взнос — 20% от стоимости дома. Оставшуюся сумму Геннадий будет погашать в течение 40 лет ежемесячными платежами. Ежемесячная сложная ставка — 11%. Определить, какова сумма ежемесячных отчислений, какую сумму процентов за пользование кредитом выплатит Геннадий. Сколько еще должен будет выплатить Геннадий после 30 лет выплат?

21. Ирина приобрела у строительной компании «Траст» дом за 50 млн руб. по контракту, в соответствии с которым погашение долга

происходит равными ежегодными платежами в течение 10 лет на условиях 5% годовых за величину долга. Компания продает контракт банку, который получает по ссудам 8% годовых. Определить сумму, полученную компанией в банке за контракт.

22. ЗАО «Автомир» продало автомобиль ВАЗ 2106 за 50 тыс. руб., получив в момент продажи 10 тыс. руб., и предоставило покупателю кредит на 40 тыс. руб. под сложную ставку 8% годовых, который должен быть погашен в течение 3 лет равными платежами раз в квартал. Определить: доходность этой операции; доходность операции по условиям задачи, если ожидаемая среднегодовая инфляция составит 10% в год; доходность операции по условию задачи, если погашение долга проводить ежемесячно; оптимальное значение годовой ставки процента кредита и доходность операции фирмы.

23. Елена отчисляет по 265 долл. на счет в начале каждого месяца в течение 9 лет. Ежемесячная сложная процентная ставка равна 17%. Какая сумма будет на счете через 9 лет? Какой доход получит Елена?

24. Александр открыл дело, для этого ему понадобилось взять кредит. Первоначальный взнос составил 20 тыс. долл., остальную сумму он отчислял ежеквартально в течение 4 лет. Ежеквартальная сложная процентная ставка равна 14,5%. Какую сумму выплатил Александр?

25. Компания имеет возможность купить рудник с оплатой по 125 тыс. долл. ежемесячно в течение 6 лет. Ежемесячная сложная ставка равна 16%. Какую сумму выплатит компания с учетом предоставленного кредита под указанную процентную ставку?

26. Марианна приобрела компьютер в кредит. Первоначальный взнос она сделала в размере 1500 долл., остальную сумму ежемесячно будет вносить по 125 долл. в течение 60 месяцев. Ежеквартальная процентная ставка по кредиту равна 1,5%. Какую сумму выплатит Марианна с учетом кредита?

27. Володя собирается переводить по 150 долл. на счет в течение 10 лет. Ежемесячная процентная ставка равна 11,5%. Какой доход будет получен при условии перевода денег в начале, а не в конце месяца?

28. Коммерческое предприятие продает банку контракт, по которому покупатель за мебельный гарнитур должен ежемесячно выплачивать по 10 тыс. руб. в течение полугода. Какую сумму выплатит банк коммерческому предприятию, если начисляются проценты по номинальной ставке 48% годовых? Определите доход банка и потерю коммерческого предприятия, сумму платы банка за риск.

29. Фермер поставил в розничное предприятие овощей на 3 млн руб. в соответствии с контрактом, по которому предприятие обязано проводить оплату овощной продукции ежемесячно равными долями в течение полугода. Поскольку деньги потребовались немедленно, то фермер передал контракт банку с учетом номинальной сложной процентной ставки 6% годовых. Определить сумму, полученную фермером в банке.

30. Фирма взяла кредит на 3 дня под 15% годовых для приобретения государственных ценных бумаг номинальной стоимостью 100 тыс. руб., сроком погашения 1 год и текущим уровнем доходности 20%. Определить цену продажи ценной бумаги через 3 дня для покрытия расходов по кредиту и получения прибыли в размере 25% годовых без учета налогообложения.

31. Брокер по поручению фирмы приобрел портфель облигаций трех видов с различными показателями (табл. IV.1).

Таблица IV.1

Облигации	**Количество**	**Номинальная стоимость, руб.**	**Срок погашения, лет**	**Ставка купонного дохода, %**	**Количество выплат в год**	**Цена приобретения, руб.**
01	30	200	5	10	2	170
02	20	100	6	7	1	80
03	10	150	4	9	1	130

Определите доходность портфеля облигаций.

32. Фирма приобрела портфель облигаций нескольких видов, имеющих следующие характеристики (табл. IV.2).

Таблица IV.2

Облигации	**Количество**	**Номинальна стоимость, руб.**	**Срок погашения, лет**	**Ставка купонного дохода, %**	**Количество выплат в год**	**Цена приобретения, руб.**
01	15	400	10	8	2	300
02	25	300	8	12	4	300
03	10	1000	6	14	2	1100
04	30	200	5	8	1	170

Определите доходность портфеля облигаций.

33. Брокеру фондовой биржи ММВБ поступило распоряжение 4 октября 1996 г. о размещении 2 млрд руб. на рынке ГКО при следующих условиях: вложение денежных средств проводить только в краткосрочные выпуски (со сроком обращения менее полугода); доля каждого выпуска в общем платеже должна занимать только часть объема капиталовложения; продать весь пакет необходимо 31 октября 1996 г. и вернуть деньги инвестору 4 ноября 1996 г. На торгах по краткосрочным выпускам ГКО номиналом 1 млн руб. сложились следующие цены (табл. IV.3).

Сформируйте пакет ГКО для получения максимальной доходности.

Таблица IV.3

Номер выпуска	Дата погашения	Цена от номинала, %
21067	13.11.1996	95,86
21068	20.11.1996	95,00
21069	18.12.1996	91,78
21070	03.01.1997	89,44
21071	22.01.1997	86,95

34. Инвестор в целях снижения ценового риска дополнительно распорядился но 30% от выделенной суммы направить на покупку ГКО выпусков 21071, 21070 и 21069, а на оставшиеся 200 млн руб. купить бумаги выпуска 21068. Определить точное количество бумаг по каждому из приобретенных выпусков и величину свободных средств.

Рассчитать доходность пакета; определить зависимость доходности ценной бумаги от срока, оставшегося до ее погашения.

35. Утром 29 октября 1996 г. от инвестора брокеру ММВБ поступило распоряжение продать сразу же на торгах весь сформированный пакет ГКО. В этот день по краткосрочным выпускам ГКО сложились следующие цены (табл. IV.4).

Таблица IV.4

Номер выпуска	Дата погашения	Цена от номинала, %
21067	13.11.1996	98,53
21068	20.11.1996	97,80
21069	18.12.1996	94,86
21070	03.01.1997	93,04
21071	22.01.1997	90,22

Определить прибыль в рублях, а также доходность всей операции с позиции инвестора.

36. Сформировать пакет облигаций для инвестора, если срок инвестирования — 2 года, номинал облигаций — 1000, количество купонных выплат — 2, рыночная норма доходности — 16%, ставка купонного дохода — 3% и выплачивается 15 мая, при следующих данных на 25 сентября 1996 г. (табл. IV.5).

Таблица IV.5

Номер выпуска	Дата погашения	Текущий курс на 25 сентября 1996 г.	Прогнозируемый курс на 25 сентября 1998 г.
3	14.05.1999	77,7	94,4
4	14.05.2003	52,4	66,7
5	14.05.2008	34,35	45,6

Окончание табл. IV.5

Номер выпуска	**Дата погашения**	**Текущий курс на 25 сентября 1996 г.**	**Прогнозируемый курс на 25 сентября 1998 г.**
6	14.05.2006	40,55	52,6
7	14.05.2011	29,5	33,1

Определить сумму дохода и доходность с учетом оплаты комиссии от продажи ГКО по курсу 99,5 на 10 января 1997 г.

Часть V
ТЕСТЫ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА»

1. На рис. V.1 представлен график роста суммы P. Множитель наращения равен:

а) 2 / 3; б) 5 / 3; в) 1 / 9; г) 2.

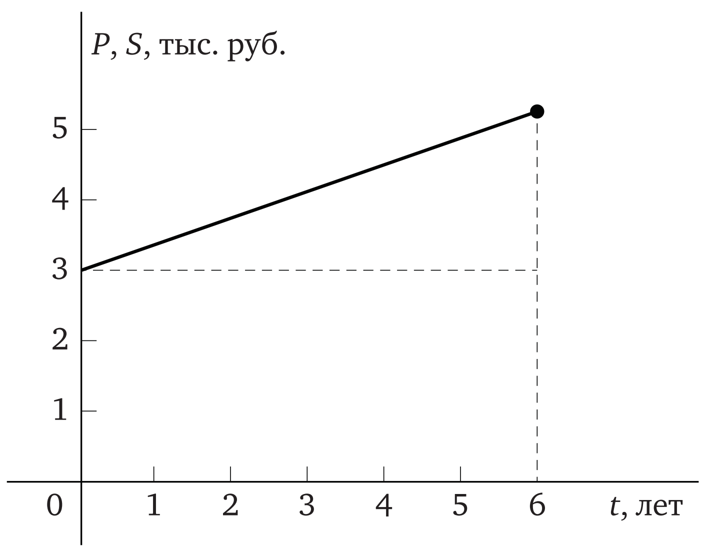

Рис. V.1

2. Если рассчитываются точные проценты с точным числом дней ссуды, то число дней в году полагают равным:

а) 360; б) 365; в) 366; г) 240.

3. Если сумма, на которую начисляются проценты, изменяет свою величину со временем, то величина начисленного процента рассчитывается по формуле:

а) $\sum\limits_j R_j ni$; б) $\dfrac{1}{(1+i)^n}$; в) $\sum\limits_j R_j n_j i$; г) $\sum\limits_j R_j n_j i_j$.

4. Вексель выдан на сумму 500 тыс. руб. с уплатой 19 декабря. Векселедержатель учел вексель в банке 25 декабря по простой учетной ставке 10%. Определить сумму, полученную векселедержателем, и размер дисконта в пользу банка.

5. В чем состоит различие между математическим дисконтированием и банковским учетом по простой ставке процентов?

6. На рис. V.2 представлены графики изменения дисконтных множителей. Какому дисконтированию по ставке (%) соответствует график (1):

а) 20; б) 5; в) 10; г) 15?

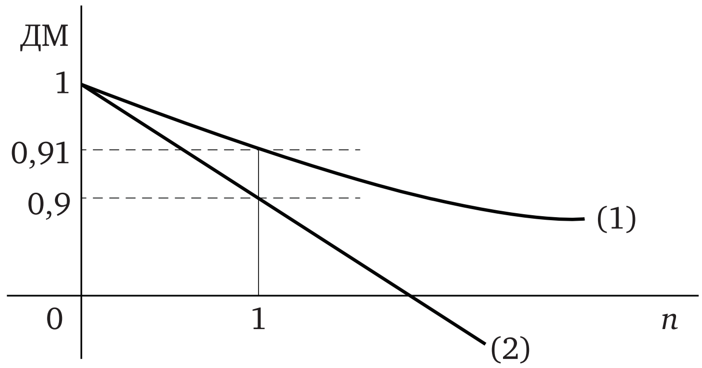

Рис. V.2

7. Множитель наращения по сложным процентам равен:

а) $(1 + i)^n$; б) $\delta = \ln(1 + i)$; в) $\frac{1}{(1+i)^n}$; г) $\frac{1}{1-nd}$.

8. Если сложные проценты начисляются m раз в году, то годовая ставка j называется:

а) эффективной; б) брутто-ставкой; в) номинальной; г) непрерывной.

9. Сила роста δ связана с дискретной процентной ставкой i равенством:

а) $(1 + i)^n$; б) $\delta = \ln(1 + i)$; в) $\frac{1}{(1+i)^n}$; г) $\frac{1}{1-nd}$.

10. Реальная стоимость суммы S, обесцененной во времени инфляцией рассчитывается по формуле:

а) $H = I_p - 14$; б) $D = Snd$; в) $S = \frac{P}{1-nd}$; г) $C = S / I_p$.

11. Определить простую учетную ставку, эквивалентную годовой процентной ставке 25% при сроке учета 150 дней ($K = 360$).

12. Перечислить основные свойства ломбардного кредита.

13. Постоянной p-срочной рентой пренумерандо называется рента: а) с выплатами в конце периода ренты; б) с неизменными членами ренты, выплачиваемыми p раз в году; в) с выплатами в конце периода ренты; г) выплаты ставятся в зависимость от наступления некоторого случайного события.

14. Описать принцип замены нерегулярного потока платежей рентой.

15. Современной стоимостью потока платежей называется: а) сумма всех членов ренты; б) сумма всех членов ренты с начисленными на них к концу срока процентами; в) сумма всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты; г) сумма всех его членов, дисконтированных на некоторый упреждающий момент времени.

16. Отложенной рентой называется рента …

17. Коэффициент наращения ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке и с неоднократными выплатами в году вычисляется по формуле:

а) $s_{mn,\,j/m}^{(p)}=\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$; б) $a_{mn,\,j/m}^{(p)}=\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$;

в) $\delta=m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)$; г) $S=P\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}$.

18. При выборе коммерческого контракта применяется метод сравнения современных стоимостей всех платежей. Объяснить идею этого метода.

19. Предприниматель взял 1 февраля 2004 г. в банке ссуду 300 тыс. руб. на развитие бизнеса под простые (сложные) проценты со ставкой 18% годовых. Вернуть долг следует 12 декабря 2004 г. В счет погашения 5 мая 2004 г. поступило 90 тыс. руб., 28 июня 2004 г. — 50 тыс. руб., 10 сентября 2004 г. — 1000 руб. Определить остаток долга на конец срока выплат актуарным методом и по «правилу торговца», а также определить разовую сумму платежа по потребительскому кредиту.

20. Доллары были приобретены по курсу 6 руб/долл. и через 1,2 года проданы по 6,6 руб/долл. (6,9 руб/долл.). Темп инфляции составил 12%. Определить доходность финансовой операции.

21. Экспоненциально изменяющийся непрерывный поток платежей имеет параметры: базовая выплата R = 8000 тыс. руб. в год, b = 0,08, сила роста δ = 12%. Срок этого потока платежей составляет 6 лет. Определить современную стоимость и наращенную сумму этого потока платежей.

22. Три немедленные годовые ренты постнумерандо заменяются одной, отложенной на 2 года, рентой постнумерандо. Срок заменяющей ренты — 10 лет, включая отсрочку. Характеристики рент: ежегодные выплаты 90 тыс., 120 тыс. и 180 тыс. руб. и соответственно сроки рент: 3, 6 и 8 лет. Пересчет осуществляется по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить размер платежа заменяющей ренты.

23. Как вычислить коэффициент эластичности настоящей стоимости будущих доходов по акции по известной ставке процента и величине дюрации?

24. Как соотносятся показатели доходности облигаций, если курс этой облигации равен 100?

25. Каков экономический смысл показателя, называемого «средний арифметический срок»? Как средний арифметический срок связан с понятием кредитной услуги? Найти средний арифметический срок для двух облигаций с выплатами по купонам 8 и 10% от номинала со сроком оборота 9 лет.

Рекомендуемая литература

Основная

Блау, С. Л. Финансовая математика / С. Л. Блау, С. Г. Григорьев. — М. : Издательский центр «Академия», 2011.

Блау, С. Л. Финансовая математика : практикум / С. Л. Блау. — М. : Издательский центр «Академия», 2011.

Гурневич, Т. Г. Финансовая математика : учеб. пособие / Т. Г. Гурневич [и др.]. — Ростов н/Д : Феникс, 2015.

Капитоненко, В. В. Задачи и тесты по финансовой математике : учеб. пособие / В. В. Капитоненко. — М. : Финансы и статистика, 2011.

Касимов, Ю. Ф. Финансовая математика / Ю. Ф. Касимов. — М. : Издательство Юрайт, 2011.

Криничанский, К. В. Финансовая математика : учеб. пособие / К. В. Криничанский. — М. : Дело и сервис, 2011.

Малыхин, В. И. Финансовая математика / В. И. Малыхин. — М. : Ленанд, 2015.

Четыркин, Е. М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин. — М. : Дело АНХ, 2011.

Дополнительная

Башарин, Г. П. Начала финансовой математики : учеб. пособие / Г. П. Башарин. — М. : ИНФРА-М, 1998.

Бочаров, П. П. Финансовая математика / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. — М. : Физматлит, 2005.

Брусов, П. Н. Финансовая математика для бакалавров / П. Н. Брусов [и др.]. — М. : КноРус, 2010.

Вебер, М. Коммерческие расчеты от А до Я. Формулы, примеры расчетов и практические советы : пер. с нем. / М. Вебер. — М. : Дело и Сервис, 1999.

Ершов, Ю. С. Финансовая математика в вопросах и ответах : учеб. пособие / Ю. С. Ершов. — Новосибирск : Сибирское соглашение, 1999.

Жевняк, А. В. Математическая теория дисконтирования денежных потоков. Математическая теория кредита / А. В. Жевняк. — М. : РИНФО, 2010.

Жуленев, С. В. Финансовая математика. Введение в классическую теорию. Часть 1 / С. В. Жуленев. — М. : Изд-во МГУ, 2001.

Жуленев, С. В. Финансовая математика. Введение в классическую теорию. Часть 2 / С. Жуленев. — М. : Изд-во МГУ, 2012.

Капельян, С. Н. Основы коммерческих и финансовых расчетов / С. Н. Капельян. — Минск : НТЦ «АПИ», 1999.

Капитоненко, В. В. Финансовая математика и ее приложения : учеб.-практ. пособие для вузов / В. В. Капитоненко. — М. : ПРИОР, 1999.

Кочетыгов, А. А. Финансовая математика / А. А. Кочетыгов. — Ростов н/Д : Феникс, 2004.

Кочович, Е. Финансовая математика с решениями и задачами / Е. Кочович. — М. : Финансы и статистика, 2004.

Кузнецов, Б. Т. Математические методы финансового анализа / Б. Т. Кузнецов. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005 г.

Кутуков, В. Б . Основы финансовой и страховой математики. Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем / В. Б. Кутуков. — М. : Дело, 1998.

Лукасевич, И. Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений / И. Я. Лукасевич. — М. : Финансы ; ЮНИТИ-ДАНА, 1998.

Малыхин, В. И. Финансовая математика : учебник для студентов вузов / В. И. Малыхин, П. П. Бочаров. — М. : Гардарики, 2002.

Медведев, Г. А. Начальный курс финансовой математики : учеб. пособие / Г. А. Медведев. — М. : ТОО «Остожье», 2000.

Мельников, А. В. Математика финансовых обязательств / А. В. Мельников. — М. : ГУ ВШЭ, 2001.

Половников, В. А. Финансовая математика. Математическое моделирование финансовых операций / В. А. Половников, А. И. Пилипенко. — М. : Вузовский учебник, 2010.

Просветов, Г. И. Финансы, денежное обращение и кредит. Задачи и решения / Г. И. Просветов. — М. : Альфа-Пресс, 2008.

Радионов, Н. В. Основы финансового анализа: математические методы, системный подход / Н. В. Радионов. — СПб. : Альфа, 1999.

Салин, В. Н. Техника финансово-экономических расчетов : учеб. пособие / В. Н. Салин. — М. : Финансы и статистики, 2000.

Самаров, К. Л. Финансовая математика / К. Л. Самаров — М. : Альфа-М, 2011.

Симчера, В. М. Введение в финансовые и актуарные вычисления / В. М. Симчера. — М. : Финансы и статистика, 2003.

Уланов, В. А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений / В. А. Уланов. — М. : Финансы и статистики, 2000.

Уотшем, Т. Дж. Количественные методы в финансах : учеб. пособие для вузов ; пер. с англ. / Т. Дж. Уотшем. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 1999.

Фомин, Г. П. Финансовая математика: 300 примеров и задач : учеб. пособие / Г. П. Фомин. — М. : Гном-Пресс, 2000.

Четыркин, Е. М. Финансовая математика : учебник / Е. М. Четыркин. — М. : Дело, 2004.

Ширяев, В. И. Финансовая математика. Потоки платежей, производные финансовые инструменты / В. И. Ширяев. — М. : Либроком, 2009.

Новые издания по дисциплине «Финансовая математика» и смежным дисциплинам

Вавилов, С. А. Финансовая математика. Стохастический анализ : учебник и практикум для академического бакалавриата / С. А. Вавилов, К. Ю. Ермоленко. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

Касимов, Ю. Ф. Финансовая математика : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Ю. Ф. Касимов. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

Копнова, Е. Д. Финансовая математика : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Е. Д. Копнова. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

Мардас, А. Н. Основы финансовых вычислений : учеб. пособие для академического бакалавриата / А. Н. Мардас. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.

Приложения

Таблица П.1

Порядковые номера дней в году для определения количества дней пользования ссудой для не високосного года

День месяца	Янв.	Февр.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305 ‘	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349

Окончание табл. П.1

День месяца	Янв.	Февр.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326 ‘	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	—	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	—	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	—	90	—	151	—	212	243	—	304	—	365

Таблица П.2

Порядковые номера дней в году для определения количества дней пользования ссудой для високосного года

День месяца	Янв.	Февр.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	И	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352

Окончание табл. П.2

День месяца	Янв.	Февр.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Нояб.	Дек.
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328—	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30	—	90	121	151	182	212	243	274	304	335—	365
31	31	—	91	—	152	—	213	244	—	305	—	366

Таблица П.3

Месяц	Остаток долга	Взнос	Проценты	Погашение долга
1	3 000 000	44 793,22	32 499	12 294,22199
2	2 987 705,778	44 793,22	32 365,81669	12 427,4053
3	2 975 278,373	44 793,22	32 231,19061	12 562,03138
4	2 962 716,341	44 793,22	32 095,10613	12 698,11587
5	2 950 018,225	44 793,22	31 957,54744	12 835,67456
6	2 937 182,551	44 793,22	31 818,49857	12 974,72342
7	2 924 207,827	44 793,22	31 677,9434	13 115,2786
8	2 911 092,549	44 793,22	31 535,86558	13 257,35641
9	2 897 835,192	44 793,22	31 392,24864	13 400,97335
10	2 884 434,219	44 793,22	31 247,0759	13 546,1461
11	2 870 888,073	44 793,22	31 100,3305	13 692,8915
12	2 857 195,182	44 793,22	30 951,9954	13 841,22659
13	2 843 353,955	44 793,22	30 802,05339	13 991,1686
14	2 829 362,786	44 793,22	30 650,48706	14 142,73493
15	2 815 220,051	44 793,22	30 497,27882	14 295,94318
16	2 800 924,108	44 793,22	30 342,41086	14 450,81113
17	2 786 473,297	44 793,22	30 185,86523	14 607,35677
18	2 771 865,94	44 793,22	30 027,62373	14 765,59826
19	2 757 100,342	44 793,22	29 867,66801	14 925,55399
20	2 742 174,788	44 793,22	29 705,97948	15 087,24251
21	2 727 087,546	44 793,22	29 542,53938	15 250,68261
22	2 711 836,863	44 793,22	29 377,32874	15 415,89326
23	2 696 420,97	44 793,22	29 210,32836	15 582,89363
24	2 680 838,076	44 793,22	29 041,51888	15 751,70312
25	2 665 086,373	44 793,22	28 870,88068	15 922,34131
26	2 649 164,032	44 793,22	28 698,39395	16 094,82804
27	2 633 069,204	44 793,22	28 524,03868	16 269,18331
28	2 616 800,02	44 793,22	28 347,79462	16 445,42737
29	2 600 354,593	44 793,22	28 169,64131	16 623,58069
30	2 583 731,012	44 793,22	27 989,55806	16 803,66394
31	2 566 927,348	44 793,22	27 807,52396	16 985,69803
32	2 549 941,65	44 793,22	27 623,5179	17 169,7041
33	2 532 771,946	44 793,22	27 437,51849	17 355,7035

Продолжение табл. П.3

Месяц	Остаток долга	Взнос	Проценты	Погашение долга
34	2 515 416,243	44 793,22	27 249,50416	17 543,71784
35	2 497 872,525	44 793,22	27 059,45306	17 733,76893
36	2 480 138,756	44 793,22	26 867,34314	17 925,87885
37	2 462 212,877	44 793,22	26 673,1521	18 120,0699
38	2 444 092,807	44 793,22	26 476,85738	18 316,36461
39	2 425 776,443	44 793,22	26 278,4362	18 514,78579
40	2 407 261,657	44 793,22	26 077,86553	18 715,35647
41	2 388 546,3	44 793,22	25 875,12207	18 918,09992
42	2 369 628,2	44 793,22	25 670,18229	19 123,0397
43	2 350 505,161	44 793,22	25 463,02241	19 330,19959
44	2 331 174,961	44 793,22	25 253,61835	19 539,60364
45	2 311 635,357	44 793,22	25 041,94583	19 751,27617
46	2 291 884,081	44 793,22	24 827,98025	19 965,24174
47	2 271 918,84	44 793,22	24 611,69679	20 181,5252
48	2 251 737,314	44 793,22	24 393,07033	20 400,15167
49	2 231 337,163	44 793,22	24 172,07548	20 621,14651
50	2 210 716,016	44 793,22	23 948,6866	20 844,53539
51	2 189 871,481	44 793,22	23 722,87775	21 070,34424
52	2 168 801,137	44 793,22	23 494,62271	21 298,59928
53	2 147 502,537	44 793,22	23 263,89499	21 529,32701
54	2 125 973,21	44 793,22	23 030,66779	21 762,55421
55	2 104 210,656	44 793,22	22 794,91404	21 998,30796
56	2 082 212,348	44 793,22	22 556,60637	22 236,61563
57	2 059 975,732	44 793,22	22 315,71711	22 477,50488
58	2 037 498,228	44 793,22	22 072,2183	22 721,00369
59	2 014 777,224	44 793,22	21 826,08167	22 967,14033
60	1 991 810,084	44 793,22	21 577,27863	23 215,94336
61	1 968 594,14	44 793,22	21 325,78032	23 467,44167
62	1 945 126,699	44 793,22	21 071,55752	23 721,66447
63	1 921 405,034	44 793,22	20 814,58073	23 978,64126
64	1 897 426,393	44 793,22	20 554,82011	24 238,40188
65	1 873 187,991	44 793,22	20 292,24551	24 500,97649

Продолжение табл. П.3

Месяц	Остаток долга	Взнос	Проценты	Погашение долга
66	1 848 687,014	44 793,22	20 026,82643	24 766,39557
67	1 823 920,619	44 793,22	19 758,53206	25 034,68993
68	1 798 885,929	44 793,22	19 487,33127	25 305,89073
69	1 773 580,038	44 793,22	19 213,19255	25 580,02944
70	1 748 000,009	44 793,22	18 936,08409	25 857,1379
71	1 722 142,871	44 793,22	18 655,97372	26 137,24827
72	1 696 005,623	44 793,22	18 372,82891	26 420,39308
73	1 669 585,229	44 793,22	18 086,61679	26 706,6052
74	1 642 878,624	44 793,22	17 797,30414	26 995,91786
75	1 615 882,706	44 793,22	17 504,85736	27 288,36463
76	1 588 594,342	44 793,22	17 209,2425	27 583,97949
77	1 561 010,362	44 793,22	16 910,42525	27 882,79674
78	1 533 127,566	44 793,22	16 608,37092	28 184,85108
79	1 504 942,714	44 793,22	16 303,04443	28 490,17757
80	1 476 452,537	44 793,22	15 994,41033	28 798,81166
81	1 447 653,725	44 793,22	15 682,43281	29 110,78919
82	1 418 542,936	44 793,22	15 367,07563	29 426,14637
83	1 389 116,79	44 793,22	15 048,30218	29 744,91981
84	1 359 371,87	44 793,22	14 726,07547	30 067,14653
85	1 329 304,723	44 793,22	14 400,35807	30 392,86392
86	1 298 911,859	44 793,22	14 071,11217	30 722,10982
87	1 268 189,75	44 793,22	13 738,29956	31 054,92244
88	1 237 134,827	44 793,22	13 401,88158	31 391,34041
89	1 205 743,487	44 793,22	13 061,81919	31 731,4028
90	1 174 012,084	44 793,22	12 718,07291	32 075,14909
91	1 141 936,935	44 793,22	12 370,60282	32 422,61918
92	1 109 514,316	44 793,22	12 019,36858	32 773,85341
93	1 076 740,462	44 793,22	11 664,32943	33 128,89256
94	1 043 611,57	44 793,22	11 305,44414	33 487,77786
95	1 010 123,792	44 793,22	10 942,67104	33 850,55096
96	976 273,2409	44 793,22	10 575,96802	34 217,25397
97	942 055,987	44 793,22	10 205,29251	34 587,92949

Окончание табл. П.3

Месяц	Остаток долга	Взнос	Проценты	Погашение долга
98	907 468,0575	44 793,22	9830,601467	34 962,62053
99	872 505,4369	44 793,22	9451,851398	35 341,37059
100	837 164,0664	44 793,22	9068,998331	35 724,22366
101	801 439,8427	44 793,22	8681,997816	36 111,22418
102	765 328,6185	44 793,22	8290,804924	36 502,41707
103	728 826,2014	44 793,22	7895,37424	36 897,84775
104	691 928,3537	44 793,22	7495,659856	37 297,56214
105	654 630,7916	44 793,22	7091,615365	37 701,60663
106	616 929,1849	44 793,22	6683,19386	38 110,02813
107	578 819,1568	44 793,22	6270,347926	38 522,87407
108	540 296,2827	44 793,22	5853,029631	38 940,19236
109	501 356,0904	44 793,22	5431,190527	39 362,03147
110	461 994,0589	44 793,22	5004,78164	39 788,44035
111	422 205,6185	44 793,22	4573,753466	40 219,46853
112	381 986,15	44 793,22	4138,055963	40 655,16603
113	341 330,984	44 793,22	3697,638549	41 095,58344
114	300 235,4005	44 793,22	3252,450094	41 540,7719
115	258 694,6286	44 793,22	2802,438912	41 990,78308
116	216 703,8456	44 793,22	2347,552759	42 445,66923
117	174 258,1763	44 793,22	1887,738824	42 905,48317
118	131 352,6932	44 793,22	1422,943725	43 370,27827
119	87 982,41489	44 793,22	953,1135005	43 840,10849
120	44 142,30639	44 793,22	478,1936052	44 315,02839
Итого		5 375 187	2 375 013,917	3 000 172,722

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: red@urait.ru

Учебное издание

Шиловская Надежда Аркадьевна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник и практикум для СПО

Формат 70×100 $^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 13,66.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru