В. М. ГАЛЬПЕРИН
С. М. ИГНАТЬЕВ
В. И. МОРГУНОВ

МИКРО-ЭКОНОМИКА

Общая редакция В. М. Гальперина

ТОМ 3

П. А. ВАТНИК
А. П. ЗАОСТРОВЦЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ

«ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА» ГУ ВШЭ
«ЭКОНОМИКУС»
издательство ОМЕГА-Л

Санкт-Петербург 2007

ББК 65.9
Г 17

БИБЛИОТЕКА «ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ»
ВЫПУСК 43

Издатели
ИНСТИТУТ «ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА»
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА—ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ
«ЭКОНОМИКУС», САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ОМЕГА-Л, МОСКВА

ISBN 5-370-00274-6 (том 3)
ISBN 5-370-00271-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I.
Спрос, предложение, равновесие.
1.1. Задачи 5
1.2. Решения 7
ЧАСТЬ II.
Потребление и спрос.
2.1. Задачи 15
2.2. Решения 20
ЧАСТЬ III.
Предприятие, производство, затраты.
3.1. Задачи 39
3.2. Решения 40
ЧАСТЬ IV.
Рынки благ.
4.1. Задачи 48
4.2. Решения 55
ЧАСТЬ V.
Рынки факторов производства.
5.1. Задачи 91
5.2. Решения 84
ЧАСТЬ VI.
Общее равновесие и общественное благосостояние.
6.1. Задачи 93
6.2. Решения 115
Список использованных обозначений 159

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Микроэкономика» В. М. Гальперина, С. М. Игнатьева и В. И. Моргунова — не обычный учебник. Он, разумеется, излагает теоретические положения дисциплины. Но, кроме того, авторы сопоставляют сегодняшние представления с воззрениями ученых прошедших времен, рассматривают проекции теоретических построений на явления реальной экономики.

Основательное овладение теорией требует от читателя не только понимания и усвоения прочитанного в книге, но и самостоятельного творчества. Применительно к микроэкономике оно предполагает умение анализировать те или иные ситуации, делать выводы.

Предлагаемый сборник задач предназначен не только для проверки или самопроверки знаний, почерпнутых из учебника. Главное его предназначение — расширение и углубление этих знаний. Читателю предлагается набор экспериментальных образцов для самостоятельного поиска ответов на вопросы «Что будет, если?..»

Все задачи сопровождаются подробными решениями и комментариями, во многих случаях выходящими за рамки условий задачи.

Авторы и издатели надеются, что предлагаемый сборник задач будет полезен и студентам, изучающим микроэкономику, и их преподавателям.

П. А. Ватник, А. П. Заостровцев

ЧАСТЬ I
СПРОС, ПРЕДЛОЖЕНИЕ, РАВНОВЕСИЕ

1.1 ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА № 1

На двух берегах реки расположены города Левый и Правый; сообщение между берегами отсутствует.

В Левом спрос на некоторый товар и его предложение описываются равенствами:

$$Q_{Л}^{D} = 4000 - 40P; \qquad Q_{Л}^{S} = -200 + 10P.$$

Спрос и предложение на рынке этого же товара в Правом:

$$Q_{П}^{D} = 3000 - 30P; \qquad Q_{П}^{S} = -400 + 20P.$$

а) Обратите внимание на то, что функции спроса и предложения в Правом пропорциональны соответствующим функциям в Левом. Какое можно дать этому простое объяснение?

б) Найдите равновесные значения цены и объема продаж в каждом из городов.

ЗАДАЧА № 2

Между городами построен мост, позволяющий беспрепятственно перемещаться грузам и пассажирам, вследствие чего рынки объединились.

а) Найдите равновесные значения цены и объема продаж на объединенном рынке.

б) Найдите объемы покупок и продаж в каждом из городов после объединения рынков. Сравните результаты с полученными в задаче № 1.

в) Определите направление и объем перемещения груза из одного города в другой.

ЗАДАЧА № 3

В предыдущей задаче по умолчанию предполагалось, что транспортировка груза с одного берега на другой не сопряжена ни с какими затратами.

а) Пересмотрите результаты решения задачи № 2, считая, что транспортировка единицы товара обходится в 4 денежные единицы, уплачиваемые продавцом.

б) Пусть транспортировка единицы товара обходится в t денежных единиц. Обобщите предыдущие результаты, представив их в виде зависимостей от t.

в) При каком значении t рынки окажутся разобщенными?

ЗАДАЧА № 4

В задаче № 3 предполагалось (опять-таки по умолчанию), что затраты на транспортировку единицы товара не зависят от объема перевозок. Теперь предположим, что перевозка данного товара требует специализированных транспортных средств и осуществляется фирмами, располагающими такими средствами. Предложение на рынке специализированных перевозок описывается равенством

$$Q_{\text{Т}}^{S} = -50 + 20t.$$

Определите цену перевозки и пересчитайте результаты, определенные в задаче 3.

ЗАДАЧА № 5

Рассмотрим ситуацию, описанную в условии задачи 1.

а) Определить излишки покупателей и продавцов в каждом из городов.

б) Найти суммарные излишки покупателей и продавцов в обоих городах, а также общественные выгоды обмена в каждом из городов.

в) Найти суммарные излишки всех субъектов обоих рынков.

ЗАДАЧА № 6

Рассмотрим ситуацию, описанную в условии задачи № 2. Определить те же характеристики, которые определялись в задаче № 5, сравнить результаты, полученные в обеих задачах, сделать выводы.

ЗАДАЧА № 7

Изменим условие задачи № 3 следующим образом: будем считать, что собственно транспортировка товара не связана с затратами, но администрация установила пошлину за перемещение товара из одного города в другой. Определить излишки участников рынков, а также сумму сбора пошлины;

а) при ставке пошлины 4 денежные единицы за единицу товара;

б) при ставке t денежных единиц за единицу товара.

Покрывает ли собираемая пошлина потери излишков участников рынков?

1.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

а) Простейшее объяснение пропорциональности спроса сводится к тому, что совокупности покупателей Левого и Правого не различаются ни вкусами, ни доходами, а различаются лишь численностью: в Правом покупателей на 25% меньше, чем в левом. Аналогично пропорциональность предложения может быть связана с тем, что качественные условия деятельности фирм в обоих городах одинаковы, но в Правом фирм вдвое больше.

б) Равновесная цена в каждом из городов находится из условия равенства объемов спроса и предложения. В Левом:

$$4000 - 40P = -200 + 10P,$$

откуда равновесная цена $P_{\text{Л}} = 84$. Подставляя полученное значение в выражение для спроса или предложения, находим, что $Q_{\text{Л}} = 640$.

Аналогично для Правого условие равновесия сводится к равенству

$$3000 - 30P = -400 + 20P,$$

откуда $P_{\text{П}} = 68$, $Q_{\text{П}} = 960$.

Заметим, что, поскольку спрос в Левом больше, а предложение — меньше, чем в Правом, равновесная цена в Левом выше, чем в Правом.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

а) На объединенном рынке устанавливается единая цена; при каждом значении цены объемы спроса Левого и Правого суммируются, так что теперь рыночный спрос описывается равенством

$$Q^D = (4000 - 40P) + (3000 - 30P) = 7000 - 70P.$$

Подобным же образом суммируются объемы предложения обоих городов:

$$Q^S = (-200 + 10P) + (-400 + 20P) = -600 + 30P.$$

Приравнивая объем спроса объему предложения, находим равновесную цену: $P_{\text{о}} = 76$. Отсюда объем продаж $Q_{\text{о}} = 1680$. (Индексом «о» помечены характеристики равновесия на объединенном рынке.)

Комментарий.

Как мы видим, равновесная цена на объединенном рынке принимает промежуточное значение между ценами равновесия каждого из частных рынков. Этот результат интуитивно ясен, и можно доказать, что он верен во всех случаях, если функция спроса убывающая, а функция предложения — возрастающая.

Пусть $Q_1^D(P)$ и $Q_2^D(P)$ — функции спроса на двух рынках, $Q_1^S(P)$ и $Q_2^S(P)$ — функции предложения, P_1 и P_2 — равновесные цены, причем $P_1 \neq P_2$. Для определенности будем считать, что $P_1 > P_2$. Цена равновесия на объединенном рынке определяется равенством

$$Q_1^D(P) + Q_2^D(P) = Q_1^S(P) + Q_2^S(P).$$

На втором рынке цена P_1 выше равновесной:

$$Q_2^S(P_1) > Q_2^D(P_1) \text{ и поэтому}$$

$$Q_1^D(P_1) + Q_2^D(P_1) = Q_1^S(P_1) + Q_2^S(P_1),$$

так что и на объединенном рынке цена P_1 окажется выше равновесной, $P_1 > P_о$. Неравенство $P_2 < P_о$ доказывается аналогично. Таким образом, $P_1 > P_о > P_2$.

Это утверждение справедливо для произвольного числа объединяемых рынков: равновесная цена на объединенном рынке устанавливается между наибольшей и наименьшей из равновесных цен, складывающихся на отдельных рынках до объединения.

Кроме того, заметим, что равновесный объем продаж на объединенном рынке (1680) превышает суммарный объем на рынках до объединения (640 + 960 = 1600).

б) Объемы спроса и предложения в Левом при равновесной цене объединенного рынка:

$$Q_{Л}^D = 4000 - 40 \cdot 76 = 960;$$

$$Q_{Л}^S = -200 + 10 \cdot 76 = 560,$$

то есть запрашивается на 400 единиц больше, чем предлагается. В Правом:

$$Q_{П}^D = 3000 - 30 \cdot 76 = 720;$$

$$Q_{П}^S = -400 + 20 \cdot 76 = 1120,$$

то есть предлагается на 400 единиц больше, чем запрашивается.

в) Из Правого 400 единиц товара перевозятся и Левый.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

а) Поскольку товар перемещается с правого берега на левый, затраты на транспортировку должны войти в цену на левом берегу. Пусть P обозначает цену в Правом. Тогда цена в Левом равна $P + 4$, общий спрос и общее предложение описываются равенствами

$$Q^D = [4000 - 40(P + 4)] + (3000 - 30P) = 6840 - 70P;$$

$$Q^S = [-200 + 10(P + 4)] + (-400 + 20P) = -560 + 30P.$$

Приравнивая объем спроса объему предложения, найдем новую равновесную цену в Правом: $P = 74$. Отсюда равновесная цена в Левом равна $74 + 4 = 78$.

При этих ценах объемы спроса и предложения равны

$$Q^D_{Л} = 4000 - 40 \cdot 78 = 880;$$

$$Q^S_{Л} = -200 + 10 \cdot 78 = 580,$$

$$Q^D_{П} = 3000 - 30 \cdot 74 = 780;$$

$$Q^S_{П} = -400 + 20 \cdot 74 = 1080,$$

так что объем перевозок составляет 300 единиц.

б) Сохраняя прежние обозначения и заменяя конкретное значение затрат на перевозку единицы товара, равное 4, переменным параметром t, найдем

$$Q^D = 7000 - 40t - 70P; \quad Q^S = -600 + 10t + 30P,$$

откуда цена в Правом $P = 76 - 0.5t$, в Левом — $P + t = 76 + 0.5t$. Соответственно объемы спроса и предложения в каждом из городов равны

$$Q^D_{Л} = 960 - 20t; \qquad Q^S_{Л} = 560 + 5t,$$

$$Q^D_{П} = 720 + 15t; \qquad Q^S_{П} = 1120 - 10t,$$

а объем перевозок составляет $400 - 25t$.

Полученные результаты показывают, что с увеличением цены перевозок ослабляется «эффект моста»: объем перевозок сокращается, а цены и объемы спроса и предложения в городах приближаются к их значениям до постройки моста.

в) В приведенных рассуждениях на цену перевозок не накладывалось никаких ограничений. Однако ясно, что перевозки с правого берега на левый будут существовать, если объем перевозок $400 - 25t$ — положительная величина, т. е. $t < 16$. При $t = 16$ объем перевозок обращается в нуль и рынки каждого города фактически изолируются.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

Найденная в предыдущей задаче зависимость объема перевозок от цены фактически представляет собой функцию спроса на транспортные услуги:

$$Q_{\text{Т}}^{D} = 400 - 25t.$$

При заданном предложении $Q_{\text{Т}}^{S} = -50 + 20t$ равновесие на рынке транспортных услуг установится при $t = 10$. При этом объем перевозок $Q_{\text{Т}} = 400 - 25 \cdot 10 = 150$, цены в городах $P_{\text{Л}} = 81$ и $P_{\text{П}} = 75$, объемы спроса и предложения:

$$Q_{\text{Л}}^{D} = 760; \quad Q_{\text{Л}}^{S} = 610;$$

$$Q_{\text{П}}^{D} = 870; \quad Q_{\text{П}}^{S} = 1020.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ №5

Если $Q^D(\cdot)$ — функция спроса на некотором рынке, P — установившаяся цена, при которой спрос полностью удовлетворяется, то излишек покупателей (S^D) выражается интегралом

$$S^D = \int_{P}^{P_{\max}} Q^D(p)dp,$$

где $P_{\max}$ — верхняя граница цены спроса. Если спрос описывается линейной функцией $Q^D(p) = a - bp$, то $P_{\max} = a/b$ и

$$S^D = \frac{1}{2}(P_{\max} - P)Q, \tag{1}$$

где $Q = Q^D(P)$ — установившийся объем спроса.

Аналогично, если $Q^S(\cdot)$ — функция предложения и при установившейся цене P весь предлагаемый товар продается, то излишек продавцов (S^S) равен:

$$S^S = \int_{P_{\min}}^{P} Q^S(p)dp,$$

где $P_{\min}$ — нижняя граница цены предложения. Если спрос описывается линейной функцией $Q^S(p) = -c + dp$, то $P_{\min} =$ $= c/d$ и

$$S^S = \frac{1}{2}(P - P_{\min})Q. \qquad (2)$$

а) В обоих городах $P_{\max} = 100$, $P_{\min} = 20$. Подставляя в приведенные выше формулы значения равновесных цен $P_Л =$ 84, $P_П = 68$ и объемов $Q_Л = 640$, $Q_П = 960$, находим:

$$S_Л^D = 5120; \qquad S_Л^S = 20\ 480;$$

$$S_П^D = 15\ 360; \qquad S_П^S = 23\ 040.$$

б) Суммарные излишки покупателей в обоих городах составляют $S^D = 20480$, продавцов — $S^S = 38400$.

Общественные выгоды обмена на отдельном рынке измеряются суммой излишков продавцов и покупателей. На рынке Левого $S_Л = S_Л^D + S_Л^S = 25600$, на рынке Правого $S_П =$ $= S_П^D + S_П^S = 38\ 400$.

в) Суммарные излишки всех субъектов обоих рынков равны 64000.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

Излишки, рассчитанные по результатам решения задачи № 2 ($P_Л = P_П = 76$, $Q_Л^D = 960$, $Q_Л^S = 560$, $Q_П^D = 720$, $Q_П^S = 1120$), сведены в таблицу (см. ниже).

Сравнение с результатами решения предыдущей задачи показывает, что объединение рынков приводит к увеличению суммарных излишков участников рынка в каждом из городов, но при этом происходит перераспределение выгод:

у покупателей Левого и продавцов Правого выгоды увеличиваются, а у продавцов Левого и покупателей Правого — убывают.

Город	Излишки		
	покупателей	продавцов	суммарные
Левый	11520	15680	27200
Правый	8640	31360	40000
Оба	20160	47040	67200

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

В отношении объемов и цен спроса и предложения ситуация не отличается от рассмотренной в задаче № 3. Поэтому здесь можно воспользоваться результатами, полученными при решении этой задачи. При расчете излишков используем формулы (1) и (2), приведенные в решении задачи № 5. Приведем вначале решение для пункта б).

Цены в городах: $P_{\text{Л}} = 76 + 0.5t$; $P_{\text{П}} = 76 - 0.5t$.

Объемы покупок: $Q^D_{\text{Л}} = 960 - 20t$; $Q^D_{\text{П}} = 720 + 15t$.

Объемы продаж: $Q^S_{\text{Л}} = 560 + 5t$; $Q^S_{\text{П}} = 1120 - 10t$.

Объем перевозок: $Q^S_{\text{Т}} = 400 - 25t$.

По этим результатам находим:

$$S^D_{\text{Л}} = \frac{1}{2} \cdot (24 - 0.5t) \cdot (960 - 20t) = 11520 - 480t + 5t^2$$

$$S^D_{\text{П}} = \frac{1}{2} \cdot (24 + 0.5t) \cdot (720 + 15t) = 8640 + 360t + 3.75t^2$$

$$S^S_{\text{Л}} = \frac{1}{2} \cdot (56 + 0.5t) \cdot (560 + 5t) = 15680 + 280t + 1.25t^2$$

$$S^S_{\text{П}} = \frac{1}{2} \cdot (56 - 0.5t) \cdot (1120 - 10t) = 31360 - 560t + 2.5t^2$$

Сложив все приведенные функции, находим суммарный излишек всех участников рынка:

$$S_{\Sigma} = 67200 - 400t + 12.5t^2.$$

При беспошлинном перемещении товара ($t = 0$) суммарный излишек составлял бы 67200; суммарные потери излишка составляют $400t - 12.5t^2$. Пошлинный сбор равен $400t - 25t^2$. Таким образом, чистые общественные потери (SL, Social Loss) — разность между потерями излишка и пошлинным сбором — составляют

$$\mathrm{SL} = (400t - 12.5t^2) - (400t - 25t^2) = 12.5t^2.$$

При $t = 4$ потери излишка участников рынка равны 1400, пошлинный сбор равен 1200, так что по условиям задания а) получаем: SL = 200.

ЧАСТЬ II
ПОТРЕБЛЕНИЕ И СПРОС

2.1 ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА № 1

Объем потребления некоторого товара домашним хозяйством (q) в зависимости от дохода (I) описывается равенством:

$$q = \frac{100I^2}{(I+10)^3}.$$

Определить, при каких значениях дохода товар для данного домашнего хозяйства является

а) низшим благом;

б) нормальным благом;

в) необходимым благом;

г) роскошным благом.

ЗАДАЧА № 2

Индивид потребляет два блага в количествах x и y соответственно. Согласуются ли приведенные ниже функции полезности с аксиомами потребительских предпочтений? (да/нет)

а) $U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

б) $U(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$;

в) $U(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

ЗАДАЧА № 3

Предпочтения индивида характеризуются предельными нормами замещения $\mathrm{MRS}_{xy} = 2$, $\mathrm{MRS}_{xz} = 0.8$. Найти предельные нормы замещения а) MRS_{yx}, б) MRS_{zx}, в) MRS_{yz}, г) MRS_{zy}.

ЗАДАЧА № 4

Домашнее хозяйство потребляет два блага в количествах x и y; его предпочтения описываются функцией полезности $U(x, y)$. Найти функцию спроса домашнего хозяйства, если

а) $U(x, y) = x^3y^2$;

б) $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$.

ЗАДАЧА № 5

Предпочтения двух индивидов описываются функциями полезности

$$U_1(x, y) = \frac{xy}{x+y}; \qquad U_2(x, y) = \ln x + \ln y - \ln(x+y).$$

Различаются ли предпочтения этих индивидов?

ЗАДАЧА № 6

Рассмотрим модель, в которой предпочтения потребителя относятся не к продуктам, а к характеристикам, которыми продукты обладают (*модель Ланкастера*). Допустим, что рассматривается множество продуктов, обладающих двумя характеристиками (X и Y).

Продукт (i)	x_i	y_i
1	1	7
2	2	8
3	5	7
4	6	5
5	8	4
6	9	2

Обозначим (x_i, y_i) количественные меры соответствующих характеристик в единице i-го продукта, причем простоты ради в качестве единицы каждого продукта принимается количество продукта, приобретаемое за одну денежную единицу. Будем считать, что предпочтения в пространстве характеристик удовлетворяют тем же аксиомам, что и предпочтения в пространстве благ в традиционной теории.

В таблице (см. выше) приведены данные по шести различным продуктам. Какие из них не имеют перспектив быть проданными на рынке?

ЗАДАЧА № 7

Домашнее хозяйство потребляет два блага, X и Y, в количествах x и y; его доход $I = 60$, а предпочтения описываются функцией полезности $U(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

а) Найти объемы спроса на каждое из благ при ценах благ $p_X = 9$, $p_Y = 4$.

б) Определить зависимости объемов спроса на каждое из благ от цен и дохода.

в) Определить характер взаимозависимости благ в потреблении.

ЗАДАЧА № 8

Домашнее хозяйство потребляет два блага, X и Y, в количествах x и y; его предпочтения описываются функцией полезности $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Известен доход: $I = 60$.

а) Найти объемы спроса на каждое из благ при ценах благ $p_X = 10$, $p_Y = 5$.

б) Определить зависимости объемов спроса на каждое из благ от цен и дохода.

в) Определить характер взаимозависимости благ в потреблении.

ЗАДАЧА № 9

Домашнее хозяйство потребляет два блага, X и Y, в количествах x и y; его предпочтения описываются функцией полезности $U(x, y) = y - \dfrac{1}{x}$, цены благ равны $p_X = 16$, $p_Y = 25$.

а) Найти объемы спроса на каждое из благ при значениях дохода $I = 70$; $I = 15$.

б) Определить зависимости от дохода объемов спроса на каждое из благ.

ЗАДАЧА № 10

Индивид потребляет два блага, X и Y, в количествах x и y соответственно. Функция полезности индивида:

$$U = ax + by + xy, \quad a > 0, \; b > 0.$$

а) Пусть $a = 10$, $b = 25$. Определить объемы потребления благ, если цены благ $p_X = 5$, $p_Y = 2$ при доходе индивида $I = 200$;

б) то же при доходе индивида $I = 100$;

в) при каких соотношениях дохода и цен оптимум потребителя будет внутренним ($x > 0$, $y > 0$)?

ЗАДАЧА № 11

Домашнее хозяйство приобретает благо X, производимое естественной монополией, по цене $p_X = 10$ в количестве $x = 5$. Государство, регулирующее цену продукта естественной монополии, сочло целесообразным повысить цену до $p'_X = 14$ и выплачивать домашнему хозяйству компенсацию в размере $(p'_X - p_X) \cdot x = 20$.

а) Изменилось ли благосостояние домашнего хозяйства, и если да, то в какую сторону?

б) Проверить утверждение на следующем примере: домашнее хозяйство кроме блага X потребляет еще одно благо, Y, цена которого $p_Y = 1$ не изменилась; доход домашнего хозяйства $I = 100$, а функция полезности $U(x, y) = \sqrt{xy}$.

ЗАДАЧА № 12

Классификация благ, основанная на кривых Энгеля, учитывает изменения доли дохода, направленной на покупку рассматриваемого блага, в зависимости от изменения дохода. Докажите следующие утверждения:

если доля дохода, направляемая на покупку данного блага, увеличивается с ростом дохода, то эластичность объема потребления по доходу больше единицы;

если доля дохода, направляемая на покупку данного блага, уменьшается с ростом дохода, то эластичность объема потребления по доходу меньше единицы.

ЗАДАЧА № 13

Домашнее хозяйство потребляет три блага, X, Y и Z. Их доли в расходах составляют соответственно $s_X = 50\%$, $s_Y = 30\%$, $s_Z = 20\%$. Известны эластичности по доходу объемов потребления благ X и Y: $\mathsf{E}_I[x] = 2$, $\mathsf{E}_I[y] = 0.6$.

а) Найти эластичность объема потребления блага Z по доходу.

б) Определить, к какому типу относится каждое из благ.

ЗАДАЧА № 14

Докажите утверждение: *если среди благ, потребляемых домашним хозяйством, есть хотя бы одно низшее, то среди них имеется также хотя бы одно роскошное.*

ЗАДАЧА № 15

Телефонная компания предлагает потребителям услуг на выбор два варианта тарифов: (а) 4 *ед./мин* без абонентской платы; (б) 2 *ед./мин* и абонентская плата 20 *ед.* Какой из тарифов выберет каждый из следующих потребителей:

1) функция полезности $U_1 = x^{0.5}y^{0.5}$, доход $I_1 = 100$ *ед.*;

2) функция полезности $U_2 = x^{0.25}y^{0.75}$, доход $I_2 = 100$ *ед.*;

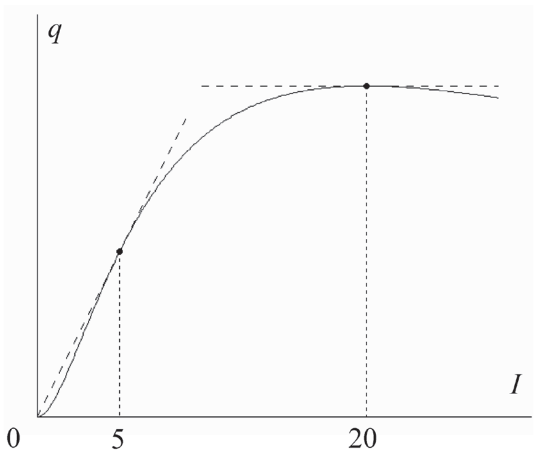
3) функция полезности $U_3 = x^{0.25}y^{0.75}$, доход $I_3 = 200$ *ед.*

Здесь x — количество (в минутах) потребляемых услуг телефонной компании, y — объем потребления всех других благ, цена которых равна 1 *ед.*

2.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Из графика видно, что с ростом дохода от нуля до некоторого уровня объем потребления товара возрастает, так что благо является нормальным; при дальнейшем росте дохода данный товар вытесняется некоторым заменителем, объем его потребления снижается и товар становится низшим.



Найдем границы области возрастания объема потребления; для этого продифференцируем объем потребления по доходу:

$$\frac{dq}{dI} = 100 \cdot \frac{2I \cdot (I+10)^3 - 3I^2(I+10)^2}{(I+10)^6} = 100 \cdot \frac{20I - I^2}{(I+10)^4}.$$

Производная обращается в нуль при $I = 20$; при меньших значениях дохода производная положительна, и объем возрастает, при бо́льших — убывает. Таким образом, товар является нормальным при $I < 20$ и низшим — при $I > 20$.

Для того чтобы выяснить, при каких уровнях дохода товар является необходимым благом, а при каких — роскошным, целесообразно воспользоваться эластичностью объема потребления по доходу:

$$\mathsf{E}_I[q] = \frac{I}{q} \cdot \frac{dq}{dI} = \frac{20 - I}{I + 10}.$$

Для роскошного блага эластичность объема потребления по доходу больше единицы. Последнее равенство показывает, что $\mathsf{E}_I[q] > 1$ при $0 < I < 5$. Если $5 < I < 20$, то потребление растет с доходом, но медленнее, чем доход, $\mathsf{E}_I[q] < 1$, и рассматриваемый товар является необходимым благом.

Итак, рассматриваемый товар является низшим благом при $I > 20$ и нормальным — при $I < 20$; при $0 < I < 5$ он является роскошным благом, при $5 < I < 20$ — необходимым.

Комментарии.

1. Знак производной всегда совпадает со знаком эластичности. Поэтому ответы на все вопросы задачи можно было получить, рассматривая диапазоны уровней дохода, в пределах которых значения $\mathsf{E}_I[q]$ превышают единицу, лежат между нулем и единицей и оказываются отрицательными.

2. Современная классификация потребляемых благ берет начало с исследований Э. Энгеля, выполненных в середине XIX в. и, естественно, не использовавших понятия эластичности функций. Проанализировав структуру потребительских бюджетов, Энгель установил, что с ростом дохода сумма расходов на питание возрастает, но их доля в распределении дохода падает. Если мы рассматриваем определенный товар, потребляемый в количестве q и покупаемый по цене p (которую мы считаем здесь неизменной), то расходы равны pq. Доля, приходящаяся на данный товар, равна pq/I; если она с ростом дохода убывает, то $\mathsf{E}_I[pq/I] < 0$. Воспользовавшись свойствами эластичности (см. Приложение) и учитывая неизменность цены, представим это соотношение в виде $\mathsf{E}_I[q] - 1 < 0$, или $\mathsf{E}_I[q] < 1$. При этом абсолютная сумма расходов возрастает, $\mathsf{E}_I[pq] = \mathsf{E}_I[q] > 0$. Таким образом, закон Энгеля применительно к необходимому благу (подобно продуктам питания) формулируется в виде двойного неравенства $0 < \mathsf{E}_I[q] < 1$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

Аксиомы потребительских предпочтений:

1) полнота (сопоставимость любых потребительских наборов);

2) транзитивность;

3) ненасыщаемость («больше — лучше, чем меньше», предпочтительность набора, содержащего больший объем любого блага без уменьшения объемов остальных);

4) непрерывность;

5) выпуклость множества наборов, предпочтительных по отношению к любому данному.

Если система предпочтений потребителя задана функцией полезности, то аксиомы 1 и 2 тем самым выполняются. Аксиома 4 выполняется, если функция полезности непрерывна. Во всех вариантах а) — в) функции полезности непрерывны, так что требования аксиом 1, 2 и 4 можно считать выполненными.

Аксиома 3 выполняется, если функция полезности возрастает по каждому аргументу. Функция варианта а), очевидно, удовлетворяет этому требованию, варианта в) — нет, она является убывающей по каждому аргументу. Так как

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy},$$

т. е. значения функций б) и в) — взаимно обратные величины, функция б) является возрастающей (в чем можно убедиться и любым иным способом).

Аксиома 5 требует, чтобы каждая кривая безразличия ограничивала снизу выпуклую область. Это означает, что предельная норма замены MRS_{xy} должна убывать с ростом x и возрастать с ростом y. Функция а) этому требованию не отвечает: соответствующие кривые безразличия — 90-градусные дуги окружностей с центром в начале координат. Для функции б)

$$\partial U/\partial x=\left(\frac{y}{x+y}\right)^2; \qquad \partial U/\partial y=\left(\frac{x}{x+y}\right)^2,$$

так что

$$\mathrm{MRS}_{\mathrm{xy}} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Таким образом, функция б) удовлетворяет всем аксиомам предпочтений.

Ответ:

а) нет; б) да; в) нет.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

Если единица блага x замещается a единицами блага y с сохранением уровня полезности, то единица блага y замещается $1/a$ единицами блага x. Поэтому $\mathrm{MRS}_{yx} = 1/\mathrm{MRS}_{xy}$.

Если к тому же единица блага y замещается b единицами блага z при том же условии, то единица блага x замещается ab единицами блага z и поэтому

$$\mathrm{MRS}_{xy} \cdot \mathrm{MRS}_{yz} = \mathrm{MRS}_{xz}.$$

Это позволяет найти все неизвестные предельные нормы замещения по известным MRS_{xy} и MRS_{xz}.

Комментарий.

Более формализованный подход связывает предельные нормы замены с производными функции полезности:

$$\mathrm{MRS}_{\mathrm{xy}} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} \quad \text{и т. п.,}$$

откуда следуют приведенные выше соотношения. Заметим, что система предпочтений определяет функцию полезности неоднозначно: если функция $U(x, y, ...)$ описывает предпочтения данного потребителя, то точно так же их описывает функция $U_1(x, y, ...) = \varphi(U(x, y, ...))$, где φ — произвольная монотонно возрастающая функция. Но

$$\frac{\partial U_1 / \partial x}{\partial U_1 / \partial y} = \frac{(d\varphi / dU) \cdot (\partial U / \partial x)}{d\varphi / dU) \cdot (\partial U / \partial y)} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y},$$

так что отношение частных производных зависит не от количественной шкалы, в которой отображаются полезности, а лишь от предпочтений индивида.

Ответ:

а) 0.5; б) 1.25; в) 0.4; г) 2.5.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

а) Прежде всего, определим предельную норму замены как функцию x и y:

$$U_x = 3x^2y^2;\;\; U_y = 2x^3y,\;\; \text{отсюда } \mathrm{MRS}_{xy} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{3y}{2x}.$$

При ценах благ p_x, p_y в точке оптимума потребителя соотношение цен p_x/p_y равно предельной норме замены, так что

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{3y}{2x},$$

или

$$\frac{p_x x}{p_y y} = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что $p_x x$ и $p_y y$ — это расходы потребителя соответственно на первое и второе блага. Отсюда ясно, как данный потребитель распределяет свой бюджет: долю 0.6 своего дохода он должен потратить на покупку первого блага, долю 0.4 — на покупку второго. Если его доход равен I, то объемы спроса на первое и на второе благо равны:

$$x = 0.6 \cdot \frac{I}{p_x}; \qquad y = 0.4 \cdot \frac{I}{p_y}.$$

Каждое из приведенных равенств описывает функцию спроса на соответствующее благо.

б) Те же рассуждения применительно к более общему случаю приводят к соотношению:

$$\frac{p_x x}{p_y y} = \frac{\alpha}{\beta},$$

откуда:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{I}{p_x}; \qquad y = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{I}{p_y}.$$

Комментарий.

В приведенных задачах объем спроса на каждое благо зависел от дохода и от цены данного блага и не зависел от цены другого блага, а доля расходов на данное благо в величине дохода зависела только от параметров функции полезности и не зависела ни от дохода, ни от цен.

Постоянство доли расходов (независимость от дохода) означает, что оба блага занимают пограничное положение между необходимыми и роскошными благами. Независимость объема спроса на каждое благо от цены другого блага означает, что блага независимы в потреблении.

Доли расходов на каждое благо зависели не от абсолютных значений параметров α и β, а лишь от их соотношения. Так, решение в п. а) не изменилось бы, если бы показатели степени равнялись не 3 и 2, а, скажем, 15 и 10 или 0.3 и 0.2. Последнее обстоятельство связано с тем, что функции полезности, связанные монотонно возрастающим преобразованием, представляют одну и ту же систему предпочтений (порядковая концепция полезности). Пусть $\mathbf{x}$ — вектор, представляющий набор благ, $U_1(\mathbf{x})$ и $U_2(\mathbf{x})$ — функции полезности, причем $U_2(\mathbf{x}) = \varphi(U_1(\mathbf{x}))$, где φ — монотонно возрастающая функция. В этом случае если $U_1(\mathbf{x}_1) > U_1(\mathbf{x}_2)$, то и $U_2(\mathbf{x}_1) > U_2(\mathbf{x}_2)$, т. е. набор, оцениваемый функцией U_1 как более предпочтительный, так же оценивается и функцией U_2. Возведение в положительную степень — монотонно возрастающее преобразование, и функция $x^{15}y^{10} = (x^3y^2)^5$ описывает ту же систему предпочтений, что и функция в задании а). Тот же результат дает и, например, логарифмирование:

$$U_3(\mathbf{x}) = 3\ln x + 2\ln y = \ln(x^3y^2).$$

В заданиях потребитель ограничивался двумя благами, но выводы остаются справедливыми при произвольном числе благ. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и

$$U(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \qquad (1)$$

причем без потери общности можно считать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \qquad (2)$$

Будем использовать обозначения для предельных полезностей,

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} \cdot \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j} = \frac{\alpha_i U}{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда получаем выражение для предельных норм замены:

$$\mathrm{MRS}_{ij} = \frac{U_i}{U_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot \frac{x_j}{x_i},$$

Полученное выражение позволяет при заданных ценах выразить расходы на все потребляемые блага через расходы на какое-нибудь одно, например первое:

$$\mathrm{MRS}_{ij} = \frac{p_1}{p_i} = \frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot \frac{x_i}{x_1}, \quad \text{откуда:}$$

$$p_i x_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1} p_1 x_1. \tag{3}$$

Теперь бюджетное ограничение можно представить в виде

$$p_1 x_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) = I,$$

так что с учетом равенства (2) $p_1 x_1 = \alpha_1 I$, а равенство (3) показывает, что аналогичные выражения справедливы для всех благ: $p_i x_i = \alpha_i I$. Таким образом, если функция полезности имеет вид (1), то доли расходов на отдельные блага в общей сумме не зависят ни от величины дохода, ни от цен. Они представляют собой постоянные величины, пропорциональные параметрам α_i, а если эти параметры нормированы в соответствии с равенством (2), то доли совпадают с параметрами. Объем спроса на каждое благо равен $x_i = \alpha_i I / p_i$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Нетрудно заметить, что $U_1(x, y) = \ln U_2(x, y)$. Логарифм — возрастающая функция. Если первый потребитель предпочитает набор (x_1, y_1) набору (x_2, y_2), т. е. если $U_1(x_1, y_1) > U_1(x_2, y_2)$, то $U_2(x_1, y_1) > U_2(x_2, y_2)$, а это означает, что второй потребитель также предпочитает первый набор второму. В рамках порядковой теории полезности предпочтения потребителей неразличимы.

Комментарии.

1. По формульной записи функций полезности далеко не всегда легко догадаться, что одна из них является функцией от другой. Но это всегда можно выяснить, сравнив предельные нормы замены: если предельные нормы замены совпадают при любых комбинациях благ, то они выражают одну и ту же систему предпочтений индивидов. При решении задачи 2 определена предельная норма замены для первого индивида:

$$\mathrm{MRS}^1_{xy}(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Для второго индивида

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{y}{x(x+y)}; \qquad \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} = \frac{x}{y(x+y)},$$

так что

$$\mathrm{MRS}^2_{xy}(x, y) = \frac{\partial U_2 / \partial x}{\partial U_2 / \partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Таким образом, для любых комбинаций (x, y) предельные нормы замены для обоих индивидов совпадают, следовательно, совпадают и их предпочтения.

2. Концепция порядковой полезности служит основой теории потребительского выбора *при отсутствии риска*. Для теоретического описания потребительского поведения в *рисковой* ситуации она оказывается недостаточной. В теории выбора в условиях риска утверждается существование такой функции полезности, к максимизации математического ожидания которой стремится потребитель (*функция полезности фон Неймана–Моргенштерна*). В этом отношении предпочтения индивидов в данной задаче различны, если условиями заданы функции полезности фон Неймана–Моргенштерна. Допустим, что в рассматриваемых примерах цены продуктов численно равны, так что, как легко проверить, в выбираемых обоими потребителями наборах $x = y$. Допустим также, что потребителю предлагают указать набор благ, столь же полезный, как лотерея из наборов (1, 1) и (5, 5) с равными ве-

роятностями. Так как $x \cdot x/(x + x) = x/2$, первый потребитель укажет набор (x, x), удовлетворяющий условию:

$$0.5 \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{x}{2},$$

откуда $x = 3$, так что он укажет набор (3, 3). Соответствующее условие для второго потребителя:

$$0.5 \cdot \ln\frac{1}{2} + 0.5 \cdot \ln\frac{5}{2} = \ln\frac{x}{2},$$

откуда $x = \sqrt{5} \approx 2.236$, и он укажет набор (2.236, 2.236). Выбранный первым индивидом набор (3, 3) окажется для второго индивида более полезным, чем предложенная лотерея.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

Одна из аксиом потребительских предпочтений — аксиома ненасыщаемости («больше лучше, чем меньше»). Поэтому представляется очевидным, что любой потребитель предпочтет продукт 2 продукту 1 ($x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$) — продукт 2 *доминирует* над продуктом 1. На рисунке область доминирования по отношению к продукту 1 («северо-восточный угол») показана штриховыми линиями; точка, соответствующая продукту 2, располагается в этой области. Если по отношению к данному продукту есть доминирующий (на графике он располагался бы правее и выше данного), то ни один потребитель не выберет данный продукт. Таким образом, продукт 1 не может быть продан.

Кроме того, продукт не может быть продан, если он уступает по обеим характеристикам некоторому набору продуктов, приобретаемому за ту же цену. Если в набор входят n продуктов в количествах λ_i, таких что

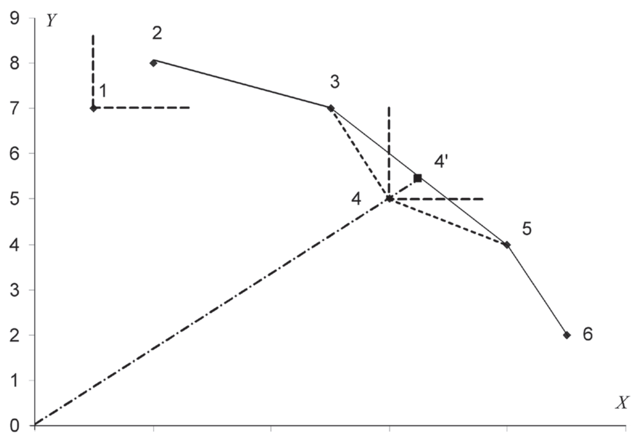
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1; \qquad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то такой λ_i набор будет обладать характеристиками

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i,$$

и если каждый из продуктов мог быть куплен за одну денежную единицу, то и набор может быть куплен также за одну единицу. Если некоторый продукт доминируется набором из других продуктов, то каждый потребитель предпочтет ему этот набор.

Если выбор осуществляется в пространстве двух характеристик, достаточно ограничиться двухпродуктовыми наборами; все возможные наборы из двух конкретных продуктов графически представляются отрезками, соединяющими точки, обозначающие эти продукты. Таким образом, если на графике правее и выше данного продукта имеются точки отрезка, соединяющего два других продукта, то это означает, что существуют наборы, доминирующие над данным продуктом. Если составить набор из третьего и пятого продуктов в количествах $\lambda_3 = 2/3$, $\lambda_5 = 1/3$, то мы получим набор с характеристиками $x = 6 = x_4$ и $y = 6 > y_4$ (точка 4′ на рисунке), доминирующий по отношению к четвертому продукту (для доминирования i над j требуется $x_i \geq x_j$ и $y_i \geq y_j$, причем по крайней мере одно из неравенств должно быть строгим).



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

а) Найдем выражения для предельных полезностей:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2}; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

Приравнивая предельную норму замены соотношению цен:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{p_X}{p_Y} = \frac{9}{4},$$

находим: $y = 1.5x$. Из равенства дохода и расходов, $9x + 4 \cdot 1.5x = 60$, определяются объемы спроса: $x = 4$, $y = 6$.

б) Выполним те же действия без использования числовых значений данных. Соотношение между объемами спроса на блага равно $y = x\sqrt{p_X / p_Y}$. Отсюда:

$$x = \frac{I}{p_X + \sqrt{p_X p_Y}}; \qquad y = \frac{I}{p_Y + \sqrt{p_X p_Y}}.$$

в) Последние равенства показывают, что при фиксированной величине дохода объем спроса на каждое благо снижается как при росте цены этого, так и при росте цены другого блага. Это означает, что блага являются взаимно дополняющими.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 8

а, б) Рассуждая по аналогии с решением предыдущей задачи, находим:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{p_X}{p_Y} = \frac{10}{5}.$$

Отсюда $y = x \cdot (p_X / p_Y)^2 = 4x$. Из равенства дохода и расходов, $10x + 5 \cdot 4x = 60$, находим $x = 2$, $y = 8$.

Зависимость объемов спроса от цен и дохода описывается равенствами

$$x = \frac{I}{p_X \cdot (1 + p_X / p_Y)}; \qquad y = \frac{I}{p_Y \cdot (1 + p_Y / p_X)}.$$

в) Последние равенства показывают, что при фиксированной величине дохода объем спроса на каждое благо снижается при росте цены этого блага, но возрастает с увеличением цены другого блага. Это означает, что блага являются взаимно заменяющими.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 9

Найдем выражения для предельных полезностей:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x^2}; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 1.$$

Далее, найдем выражение для предельной нормы замены:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{1}{x^2}.$$

Так как в точке потребительского оптимума предельная норма замены равна соотношению цен, справедливо равенство

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{1}{x^2},$$

откуда непосредственно находится объем потребления блага X:

$$x = \sqrt{\frac{p_Y}{p_X}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = 1.25$$

и блага Y

$$y = \frac{I - \sqrt{p_X p_Y}}{p_Y}.$$

Спрос на благо X, как мы видим, не зависит от дохода (в дальнейшем нам придется уточнить это утверждение). Спрос на Y явным образом от дохода зависит. При $I = 70$ имеем:

$$y = \frac{70 - \sqrt{16 \cdot 25}}{25} = 2.$$

При $I = 15$:

$$y = \frac{I - A}{I} < \left(\frac{p_б}{p_а}\right)^{\alpha}$$

Ясно, что объем потребления не может быть отрицательным. Но, согласно полученному выражению для y, условие $y \geq 0$ выполняется при $I \geq \sqrt{p_X p_Y} = 20$ и нарушается в противном случае. Естественно предположить, что при нарушении этого условия домашнее хозяйство полностью отказывается от блага Y, так что $y = 0$. Но в таком случае и выражение для x становится неверным: так как весь доход расходуется на благо X, объем его потребления равен $x = I/p_X$.

Для проверки этого предположения выясним, какие значения принимает предельная норма замены на бюджетной границе, описываемой равенством $p_X x + p_Y y = I$. Из условия $y \geq 0$ следует, что $p_X x \leq I$ и $x \leq I/p_X$. Поэтому на бюджетной границе

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{1}{x^2} \geq \frac{p_X^2}{I^2} = \frac{16^2}{I^2}.$$

Равенство $\mathrm{MRS}_{XY} = p_X/p_Y = 16/25 = 0.625$ есть условие *внутреннего* потребительского оптимума. При $I = 70$ предельная норма замены на бюджетной границе не меньше $16^2/70^2 \approx 0.052$, и в некоторой точке (а именно $x = 1.25$, $y = 2$) она равна 0.625. Это и есть найденный выше внутренний оптимум. При $I = 15$ на бюджетной границе $\mathrm{MRS}_{XY} \geq 16^2/15^2 \approx 1.138$ и значения, равного 0.625, на бюджетной линии не существует. Это означает, что потребительский оптимум занимает *граничное*, или, как его чаще называют в экономике, *угловое* положение. Таким образом,

$$x = \sqrt{\frac{p_Y}{p_X}}, \qquad y = \frac{I - \sqrt{p_X p_Y}}{p_Y} \qquad \text{при} \quad I \geq \sqrt{p_X p_Y}\ ;$$

$$x = \frac{I}{p_X}, \qquad y = 0 \qquad \text{при} \quad I < \sqrt{p_X p_Y}.$$

Комментарий.

Если при некоторых значениях (x, y), лежащих на бюджетной границе, имеет место неравенство $\mathrm{MRS}_{XY} > p_X/p_Y$, то в интересах потребителя несколько увеличить потребление блага X, соответственно сократив потребление блага Y. Если неравенство имеет противоположный знак, то потребитель может повысить полезность потребляемого набора, сместившись вдоль бюджетной границы в сторону уменьшения потребления блага X и увеличения потребления блага Y. Если в некоторой внутренней точке бюджетной границы выполняется равенство $\mathrm{MRS}_{XY} = p_X / p_Y$, то, как следует из выпуклости кривых безразличия к началу координат, и увеличение, и уменьшение значения x привели бы к снижению полезности. Это и означает, что в данной точке достигается потребительский оптимум. Но если на бюджетной границе всюду имеет место соотношение $\mathrm{MRS}_{XY} > p_X/p_Y$, то в каждой внутренней точке границы потребитель заинтересован в увеличении x, так что оптимум достигается при полном расходовании дохода на покупку блага X и отказе от блага Y.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ №10

Определим выражение для предельной нормы замены блага X благом Y:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a + y; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = b + x,$$

так что

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{a+y}{b+x}. \tag{1}$$

Условие внутреннего оптимума потребителя имеет вид $\mathrm{MRS}_{XY} = p_X/p_Y$, откуда

$$y = \frac{p_X}{p_Y} \cdot (b + x) - a.$$

С учетом этого выражения уравнение баланса дохода и расходов принимает вид

$$I = p_X x + p_Y y = p_X x + p_X \cdot (b + x) - p_Y a,$$

откуда

$$x = \frac{I + p_Y a}{2p_X} - \frac{b}{2}; \qquad y = \frac{I + p_X b}{2p_Y} - \frac{a}{2}.$$

Подставляя в эти выражения числовые значения задания а), найдем, что $x = 9.5$, $y = 76.25$.

Подстановка числовых значений задания б) приводит к результату: $x = -0.5$, $y = 51.25$. Поскольку отрицательный объем потребления невозможен, полученный результат означает, что *внутренний* оптимум потребителя при данных условиях не существует. Следовательно, оптимум принимает *граничное* положение: $x = 0$, $y = I/p_Y = 50$. См. комментарий к предыдущей задаче.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 11

а) Можно утверждать, что благосостояние домашнего хозяйства не ухудшится: повышение цены при прежнем объеме потребления полностью компенсируется, так что исходный набор благ доступен и после повышения цены. Но соотношение цен изменилось, и потребитель после повышения цены блага X предпочтет иной набор благ. Отношение цен p_X/p_Y, где Y — любое благо, отличное от X, увеличится, и оптимум переместится к набору с большей нормой замены MRS_{XY}.

б) Функция полезности имеет вид $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, $\alpha = \beta = 0.5$. Поэтому можно воспользоваться формулами, приведенными в решении задачи № 4, и найти объемы потребления благ до повышения цен:

$$x = \frac{0.5 \cdot 100}{10} = 5, \qquad y = \frac{0.5 \cdot 100}{1} = 50,$$

так что полезность до повышения цены блага X равна $\sqrt{5 \cdot 50} = 15.81$. После повышения цены доход, включающий компенсацию, составил $100 + 20 = 120$, объемы потребления:

$$x = \frac{0.5 \cdot 120}{14} = 4.29, \qquad y = \frac{0.5 \cdot 120}{1} = 60,$$

и полезность приняла значение $\sqrt{4.29 \cdot 60} = 16.04$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 12

Пусть x обозначает объем потребления блага X; p — его цена; I — доход домашнего хозяйства; $s = px/I$ — доля дохода, направляемая на благо X. Так как зависимость потребления от дохода рассматривается в предположении фиксированных цен, для эластичности доли справедливо равенство

$$\mathsf{E}_I[s] = \mathsf{E}_I[px/I] = \mathsf{E}_I[x] - 1$$

(см. Приложение). Для возрастающей доли $\mathsf{E}_I[s] > 0$, для убывающей доли $\mathsf{E}_I[s] < 0$, откуда следуют оба утверждения.

Комментарий.

С зависимостью объема потребления от дохода связана классификация благ: если с ростом дохода потребление убывает, благо относят к *низшим* (или *некачественным*), а если возрастает, то — к *нормальным*. Нормальные блага, в свою очередь, относят к *необходимым* (или *качественным*), если с ростом дохода его доля, направленная на данное благо убывает; если же эта доля возрастает, то благо относят к *роскошным* (или *высококачественным*). Доказываемые в задаче утверждения позволяют связать эту классификацию с эластичностью объема потребления блага по доходу: если $\mathsf{E}_I[x] < 0$, благо относят к низшим, при противоположном знаке неравенства — к нормальным. Если $0 < \mathsf{E}_I[x] < 1$, благо считается необходимым, а при $\mathsf{E}_I[x] < 1$ — роскошным.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 13

а) Пусть w_X, w_Y, w_Z — расходы на покупку соответствующих благ; I — доход домашнего хозяйства. Справедливы равенства

$$w_X + w_Y + w_Z = I; \qquad (1)$$

$$w_X = 0.5I; \qquad w_Y = 0.3I; \qquad w_Z = 0.2I.$$

Малое относительное приращение дохода δI повлекло бы относительные приращения объемов потребления благ X и Y величиной $2 \cdot \delta I$ и $0.6 \cdot \delta I$, совпадающие с относительными приростами расходов на покупку (цены считаются неизменными). Неизвестное относительное приращение объема потребления блага Z обозначим δ_Z. Баланс дохода и расходов теперь примет вид:

$$0.5I \cdot (1 + 2 \cdot \delta I) + 0.3I \cdot (1 + 0.6 \cdot \delta I) + 0.2I \cdot (1 + \delta_Z) = I \cdot (1 + \delta I).$$

Отсюда $0.2 \cdot \delta_Z = -0.18 \cdot \delta I$, так что $\mathsf{E}_I[z] = -\,0.9$.

Комментарий.

Приведенные рассуждения носят приближенный характер: они оперируют с конечными приращениями, в то время как эластичности — дифференциальные характеристики. Тем не менее результат оказался точным. Чтобы убедиться в этом, обратимся к свойству эластичности суммы (см. Приложение).

Эластичности по доходу объемов потребления благ и соответствующих расходов совпадают, поскольку эти величины различаются постоянными множителями — ценами. Так как равенство (1) выполняется при любых доходах, эластичности левой и правой его частей равенства совпадают:

$$\mathbf{E}_I[w_X + w_Y + w_Z] = 1,$$

или

$$\frac{w_X \mathbf{E}_I[w_X] + w_Y \mathbf{E}_I[w_Y] + w_Z \mathbf{E}_I[w_Z]}{w_X + w_Y + w_Z} =$$

$$= s_X\ \mathbf{E}_I[w_X] + s_Y\ \mathbf{E}_I[w_Y] + s_Z\ \mathbf{E}_I[w_Z] = 1,$$

т. е. среднее арифметическое значение эластичностей по доходу объемов всех потребляемых домашним хозяйством благ равно единице. Поэтому

$$\mathbf{E}_I[w_Z] = [1 - (s_X\ \mathbf{E}_I[w_X\ ] + s_Y\ \mathbf{E}_I[w_Y])]/s_Z = -0.9.$$

б) Благо Z является низшим, блага X и Y — нормальные; при этом X — роскошное, Y — необходимое благо.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 14

В комментарии к предыдущей задаче показано, что эластичности потребления всех благ по доходу в среднем равны единице. Доказательство приведено для трех благ, но оно очевидным образом обобщается для произвольного числа благ. Поэтому если эластичность потребления некоторого блага отрицательна, то эластичности прочих благ не могут все быть меньше или равны 1. Иными словами, найдется хотя бы одно благо, эластичность потребления которого по доходу строго больше 1, т. е. роскошное благо.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 15

Все три потребителя имеют функции полезности одинакового вида: $U = x^{\alpha}y^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$. Воспользовавшись решением задачи № 4, можем утверждать, что объем потребления услуг телефонной станции при цене $p_а$ без абонентской платы равен $x_а = \alpha I/p_а$, объем потребления прочих благ — $y_а = \beta I$, так что значение функции полезности

$$U_а = \alpha^{\alpha} \beta^{\beta} I p_а^{-\alpha}$$

(здесь учтено то обстоятельство, что цена прочих благ принята равной 1).

Абонементная плата равносильна уменьшению дохода на соответствующую величину. При абонементной плате A и повременной $p_б$ объемы потребления благ равны $x_б = \alpha(I - A)/p_б$, $y_б = \beta(I - A)$ и значение функции полезности

$$U_б = \alpha^{\alpha} \beta^{\beta}(I - A) p_б^{-\alpha} .$$

Выбор потребителя определяется тем, какая из величин, $U_а$ или $U_б$, больше: если $U_а > U_б$, то он выберет тариф (а), при противоположном соотношении — тариф (б). Таким образом, тариф (а) выбирается при условии

$$\alpha^{\alpha} \beta^{\beta} I p_а^{-\alpha} > \alpha^{\alpha} \beta^{\beta}(I - A) p_б^{-\alpha} ,$$

или

$$\frac{I - A}{I} < \left(\frac{p_б}{p_а}\right)^{\alpha} .$$

Для первого потребителя ($I = 100$, $\alpha = 0.5$) выполняется противоположное неравенство

$$0.8 > 0.5^{0.5} = 0.707,$$

и он предпочтет вариант (б). Для второго потребителя ($I = 100$, $\alpha = 0.25$):

$$0.8 < 0.5^{0.25} = 0.841,$$

и для него предпочтительнее вариант (а). Для третьего ($I = 200$, $\alpha = 0.25$):

$$0.9 > 0.5^{0.5} = 0.841,$$

так что он выберет вариант (б).

Комментарий.

При анализе поведения потребителя на рынке отдельного блага оказывается полезным прием, сводящий выбор набора из многих благ к выбору набора из двух благ. В качестве одного из них выступает рассматриваемое благо, в качестве второго — набор, включающий все остальные блага. Этот набор (так называемое *композитное* благо) измеряется расходами на его приобретение. Вследствие этого его цена всегда равна единице.

ЧАСТЬ III
ПРЕДПРИЯТИЕ, ПРОИЗВОДСТВО, ЗАТРАТЫ

3.1 ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА № 1

Технология производства предполагает использование двух ресурсов и характеризуется постоянной отдачей от масштаба. Производство 60 единиц продукта требует затрат ресурсов в количествах $x_1 = 12$ и $x_2 = 4$. Предельный продукт первого ресурса $MP_1 = 3$. Чему равен предельный продукт второго ресурса?

ЗАДАЧА № 2

Найти эластичности замещения ресурсов для следующих производственных функций:

а) $q = a\sqrt{x_1} + b\sqrt{x_2}$;

б) $q = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$;

в) $q = \dfrac{x_1x_2}{ax_1 + bx_2}$.

ЗАДАЧА № 3

Фирма использует два ресурса в количествах x_1 и x_2; ее производственная функция $q = a\sqrt{x_1x_2}$, цены ресурсов p_1 и p_2. Найти:

а) уравнение пути оптимального роста фирмы;

б) функцию общих затрат длительного периода;

в) функцию общих затрат короткого периода, считая первый ресурс переменным, второй — постоянным.

ЗАДАЧА № 4

Фирма использует два ресурса в количествах x_1 и x_2; известна ее производственная функция:

$$q = 2 \cdot (x_1 - 5)^{0.5}(x_2 - 10)^{0.3}, \qquad x_1 > 5, \ \ x_2 > 10$$

и цены ресурсов $p_1 = 1$; $p_2 = 4$. Найти:

а) уравнение пути оптимального роста фирмы;

б) функции общих, средних и предельных затрат длительного периода;

в) эффективный масштаб производства;

г) функции общих, средних и предельных затрат короткого периода, считая второй ресурс постоянным, $x_2 = 20$.

ЗАДАЧА № 5

В состав фирмы входят два завода, производящие один и тот же продукт в количествах q_1 и q_2 и имеющие функции затрат

$$\mathrm{TC}_1(q_1) = 200 + 10q_1 + 0.5q_1^2;$$

$$\mathrm{TC}_2(q_2) = 100 + q_2 + 2q_2^2.$$

Найти функцию затрат фирмы TC(Q), где Q — объем выпуска фирмы.

ЗАДАЧА № 6

Несколько изменим условия задачи. Пусть теперь

$$\mathrm{TC}_1(q_1) = 200 + 10q_1 + 0.5q_1^2;$$

$$\mathrm{TC}_2(q_2) = 100 + 25q_2 + 2q_2^2.$$

Найти функцию затрат фирмы TC(Q), где Q — объем выпуска фирмы.

3.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Производственная функция $q = f(x_1, x_2)$ с постоянной отдачей от масштаба обладает следующим свойством: при любом положительном k выполняется равенство

$$f(kx_1,\ kx_2) = kf(x_1,\ x_2).$$

Почленно дифференцируя это равенство по k, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 = f(x_1, x_2), \tag{1}$$

или $\mathrm{MP}_1 \cdot x_1 + \mathrm{MP}_2 \cdot x_2 = q$, откуда $\mathrm{MP}_2 = (q - \mathrm{MP}_1 \cdot x_1)/x_2$.

При данных задачи находим: $\mathrm{MP}_2 = (60 - 3 \cdot 12)/4 = 6$.

Комментарий. Равенство (1) есть частный случай уравнения Эйлера: если функция $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ однородна степени α, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Производственная функция с постоянной отдачей от масштаба — однородная функция первой степени, или линейно-однородная функция.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

Эластичность замещения ресурсов представляет собой эластичность отношения количеств ресурсов x_2/x_1 по предельной норме технической замены MRTS_{12}.

а) Найдем предельные продукты ресурсов:

$$\mathrm{MP}_1 = \frac{a}{2\sqrt{x_1}}; \qquad \mathrm{MP}_2 = \frac{b}{2\sqrt{x_2}}.$$

Отсюда

$$\mathrm{MRTS}_{12} = \frac{\mathrm{MP}_1}{\mathrm{MP}_2} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.$$

Предельная норма технической замены представляет собой степенную функцию отношения x_2/x_1; показатель степени равен 1/2. Эластичность степенной функции равна показателю степени, так что эластичность MRTS_{12} по x_2/x_1 равна 1/2, а эластичность обратной зависимости, которая нас интересует, равна 2.

б) $\mathrm{MP}_1 = a \cdot \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}$; $\mathrm{MP}_2 = a \cdot \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}$; $\mathrm{MRTS}_{12} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{x_2}{x_1}$.

В этом случае зависимость также степенная, показатель степени равен 1; соответственно эластичность замещения равна 1.

$$\text{в) } MP_1 = \frac{bx_2^2}{(ax_1 + bx_2)^2};\ MP_2 = \frac{ax_1^2}{(ax_1 + bx_2)^2};\ MRTS_{12} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

Здесь показатель степени равен 2, эластичность замещения равна 1/2.

Комментарий. В рассмотренных задачах пропорция затрачиваемых ресурсов и предельная норма технической замены были связаны степенными зависимостями. Эластичность степенной функции — постоянная величина; производственные функции, обладающие подобными свойствами, получили название функций с постоянной эластичностью замещения, или ПЭЗ-функций. Они служат удобными моделями и широко используются в микроэкономическом анализе. В частности, они позволяют оценивать взаимозависимость ресурсов в производстве: если эластичность замещения ресурсов больше 1, то ресурсы являются взаимно заменяющими, а если меньше, то — дополняющими. В случае а) ресурсы были взаимными заменителями, в случае в) — дополнителями. В случае б) ресурсы были взаимно независимыми.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

а) Путь оптимального роста фирмы — это множество экономически эффективных способов производства, т. е. таких способов, которые позволяют произвести любое возможное количество продукта с минимальной стоимостью используемых ресурсов. Для каждого экономически эффективного способа предельная норма технического замещения ресурсов равна соотношению их цен.

Предельные производительности ресурсов

$$MP_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}; \qquad MP_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}};$$

предельная норма технической замены

$$\mathrm{MRTS}_{12} = \frac{\mathrm{MP}_1}{\mathrm{MP}_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Таким образом, путь оптимального роста — прямая, описываемая уравнением

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

б) Используем полученное уравнение для определения экономически эффективного набора ресурсов, необходимого для производства продукта в количестве q. Подставим выражение для x_2 в производственную функцию:

$$q = a \cdot \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \cdot x_1,$$

откуда

$$x_1 = \frac{q}{a}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}; \qquad x_2 = \frac{q}{a}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

$$\mathrm{LTC}(q) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{2q}{a}\sqrt{p_1 p_2}.$$

в) В случае, когда $x_2 = \mathrm{const}$, изменение объема выпуска достигается выбором соответствующей величины x_1, так что в коротком периоде

$$x_1 = \frac{q^2}{a^2 x_2},$$

и поэтому

$$\mathrm{STC}(q) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{p_1 q^2}{a^2 x_2} + p_2 x_2.$$

Комментарий. Поскольку $\mathrm{LTC}(q)$ — это минимальные затраты на производство объема q при условии, что все ресурсы — переменные, а $\mathrm{STC}(q)$ — минимальные затраты при условии, что некоторые ресурсы — постоянные, можно утверждать, что $\mathrm{STC}(q) \geq \mathrm{LTC}(q)$ при любом q. Выражения для затрат короткого и длительного периодов, полученные при решении задачи, иллюстрируют это общее положение:

$$\mathrm{STC}(q) - \mathrm{LTC}(q) = \frac{p_1 q^2}{a^2 x_2} + p_2 x_2 - \frac{2q}{a}\sqrt{p_1 p_2} = \left(\frac{q\sqrt{p_1}}{a\sqrt{x_2}} - \sqrt{p_2 x_2}\right)^2 \geq \mathbf{0}.$$

Равенство достигается при значении q, обращающем в нуль выражение в круглых скобках:

$$q = a\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}x_2,$$

т. е. при том объеме выпуска, для которого в условиях длительного периода второй ресурс использовался бы в данном объеме x_2 (проверьте!).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

а) Пользуясь методами, примененными при решении предыдущей задачи, находим:

$$\mathrm{MP}_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = (x_1 - 5)^{-0.5} \cdot (x_2 - 10)^{0.3};$$

$$\mathrm{MP}_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0.6 \cdot (x_1 - 5)^{0.5} \cdot (x_2 - 10)^{-0.7};$$

$$\mathrm{MRTS}_{12} = \frac{\mathrm{MP}_1}{\mathrm{MP}_2} = \frac{1}{0.6} \cdot \frac{x_2 - 10}{x_1 - 5} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем уравнение пути оптимального роста:

$$x_2 = 10 + 0.15 \cdot (x_1 - 5).$$

б) Используем полученное уравнение для определения экономически эффективного набора ресурсов, необходимого для производства заданного объема q продукта. Подставим выражение для x_2 в производственную функцию:

$$q = 2 \cdot (x_1 - 5)^{0.5} \cdot [0.15 \cdot (x_1 - 5)]^{0.3} = 1.1320(x_1 - 5)^{0.8},$$

откуда определяются

$$x_1 = 5 + 0.8564\, q^{1.25}; \qquad x_2 = 10 + 0.12846\, q^{1.25}$$

и функции затрат

$$\mathrm{LTC}(q) = p_1x_1 + p_2x_2 = 45 + 1.3702\, q^{1.25};$$

$$\mathrm{LAC}(q) = \frac{45}{q} + 1.3702\, q^{0.25}; \ \mathrm{LMC}(q) = 3.6025 \cdot 10^{-3}\, q^{0.25}.$$

в) Эффективный масштаб производства q_e определяется объемом выпуска, при котором средние затраты принимают минимальное значение; при этом выполняется равенство $MC(q_e) = AC(q_e)$, из которого находим $q_e = 49.520$. При этом $\min LAC(q) = 4.544$, ресурсы используются в количествах $x_1 = 117.5$, $x_2 = 26.875$.

г) В коротком периоде зависимость объема выпуска от использования единственного переменного ресурса описывается равенством

$$q = 2 \cdot (x_1 - 5)^{0.5}(20 - 10)^{0.3} = 3.9905 \cdot (x_1 - 5)^{0.5},$$

так что количество первого ресурса для выпуска q единиц продукта равно

$$x_1 = 5 + 0.062797q^2,$$

и функции затрат

$$STC(q) = 1 \cdot (5 + 0.062797q^2) + 4 \cdot 20 = 85 + 0.062797q^2$$

$$SAC(q) = \frac{85}{q} + 0.062797q; \qquad SMC(q) = 0.12559q.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Любой объем выпуска фирмы $Q = q_1 + q_2$ должен быть распределен между заводами таким образом, чтобы суммарные затраты $TC(Q) = TC_1(q_1) + TC_2(q_2)$ были минимальными. Таким образом, функция затрат фирмы определяется условием:

$$TC(Q) = \min(TC_1(q_1) + TC_2(q_2)) \text{ при условии } Q = q_1 + q_2.$$

В рассматриваемом случае двух заводов эффективное распределение объема производства легко найти подстановкой $q_2 = Q - q_1$ и последующей минимизацией суммы функций затрат обоих заводов:

$$TC_1(q_1) + TC_2(Q - q_1) =$$

$$= 200 + 10q_1 + 0.5q_1^2 + 100 + 10(Q - q_1) + 2(Q - q_1)^2.$$

Минимум достигается при $q_1 = 0.8Q$, так что $q_2 = 0.2Q$. Подстановка в полученное выражение найденного значения q_1 дает выражение для искомой функции затрат:

$$TC(Q) = 300 + 10Q + 0.4Q^2.$$

Комментарий. Отметим одно свойство эффективного распределения. Подстановка найденных выражений для q_1 и

q_2 в выражения для предельных затрат заводов показывает, что значения предельных затрат заводов одинаковы:

$$MC_1(q_1) = 10 + q_1 = 10 + 0.8Q; \; MC_2(q_2) = 10 + 4q_2 = 10 + 0.8Q.$$

Кроме того, эти значения совпадают с предельными затратами фирмы в целом:

$$MC(Q) = 10 + 0.8Q.$$

Этот результат справедлив для любых функций затрат заводов (с некоторыми оговорками, обсуждаемыми в комментарии к задаче № 6). Воспользовавшись подстановкой, примененной выше при решении задачи, сформулируем требование к распределению объема производства в виде минимизации суммы $TC_1(q_1) + TC_2(Q - q_1)$. Дифференцируя по q_1, найдем, что $MC_1(q_1) - MC_2(Q - q_1) = 0$, т. е. при эффективном распределении $MC_1(q_1) = MC_2(q_2)$.

Равенство предельных затрат имеет ясный экономический смысл. Если при некотором распределении предельные затраты оказываются неравными, например $MC_2(q_2) > MC_1(q_1)$, то уменьшение объема q_2 на малую величину $\varepsilon > 0$ с одновременным увеличением на такую же величину объема q_1 не изменит общего объема выпуска фирмы Q, но сократит общие затраты фирмы, так как сокращение затрат второго завода ($MC_2 \cdot \varepsilon$) превысит увеличение затрат первого завода ($MC_1 \cdot \varepsilon$).

Кроме того, результат будет тем же при произвольном числе заводов. Покажем это, воспользовавшись методом множителей Лагранжа. Если в состав фирмы входят n заводов, то функция общих затрат фирмы при эффективном распределении объема производства между заводами определяется условием

$$TC(Q) = \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i) \quad \text{при условии} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = Q.$$

Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи условной минимизации:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} q_i - Q\right),$$

где λ — множитель Лагранжа. Условие минимума:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = MC_i(q_i) - \lambda = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

так что при эффективном распределении общего объема производства

$$\mathrm{MC}_i(q_i) = \lambda, \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

т. е. предельные затраты всех заводов равны одной и той же величине λ. В свою очередь множитель Лагранжа равен производной минимизируемой функции ($\mathrm{TC}(Q)$) по ограничивающему параметру (Q), следовательно, $\mathrm{MC}(Q) = \lambda$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

Воспользовавшись рассмотренным выше свойством эффективного распределения, приравняем предельные затраты первого завода $\mathrm{MC}_1(q_1) = 10 + q_1$ предельным затратам второго $\mathrm{MC}_2(q_2) = 25 + 4q_2$ и получим соотношение $q_1 = 15 + 4q_2$. Так как $Q = q_1 + q_2 = 15 + 5q_2$, находим:

$$q_2 = 0.2Q - 3; \qquad\qquad q_1 = 0.8Q + 3.$$

Такое распределение возможно лишь при $Q \geq 15$: в противном случае оказалось бы $q_2 < 0$, что невозможно, и $q_1 > Q$, что также невозможно. Не учитывая условие неотрицательности q_1 и q_2, мы пришли к результату, верному лишь при достаточно больших общих объемах. При $Q < 15$ эффективным окажется «распределение», при котором весь объем выпуска фирмы будет осуществляться первым заводом. Итак,

$$q_1 = Q, \qquad q_2 = 0 \qquad \text{при } Q < 15;$$

$$q_1 = 0.8Q + 3, \qquad q_2 = 0.2Q - 3 \qquad \text{при } Q \geq 15.$$

Комментарий. Методы дифференциального исчисления позволяют найти внутренние экстремумы. В первой части задачи при любых значениях Q существовали внутренние решения: и q_1, и q_2 можно было как увеличить, так и уменьшить на достаточно малую величину. Во второй части такая возможность для распределения при $Q < 15$ отсутствует. В этом случае $\mathrm{MC}_1(q_1) = 10 + Q$, $\mathrm{MC}_2(q_2) = 25$, так что $\mathrm{MC}_2 > \mathrm{MC}_1$, но «исправить» распределение, увеличив на q_1 величину ε и соответственно уменьшив q_2, невозможно. Здесь мы имеем дело с граничным оптимумом.

ЧАСТЬ IV
РЫНКИ БЛАГ

4.1 ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА № 1

Производственная функция фирмы
$q = 2 \cdot (x_1 - 5)^{0.5}(x_2 - 10)^{0.3}, \qquad x_1 > 5, \;\; x_2 > 10.$

а) В коротком периоде второй ресурс фиксирован на уровне $x_2 = 20$, цена на продукт фирмы сложилась на уровне $P = 6$. Определить объем предложения фирмы и прибыль.

б) Рыночный спрос $Q^D = 10\,000 - 1000P$. Определить число фирм, действующих на рынке в длительном периоде.

ЗАДАЧА № 2

Функция предельных затрат фирмы-монополиста $\mathrm{MC}(Q) = 10 + 2Q$. Найти объем выпуска, максимизирующий прибыль, и соответствующую цену для следующих вариантов спроса:

а) $P^D(Q) = 50 - Q$;

б) $P^D(Q) = 60 - 4Q$;

в) $P^D(Q) = 70 - 2Q$;

г) $P^D(Q) = 80 - 6Q$.

ЗАДАЧА № 3

а) Допустим, что прибыль монополии достигает максимума при цене 25; объем выпуска при этом равен 10, а предельные затраты равны 15. Приведите пример функции спроса, для которой выполняются эти условия.

б) Пусть прибыль монополии достигает максимума при цене P, при этом объем выпуска равен Q и значение предельных затрат $\mathrm{MC}(Q) < P$. Докажите, что существует спрос, при котором выполняются эти условия.

ЗАДАЧА № 4

Фирма имеет предельные затраты $MC(q) = 2.5q$.

а) Найти объем предложения фирмы в условиях совершенной конкуренции при цене $P = 50$.

б) Найти объем предложения и цену, если эта же фирма является монополистом на рынке с функцией спроса:

$$Q^D(P) = 30 - 0.4P.$$

ЗАДАЧА № 5

В состав фирмы входят несколько заводов. Зная функцию общих затрат каждого из них, $TC_i(q_i)$, найти функцию общих затрат фирмы для следующих вариантов ее состава:

а) n одинаковых заводов с функциями затрат

$$TC_i(q_i) = 100 + 10q_i + q_i^2, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

б) два завода с функциями затрат

$$TC_1(q_1) = 100 + 10q_1 + q_1^2; \quad TC_2(q_2) = 200 + 10q_2 + 0.25q_2^2;$$

в) два завода с функциями затрат

$$TC_1(q_1) = 100 + 10q_1 + q_1^2; \quad TC_1(q_1) = 100 + 5q_2 + 0.25q_2^2.$$

ЗАДАЧА № 6

Многозаводская монополия в длительном периоде может вводить новые заводы и ликвидировать существующие, приспосабливаясь к условиям спроса.

Пусть средние затраты отдельного завода описываются функцией $AC_i(q_i) = 100/q_i + 10 + q_i$, где q_i — объем производства отдельного завода. Построить функцию средних затрат фирмы $LAC(Q)$, где Q — объем производства фирмы.

ЗАДАЧА № 7

Фирма-монополист имеет в своем составе 100 заводов и находится в состоянии равновесия длительного периода на рынке с линейной функцией спроса.

Сколько заводов действовало бы на этом рынке, если бы каждый был самостоятельной конкурентной фирмой?

ЗАДАЧА № 8

Монополия встречается со спросом, описываемым функцией:

$$Q^D = 1 - \sqrt[3]{P-1}.$$

Найти функцию предельной выручки, построить ее график. В чем особенность функции предельной выручки в данном случае?

ЗАДАЧА № 9

Фирма продает товар на изолированном внутреннем рынке, где она является монополистом, и на мировом рынке, в условиях совершенной конкуренции. Спрос на внутреннем рынке описывается функцией $P_I^D(Q_I) = 60 - Q_I$ (индекс I относится к внутреннему рынку), на мировом рынке сложилась цена $P_W = 30$ (индекс W относится к мировому рынку). Предельные затраты фирмы $\mathrm{MC}(Q) = 10 + 0.5Q$. Найти цену равновесия на внутреннем рынке, объемы продаж фирмы на мировом и внутреннем рынках.

ЗАДАЧА № 10

Многозаводская монополия имеет в своем составе m заводов и осуществляет ценовую дискриминацию на n сегментах рынка. Доказать, что рациональное распределение объема производства между заводами ($q_1, q_2, \ldots, q_m$) и объема продаж между сегментами рынка ($Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$) удовлетворяет условию

$$\mathrm{MC}_1(q_1) = \mathrm{MC}_2(q_2) = \ldots = \mathrm{MC}_m(q_m) =$$
$$= \mathrm{MR}_1(Q_1) = \mathrm{MR}_2(Q_2) = \ldots = \mathrm{MR}_n(Q_n),$$

где $\mathrm{MC}_i(q_i)$ — предельные затраты i-го завода, $\mathrm{MR}_j(Q_j)$ — предельная выручка на j-м сегменте.

ЗАДАЧА № 11

Фирма-монополист имеет функцию затрат $TC(Q) = 4Q$ и реализует продукцию на рынке, подразделенном на два сегмента. Спрос каждого сегмента задан функциями

$$Q_1^D(P) = 100 - 5P; \qquad Q_2^D(P) = 150 - 15P.$$

а) Найти предельную выручку фирмы как функцию объема продукта для двух вариантов: (i) продукт продается на рынке по единой цене; (ii) продукт на различных сегментах продается по разным ценам.

б) Определить (i) объем продаж, цену и прибыль монополиста при продаже товара по единой цене; (ii) объемы продаж, цены на сегментах и прибыль монополиста, осуществляющего ценовую дискриминацию.

ЗАДАЧА № 12

Фирма с функцией общих затрат $TC(q) = 100 + 20q + q^2$ встречается со спросом, описываемым функцией

$$Q^D(P) = \frac{N}{10\,000} \cdot (80 - P), \quad \text{где } N \text{ — число покупателей.}$$

1. При каком числе покупателей фирма может безубыточно действовать на данном рынке?

2. При каком числе покупателей фирма будет естественной монополией?

3. При каком числе покупателей эта естественная монополия будет безубыточной при установлении цены ее продукта на уровне предельных затрат?

ЗАДАЧА № 13

В дуополии Курно предельные затраты фирм равны $MC_1(q_1) = 10 + 2q_1$, $MC_2(q_2) = 20 + q_2$, рыночный спрос описывается обратной функцией $P^D(Q) = 100 - 3Q$.

а) Найти функции реагирования каждой фирмы на выбор конкурента.

б) Найти объемы выпуска каждой фирмы, рыночный объем сделок и цену в состоянии равновесия.

в) Задавшись произвольными начальными объемами выпуска фирм, рассчитать динамику объемов и цен. Принять, что каждая фирма в пределах одного периода не меняет своего решения, а в последующем периоде обе фирмы принимают новые решения исходя из своих функций реагирования.

ЗАДАЧА № 14

Олигополия Курно включает три фирмы с функциями затрат $\mathrm{TC}_i(q_i) = c_i q_i$, $c_1 = 10, c_2 = 20, c_3 = 30$. Найти равновесные значения цены, рыночного объема сделок и объемов выпуска каждой фирмы, если спрос описывается функцией

а) $P^D(Q) = 100 - 0.5Q$;

б) $P^D(Q) = 48 - 0.5Q$.

ЗАДАЧА № 15

Какие значения может принимать эластичность спроса в точке равновесия а) монополии; б) дуополии Курно; в) олигополии Курно из n фирм?

ЗАДАЧА № 16

а) Олигополия Курно состоит из трех фирм с функциями затрат $\mathrm{TC}_i\,(q_i) = c_i q_i$, причем $c_1 = 18$, $c_2 = 20$, $c_3 = 22$; спрос описывается функцией $Q^D(P) = 10\ 000/P^2$. Найти равновесную цену, объем сделок и объемы выпуска каждой фирмы.

б) Решить ту же задачу для случая $c_1 = 15$, $c_2 = 20$, $c_3 = 25$.

ЗАДАЧА № 17

Рыночный спрос описывается функцией $P^D(Q) = 100 - 0.1Q$. Каждая действующая на рынке фирма имеет предельные затраты $MC_i = 40$. Найти объемы производства каждой фирмы, рыночные объемы продаж и цены в следующих структурах:

а) на рынке действует единственная фирма;

б) на рынке действуют две фирмы в условиях модели Курно;

в) на рынке действуют две фирмы, одна из которых является лидером (в смысле Штакельберга), другая — ее последователем;

г) на рынке действуют три фирмы, одна из которых является лидером по отношению к остальным, а оба ее последователя принимают решения независимо друг от друга;

д) на рынке действуют три фирмы, одна из которых является лидером по отношению к остальным, другая — последователем первой и лидером по отношению к третьей, а третья — последователем первой и второй.

ЗАДАЧА № 18

На рынке с закрытым входом действуют доминирующая фирма и ее конкурентное окружение. Рыночный спрос описывается функцией $Q^D = 7000 - 10P$, предложение конкурентного окружения — функцией $Q^S = -1250 + 2.5P$. Предельные затраты доминирующей фирмы — постоянная величина: $MC = c = \text{const}$. Определить функцию остаточного спроса на продукцию доминирующей фирмы; найти значения равновесной цены и объемов продаж доминирующей фирмы и конкурентного окружения при следующих значениях предельных затрат доминирующей фирмы: а) $c = 400$; б) $c = 360$; в) $c = 330$; г) $c = 320$; д) $c = 280$; е) $c = 250$.

ЗАДАЧА № 19

На рынке монополистической конкуренции действует фирма с функцией общих затрат $TC(q) = 100 + 10q + q^2$. Спрос на ее продукцию в коротком периоде описывается равенством $Q^D(P) = 92 - 2P$. Найти цену, по которой фирма продает продукт, объем выпуска и прибыль фирмы.

ЗАДАЧА № 20

На рынке монополистической конкуренции действуют фирмы с одинаковыми функциями общих затрат $TC(q) = 100 + 10q + q^2$. Спрос на рынке описывается равенством $Q^D(P) = 4600 - 100P$. Найти число фирм, действующих на рынке в длительном периоде, объем выпуска каждой из них и цену равновесия. Сравнить величину средних затрат с их минимальным возможным значением.

ЗАДАЧА № 21

Фирма с функцией общих затрат $TC(q) = 100 + 10q + q^2$ действует на рынке монополистической конкуренции. Эластичность спроса на ее продукцию равна 5 (по абсолютной величине). Определить объем продаж и цену продукции в состоянии равновесия длительного периода.

ЗАДАЧА № 22

На концах линейного города (модель Хотеллинга) длиной 5 расположены две фирмы, имеющие функции затрат $TC_1(q) = 30q$ и $TC_2(q) = 60q$. Для жителя, удаленного от фирмы, товар которой он покупает, на расстояние x, затраты на доставку продукта оцениваются величиной tx. Спрос на продукт абсолютно неэластичен и равен 1 на единицу длины. Определить равновесные цены товара каждой фирмы и прибыли фирм, если а) $t = 10$; б) $t = 4$; в) $t = 1$. Какие выводы можно сделать из сопоставления результатов?

4.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

а) Оптимум фирмы в коротком периоде достигается при том уровне выпуска, при котором выполняется равенство $\mathrm{SMC}(q) = P$. При решении задачи ⟨Производство, 4 части III⟩ определена функция $\mathrm{SMC}(q) = 0.1256q$. Из равенства $0.1256q = 6$ находим $q = 47.773$. Выручка фирмы $\mathrm{TR} = Pq = 6 \cdot 47.774 = 286.64$. Общие затраты фирмы в коротком периоде $\mathrm{STC}(q) = 85 + 0.062797q^2 = 228.32$. Прибыль фирмы $\pi = 286.65 - 228.32 = 58.32$.

б) Равновесие совершенно конкурентного рынка в длительном периоде достигается при цене, равной минимуму средних затрат каждой фирмы: $P = \min \mathrm{LAC}(q) = 4.544$; при этом предложение каждой фирмы определяется эффективным масштабом производства $q_e = 49.520$. Рыночный объем предложения равен объему спроса: $Q = 10\,000 - 1000 \cdot 4.544 = 5456$. Отсюда число действующих фирм $N = Q/q_e \approx 110$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

а) Предельная выручка монополиста $\mathrm{MR} = 50 - 2Q$; условие $\mathrm{MR} = \mathrm{MC}$ принимает конкретный вид $50 - 2Q = 10 + 2Q$, откуда $Q = 10$, и по условиям спроса $P = 40$.

Аналогично б) $Q = 5$, $P = 40$; в) $Q = 10$, $P = 50$;

г) $Q = 5$, $P = 50$.

Обратите внимание на то, что в вариантах а) и б) при одинаковых ценах монополист выпускает разные объемы продукта точно так же, как в вариантах в) и г); с другой стороны, в вариантах а) и в) монополист выпускает одинаковые объемы продукта, но продает их по различным ценам, так же как в вариантах б) и г).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

а) Если функция спроса линейна, обратная функция спроса имеет вид $P^D = a - bQ$, а предельная выручка монополии при этом равна $\mathrm{MR} = a - 2bQ$ и совпадает с предельными затратами: MR = MC. Таким образом, из условий задачи следует система равенств

$$25 = a - 10b; \qquad 15 = a - 20b.$$

Решение системы: $a = 35$, $b = 1$, так что обратная функция спроса $P^D = 35 - Q$; прямая функция спроса равна $Q^D = 35 - P$.

Можно построить и другой пример. Допустим, что спрос имеет постоянную эластичность η, т. е. описывается степенной функцией $Q^D = 10 \cdot (25/P)^{\eta}$. Так как в точке максимума прибыли монополии выполняется равенство

$$P \cdot \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = \mathrm{MC},$$

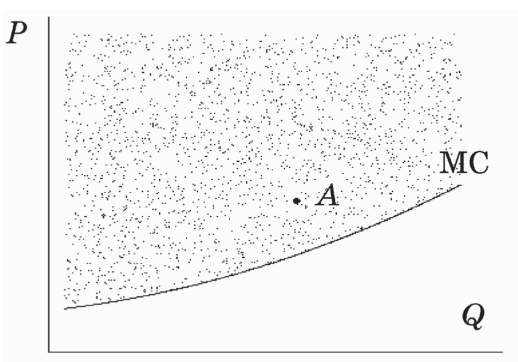
и из условий $P = 25$, $\mathrm{MC} = 15$ находим: $\eta = 2.5$. Итак, $Q^D = 10 \cdot (25/P)^{2,5}$.

б) По аналогии с предыдущим пунктом покажем, что существует, в частности, линейная функция спроса, удовлетворяющая условиям. Для функции $P^D = a - bQ$ имеем систему уравнений

$$P = a - bQ; \qquad \mathrm{MC} = a - 2bQ,$$

откуда

$$b = \frac{P - \mathrm{MC}}{Q}; \qquad a = 2P - \mathrm{MC}.$$



Комментарий. Решение задач 1 – 2 раскрывает смысл утверждения *«у монополии нет функции (кривой) предложения»*. На приведенном рисунке точка A —произвольная точка, расположенная выше кривой MC. Из решения последней задачи следует, что существует кривая спроса, проходящая через точку A и соответствующая максимуму прибыли монополиста. Таким образом, точки, соответствующие максимуму прибыли монополиста, покрывают всю область плоскости (Q, P), расположенную выше кривой предельных затрат.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

а) Из условия $P = \mathrm{MC}(Q)$ находим $Q = 20$.

б) Обратная функция спроса $P^D(Q) = 75 - 2.5Q$; отсюда $\mathrm{MR}(q) = 75 - 5q$ (в силу монопольного положения фирмы $Q = q$). Из равенства $\mathrm{MR}(q) = \mathrm{MC}(q)$, т. е. $75 - 5q = 2.5q$, находим $q = Q = 10$.

Комментарий. Сравнение решений задач а) и б) иллюстрирует значение структуры рынка, на котором действует фирма. В обеих ситуациях фирма продает свой продукт по одной и той же цене, $P = 50$, однако если она является монополистом, то производит меньшее количество продукта (в данном случае — в 2 раза), чем в случае конкурентного рынка. Можно показать, что это утверждение носит общий характер. Фирма-ценополучатель максимизирует свою прибыль при выполнении условия $\mathrm{MC} = P$, фирма-монополист — при условии $\mathrm{MC} = \mathrm{MR}$, причем $\mathrm{MR} < P$ в силу убывающего характера функции рыночного спроса. Обозначив MC_c и MC_m соответственно предельные затраты при максимизации прибыли в условиях конкуренции и монополии, приходим к выводу, что при одинаковой цене $\mathrm{MC}_m = \mathrm{MR} < P = \mathrm{MC}_c$. А так как предельные затраты — возрастающая функция выпуска, из $\mathrm{MC}_m < \mathrm{MC}_c$ следует, что при равенстве цен объем производства монополии меньше, чем объем выпуска фирмы на конкурентном рынке.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

а) По соображениям симметрии можно предположить, что объемы производства заводов одинаковы. Но равенство объемов производства заводов следует из того, что по условиям минимизации затрат фирмы на производство любого объема производства Q должны выполняться равенства $MC_1(q_1) = MC_2(q_2) = \ldots = MC_n(q_n)$, откуда в данном случае следует что объемы производства заводов одинаковы и, следовательно, каждый из них равен $q_i = Q/n$, так что

$$TC_i = 100 + 10\frac{Q}{n} + \left(\frac{Q}{n}\right)^2, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Затраты фирмы равны сумме затрат всех заводов, так что

$$TC_i = 100n + 10Q + \frac{Q^2}{n}.$$

б) Из условия $MC_1(q_1) = MC_2(q_2)$ найдем распределение общего объема выпуска фирмы между заводами:

$$10 + 2q_1 = 10 + 0.5q_2,$$

откуда $q_2 = 4q_1$, а так как $Q = q_1 + q_2$, находим: $q_1 = 0.2Q$, $q_2 = 0.8Q$. Таким образом,

$$TC_1 = 100 + 2Q + 0.04Q^2; \qquad TC_2 = 200 + 8Q + 0.16Q^2$$

и $TC(Q) = 300 + 10Q + 0{,}2Q^2$.

в) Приравнивая друг другу предельные затраты заводов

$$10 + 2q_1 = 5 + 0.5q_2,$$

найдем распределение объема производства фирмы: $q_1 = 0.2Q - 2$, $q_2 = 0.8Q + 2$. Однако малый объем выпуска фирмы не может быть распределен между фирмами так, чтобы выполнялось равенство $MC_1(q_1) = MC_2(q_2)$: так как $MC_1 \geq 10$, а MC_2 может принимать меньшие значения, малые объемы ($Q \leq 10$) должны выпускаться только 2-м заводом. Итак,

$$q_1 = \begin{cases} 0, & Q \leq 10; \\ 0.2Q - 2, & Q > 10; \end{cases}$$

$$q_2 = \begin{cases} Q, & Q \leq 10; \\ 0.8Q + 2, & Q > 10. \end{cases}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\mathrm{TC}(Q) = \begin{cases} 300 + 5Q + 0.25Q^2, & Q \le 10; \\ 295 + 6Q + 0.2Q^2, & Q > 10. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

Прежде всего заметим, что все заводы имеют одинаковые затратные характеристики, так что объем производства фирмы будет распределен между заводами поровну, $q_i = Q/n$, $i = 1, ..., n$. При этом средние затраты каждого завода равны средним затратам фирмы в целом.

Вначале дадим грубую оценку рационального числа заводов, производящих в совокупности заданный объем Q. Так как любой объем должен производиться с наименьшими общими (и, что равносильно, средними) затратами, определим, при каком объеме производства завода средние затраты минимальны (*эффективный размер* завода, q^e). Минимум AC_i достигается при $q_i = 10$ и равен 30. Ясно, что если Q кратно 10, то число заводов должно равняться $Q/10$ и при этом окажется $\mathrm{AC} = 30$. Если же Q не кратно 10, то число заводов должно быть близко к $Q/10$.

Теперь уточним выбор нужного числа заводов. При малых объемах, очевидно, достаточно одного завода. При $Q > 10$ средние затраты возрастают с ростом объема, и при некотором значении Q целесообразно использовать два завода. Определим, при каком значении $Q = Q_{1,2}$ средние затраты при использовании одного завода равны средним затратам при использовании двух заводов:

$$\frac{100}{Q} + 10 + Q = \frac{2 \cdot 100}{Q} + 10 + \frac{Q}{2},$$

откуда $Q_{1,2} = \sqrt{200} \approx 14.14$. Таким образом, при $Q < Q_{1,2}$ продукция производится на одном заводе с меньшими затратами, чем на двух, а при $Q > Q_{1,2}$ соотношение становится противоположным. При этом $\mathrm{LAC}(Q_{1,2}) = 31.21$.

Аналогичным образом, переход от n заводов к $n+1$ совершается при значении $Q = Q_{n,\ n+1}$, удовлетворяющем равенству

$$\frac{n \cdot 100}{Q} + 10 + \frac{Q}{n} = \frac{(n+1) \cdot 100}{Q} + 10 + \frac{Q}{n+1},$$

откуда $Q_{n,\ n+1} = 10\sqrt{n(n+1)}$. Ровно n заводов оказываются эффективными при $10\sqrt{(n-1)\cdot n} \le Q \le 10\sqrt{n\cdot(n+1)}$. Итак, мы получили выражение для функции средних затрат:

$$\text{LAC}(Q) = \frac{n \cdot 100}{Q} + 10 + \frac{Q}{n} \quad \text{при}$$
$$10\sqrt{(n-1) \cdot n} \le Q \le 10\sqrt{n \cdot (n+1)}.$$

Комментарий. Как отмечалось, при Q, кратном 10, средние затраты принимают минимальное значение LAC = 30. При объемах, равных $Q_{n,\ n+1}$, средние затраты имеют локальные максимумы, равные

$$\text{AC}(Q_{n,\ n+1}) = 10 \cdot \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} + 1 + \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right).$$

В таблице приведены значения $Q_{n,\ n+1}$ и соответствующие значения средних затрат. Из таблицы видно, что локальные максимумы средних затрат мало отличаются от минимума, равного 30, и тем меньше, чем больше n. Иными словами, при $Q > q^e$ средние затраты мало отклоняются от константы, равной минимальному значению.

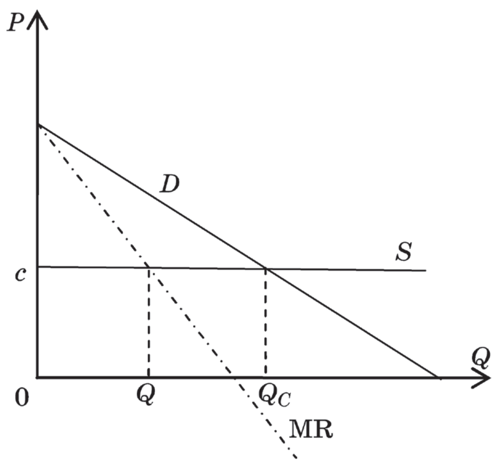
n	$Q_{n,\ n+1}$	AC($Q_{n,\ n+1}$)
1	14.14	31.21
2	24.49	30.41
3	34.64	30.21
4	44.72	30.12
5	54.77	30.08

Пренебрегая этими отклонениями, говорят, что функция средних затрат многозаводской фирмы имеет L-образную форму — падающий участок при $Q < q^e$ и постоянный участок при $Q \ge q^e$; величину q^e при этом называют *минимальным эффек-*

тивным размером фирмы. Если размер фирмы больше минимального эффективного, то $\mathrm{LAC}(Q) = c = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что при этом $\mathrm{LTC}(Q) = cQ$ и, следовательно, $\mathrm{LMC}(Q) = c = \mathrm{const}$. Допущение о постоянстве средних (и предельных) затрат часто используется в моделях монополии и олигополии.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

Комментарий к предыдущей задаче позволяет считать функцию предельных затрат монополиста постоянной, $\mathrm{LMC}(Q) = c$, равной минимуму средних затрат завода. Функция спроса линейна; положим $P^D(Q) = a - bQ$, так что предельная выручка $\mathrm{MR} = a - 2bQ$. Из равенства $\mathrm{MR} = \mathrm{LMC}$ следует, что для монополии $Q_M = \dfrac{a-c}{2b}$.



Заводы, действующие как самостоятельные фирмы, в конкурентном равновесии длительного периода имели бы эффективный размер, так что средние (и предельные) затраты каждого из них равнялись бы c. Функция рыночного предложения характеризовалась бы постоянной ценой, $P^S(Q) = c$. При данном спросе объем конкурентного равновесия равен $Q_C = \dfrac{a-c}{b}$. Таким образом, заводы, действующие самостоятельно и конкурирующие друг с другом, производили бы вдвое больший объем продукта, чем монополия. А так как в обоих случаях заводы имеют эффективный размер, число их также должно быть вдвое больше, чем в составе монополии, и равно 200.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 8

Обратная функция спроса:

$$P^D(Q) = 1 + (1 - Q)^3.$$

Отсюда

$$\mathrm{MR}(Q) = 1 + (1 - Q)^2 \cdot (1 - 4Q).$$

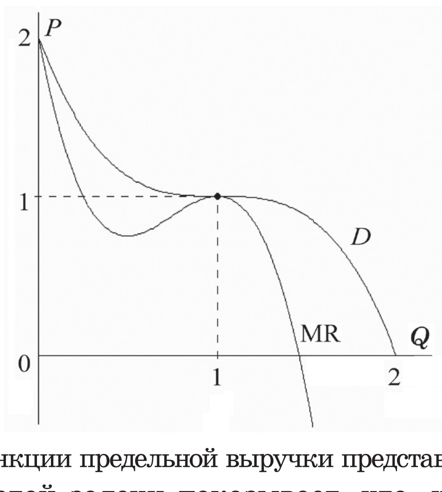


График функции предельной выручки представлен на рисунке.

Решение этой задачи показывает, что, несмотря на то что функция спроса — монотонно убывающая (кривая D), предельная выручка может иметь другой характер. В данном случае она имеет локальный минимум при $Q = 0.5$, возрастающий участок $0.5 \le Q \le 1$, локальный максимум при $Q =$ $= 1$ и затем убывает при $Q > 1$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 9

Максимум прибыли фирмы достигается при равенстве предельной выручки на каждом из рынков и предельных затрат фирмы. В условиях совершенной конкуренции предельная выручка совпадает с ценой. Поэтому $MC(Q) = P_W$, т. е. $10 + 0.5Q = 30$, откуда объем производства фирмы $Q = 40$. Условие $MC(Q) = MR_I(Q_I)$ дает равенство $30 = 60 - 2Q_I$, откуда объем продаж на внутреннем рынке $Q_I = 15$. Так как $Q = Q_I + Q_W$, объем продаж на мировом рынке $Q_W = 40 - 15 = 25$. Цена на внутреннем рынке $P_I = 60 - 15 = 45$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 10

Распределение объема производства между заводами должно удовлетворять условию

$$MC_1(q_1) = MC_2(q_2) = \ldots = MC_m(q_m) = MC(Q),$$

где Q — объем выпуска фирмы, $MC(Q)$ — ее предельные затраты. Распределение объема продаж между сегментами рынка

$$MR_1(Q_1) = MR_2(Q_2) = \ldots = MR_n(Q_n) = MR(Q),$$

где $MR(Q)$ — предельная выручка фирмы. Условие $MR(Q) = MC(Q)$ завершает доказательство.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 11

а) Верхний предел цены на первом сегменте равен 20, на втором — 10.

(i) При продаже продукта по единой цене функция спроса для рынка представляет собой сумму соответствующих функций на сегментах:

$$Q^D(P) = \begin{cases} 250 - 20P, & P \le 10; \\ 100 - 5P, & 10 < P \le 20. \end{cases}$$

Функция спроса имеет излом при $P = 10$, $Q = 50$. Обратная функция спроса:

$$P^D(Q) = \begin{cases} 20 - 0.2Q, & Q < 50; \\ 12.5 - 0.05Q, & 50 \le Q \le 250. \end{cases}$$

Общая выручка:

$$\mathrm{TR}(Q) = Q \cdot P^D(Q) = \begin{cases} 20Q - 0.2Q^2, & Q < 50; \\ 12.5Q - 0.05Q^2, & 50 \le Q \le 250. \end{cases}$$

Предельная выручка:

$$\mathrm{MR}(Q) = \begin{cases} 20 - 0.4Q, & Q < 50; \\ 12.5 - 0.1Q, & 50 < Q \le 250. \end{cases}$$

Излом функции спроса порождает скачок функции предельной выручки при $Q = 50$. Эта функция убывает на каждом из участков, слева (при $Q < 50$) и справа (при $Q > 50$); при $Q \to 50$ предел слева равен 0, предел справа равен 7.5.

(ii) Для анализа ситуации, связанной с ценовой дискриминацией, потребуются функции предельной выручки на каждом сегменте. Обратные функции спроса на сегментах:

$$P_1^D(Q) = 20 - 0.2Q; \qquad P_2^D(Q) = 10 - 0.0667Q.$$

Функции предельной выручки:

$$\mathrm{MR}_1(Q) = 20 - 0.4Q; \qquad \mathrm{MR}_2(Q) = 10 - 0.1333Q.$$

Чтобы выполнить «горизонтальное суммирование» функций предельной выручки, нужно найти обратные функции:

$$\left.\begin{aligned} Q_1(\mathrm{MR}) &= 50 - 2.5\mathrm{MR}, & \mathrm{MR} \le 20; \\ Q_2(\mathrm{MR}) &= 75 - 7.5\mathrm{MR}, & \mathrm{MR} \le 70. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Их сумма:

$$Q(\mathrm{MR}) = \begin{cases} 125 - 10\mathrm{MR}, & \mathrm{MR} \le 10; \\ 50 - 2.5\mathrm{MR}, & \mathrm{MR} > 10. \end{cases}$$

Обратная функция представляет собой предельную выручку дискриминирующей фирмы:

$$\mathrm{MR}(Q) = \begin{cases} 20 - 0.4Q, & Q < 25; \\ 12.5 - 0.1Q, & Q \ge 25. \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, что у дискриминирующей фирмы предельная выручка — непрерывная монотонно убывающая функция.

Для нахождения общей выручки требуется проинтегрировать предельную выручку в пределах от 0 до Q; интегрирование нужно выполнить раздельно по участкам. При $Q \le 25$:

$$\mathrm{TR}(Q) = \int_0^Q (20 - 0.4q)dq = 20Q - 0.2Q^2.$$

Отметим, что TR(25) = 375. При $Q > 25$:

$$\mathrm{TR}(Q) = \mathrm{TR}(25) + \int_{25}^{Q} (12.5 - 0.1q)dq =$$

$$= 375 + 12.5(Q - 25) - 0.05(Q^2 - 25^2) =$$

$$= 93.75 + 12.5Q - 0.05Q^2.$$

Итак,

$$\mathrm{TR}(Q) = \begin{cases} 20Q - 0.2Q^2, & Q \le 25; \\ 93.75 + 12.5Q - 0.05Q^2, & Q > 25. \end{cases}$$

б) (i) При продаже товара по единой цене оптимум монополии достигается при объеме продаж, удовлетворяющем условию $\mathrm{MR}(Q) = \mathrm{MC}(Q)$. В рассматриваемом случае это условие выполняется при двух значениях Q, слева и справа от точки разрыва функции $\mathrm{MR}(Q)$:

$$20 - 0.4Q = 4 \quad \Rightarrow \quad Q = 40 < 50;$$
$$12.5 - 0.1Q = 4 \quad \Rightarrow \quad Q = 85 > 50.$$

Оптимум фирмы определим путем сопоставления величины прибыли в обоих локальных максимумах, при $Q = 40$ и при $Q = 85$.

При $Q = 40$ цена спроса $P = 20 - 0.2 \cdot 40 = 12$, выручка $\mathrm{TR} = 12 \cdot 40 = 480$, затраты $\mathrm{TC} = 4 \cdot 40 = 160$, прибыль $\Pi = 480 - 160 = 320$.

При $Q = 85$ соответствующие величины составляют $P = 12.5 - 0{,}05 \cdot 85 = 8.25$, $\mathrm{TR} = 8.25 \cdot 85 = 701.25$, $\mathrm{TC} = 4 \cdot 85 = 340$, $\Pi = 701.25 - 340 = 361.25$. Таким образом, монополист предпочитает второй вариант ($Q = 85$), дающий бо́льшую прибыль.

(ii) При ценовой дискриминации равенство $\mathrm{MR}_i(Q_i) = \mathrm{MC}(Q)$ должно выполняться на каждом сегменте. В общем случае следовало бы решить уравнение

$$\mathrm{MR}(Q) = \mathrm{MC}(Q),$$

где функция $\mathrm{MR}(Q)$ определяется уравнением (2), и найденное при решении значение MR подставить в уравнения (1) для нахождения распределения общего объема продаж по сегментам. Но условие $MC(Q) = 4 = \text{const}$ упрощает задачу: объемы Q_1 и Q_2 могут быть определены из условий $MR_1(Q_1) = MC$ и $MR_2(Q_2) = MC$, т. е.

$$20 - 0.4Q_1 = 4; \qquad 10 - 0.1333Q_2 = 4,$$

откуда $Q_1 = 40$, $Q_2 = 45$. При этих объемах цены спроса составляют

$$P_1 = 20 - 0.2 \cdot 40 = 12, \quad P_2 = 10 - 0.0667 \cdot 45 = 7,$$

так что выручка равна $TR = 12 \cdot 40 + 7 \cdot 45 = 795$. Поскольку суммарный объем продаж на обоих сегментах оказался таким же, как при единой цене, величина общих затрат принимает уже найденное значение $TC = 340$. Отсюда прибыль при ценовой дискриминации $\Pi = 795 - 340 = 455$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 12

Обозначим $A = N/10\,000$, так что функция спроса будет представлена равенством $Q^D(P) = A \cdot (80 - P)$, а обратная функция спроса — равенством $P^D(Q) = 80 - Q/A$.

Средние и предельные затраты фирмы даются выражениями

$$AC = \frac{100}{q} + 20 + q; \qquad MC = 20 + 2q.$$

1) Если на рынке действует единственная фирма, то объем ее продаж q совпадает с рыночным объемом покупок Q, так что здесь $q = Q$. Фирма может безубыточно действовать, если максимально возможная для нее прибыль неотрицательна. Максимум прибыли достигается при условии $MR = MC$. Так как $MR = 80 - 2q/A$, приравнивая это выражение предельным затратам, $80 - 2q/A = 20 + 2q$, найдем, что $q = \dfrac{30A}{1 + A}$.

Условие безубыточности сводится к тому, что общая выручка не меньше общих затрат, $TR \geq TC$. Используя найденное выражение для q, получаем:

$$\mathrm{TR} = P_q = \left(80 - \frac{30}{1+A}\right) \cdot \frac{30A}{1+A}; \ \mathrm{TC} = 100 + 20 \cdot \frac{30A}{1+A} + \left(\frac{30A}{1+A}\right)^2.$$

Теперь условие безубыточности принимает вид неравенства относительно A. Его решение дает $A \geq 0.125$, так что $N \geq 10\ 000 \cdot A = 1250$. Итак, фирма может безубыточно функционировать на данном рынке, если число покупателей не менее 1250.

2) Единственная фирма на данном рынке будет естественной монополией, если производство требуемого объема продукта одной фирмой сопряжено с меньшими затратами, чем его производство двумя или бульшим числом фирм. Прежде всего выясним, какой объем производства может быть с меньшими затратами произведен одной фирмой. Для этого сравним средние затраты на производство заданного объема Q одной фирмой и двумя фирмами. При этом будем считать, что ресурсы могут свободно перемещаться и, следовательно, обе фирмы будут обладать одинаковыми затратными характеристиками.

Если рыночной объем Q производится одной фирмой, то объем ее выпуска $q = Q$; если фирм две, то объем выпуска каждой из них $q = Q/2$. Объем, при котором производство одной и двумя фирмами требует одинаковых затрат, определяется равенством $\mathrm{TC}(Q) = 2\mathrm{TC}(Q/2)$, или, что равносильно, $\mathrm{AC}(Q) = \mathrm{AC}(Q/2)$:

$$\frac{100}{Q} + 20 + Q = \frac{200}{Q} + 20 + \frac{Q}{2},$$

откуда $Q = \sqrt{200} \approx 14.14$.

Если цена спроса, соответствующая этому объему, превосходит или равна средним затратам, то две фирмы могут безубыточно производить и продавать товар не дороже, чем единственная фирма. Если же цена спроса менее средних затрат, то единственная фирма окажется естественной монополией. Средние затраты при $Q = 14.14$ равны 41.21, так что фирма будет естественной монополией при условии

$$P^D(14.14) = 80 - 14.14/A < 41.21,$$

откуда $A < 0.3646$ и $N < 10\,000A = 3646$.

Замечание 1. При ответе на первый вопрос мы выяснили, что фирма может безубыточно действовать на данном рынке при $N \geq 1250$. Таким образом, безубыточная фирма окажется естественной монополией при $1250 \leq N < 3646$. Если продукт, производимый фирмой, признается социально значимым, то благодаря государственным дотациям фирма сможет функционировать и при $N < 1250$.

3) При установлении регулирующим органом цены на уровне предельных затрат, что исключало бы общественные потери монополизации рынка, фирма может безубыточно действовать на рынке при условии $\mathrm{MC}(q) \geq \mathrm{AC}(q)$, или

$$20 + 2q \geq \frac{100}{q} + 20 + q,$$

откуда $q \geq 10$. При этом объеме ($Q = q$) цена спроса должна быть не менее средних затрат: $P^D(10) \geq \mathrm{AC}(10)$, т. е. $80 - 10/A \geq$ ≥ 40. Отсюда $A \geq 0.25$ и $N \geq 2500$.

Замечание 2. Мы выяснили, что при числе покупателей в пределах $2500 \leq N < 3646$ единственная фирма может удовлетворить спрос с меньшими затратами, чем две (или более) фирмы, и при этом она может безубыточно продавать свой продукт по цене, равной предельным затратам. Фирмы, действующие в этих условиях, называют *слабыми* естественными монополиями.

Итак, в зависимости от числа покупателей фирма может оказаться в следующих положениях:

при $N < 1250$ фирма может безубыточно функционировать только при условии получения дотации;

при $1250 \leq N < 2500$ фирма представляет собой обычную естественную монополию, которая может безубыточно функционировать при установлении цены не ниже средних затрат;

при $2500 \leq N < 3646$ фирма представляет собой слабую естественную монополию, и ее цена может быть установлена на уровне предельных затрат;

наконец, при $N \geq 3646$ фирма не является естественной монополией.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 13

а) Прибыли фирм равны

$$\pi_1 = (100 - 3q_1 - 3q_2) \cdot q_1 - TC_1(q_1);$$
$$\pi_2 = (100 - 3q_1 - 3q_2) \cdot q_2 - TC_2(q_2).$$

Условие максимума прибыли каждой фирмы при заданном выпуске конкурента:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = (100 - 6q_1 - 3q_2) - (10 + 2q_1) = 0;$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = (100 - 3q_1 - 6q_2) - (20 + q_2) = 0.$$

t	$q_1(t)$	$q_2(t)$	$Q(t)$	$P(t)$
0	5.00	20.00	25.00	25.00
1	7.50	13.00	20.50	38.50
2	12.75	11.50	24.25	27.25
3	13.88	8.35	22.23	33.33
4	16.24	7.68	23.91	28.26
5	16.74	6.26	23.00	31.00
6	17.81	5.95	23.76	28.72
7	18.03	5.32	23.35	29.95
8	18.51	5.18	23.69	28.92
9	18.62	4.89	23.51	29.48
10	18.83	4.83	23.66	29.02
11	18.88	4.70	23.58	29.26
12	18.97	4.67	23.65	29.06
13	18.99	4.62	23.61	29.17
14	19.04	4.60	23.64	29.08
15	19.05	4.58	23.62	29.13
16	19.07	4.57	23.64	29.08
17	19.07	4.56	23.63	29.11
18	19.08	4.56	23.64	29.09
19	19.08	4.55	23.63	29.10
20	19.09	4.55	23.64	29.09

Решая первое уравнение относительно q_1, второе — относительно q_2, найдем функции реагирования фирм:

$$q_1 = 22.5 - 0.75q_2 = R_1(q_2); \qquad q_2 = 16 - 0.6q_1 = R_2(q_1).$$

б) Из системы $q_1 = R_1(q_2)$; $q_2 = R_2(q_1)$ находим: $q_1 = 19.09$; $q_2 = 4.55$; далее, $Q = q_1 + q_2 = 23.64$ и $P = 100 - 3 \cdot 23.64 = 29.09$.

в) Обозначим $q_1(t)$, $q_2(t)$ объемы выпуска фирм в t-м периоде.

Поскольку каждая из фирм ориентируется на известный ей выпуск конкурента в предшествующем периоде,

$$q_1(t) = R_1(q_2(t-1)); \qquad q_2(t) = R_2(q_1(t-1)).$$

Пусть, например, начальные объемы выпуска равны $q_1(0) = 5$, $q_2(0) = 10$. В приведенной выше таблице представлены результаты расчета для 20 периодов.

Комментарий. Следуя рассуждениям А. О. Курно, процесс движения рынка к равновесию часто описывают как последовательность поочередного принятия решений фирмами: вначале первая фирма является монополистом, затем появляется вторая фирма и принимает решение исходя из заданного объема предложения первой фирмы; после этого первая фирма корректируют свое решение, после нее — вторая и т. д. В данной задаче обе фирмы принимают решения одновременно по истечении периода, необходимого для оценки выпуска конкурента и изменения собственного выпуска. Обе схемы в значительной степени условны; их назначение — проиллюстрировать устойчивость равновесия в дуополии Курно. Объемы выпуска фирм при любых начальных значениях с течением времени стремятся к равновесным.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ №14

Рассмотрим равновесие Курно–Нэша олигополии, состоящей из n фирм, причем для каждой фирмы предельные затраты не зависят от объема производства, $\mathrm{MC}_i(q_i) = c_i = \mathrm{const}$, а спрос описывается линейной функцией $P^D(Q) = a - bQ$. Прибыль каждой фирмы описывается равенством

$$\pi_i = q_i P^D(Q) - \mathrm{TC}_i(q_i) = q_i P^D(q_i + Q_{-i}) - \mathrm{TC}_i(q_i),$$

где Q_{-i} — суммарный выпуск всех фирм, кроме i-й. Прибыль i-й фирмы при заданных объемах выпуска других фирм достигает максимума, если выполнено условие

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P^D(Q) + q_i \frac{dP^D}{dQ} - \mathrm{MC}_i(q_i) = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Принятые допущения относительно функций затрат и спроса позволяют представить условие равновесия в виде:

$$a - bQ - bq_i - c_i = 0, \qquad i = 1,\ 2, \ldots,\ n. \tag{1}$$

Суммируя уравнения, получаем равенство

$$na - C - (n + 1)bQ = 0,$$

где обозначено $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$. Последнее равенство приводит к явному выражению рыночного объема:

$$Q = \frac{na - C}{(n+1)b}.$$

Подстановка этого результата в функцию спроса дает выражение для равновесной цены:

$$P = \frac{a + C}{n + 1}.$$

Возвращаясь к равенствам (1) и учитывая, что $a - bQ = P$, получаем выражения для объемов всех фирм:

$$q_i = \frac{P - c_i}{b}.$$

а) Используя приведенные выше выражения, находим:

$$C = 10 + 20 + 30 = 60, \quad P = (100 + 60)/4 = 40;$$

$$q_1 = \frac{40 - 10}{0.5} = 60, \qquad q_2 = \frac{40 - 20}{0.5} = 40, \qquad q_3 = \frac{40 - 30}{0.5} = 20;$$

$$Q = 120.$$

б) Воспользовавшись тем же методом, получаем $P = 27$; $q_1 = 34$, $q_2 = 14$, $q_3 = -6 < 0$. Но отрицательные значения объема выпуска невозможны; равенства вида (1), выведенные из условия равенства нулю соответствующих частных производных, являются необходимыми условиями *внутреннего* оптимума. В данной ситуации внутренний оптимум для третьей фирмы отсутствует: уменьшенный спрос (по сравнению с рассмотренным в предыдущем пункте) делает эту фирму неконкурентоспособной на рынке, где ее соперники имеют значительные затратные преимущества. Наиболее выгодным для нее решением является $q_3 = 0$. При этом равенства (1) и последующие выполняются только для первой и второй фирм, так что $n = 2$, $C = 10 + 20 = 30$, $P = (48 + 30)/3 = 26$; $q_1 = 32$, $q_2 = 12$; $Q = 44$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ №15

Здесь уместно воспользоваться свойством равновесия Курно, связывающим равновесную цену, предельные затраты каждой фирмы, ее долю в общем объеме продаж (s_i) и эластичность спроса:

$$P \cdot \left(1 - \frac{s_i}{\eta}\right) = \mathrm{MC}_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Просуммировав эти равенства, найдем, что

$$P \cdot \left(n - \frac{1}{\eta}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{MC}_i.$$

Поскольку и цена, и средние затраты — положительные величины, выражение в скобках может принимать только положительные значения, откуда следует, что $\eta > 1/n$ (если допустить возможность MC = 0, неравенство окажется нестрогим: $\eta \geq 1/n$). В частности, для дуополии $\eta \geq 1/2$. Приведенные соотношения справедливы и для монополии, если положить $n = 1$. В этом случае $\eta \geq 1$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 16

а) Воспользуемся свойством равновесия Курно, рассмотренным в предыдущей задаче:

$$P \cdot \left(1 - \frac{s_i}{\eta}\right) = \mathrm{MC}_i.$$

По условиям данной задачи спрос имеет постоянную эластичность $\eta = 2$, каждая из фирм — постоянные предельные затраты c_i, так что в равновесии имеет место система равенств

$$P\cdot(1-s_1/2)=18;\quad P\cdot(1-s_2/2)=20;\quad P\cdot(1-s_3/2)=22. \qquad (1)$$

Суммируя равенства и учитывая, что $s_1 + s_2 + s_3 = 1$, получим:

$$P\cdot(3-1/2)=60.$$

Отсюда $P = 24$, и из равенств (1) находятся рыночные доли:

$s_1 = 0.5$; $s_2 = 0.333$; $s_3 = 0.167$.

Из уравнения спроса находим равновесный рыночный объем $Q = 10\,000/24^2 = 17.36$ и объемы выпуска каждой фирмы: $q_1 = 8.68$, $q_2 = 5.79$, $q_3 = 2.89$.

Комментарий. Способ, использованный в приведенном решении, естественным образом обобщается на случай произвольного числа фирм. Суммируя равенства

$$P\cdot(1-s_i/\eta)=c_i,\qquad i=1,\ ...,\ n,$$

приходим к соотношению $P\cdot(n-1/\eta)=\sum_{i=1}^{n}c_i=C$, откуда

$$P=\frac{C}{n-1/\eta},$$

после чего рыночные доли находятся следующим образом:

$$s_i=\eta-\frac{c_i}{C}\cdot(\eta n-1),\qquad i=1,\ ...,\ n.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, как и при линейной функции спроса, характеристики рынка в состоянии равновесия определяются параметром C — суммой предельных затрат фирм.

б) Расчет, аналогичный приведенному в пункте а), приводит к значениям $s_1 = 0.75$; $s_2 = 0.333$; $s_3 = -0.083$. Поскольку рыночная доля не может быть отрицательной, здесь имеет место та же ситуация, что и в задаче 14: третья фирма не в состоянии конкурировать с первой и второй. Для двух фирм, действующих на рынке:

$C = 35$, $P = 35/(2 - 1/2) = 23.33$, $s_1 = 0.714$, $s_2 = 0.286$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 17

а) В данном случае имеет место монополия с предельной выручкой $\mathrm{MR} = 100 - 0.2q = 40$, откуда $q = Q = 300$ и $P = 70$.

б) Найдем функции реагирования фирм (ср. решение задачи № 13):

$$q_1 = R_1(q_2) = (100 - 40)/0.2 - q_2/2 = 300 - q_2/2;$$

$$q_2 = R_2(q_1) = 300 - q_1/2.$$

Обоим равенствам отвечают значения $q_1 = q_2 = 200$, так что $Q = 400$ и $P = 60$.

в) Если вторая фирма является последователем, то ее функция реагирования ничем не отличается от найденной в п. б):

$$q_2 = R_2(q_1) = 300 - q_1/2.$$

Первая фирма, лидер, максимизируя свою прибыль, учитывает реакцию второй фирмы на ее решения, так что решаемая ею задача имеет структуру:

$$P^D(q_1 + R_2(q_1)) \to \max,$$

т. е.

$$[100 - 0.1(q_1 + 300 - q_1/2)] \cdot q_1 - (\mathrm{FC} + 40q_1) =$$

$$= 30q_1 - 0.05q_1^2 \to \max.$$

Решением является $q_1 = 300$. Подставляя этот результат в функцию реагирования второй фирмы, получим $q_2 = 150$. Рыночный объем продаж $Q = q_1 + q_2 = 450$, цена $P = 55$.

г) Начнем с анализа поведения последователей. Вторая фирма учитывает выпуски первой и третьей, и по аналогии с ситуацией предыдущего пункта ее функцию реагирования можно представить в виде

$$q_2 = R_2(q_1,\ q_3) = 300 - q_1/2 - q_3/2.$$

Подобный вид имеет функция реагирования третьей фирмы:

$$q_3 = R_3(q_1,\ q_2) = 300 - q_1/2 - q_2/2.$$

Но для второй и третьей фирм, рассматриваемых в совокупности, величина q_1 является экзогенной, в то время как q_2 и q_3 должны устанавливаться в процессе их конкурентного взаимодействия. При заданном значении q_1 равновесные значения q_2 и q_3 определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} q_2 = 300 - q_1/2 - q_3/2; \\ q_3 = 300 - q_1/2 - q_2/2 \end{cases}$$

и равны

$$q_2 = 200 - q_1/3; \qquad q_3 = 200 - q_1/3.$$

Первая фирма при принятии своих решений учитывает реакцию обоих последователей; их совместная функция реагирования $R_{2.3}(q_1) = 400 - \frac{2}{3}q_1$. Поэтому критерий выбора лидера имеет вид

$$[100 - 0.1(q_1 + 400 - \tfrac{2}{3}q_1)] \cdot q_1 - (\mathrm{FC} + 40q_1) \to \max.$$

Максимум прибыли достигается при $q_1 = 300$. Подставляя найденное значение для равновесных выпусков последователей, находим: $q_2 = q_3 = 100$. Рыночный объем продаж $Q = q_1 + q_2 + q_3 = 500$, цена $P = 50$.

д) Третья фирма находится на низшей ступени иерархии «лидеры — последователи», и ее функция реагирования не отличается от рассмотренной в предыдущем пункте:

$$q_3 = R_3(q_1, q_2) = 300 - q_1/2 - q_2/2.$$

Вторая фирма при принятии своих решений учитывает реакцию третьей фирмы, и ее критерий имеет вид

$$[100 - 0.1(q_1 + q_2 + 300 - q_1/2 - q_2/2)] \cdot q_2 - (\mathrm{FC} + 40q_2) \to \max.$$

Максимум достигается при

$$q_2 = 300 - q_1/2.$$

Подстановка этого результата в функцию реагирования третьей фирмы ставит ее выпуск в опосредованную зависимость от решений «абсолютного лидера» — первой фирмы:

$$q_3 = 150 - q_1/4.$$

Совместный выпуск обоих последователей первой фирмы равен

$$q_2 + q_3 = 450 - \tfrac{3}{4}q_1,$$

и ее критерий выбора принимает вид:

$$[100 - 0.1(q_1 + 450 - \tfrac{3}{4}q_1)] \cdot q_1 - (\mathrm{FC} + 40q_1) \to \max.$$

Максимум достигается при $q_1 = 300$. Подстановка найденного значения в функции реагирования второй и третьей фирм дает: $q_2 = 150$, $q_3 = 75$. Теперь суммарный выпуск составляет $Q = q_1 + q_2 + q_3 = 525$, цена $P = 47.5$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 18

Если бы среди участников рынка не было доминирующей фирмы, на рынке установилось бы конкурентное равновесие при цене $P_E = 660$. Это максимальная цена остаточного спроса на продукцию доминирующей фирмы. Обратная функция предложения конкурентного окружения $P^S = 500 + 0.4Q$ показывает минимальную цену предложения $P_0 = 500$. В диапазоне цен от P_0 до P_E функция остаточного спроса представляет собой разность между функциями рыночного спроса и конкурентного предложения, а при ценах ниже P_0 совпадает с функцией рыночного спроса:

$$Q^{RD}(P) = \begin{cases} 8250 - 12.5P, & 500 \le P \le 660; \\ 700 - 10P, & P < 500. \end{cases}$$

Обратная функция остаточного спроса также имеет два различных участка, разделяемых значением $Q_0 = Q^D(P_0) = 2000$:

$$P^{RD}(Q) = \begin{cases} 660 - 0.08Q, & Q \le 2000; \\ 700 - 0.1Q, & Q > 2000. \end{cases}$$

Предельная выручка:

$$\text{MC}(Q) = \begin{cases} 660 - 0.16Q, & Q < 2000; \\ 700 - 0.2Q, & Q > 2000. \end{cases}$$

$$\text{MC}(2000_{-0}) = 340, \qquad \text{MC}(2000_{+0}) = 300.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 19

Обратная функция спроса на продукт фирмы $P^D(q) = 46 - 0.5q$, предельная выручка TR $= 46 - q$. Приравнивая ее предельным затратам MC $= 10 + 2q$, найдем, что $q = 12$, по условиям спроса $P = 40$.

Общая выручка фирмы TR $= P \cdot q = 480$, общие затраты TC $= 100 + 10 \cdot 12 + 12^2 = 364$, так что прибыль фирмы составляет $\Pi = 480 - 364 = 116$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 20

Пусть на рынке действуют n фирм. В равновесии рыночный объем продаж равен суммарному выпуску всех фирм:

$Q = nq$, где q — объем выпуска одной фирмы. Поэтому обратную функцию спроса можно представить в виде

$$P^D(q) = 46 - 0.01nq.$$

Каждая фирма максимизирует свою прибыль, так что для нее выполняется равенство MR = MC, или

$$46 - 0.02nq = 10 + 2q. \qquad (1)$$

Но экономическая прибыль каждой фирмы в длительном периоде равна нулю, так что цена совпадает с ее средними затратами:

$$46 - 0.01nq = \frac{100}{q} + 10 + q. \qquad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) дает $36 = 200/q$, или $q = 100/18 = 5.556$; $n = 224$.

Равновесная цена и равные ей средние затраты составляют

$$46 - 0.01 \cdot 224 \cdot 5.556 = 33.556.$$

Минимум средних затрат достигается при $q = 10$ и равен 30.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 21

В условиях монополистической конкуренции в длительном периоде прибыль фирмы равна нулю; эта прибыль достигается при выборе объема производства, доставляющего максимум прибыли. Это означает, что при равновесном объеме выпуска средние затраты фирмы равны цене спроса на ее продукт, а при любом другом объеме фирма была бы убыточной из-за того, что цена спроса была бы меньше средних затрат. Таким образом, в точке равновесия длительного периода кривая спроса на продукт фирмы касается кривой средних затрат (см. рисунок).

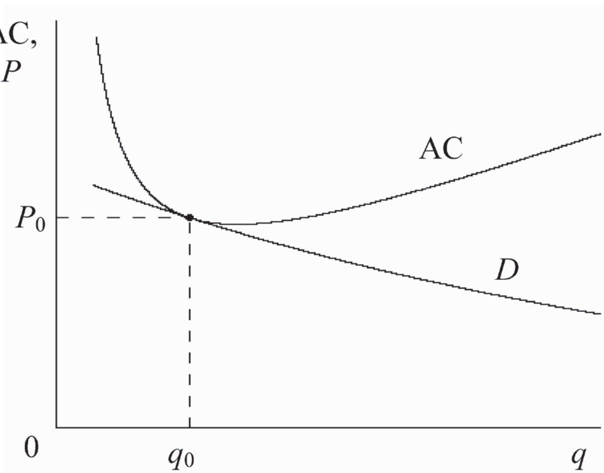
Заметим, что в точке касания графиков двух функций совпадают значения аргумента, функции и производных обеих функций. А это означает, что в этой точке совпадают значения эластичности функций. Функция спроса — убывающая, под эластичностью спроса понимается абсолютная величина отрицательной эластичности объема спроса по цене. Эластичность цены спроса по объему — обратная величина, так что в нашем случае $\mathbf{E}_q[P^D] = -0.2$. Этой же величине равна эластичность средних затрат. Средние затраты представляют собой функцию

$$\mathrm{AC}(q) = \frac{100}{q} + 10 + q,$$

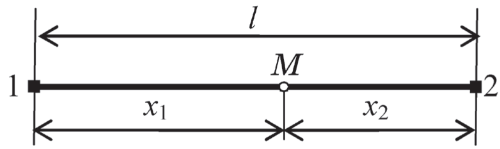
ее эластичность

$$\mathbf{E}_q[\mathrm{AC}] = \left(-\frac{100}{q^2} + 1\right) \cdot \frac{q}{\frac{100}{q} + 10 + q} = -0.2.$$

Решая получившееся уравнение, находим равновесное значение $q_0 = 7.374$. Цена равновесия $P_0 = \mathrm{AC}(7.374) = 30.935$.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 22



Обозначим p_1 и p_2 цены, назначаемые фирмами. Точка M на рисунке — точка безразличия: с учетом разницы в ценах продажи и затрат на транспортировку жителю этой точки покупки в обеих фирмах равновыгодны, так что выполняется равенство

$$p_1 + tx_1 = p_2 + tx_2.$$

Вместе с равенством $x_1 + x_2 = l$ это позволяет выразить x_1 и x_2 через цены и транспортные затраты:

$$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}; \quad x_2 = \frac{l}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t}. \quad (1)$$

По условиям спроса $q_1 = x_1$ и $q_2 = x_2$. Таким образом, прибыли фирм равны

$$\pi_1 = (p_1 - c_1) \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}\right); \ \pi_2 = (p_1 - c_1) \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t}\right),$$

где c_1 и c_2 — предельные затраты фирм (по условиям задачи — постоянные величины). Максимизация прибыли каждой фирмы по собственной цене приводит к системе уравнений

$$\frac{d\pi_1}{dp_1} = \frac{1}{2}\left(l + \frac{c_1 + p_2 - 2p_1}{t}\right) = 0; \ \frac{d\pi_2}{dp_2} = \frac{1}{2}\left(l + \frac{c_2 + p_1 - 2p_2}{t}\right) = 0,$$

из которой следуют функции реагирования фирм

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(tl + c_1 + p_2\right); \qquad p_2 = \frac{1}{2}\left(tl + c_2 + p_1\right).$$

Рассматривая полученные равенства как систему уравнений, находим равновесные значения

$$p_1 = tl + \frac{2c_1 + c_2}{3}; \qquad p_2 = tl + \frac{c_1 + 2c_2}{3}. \quad (2)$$

а) Из равенств (2) находим цены:

$$p_1 = 10 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 30 + 60}{3} = 90; \ p_2 = 10 \cdot 5 + \frac{30 + 2 \cdot 60}{3} = 100.$$

С помощью равенств (1) находим объемы продаж:

$$q_1 = x_1 = 3; \qquad q_2 = x_2 = 2.$$

Прибыли фирм равны

$$\pi_1 = (90 - 30) \cdot 3 = 180; \quad \pi_2 = (100 - 60) \cdot 3 = 120.$$

Как видим, первая фирма, имеющая затратное преимущество, имеет бульшую зону своей торговли и бульшую прибыль, чем вторая.

б) Аналогичные расчеты при $t = 4$ приводят к результатам

$$\begin{aligned} p_1 &= 60; & p_2 &= 70; \\ q_1 &= 3.75; & q_2 &= 1.25; \\ \pi_1 &= 112.5; & \pi_2 &= 12.5. \end{aligned}$$

Уменьшение транспортных затрат, как видим, привело к уменьшению прибылей обеих фирм; при этом увеличилась зона первой фирмы и соответственно сократилась зона второй фирмы.

в) Расчеты при $t = 1$ приводят, в частности, к результату $q_2 = -2.5$, кажущемуся парадоксальным. Подобно тому что отмечалось в задачах 14 и 16, в данном случае затратное преимущество первой фирмы приводит к тому, что вторая фирма оказывается неконкурентоспособной.

Комментарии. 1. В случае в) мы можем лишь констатировать, что первая фирма окажется монополистом, но не можем определить ее равновесную цену: по предположению спрос абсолютно неэластичен ($\eta = 0$), но, с другой стороны, равновесии монополии возможно лишь при таких ценах, при которых спрос высокоэластичен ($\eta > 1$, см. задачу 15). Предположение об абсолютной неэластичности спроса не принципиально для модели Хотеллинга; оно нужно лишь для упрощения, делающего более наглядным эффект дифференциации.

2. Можно сформулировать условия, при которых обе фирмы могут действовать на рынке Хотеллинга. Они сводятся к тому, что цена каждой фирмы должна быть не меньше ее средних затрат. Обратимся к равенству (2) и рассмотрим это условие для первой фирмы: оно сводится к неравенству $p_1 - c_1 \geq 0$, или

$$tl + \frac{c_2 - c_1}{3} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 - c_2 \geq 3tl.$$

Поскольку аналогичное условие должно выполняться и для второй фирмы, для безубыточной деятельности обеих фирм должно выполняться неравенство $|c_1 - c_2| \geq 3tl$.

3. При $t = 0$ (или при $l = 0$) дифференциация по существу исчезает и модель Хотеллинга с ценовой конкуренцией превращается в модель Бертрана. Для последней характерно, что из фирм, имеющих разные затратные характеристики, на рынке остается одна, имеющая затратные преимущества перед всеми остальными.

ЧАСТЬ V
РЫНКИ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА

5.1 ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА № 1

Функция полезности индивида
$$U(I, F) = \sqrt{I} + \sqrt{200R},$$
где I — суточный доход, R — свободное время (часов в сутки). Найти объем предложения труда при следующих условиях:

а) часовая ставка заработной платы $w = 100$, иные источники дохода отсутствуют;

б) $w = 200$, иные источники дохода отсутствуют;

в) $w = 100$, автономный (не связанный с наемным трудом) доход $I_a = 300$;

г) если $w = 100$, то при каком автономном доходе индивид откажется от работы?

ЗАДАЧА № 2

Индивид имеет в собственности земельный участок площадью S_0. Если бы он не имел участка, он захотел бы взять землю в аренду для собственного пользования, причем его спрос описывался бы функцией $S = a - bw$, где S — арендуемая площадь, w — цена аренды. Найти функцию предложения земли индивидом.

ЗАДАЧА № 3

Рассматривается двухпериодная модель межвременного потребительского выбора. Пусть полезность потребителя описывается функцией $U(C_0, C_1) = C_0C_1$, где C_0, C_1 — расходы на потребление в текущем и будущем периодах.

а) При каких сочетаниях доходов I_0, I_1 в текущем и будущем периодах и процентной ставки потребитель захочет взять деньги взаймы и какова при этом его функция спроса на заемные деньги?

б) При каких сочетаниях доходов I_0, I_1 и процентной ставки потребитель захочет дать деньги взаймы и какова при этом его функция предложения заемных денег?

в) На рынке заемных средств действуют посредники, принимающие вклады с процентной ставкой i^S и выдающие ссуды с процентной ставкой i^D, причем $i^D > i^S$. При каких сочетаниях доходов I_0, I_1 потребитель не будет участником рынка ни в качестве кредитора, ни в качестве заемщика?

ЗАДАЧА № 4

Рынок заемных средств действует без посредников и без трансакционных затрат. Он включает трех индивидов, A, B и C, каждый из которых имеет функцию полезности $U(C_0, C_1) = C_0C_1$, а доходы в текущем и будущем периодах представлены в таблице.

Индивид	A	B	C
I_0	0	20	28
I_1	15	20	25

Существует ли равновесие на этом рынке? Если да, то чему равна равновесная ставка процента, кто из участников рынка окажется кредитором, а кто — должником, каковы размеры получаемых и предоставляемых ссуд?

ЗАДАЧА № 5

Предложение фактора описывается функцией

$$F^S(w) = 100 - \frac{500}{w}, \quad w > 5.$$

Определить экономическую ренту и удерживающий доход в зависимости от цены фактора w.

ЗАДАЧА № 6

Фирма использует один переменный ресурс, X, в количестве x. При заданных количествах постоянных ресурсов производимое ею количество продукта описывается зависимостью $q = 2\sqrt{x}$.

а) Фирма продает продукт на конкурентном рынке по цене $P = 50$ и покупает ресурс также на конкурентном рынке по цене $w = 5$. Найти количество используемого переменного ресурса и объем производства фирмы; определить функцию предельных затрат фирмы.

б) Та же фирма является монополистом, спрос на ее продукт описывается функцией $P^D(Q) = 75 - 2.5Q$. Определить количество используемого переменного ресурса, объем производства фирмы и цену, по которой фирма продает свой продукт.

в) Фирма продает продукт на конкурентном рынке по цене $P = 50$; на рынке ресурса с функцией предложения $w^S(x) = 0.2x$ фирма является единственным покупателем. Определить количество используемого переменного ресурса, объем производства фирмы, и цену, по которой фирма покупает ресурс.

г) Фирма является монополистом на рынке с функцией спроса и монопсонистом на рынке с функцией предложения $w^S(x) = 0.2x$. Определить количество производимого продукта и используемого ресурса и цены на рынках продукта и ресурса.

ЗАДАЧА № 7

Фирма потребляет два ресурса в количествах x, y. Производственная функция равна

$$q = \sqrt{\min\left(\frac{x}{2}, \quad \frac{y}{4}\right)}.$$

Фирма продает продукцию на конкурентном рынке по цене $P = 8$. Найти функцию спроса на первый ресурс при цене второго $p_y = 0.5$.

ЗАДАЧА № 8

Фирма потребляет два ресурса в количествах x, y. Производственная функция равна

$$q = \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{y}{4}}.$$

Фирма продает продукцию на конкурентном рынке по цене $P = 8$. Найти функцию спроса на первый ресурс при цене второго $p_y = 0.5$.

5.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Суточный доход $I = wL$, где L — объем предложения труда (часов в сутки). Свободное время $R = 24 - L$. Теперь полезность можно представить в виде функции объема предложения труда:

$$U = \sqrt{wL} + \sqrt{200 \cdot (24 - L)}.$$

Максимум полезности достигается при выполнении условия

$$\frac{dU}{dL} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{L}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{200}{24 - L}} = 0,$$

или

$$\frac{L}{w} = \frac{24 - L}{200},$$

откуда $L = \dfrac{24w}{200 + w}$. Ответы: а) $L = 8$; б) $L = 12$.

в) При наличии автономного дохода функция полезности принимает вид

$$U = \sqrt{wL + I_a} + \sqrt{200 \cdot (24 - L)}.$$

Условие максимума полезности:

$$\frac{dU}{dL} = \frac{1}{2}\frac{w}{\sqrt{wL + I_a}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{200}{24 - L}} = 0,$$

или

$$200 \cdot (wL + I_a) = w \cdot (24 - L).$$

Окончательно получаем

$$L = \frac{24w^2 - 200I_a}{w \cdot (200 + w)}.$$

Последнее выражение представляет объем предложения труда как функцию ставки заработной платы и величины автономного дохода. При $w = 100$ и $I_a = 300$ объем предложения труда $L = 6$.

г) Используя найденную в предыдущем пункте функцию предложения труда и полагая $L = 0$, находим $I_a = 1200$.

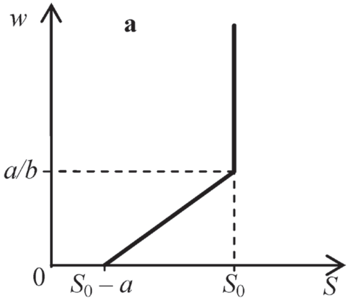
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

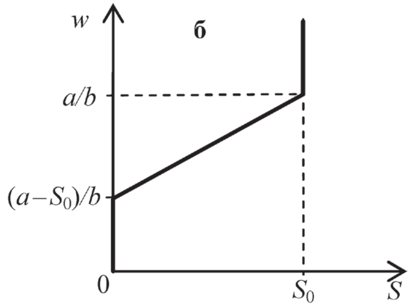
Имея участок в собственности, владелец может оставить его, полностью или частично, для собственного использования. При этом он несет неявные затраты, равные неполученной арендной плате. Верхняя граница цены аренды, при которой собственник будет использовать некоторую площадь, равна a/b. Более высокая цена аренды побуждает его полностью отказаться от использования земли и сдать весь участок в аренду. Таким образом, функция предложения описывается равенством

$$S^S(w) = \begin{cases} S_0 - a + bw, & w \le a/b; \\ S_0, & w > a/b. \end{cases}$$

Здесь следует сделать одно замечание. Приведенное выражение справедливо, если $a \le S_0$, т. е. при сколь угодно малой цене объем собственного спроса землевладельца меньше площади его участка и он готов сдать в аренду площадь не менее $S_0 - a$ (рис. а). Если же $a > S_0$ (рис. б), то при достаточно низкой цене аренды объем спроса собственника превышает площадь его участка и он откажется от сдачи какой-либо площади в аренду (более того, у него останется еще неудовлетворенный спрос). Таким образом, при $a > S_0$ предложение описывается равенством

$$S^S(w) = \begin{cases} 0, & w < (a - S_0)/b; \\ S_0 - a + bw, & (a - S_0)/b \le w \le a/b; \\ S_0, & w > a/b \end{cases}$$





РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

Для нахождения потребительского оптимума найдем предельную норму замещения текущего потребления будущим:

$$\frac{\partial U}{\partial C_0} = C_1; \qquad \frac{\partial U}{\partial C_1} = C_0,$$

так что $\mathrm{MRS}_{0,1} = C_1/C_0$; оптимум достигается при $\mathrm{MRS}_{0,1} = 1 + i$, где i — процентная ставка за период. Таким образом, $C_1 = (1 + {} + i)C_0$. Подставляя это соотношение в бюджетное ограничение

$$C_0 + \frac{C_1}{1+i} = I_0 + \frac{I_1}{1+i},$$

найдем, что

$$C_0 = \frac{I_0}{2} + \frac{I_1}{2(1+i)}.$$

а) Потребитель предъявит спрос на заемные деньги, если желаемые расходы на потребление в текущем периоде превышают доход в этом периоде: $C_0 > I_0$, т. е.:

$$\frac{I_0}{2} + \frac{I_1}{2(1+i)} > I_0, \text{или} \qquad I_0 < \frac{I_1}{1+i}$$

Разность между величиной желаемых расходов и доходом составляет объем спроса. Т. е. спрос описывается функцией

$$D(i) = \begin{cases} \dfrac{I_1}{2(1+i)} - \dfrac{I_0}{2}, & i < \dfrac{I_1}{I_0} - 1; \\ 0, & i > \dfrac{I_1}{I_0} - 1. \end{cases} \qquad (1)$$

б) Рассуждая аналогично, можно утверждать, что потребитель захочет дать деньги взаймы при условии $I_0 > \dfrac{I_1}{1+i}$, и его предложение описывается функцией

$$S(i) = \begin{cases} 0, & i < \dfrac{I_1}{I_0} - 1; \\ \dfrac{I_0}{2} - \dfrac{I_1}{2(1+i)}, & i > \dfrac{I_1}{I_0} - 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Комментарий. В отличие от товарных рынков любой участник рынка заемных средств может оказаться как в роли заемщика (покупателя), так и в роли кредитора — в зависимости от процентной ставки. По этой причине целесообразно объединить функции предложения и спроса, введя в рассмотрение функцию чистого предложения $\mathrm{NS}(i) = S(i) - D(i)$, совпадающую с функцией предложения при $\mathrm{NS}(i) > 0$ и отличающуюся лишь знаком от функции спроса при $\mathrm{NS}(i) < 0$. Таким образом:

$$\mathrm{NS}(i) = \frac{I_0}{2} - \frac{I_1}{2(1+i)}, \qquad i > 0. \qquad (3)$$

в) В предыдущих пунктах предполагалось, что рынок заемных средств совершенный. В данном пункте учитывается, что кредиторы и заемщики действуют через посредников, устанавливающих различные процентные ставки по кредитным и депозитным операциям. Тем не менее формулы (1) и (2) справедливы с одним лишь уточнением: в них фигурируют различные процентные ставки. Следует положить $i = i^D$ в формуле (1) и $i = i^S$ — в формуле (2). Таким образом, потребитель предъявит спрос при $i^D < I_1/I_0$ и предложение — при $i^S > I_1/I_0$. При $i^S \le I_1/I_0 \le i^D$ потребитель не выступит ни в той ни в другой роли.

Комментарий. Для рынка с различными процентными ставками формулу (3) следует откорректировать:

$$\mathrm{NS}(i)=\begin{cases}\dfrac{I_0}{2}-\dfrac{I_1}{2(1+i^S)}, & \dfrac{I_1}{I_0}<i^S;\\ 0, & i^S\le\dfrac{I_1}{I_0}\le\ i^D;\\ \dfrac{I_0}{2}-\dfrac{I_1}{2(1+i^D)}, & \dfrac{I_1}{I_0}>i^D.\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

Функции рыночного спроса и рыночного предложения на рынке заемных средств, как и на других рынках, формируется путем суммирования функций индивидуального спроса и индивидуального предложения. Равновесие достигается при такой процентной ставке, при которой объем спроса равен объему предложения. Поскольку на рынке заемных средств роли участников не фиксированы, а зависят от процентной ставки, здесь целесообразно воспользоваться функцией чистого предложения, NS(i) (см. комментарий к предыдущей задаче). Значение рыночной функции чистого предложения при каждом i представляет собой сумму индивидуальных значений:

$$\mathrm{NS}(i)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{NS}_k(i).$$

Здесь NS(i) — рыночная функция, $\mathrm{NS}_k(i)$ — индивидуальная функция чистого предложения k-го участника рынка, k = 1, ..., n. Равновесная ставка процента i_E удовлетворяет равенству $\mathrm{NS}(i_E) = 0$.

В рассматриваемой задаче

$$\mathrm{NS}_A(i)=0-\frac{15}{2\cdot(1+i)};\quad \mathrm{NS}_B(i)=\frac{20}{2}-\frac{20}{2\cdot(1+i)};$$

$$\mathrm{NS}_C(i)=\frac{28}{2}-\frac{25}{2\cdot(1+i)},$$

так что чистое рыночное предложение

$$\mathrm{NS}(i) = \mathrm{NS}_A(i) + \mathrm{NS}_B(i) + \mathrm{NS}_C(i) = 14 - \frac{30}{1+i}.$$

Равновесие достигается при $i_E = 0.25$.

Чистое предложение участников рынка:

$$\mathrm{NS}_A = -6; \qquad \mathrm{NS}_B = 2; \qquad \mathrm{NS}_C = 4.$$

Таким образом, A — заемщик, он берет взаймы 6 единиц у кредиторов B и C, предоставляющих ему 2 и 4 единицы соответственно.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Факторный доход при ставке w равен $I = wF = 100w - 500$. Рента определяется интегралом

$$R(w) = \int_5^w F(x)dx = \int_5^w \left(100 - \frac{500}{x}\right)dx = 500 \cdot \left(\frac{w}{5} - \ln\frac{w}{5} - 1\right). \quad (1)$$

Так как сумма ренты и удерживающего дохода (TE, **T**ransfer **E**arning) равна факторному доходу, удерживающий доход равен

$$\mathrm{TE} = I - R = (100w - 500) - 500 \cdot \left(\frac{w}{5} - \ln\frac{w}{5} - 1\right) = 500\ln\frac{w}{5}.$$

Комментарии. 1. Приведенная здесь функция предложения иллюстрирует случай, когда объем предложения ресурса ограничен сверху некоторым располагаемым его количеством: при неограниченном росте цены ресурса объем его предложения не превышает 100.

2. Рента может быть определена либо интегрированием объема предложения по цене (как это сделано в предлагаемом решении), либо интегрированием по объему превышения цены над значением цены предложения при переменном объеме:

$$R = \int_0^F \left(w - w^S(y)\right)dy = wF - \int_0^F \frac{500dy}{100-y} = 500 \cdot \left(\frac{w}{5} - 1 - \ln\frac{100}{100-F}\right).$$

Подстановка $F = F^S(w)$ приводит к выражению (1). Выбор того или иного способа интегрирования определяется соображениями технического удобства.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

а) Так как фирма является ценополучателем на рынке ресурса X, максимум ее прибыли определяется условием $\mathrm{MRP}_X = \mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_X = w$, где w — цена ресурса. На рынке своего продукта фирма также является ценополучателем, и ее предельная выручка совпадает с ценой, $\mathrm{MR} = P = 50$, так что для нее $P \cdot \mathrm{MP}_X = w$. Предельный продукт ресурса X

$$\mathrm{MP}_X = \frac{dq}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Итак, из условия $50 \cdot 1/\sqrt{x} = 5$ находим объем использования ресурса $x = 100$ и объем производства $q = 2 \cdot \sqrt{x} = 20$.

Из равенства $q = 2 \cdot \sqrt{x}$ находим: $x = q^2/4$. Поскольку X — единственный переменный ресурс, функция общих затрат $\mathrm{TC}(q) = \mathrm{FC} + w \cdot x = \mathrm{FC} + 5 \cdot q^2/4$. Отсюда $\mathrm{MC}(q) = 2.5q$.

б) Теперь фирма является монополистом, ее предельная выручка не совпадает с ценой и в соответствии с рыночном спросом определяется равенством

$$\mathrm{MR} = 75 - 2 \cdot 2.5q = 75 - 5q$$

(для монополии $Q = q$). Используя зависимость q от x, запишем условие максимума прибыли виде уравнения относительно x:

$$\left(75 - 5 \cdot 2\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 5.$$

Его решение: $x = 25$. Отсюда $q = 10$, $P = 75 - 2.5 \cdot 10 = 50$.

Комментарий. Сравнение этой задачи в частях а) и б) с задачей 4 части IV показывает, что в обеих задачах речь идет об одной и той же ситуации: функция предельных затрат одна и та же, условия продажи продукта совпадают. Из того, что при равенстве цен продажи фирма-монополист производит меньше продукта, чем производила бы в конкурентных условиях, следует, что она потребляет меньшее количество ресурсов (во всяком случае, если переменный ресурс — единственный).

в) Поскольку фирма не является ценополучателем на рынке ресурса, ее оптимум определяется равенством $\mathrm{MRP}_X = \mathrm{MFC}_X$, причем предельные факторные затраты (MFC) не равны цене ресурса. Для общих факторных затрат справедливо равенство $\mathrm{TFC}_X = w^S x) \cdot x = 0.2x^2$, так что предельные расходы равны $\mathrm{MFC}_X = 0.4x$. Таким образом, имеет место соотношение $50 \cdot 1/\sqrt{x} = 0.4x$, откуда $x = 25$; цена ресурса определяется функцией предложения и равна $w = 0.2 \times 25 = 5$. Выпуск продукта равен $q = 2\sqrt{25} = 10$.

Комментарий.

г) Фирма не является ценополучателем ни на рынке своего продукта, ни на рынке ресурса, поэтому общее соотношение $\mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_X = \mathrm{MFC}_X$ принимает в данном случае вид

$$(75 - 5q) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.4x.$$

Используя зависимость объема производства от объема использования ресурса X, представим это соотношение в форме уравнения относительно x:

$$(75 - 5 \cdot 2\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.4x.$$

Решая это уравнение (например, каким-либо численным методом), находим:

$$x = 18.542; \qquad q = 2 \cdot \sqrt{18.542} = 8.612;$$

по условиям спроса на продукт фирмы определяем его цену:

$$P = 75 - 2.5 \cdot 8.612 = 53.47$$

а цену ресурса — по условиям его предложения:

$$w = 0.2 \cdot 18.542 = 3.7084.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

Ресурсы абсолютно комплементарны и используются в пропорции 1 : 2. Введем обозначение z для числа потребляемых комплектов, считая комплектом $(x, y) = (1, 2)$. Тогда

$$q = \sqrt{\frac{z}{2}}.$$

Цена комплекта $p_z = p_x + 2p_y$. Определим спрос на комплекты.

$$\mathrm{MRP}_z = \mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_z = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{z}} = \sqrt{\frac{32}{z}} = p_z,$$

так что спрос на комплекты описывается равенством $z = \frac{32}{p_z^2}$. Но каждый комплект содержит 1 единицу первого ресурса, так что

$$x = \frac{32}{(p_x + 2p_y)^2} = \frac{32}{(p_x + 1)^2}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 8

Ресурсы являются совершенными субститутами: 1 единица первого ресурса замещает 2 единицы второго. Поэтому при соотношении цен $p_x > 2p_y$ первый ресурс не используется вовсе. Если же $p_x < 2p_y = 1$, то используется только первый ресурс, при этом $q = \sqrt{\frac{x}{2}}$,

так что

$$\mathrm{MRP}_x = \mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_x = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{8}{x}} = p_x,$$

так что

$$x = \begin{cases} \frac{8}{p_x^2}, & p_x < 1; \\ 0, & p_x > 1. \end{cases}$$

При $p_x = 1$ объем спроса на первый ресурс лежит в пределах ($0 \le x \le 8$), недостающее для выпуску количество восполняется вторым ресурсом.

ЧАСТЬ VI
ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ И ОБЩЕСТВЕННОЕ БЛАГОСОСТОЯНИЕ

6.1 ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА № 1

Рассмотрим экономику обмена с двумя индивидами, чьи функции полезности заданы как $U_1 = X_1^{\alpha}Y_1^{1-\alpha}$ и $U_2 = X_2^{\beta}Y_2^{1-\beta}$, где α, $\beta \in (0.1)$. Индивиды ведут себя как ценополучатели. В изначальном наделении индивид 1 располагает единицей блага Y, а индивид 2 — единицей блага X.

Рассчитайте равновесные цены и равновесное размещение благ между индивидами.

ЗАДАЧА № 2

Пусть имеется экономика с двумя индивидами — A и B. Их предпочтения представлены функциями полезности: $U_A\left(X_A, Y_A\right) = X_A^{1/2}Y_A^{1/2}$ и $U_B(X_B, Y_B) = X_B^{1/3}Y_B^{2/3}$. Индивид A изначально располагает 2 единицами блага X и ни одной единицей блага Y. Индивид B изначально располагает 3 единицами блага Y и ни одной единицей блага X.

Рассчитайте равновесные цены и равновесное размещение благ между индивидами.

Функция полезности индивида A: $U_A(X_A, Y_A) = X_AY_A$. Функция полезности индивида B: $U_B(X_B, Y_b) = \min\{X_B, Y_B\}$.

ЗАДАЧА № 3

Индивид A изначально располагает 10 единицами блага Y и ни одной единицей блага X. Индивид B изначально располагает 20 единицами блага X и 5 единицами блага Y.

Рассчитайте равновесные цены и равновесное размещение благ между индивидами

ЗАДАЧА № 4

Функция полезности каждого индивида $U = Q_1^{0.5} Q_2^{0.5}$. Допустим, что в экономике предложение труда и капитала абсолютно неэластично и при этом $L = 100$ и $K = 100$. Производственные функции $Q_1 = K_1^{0.5} L_1^{0.5}$; $Q_2 = 1.5L_2$. Агрегированный доход в этой экономике есть просто сумма доходов факторов, т. е. $I = P_K K + P_L L$.

4.1. Выведите формулы для расчета спроса и предложения на товарном и факторном рынке и внесите их в таблицу VI.1 (*Подсказка*: используйте лемму Шепарда, согласно которой $L = \frac{\partial C}{\partial P_L}$; $K = \frac{\partial C}{\partial P_K}$.)

Таблица VI.1

Двухсекторная конкурентная экономика

	Рынки товаров	
	***Товар* 1**	
Спрос:	$Q_1 =$	(1)
Предложение:	$P_1 =$	(2)
	***Товар* 2**	
Спрос:	$Q_2 =$	(3)
Предложение:	$P_2 =$	(4)
	Рынки факторов	
	Рынок капитала	
Спрос	$K_D = K_1 + K_2 =$	(5)
Предложение	$K_S = 100$	(6)
	Рынок труда	
Спрос	$L_D = L_1 + L_2 =$	(7)
Предложение	$L_S = 100$	(8)

4.2. Рассчитайте равновесные цены товаров и факторов, равновесные количества товаров без привлечения рынка труда (*Подсказка*: примите цену капитала за счетную цену, *numeraire*.)

4.3. Покажите, что спрос на рынке труда равен предложению.

4.4. Определите, какая доля общего количества располагаемого труда задействована в производстве каждого из товаров. Найдите доход труда и доход капитала в данной экономике.

ЗАДАЧА № 5

Предположим, что индивид 1 обладает 78 единицами блага X и ни одной единицей блага Y. Его функция полезности $U_1 = X_1Y_1 + 2X_1 + 5Y_1$. Допустим, что индивид 2 обладает 164 единицами блага Y и ни одной единицей блага X. Его функция полезности $U_2 = X_2Y_2 + 4X_2 + 2Y_2$.

Подсчитайте, каковыми будут соотношения равновесных цен и какова парето-эффективная комбинация благ (*Подсказка*: для решения используйте понятие избыточного спроса индивидов на блага X и Y — E_{x1}, E_{y1}, E_{x2}, E_{y2}, выразите через них X_1, Y_1, X_2, Y_2 в соответствующих функциях полезности индивидов.)

ЗАДАЧА № 6

В «экономике обмена» 1000 единиц блага X и 1000 единиц блага Y, а также 2 индивида (индивид 1 и индивид 2). Функция полезности индивидов $U_1 = X_1^{2/3}Y_1^{1/3}$ и $U_2 = X_2^{1/3}Y_2^{2/3}$.

6.1. Заполните нижеследующую таблицу и по ее данным постройте контрактную кривую в коробке Эджуорта.

	X_1	Y_1	$U_1 = X_1^{2/3}Y_1^{1/3}$	X_2	Y_2	$U_2 = X_2^{1/3}Y_2^{2/3}$
A	0	0		1000	1000	
B	100					
C	200					
D	300					
E	400					
F	500					
G	600					
H	700					
I	800					
J	900					
K	1000					

6.2. Предположим, что индивиды 1 и 2 изначально имеют в своем распоряжении по 500 единиц блага X и Y каждый. Обозначьте это изначальное размещение как точку S в коробке Эджуорта. Найдите любое иное распределение благ, которое приведет к повышению благосостояния каждого индивида по сравнению с изначальным состоянием. Обозначьте его как точку O на контрактной кривой.

6.3. Каковы MRS_{XY} для индивидов 1 и 2 в точке A? Как на основе полученных значений можно судить, какой из индивидов будет отдавать благо X за благо Y, а какой, наоборот, будет отдавать благо Y в обмен на благо X при продвижении из точки A в точку O?

ЗАДАЧА № 7

Пусть экономика состоит из двух индивидов, потребляющих два блага (X и Y). Индивид 1 изначально обладает благом X в количестве $X_1 = 30$ единиц и благом Y в количестве $Y_1 = 120$ единиц. Индивид 2 изначально обладает благом X в количестве $X_2 = 180$ единиц и благом Y в количестве $Y_2 = 90$ единиц. Их функции полезности $U_1 = X_1Y_1$ и $U_2 = X_2Y_2$ соответственно.

7.1. Нарисуйте коробку Эджуорта, отвечающую этой экономике.

7.2. Каковы уравнения кривых безразличия, проходящих через точку изначального размещения благ между индивидами? Изобразите их в коробке Эджуорта.

7.3. Заштрихуйте область, представляющую парето-улучшение по отношению к изначальному размещению благ между индивидами.

7.4. Каково уравнение контрактной кривой в данной экономике? Изобразите ее в коробке Эджуорта.

7.5. Определите две крайние точки на контрактной кривой, ограничивающие ядро экономики обмена (выразите их координаты через значения X_1 и Y_1).

7.6. Предположим, что некий «секретарь рынка» объявил цены благ. $P_X = 1$ денежной единице (д. е.), $P_Y = 2$ д. е. Более того, он изъял блага у каждого индивида и заменил их деньгами. Затем «секретарь рынка» предложил каждому заказать у него такое количество благ, которое максимизирует его полезность при данном бюджетном ограничении.

Какое количество благ X и Y закажут индивиды 1 и 2? Сможет ли «секретарь рынка» удовлетворить их заявки? Будет ли заказанная комбинация благ эффективной?

7.7. «Секретарь рынка» поднял P_X до 2 д. е., соблюдая все прежние условия. Сможет ли он теперь удовлетворить заявки? Будет ли финальное размещение благ эффективным, и если да, то почему?

7.8. Определите полезности индивидов 1 и 2, используя ответ на предыдущий пункт, и сравните их с соответствующими полезностями в исходном состоянии. Подсчитайте изменение полезности каждого индивида. Является ли переход из исходного состояния в состояние из предыдущего пункта парето-улучшением? Какова суммарная полезность индивидов в предыдущем пункте, насколько она изменилась по сравнению с исходным состоянием и может ли она быть повышена за счет иного размещения благ между ними?

ЗАДАЧА № 8

Пусть экономика состоит из двух индивидов, потребляющих два блага (X и Y). Функции полезности индивидов 1 и 2 $U_1 = X_1^{0.5}Y_1^{0.5}$ и $U_2 = X_2^{0.5}Y_2^{0.5}$ соответственно. Экономика располагает 10 единицами блага X ($X_1 + X_2 = 10$) и 10 единицами блага Y ($Y_1 + Y_2 = 10$).

8.1. Определите выражение для границы возможных полезностей. Постройте график этой границы.

8.2. Если изначальное размещение благ $X_1 = 2$, $Y_1 = 2$; $X_2 = 8$, $Y_2 = 8$, то каковы полезности индивидов 1 и 2? Постройте коробку Эджуорта, контрактную кривую и отметьте точку изначального размещения.

8.3. «Секретарь рынка» решил, что полезность индивида 1 (U_1) должна равняться 6 единицам, а полезность индивида 2 — 4 единицам. Покажите в коробке Эджуорта возможные перераспределения благ, которые при неизменных равновесных ценах обеспечат желаемое «секретарем рынка» распределение полезностей.

ЗАДАЧА № 9

В экономике производятся два блага X и Y с помощью капитала (K) и труда (L). Общее располагаемое количество капитала и труда $60L$ и $70K$. Описывающие производственный процесс изокванты представлены как X_1, X_2, X_3 и Y_1, Y_2, Y_3 (таблица).

Изокванты X						Изокванты Y					
X_1		X_2		X_3		Y_1		Y_2		Y_3	
L_X	K_X	L_X	K_X	L_X	K_X	L_Y	K_Y	L_Y	K_Y	L_Y	K_Y
5	55	25	45	15	65	5	20	10	50	35	60
15	25	35	35	40	55	20	15	25	35	45	45
30	15	50	30	55	55	55	15	40	35	55	40

9.1. Используйте содержащуюся в таблице информацию для построения в коробке Эджуорта для производства отвечающих данным таблицы изоквант. Обозначьте точки касания изоквант X_1 и Y_3, X_2 и Y_2, X_3 и Y_1 как A, B и C соответственно.

9.2. На основе данных таблицы определите точку (назовем ее I), в которой пересекаются изокванты X_1 и Y_1.

а) Объясните, почему точка I не является точкой оптимума. Что позволяет говорить о точках касания изоквант X и Y как точках оптимума?

б) Известны координаты двух точек касательной к изоквантам X_2 и Y_2, проходящей через точку их касания друг с другом ($25K_X$, $55L_X$ и $22.5K_Y$, $50L_Y$). Рассчитайте $\text{MRTS}_{L,\,K}$ в точке касания между двумя изоквантами.

9.3. Постройте контрактную кривую для производства в коробке Эджуорта, соединяющую начала координат (точки 0^X и 0^Y) и точки A, B и C.

9.4. Даны следующие значения изоквант для благ X и Y: $X_1 = 40$, $Y_3 = 90$; $X_2 = 100$, $Y_2 = 60$; $X_3 = 120$, $Y_1 = 30$.

а) Постройте по этим точкам кривую продуктовой трансформации (границу производственных возможностей).

б) Перенесите точки A, B, C и I из коробки Эджуорта на рисунок с кривой трансформации и объясните, что означает нахождение в точке I?

в) Продлите кривую трансформации до соединения ее с осью OX в точке T, где $X = 125$, и с осью OY в точке T', где $Y = 100$. Предположим, что на отрезке $T'A$ между точками

T' и A расположена некая точка F. Будет ли перемещение в нее из точки I парето-улучшением?

9.5. Представьте, что рассматриваемая здесь экономика — «экономика Робинзона» и что кривая продуктовой трансформации представлена в ней прямой, соединяющей точки T и T'. Какой должно быть значение MRS_{XY} для Робинзона, если достигается равновесие в производстве и потреблении?

9.6. Предположим, что «вальрасовский аукционист» назначил в «экономике Робинзона» (под таковой подразумевается условная модель экономики, где производителем и потребителем является один-единственный индивид) цены благ: $P_X = 5$ д. е., а $P_Y = 4$ д. е. Обеспечит ли они парето-эффективность? Если нет, то подскажите, какую цену на благо X следует назначить «аукционисту» для достижения парето-эффективности в «экономике Робинзона» при условии, что цена блага Y не меняется?

ЗАДАЧА № 10

Пусть в экономике производятся только 2 блага — X и Y. Их производственные функции:

$$X = L_X^{1/2} K_X^{1/2};$$

$$Y = L_Y^{2/3} K_Y^{1/3}.$$

При этом экономика располагает общим количеством капитала ($K_T = K_X + K_Y = 100$) и общим количеством труда ($L_T = L_X + L_Y = 200$).

10.1. Постройте коробку Эджуорта для производства, определите координаты пяти точек контрактной кривой для производства и используйте их для построения этой кривой в коробке Эджуорта. (*Подсказка*: выразите, например, L_X через K_X и рассчитайте значения L_X при следующих значениях K_X: 0, 25, 50, 100.)

10.2. Производство какого из благ капиталоинтенсивно и почему? Каково соотношение капиталоинтенсивности в производстве благ X и Y?

ЗАДАЧА № 11

В экономике имеется фиксированное количество двух факторов производства — труда (L) и капитала (K). Они полностью задействованы в производстве двух благ — X и Y. Граница производственных возможностей (кривая продуктовой трансформации) представлена как $X^2 + 9Y^2 = 100$.

11.1. Найдите выражение для предельной нормы продуктовой трансформации MRPT_{XY} через X.

11.2. Покажите, что кривая продуктовой трансформации вогнута по отношению к началу координат. Какую экономическую интерпретацию можно дать этому факту?

11.3. Если для двух индивидов (A и B) $\mathrm{MRS}_{XY}^{A} = \mathrm{MRS}_{XY}^{B} = -\frac{4}{7}$, то какова должна быть парето-оптимальная структура выпуска благ?

ЗАДАЧА № 12

Пусть в стране Дураков два блага — X (пушки) и Y (масло) — производятся только с помощью труда. Производственные функции для этих благ:

$$X = \sqrt{L_X}; \quad Y = 0.5\sqrt{L_Y},$$

где L_X и L_Y — количества труда, затраченные на выпуск X и Y соответственно.

12.1. Если предложение труда $L_X + L_Y = 100$, определите крайние точки кривой продуктовой трансформации и предельную норму продуктовой трансформации (MRPT_{XY}).

12.2. Пусть функция общественного благосостояния Дураков $U(X, Y) = \sqrt{XY}$. Определите оптимальные количества благ (X^* и Y^*) и общественную полезность.

12.3. Пусть «аукционист» назначил цены $P_X = 1$, $P_Y = 2$. Обеспечат ли они парето-эффективность? Рассчитайте ценность выпуска при этих ценах.

12.4 Предположим, что $X = 8$. Каковыми будут теперь общественная полезность и ценность выпуска. Объясните их отклонения от полученных в (6.3) результатов.

12.5. Страна Дураков угрожает войной стране Баранов. Новая функция общественного благосостояния Дураков $U(X, Y) = X^{0.75}Y^{0.25}$ отражает смещение предпочтения общества в пользу пушек. Определите новые оптимальные количества благ (X^* и Y^*), соотношение цен $\left(\frac{P_X^*}{P_Y^*}\right)$ и изменение занятости в результате подготовки к войне.

12.6 Страна Баранов заключила союз со страной Козлов и вынудила страну Дураков подписать долгосрочное мирное соглашение. Функция общественной полезности Дураков в результате становится $U(X, Y) = X^{0.25}Y^{0.75}$. Определите новые оптимальные количества благ (X^* и Y^*), соотношение цен $\left(\frac{P_X^*}{P_Y^*}\right)$ и изменение занятости по сравнению с периодом подготовки к войне.

ЗАДАЧА № 13

Пусть граница возможных полезностей между двумя индивидами (A и B) представлена как $U_A + 2U_B = 200$.

13.1. Постройте ее график.

13.2. «Творец политики» — приверженец философского учения Ницше и соответственно максимизирует так называемую ницшеанскую функцию общественного благосостояния, $W(U_A, U_B) = \max\{U_A, U_B\}$. Каковы будут оптимальные с его точки зрения U_A и U_B?

13.3. «Творец политики» — приверженец философского учения Роулса, и соответственно максимизирует роулсианскую функцию общественного благосостояния:

$$W(U_A, U_B) = \max\{U_A, U_B\}.$$

Каковы будут оптимальные с его точки зрения U_A и U_B?

13.4. «Творец политики» — приверженец философского учения Бентама и максимизирует простую утилитаристскую функцию общественного благосостояния:

$$W(U_A, U_B) = U_A + U_B.$$

Каковы будут оптимальные с его точки зрения U_A и U_B?

13.5. «Творец политики» согласен с концепцией общественного благосостояния Нэша и, соответственно, максимизирует функцию общественного благосостояния Бернулли–Нэша, представленную в виде функции Кобба–Дугласа, $W(U_A, U_B) = U_A^{0.5} \cdot U^{0.5}$.

13.6. Покажите на рисунке точки социальных оптимумов и изобразите соответствующие им кривые равного общественного благосостояния.

ЗАДАЧА № 14

«Творец политики» хочет распределить доход между двумя индивидами (A и B) так, чтобы максимизировать свое представление об общественном счастье, выраженном функцией общественного благосостояния $W = Y_A^{0.5} + Y_B^{0.5}$, где Y_A и Y_B — доход соответствующего индивида. Предположим, что всего он может распределить 100 денежных единиц (д. е.) так, что $Y_A + Y_B = 100$.

14.1. Какое количество д. е. получит каждый из индивидов?

14.2. Предположим, что для «творца политики» стало почему-либо «дороже» давать деньги индивиду A, чем индивиду B. В результате он может распределить 100 д. е. так, что $2Y_A + Y_B = 100$. Какое количество д. е. получит теперь каждый из индивидов?

ЗАДАЧА № 15

Пусть «творец политики» представляет себе общественное благосостояние как $W = \sum_{i=1}^{2} \frac{[U(y_i)]^{1-e}}{1-e}$, где $U(y_i) = y_i$ для $i = 1, 2$ есть индивидуальная полезность дохода. Ресурсное ограничение в этой экономике задано как $\sum_{i=1}^{2} y_i = 1$.

15.1. Каков наклон кривой равного общественного благосостояния?

15.2. При каком значении e наклон кривой равного общественного благосостояния равен –1? Какому критерию общественного благосостояния отвечает такая ситуация?

15.3. Какое распределение дохода выберет «творец политики»? Будет ли оно зависеть от e?

15.4. Предположим, что ресурсное ограничение меняется и становится равным $\alpha y_1 + y_2 = 1$, где $\alpha > 1$. Какое теперь распределение дохода выберет «творец политики»? (*Подсказка*: выразите оптимальные значения y_1 и y_2 через α и e.)? Каков экономический смысл параметров e и α?

ЗАДАЧА № 16

Адам и Ева изначально не имеют ничего, но «творец политики» должен разделить дар в 100 д. е. так, что Адам получает x (что есть также его полезность), а Ева получает y (что также есть ее полезность). Причем остающиеся после раздела неразделенные остатки $(100 - x - y)$ выбрасываются.

16.1. Что представляет собой набор всех достижимых аллокаций?

16.2. Что есть набор всех парето-эффективных аллокаций?

16.3. Аллокация z называется *свободной от зависти*, если $U_i(z_i) \geq U_i(z_j)\ \forall\ i,\ j$ таких, что $i \neq j$. Каков набор всех свободных от зависти аллокаций в этом случае?

16.4. Какие величины x и y должны быть выбраны «творцом политики» согласно утилитаристскому и максиминному критериям?

16.5. Предположим, что изначально Адам располагает 50 д. е., а у Евы их нет. Какие величины x и y теперь должен выбрать «творец политики» согласно утилитаристскому и максиминному критериям?

16.6. Предположим, что альтернативной затратой на передачу Адаму 1 д. е. является передача Еве 2 д. е. Какие величины x и y в этом случае должен выбрать «творец политики» согласно максиминному и утилитаристскому критериям?

ЗАДАЧА № 17

Даны следующие состояния экономики, которая состоит из двух индивидов (A и B) и двух благ (X и Y):

	X_A	X_B	$\sum X$	Y_A	Y_B	$\sum Y$
Состояние 0	10	10	20	10	10	20
Состояние 1	9	13	22	13	9	22
Состояние 2	9	9	18	13	13	26

Функции полезности индивидов A и B: $U_A = X_A Y_A$; $U_B = X_B Y_B$

17.1. Можно ли ранжировать эти состояния и как, если использовать критерии Парето и Калдора?

17.2. Как можно ранжировать эти состояния, если использовать простую (невзвешенную) утилитаристскую и роулсианскую функции общественного благосостояния?

ЗАДАЧА № 18

Пусть химзавод расположен выше по реке, а пивзавод — ниже. Производственная функция химзавода $Y = 2000L_Y^{0.5}$, где Y — его продукция, а L_Y — количество работников. У пивзавода такая же производственная функция, но на его выпуск может влиять загрязнение реки химзаводом:

$$X = 2000L_x^{0.5}(Y - Y_0)^{\alpha} \quad (\text{для } Y > Y_0);$$

$$X = 2000L_x^{0.5} \quad (\text{для } Y \le Y_0),$$

где Y_0 представляет естественную способность реки к абсорбции загрязнителей. Если $\alpha = 0$, то выпуск химзавода не влияет на производство пивзавода; если $\alpha < 0$, то превышение Y над Y_0 вызывает снижение выпуска пивзавода.

Оба завода работают на рынки с совершенной конкуренцией. $P_X = 1$ и $P_Y = 1$, а зарплата работников (w) у них составляет 50 д. е.

18.1. Каков будет наем работников и выпуск заводов при $\alpha = 0$?

18.2. Каков будет наем работников и выпуск заводов при $\alpha = -0.1$ и $Y_0 = 38\ 000$?

18.3. Рассчитайте налоговую ставку, которая снизит выпуск химзавода до $Y_0 = 38\,000$. Как он повлияет на цену продукции и наем работников химзаводом? Каковы будут наем и выпуск пивзавода?

ЗАДАЧА № 19

Некая фирма в совершенно конкурентной отрасли запатентовала новую технологию, благодаря которой она в состоянии снизить средние затраты и получать экономическую прибыль.

19.1. Если рыночная цена ее продукции (P) равна 20 д. е. за единицу, а $MC = 0.4Q$, то сколько всего единиц продукции (Q) выпустит фирма?

19.2. Предположим, что был обнаружен факт загрязнения окружающей среды этой технологией. Предельные общественные затраты (MSC) равны $0.5Q$. Если $P = 20$, каков общественно оптимальный выпуск фирмы? Какой должна быть ставка налога, чтобы обеспечить этот уровень выпуска?

19.3. Представьте полученные результаты графически.

ЗАДАЧА № 20

Предположим, что пасека расположена рядом с яблочным садом, принадлежащим другому владельцу. И пасека, и яблочный сад — фирмы в условиях совершенной конкуренции. Общие затраты на производство меда $TC_1 = Q_1^2/100$, а общие затраты на выращивание яблок $TC_2 = Q_2^2/100 - Q_1$. Цена меда (P_1) равна 2 д. е., а цена яблок (P_2) равна 3 д. е.

20.1. Каков будет равновесный выпуск меда и яблок, если каждая фирма действует независимо?

20.2. Предположим, что пасечник и садовод объединились. Каково будет максимизирующее прибыль объединенной фирмы производство меда и яблок?

20.3. Каково общественно эффективное производство меда? Если фирмы остаются разделенными, то какую субсидию требуется предоставить производителю меда, чтобы выйти на общественно эффективный уровень производства?

ЗАДАЧА № 21

Пусть владелец хозяйства № 1 разводит кроликов, которые нередко поедают капусту, выращиваемую владельцем соседнего хозяйства № 2.

Общие затраты на разведение кроликов:

$$TC_1 = 0.1Q_1^2 + 5Q_1 - 0.1Q_2^2.$$

Общие затраты на выращивание капусты:

$$TC_2 = 0.2Q_2^2 + 7Q_2 + 0.025Q_1^2.$$

Пусть цена единицы продукции, производимой в том и другом хозяйстве, одинакова и равна 15 д. е. На рынках кроликов и капусты — совершенная конкуренция. Каждое хозяйство максимизирует прибыль.

21.1. Каковые выпуск и максимальная прибыль от производства кроликов и капусты при раздельном ведении хозяйства у каждого из владельцев?

21.2. Предположим, что государство решило отрегулировать внешние эффекты через налоги и субсидии. Каковы оптимальный налог и субсидия на единицу продукции?

21.3. Предположим, что огородник и кроликовод организовали совместное хозяйство (объединили свои предприятия). Каковы будет оптимальный выпуск и прибыль нового хозяйства? На какую величину изменится прибыль по сравнению с раздельным хозяйствованием? Сравните ее с чистым выигрышем общества от использования неискажающего налогообложения и сделайте соответствующий вывод.

ЗАДАЧА № 22

На острове 2 озера и 20 рыбаков. Каждый рыбак может свободно выбирать озеро для рыбной ловли и на каждом из них добывает равный средний улов. На озере X общее количество выловленной рыбы задано как

$$F^X = 10L_X - 0.5L_X^2,$$

где L_X — количество рыбаков на озере X. Для озера Y улов определяется как $F^Y = 5L_Y$.

22.1. При такой организации общества на острове, каковым будет общее количество выловленной рыбы?

22.2. На острове власть захватил диктатор, который читал учебник экономики. Из него он заключил, что общий улов может быть увеличен путем ограничения рыбаков на озере X. Каково должно быть это ограничение, чтобы улов был максимален? Какова величина максимального улова?

22.3. Прочитав учебник экономики далее, диктатор понял, что такого же результата можно достичь с помощью продажи лицензий на рыбалку в озере X. Каковой должна быть цена лицензии (выраженной в количестве рыбы), обеспечивающая оптимальное распределение труда?

ЗАДАЧА № 23

Предположим, что в нефтяной промышленности Азиопии имеет место совершенная конкуренция и что все фирмы добывают нефть из единственного месторождения. Мировая цена равна 50 долл. за баррель, а затраты на эксплуатацию одной скважины равны 50 000 долл.

Общая добыча (Q) на этом месторождении зависит от количества скважин $Q = 5000N - N^2$.

23.1. Каковы будут равновесное количество скважин и равновесная добыча? Если расхождение между частными и общественными предельными затратами в нефтяной промышленности?

23.2. Предположим, что правительство Азиопии национализировало месторождение. Сколько скважин ему надо задействовать? Каков будет выход нефти с одной скважины? Какова будет общая добыча?

23.3. До правительства Азиопии дошло, что альтернативой национализации может быть лицензия на бурения скважин. Каковой должна быть плата за лицензию, если с ее помощью правительство намерено обеспечить оптимальное количество скважин?

ЗАДАЧА № 24

Фабрика сбрасывает сточные воды в озеро, которое используют для отдыха 1000 человек. Пусть X — объем сточных вод, а Y_i — количество часов в сутки, которые каждый индивид (i) использует для отдыха на озере. Если фирма сбрасывает X единиц сточных вод в озеро, то ее прибыль составляет $1200X - 100X^2$. Все индивиды имеют одинаковые функции полезности $U(Y_i, X) = 9Y - Y_i^2 - XY_i$, а также одинаковые доходы. Предположим также, что фабрика и индивиды принимают решения независимо друг от друга.

24.1. Сколько часов отдыха на озере выберет каждый из индивидов, если известно, что фабрика получает максимальную величину прибыли?

24.2. При данном количестве часов отдыха на озере, сколько готов заплатить каждый индивид за снижение загрязнения (X) на 1 единицу?

24.3. Хватит ли этим индивидам средств, чтобы заплатить фабрике за снижение сброса сточных вод на 1 единицу?

ЗАДАЧА № 25

Сто коттеджей расположены рядом друг с другом вокруг озера Зависти. Каждый коттедж имеет двух соседей: одного — слева, другого — справа. Имеется только одно благо, которое потребляется на лужайке перед каждым коттеджем (на виду двух соседей). В каждом коттедже рады потреблять это благо, но очень завидуют потреблению соседа слева. И, как это ни странно, никого не интересует потребление соседа справа. Функция полезности каждого потребителя $U(c, l) = c - l^2$, где c — собственное потребление, а l — потребление соседа слева. Предположим, что каждый потребляет 1 единицу блага.

25.1. Подсчитайте уровень полезности каждого потребителя.

25.2. Предположим, что каждый потребитель потребляет теперь только 3/4 единицы блага. Ухудшится или улучшится положение индивидов?

25.3. Каков наилучший для этих потребителей объем потребления при условии, что они потребляют одно и то же количество блага?

25.4. Какова численность наименьшей группы, которая должна кооперироваться к выгоде всех потребителей?

ЗАДАЧА № 26

Аэропорт расположен недалеко от земельного участка, который застраивает жилыми домами девелоперская фирма. Шум снижает ценность земли. Пусть X — число полетов в день, а Y — количество домов, которые строит девелопер. Общая прибыль аэропорта πа $= 48X - X2$, а девелопера $\pi d = 60Y - Y2 - XY$. Рассмотрим следующие ситуации.

26.1. «Свободные выбирать». Предположим, что аэропорт и девелопер принимают решения независимо. Найдите количество полетов и домов, прибыли фирм и их суммарную прибыль.

26.2. «Строгий запрет». Введен запретительный режим (девелопер вправе полностью запретить полеты). Какое количество домов построит девелопер и какую прибыль он получит, если полностью запретит полеты?

26.3. «Рай для юристов». Предположим, что принят закон, согласно которому аэропорт несет ответственность за весь причиненный девелоперу ущерб. Сколько домов построит девелопер и сколько полетов позволит себе аэропорт, если они максимизируют прибыли? Какова будет их суммарная прибыль?

26.4. «Конгломерат». Предположим, что некая третья фирма купила и аэропорт, и бизнес девелопера. Какое количество полетов и домов она выберет в целях максимизации прибыли? Какова будет прибыль фирмы?

26.5. «Сделка». Предположим, что аэропорт и девелопер остаются самостоятельными фирмами. Может ли девелопер увеличить свою чистую прибыль, полностью покрыв потери аэропорта от сокращения числа полетов на 1 единицу?

ЗАДАЧА № 27

Пусть химзавод (фирма 1) расположен выше по реке, а пивзавод (фирма 2) — ниже. Общие затраты химзавода $TC_1 = 10 + 15Q_1 + 0.25Q_1^2$. Цена единицы его продукции $P_1 = 40$. Химзавод загрязняет реку и тем самым повышает общие затраты пивзавода на очистку воды. Общие затраты пивзавода $TC_2 = 5 + 5Q_2 + 0.5Q_2^2 + Q_1^2$. Цена единицы его продукции $P_2 = 90$. На рынках продукции — совершенная конкуренция.

27.1. Режим свободного выбора. Каковы будут выпуски фирм и их прибыли (в том числе их суммарная прибыль)?

27.2. Введен запретительный правовой режим (фирма 2 может полностью запретить выпуск фирме 1). Каковой будет оптимальная плата («штраф») за единицу выпуска Q_1, которую установит фирма 2? Определите при этом выпуски фирм и их прибыли (в том числе их суммарную прибыль). Представьте решение графически.

27.3. Введен разрешительный правовой режим (фирма 1 может свободно выпускать продукцию). Каковой будет оптимальная плата («взятка») за единицу сокращения выпуска Q_1, которую будет уплачивать фирма 2? Определите при этом выпуски фирм и их прибыли (в том числе их суммарную прибыль). Представьте решение графически.

27.4. Представим, что фирмы объединились в один конгломерат. Каков будет выпуск им Q_1 и Q_2 и какой будет его прибыль?

27.5. Сведите полученные результаты в следующую таблицу

Выполняется ли теорема Коуза? В каких случаях достигается парето-эффективность?

№ п/п	Q_1	Q_2	π_1	π_2	π_Σ
1					
2					
3					
4					

ЗАДАЧА № 28

Пусть в коттеджном поселке в лесном массиве 2 группы владельцев участков (A и B). Их кривые спроса на обработку леса уничтожающим комаров составом $Q_A = 100 - P$ и $Q_B = 200 - P$. Предположим, что эта услуга может быть поставлена предприятиями, работающими на конкурентном рынке и имеющими одинаковые постоянные предельные затраты (MC = 140 д. е.).

28.1. Если уничтожение комаров — общественное благо, то каков его оптимальный объем?

28.2. Если эта услуга оказалась бы частным благом, то каков ее оптимальный объем?

28.3. Если правление поселка проголосовало бы за оптимальный объем этой услуги, то какую сумму налогов надо было бы собрать для полного покрытия ее стоимости? Каким образом распределились бы налоговые счета между группами, если бы они выписывались пропорционально получаемым ими выгодам от данного блага?

28.4. Представьте полученные решения графически.

ЗАДАЧА № 29

В комнате общежития проживают 2 студента. Они потребляют 2 блага: G — картины, X_i — пищу (измеренную в килокалориях). У них одинаковые функции полезности $U(G, X_i) = G^{1/3}Y^{2/3}$. Цена 1 картины — 100 д. е., цена 1 ккал. — 0.2 д. е. Каждый студент получает стипендию, равную 300 д. е., которую целиком расходует на эти два блага.

29.1. Университет сумел предоставить каждому из них отдельную комнату. Каков будет оптимальный уровень потребления G_i и X_i каждым из студентов? Определите индивидуальные полезности студентов и их сумму.

29.2. Бюджет университета сократился, и их снова поселили в одной комнате. При этом студент B сумел убедить студента A, что он абсолютно не интересуется живописью. Студент A все-таки покупает 1 картину. Определите индивидуальные полезности студентов и их сумму.

29.3. Покажите, что исход ситуации из предыдущего вопроса неэффективен и объясните почему.

29.4. Найдите эффективное количество G и X_i. Определите индивидуальные полезности студентов и их сумму при условии, что они поделили расходы на картины пополам. Является ли эта ситуация парето-улучшением по сравнению с исходом ситуации в вопросе 29.2? Что мешает ее достичь на основе добровольного соглашения?

29.5. Допустим, что студент A не смог убедить студента B платить за картины пополам. В результате студент B оплачивает только 25% стоимости картин, а студент A — 75%. Определите индивидуальные полезности студентов и их сумму. Является ли эта ситуация парето-улучшением по сравнению с исходом ситуации в вопросе 30.2? Может ли она быть достигнута на основе добровольного соглашения?

ЗАДАЧА № 30

В экономике производится одно частное благо (X) и одно общественное благо (G). Граница производственных возможностей $X^2 + 100G^2 = 5000$. В экономике 100 одинаковых индивидов с одинаковыми функциями полезности $U_i = X_i^{0.5}G^{0.5}$.

30.1. Если бы рынок для благ X и G был совершенно конкурентным, сколько бы этих благ было произведено? Какова была бы полезность каждого из индивидов?

30.2. Каков оптимальный уровень поставки благ X и G? Каковыми при этом будут полезности индивидов? Каким должен быть установлен налог на благо X по отношению к его рыночной цене, чтобы достичь таких результатов?

ЗАДАЧА № 31

В городе проживает 1000 жителей. Его жители потребляют одно общественное благо (G) и одно частное благо (X). У каждого жителя одинаковая функция полезности $U(X_i,G) = X_i - 100/G$. Цена единицы частного блага (P_X) = 1 д. е., а цена единицы общественного блага (P_G) = 10 д. е. Каждый проживающий в городе располагает денежным доходом, равным 1000 д. е.

31.1. Каким будет оптимальное количество единиц общественного блага?

31.2. Сколько единиц частного блага будет потреблять каждый житель, если расходы на общественное благо распределяются между ними поровну?

31.3. Каково бюджетное ограничение каждого жителя? Если он будет голосовать за общественное благо, максимизируя свою полезность при имеющемся у него бюджетном ограничении, то за какое количество G он проголосует? Будет ли количество общественного блага, запрошенного избирателями, больше, меньше или равно парето-эффективному?

ЗАДАЧА № 32

В таблице представлены ранги различных альтернатив (3 — высший ранг, 1 — низший). У трех партий — равное число мест в парламенте.

Голосующие	Альтернативы		
	мост	яхт-клуб	больница
Партия коррупционеров	3	2	1
Партия миллионеров	1	3	2
Партия пенсионеров	1	2	3

32.1. На основе данных таблицы установите, какая из альтернатив окажется в выигрыше при голосовании по правилу простого большинства:

а) мост;

б) яхт-клуб;

в) больница;

г) ни одна из названных, так как мы имеем здесь дело с «парадоксом голосования».

32.2. Партия пенсионеров по-прежнему всем альтернативам предпочитает строительство больницы. Однако строительство моста теперь предпочитает строительству яхт-клуба. Какая из альтернатив окажется в выигрыше при голосовании по правилу простого большинства:

а) мост;

б) яхт-клуб;

в) больница;

г) ни одна из названных, так как мы имеем здесь дело с «парадоксом голосования».

32.3. Если председатель парламента поставил на голосование из вопроса 32.2. альтернативы: 1) мост–яхт-клуб; 2) яхт-клуб–больница, строительство какого объекта выберут парламентарии?

32.4. Если председатель парламента поставил на голосование из вопроса 32.2 альтернативы: 1) больница–мост; 2) мост–яхт-клуб. Строительство какого объекта выберут парламентарии? С какой проблемой мы сталкиваемся в вопросах 32.3 и 32.4?

ЗАДАЧА № 33

В муниципальном поселковом совете — пять партий с равным числом мест. Эти партии адекватно выражают предпочтения пяти групп избирателей («С роду так», «Бедняк», «Середняк», «Здоровяк» и «Крупняк»). В таблице представлены их предельные выгоды (*MB*) от 1 фонаря уличного освещения в зависимости от количества фонарей.

Предельные выгоды (*MB*) от 1 фонаря

Партии	Предлагаемое количество фонарей				
	10	20	30	40	50
«С роду так»	100	80	60	40	20
«Бедняк»	120	100	80	60	40
«Середняк»	140	120	100	80	60
«Здоровяк»	160	140	120	100	80
«Крупняк»	180	160	140	120	100
ΣMB	700	600	500	400	300

Устав муниципального совета требует принятия решений простым большинством голосов.

33.1. Сколько фонарей будет установлено в муниципальном поселке, если расходы на установку 1 фонаря равны 500 д. е. и заранее определено, что расходы на них делятся между всеми группами поровну? Будет ли это количество фонарей парето-эффективным ?

33.2. Предположим, что «С роду так», «Бедняк» и «Середняк» провели решение, что они покрывают 30% расходов на освещение, которые делятся между ними в пропорции 4 : 5 : 6, соответственно. Сколько тогда фонарей будет установлено и будет ли их количество парето-эффективным?

33.3. Если бы в уставе муниципального совета было записано, что все решения принимаются только единогласно, какое количество фонарей было бы установлено в этом случае, если все расходы на их установку делятся поровну? Было бы оно парето-эффективным? Каковы были бы потери общества?

33.4. «Крупняк» захватил власть в поселке, разогнал муниципальный совет и стал диктатором. Какое количество фонарей он установил бы своим решением и как бы его решение изменило общественное благосостояние при равном распределении расходов на установку фонарей?

6.2 РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 1

Поскольку имеются лишь два блага, то достаточно определить только одну равновесную цену. Цену блага Y примем за счетную цену (*numeraire*), т. е. за 1. Пусть тогда p будет относительной ценой блага X. Следовательно, бюджетное ограничение для индивида 1: $pX_1 + Y_1 = 1$, а для индивида 2: $pX_2 + Y_2 = p$.

Затем индивид 1 выбирает X_1 так, чтобы максимизировать $X_1^{\alpha}(1 - X_1)^{1-\alpha}$. Из условия первого порядка получаем $X_1 = \dfrac{\alpha}{p}$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $X_2 = 1 - \alpha$.

Индивид 2 выбирает X_2, так чтобы максимизировать $X_2^{\beta}(p - pX_1)^{1-\beta}$. Из условия первого порядка получаем $X_2 = \beta$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $Y_2 = p(1 - \beta)$.

Из закона Вальраса известно, что в случае двух рынков равновесие на одном из них означает равновесие и на другом. Выберем для рассмотрения рынок блага X. Тогда $X_1 + X_2 = 1$, или $\dfrac{\alpha}{p} + \beta = 1$. Следовательно, равновесная цена $p^* = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$. Она дает нам равновесное размещение благ между индивидами: $X_1 = 1 - \beta$; $X_2 = 1 - \alpha$; $Y_1 = \beta$; $Y_2 = \alpha$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 2

Цену блага Y примем за счетную цену (*numeraire*), т. е. за 1. Пусть тогда p будет относительной ценой блага X. Следовательно, бюджетное ограничение для индивида A: $pX_A + Y_A = 2p$, а для индивида B: $pX_B + Y_B = 3$.

Индивид A выбирает X_A так, чтобы максимизировать $X_A^{1/2}(2p - pX_A)^{1/2}$. Из условия первого порядка получаем $X_A = 1$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $Y_A = p$.

Индивид B выбирает X_B, так, чтобы максимизировать $X_B^{1/3}(3 - pX_B)^{2/3}$. Из условия первого порядка получаем $X_B = \dfrac{1}{p}$, что через подстановку в бюджетное ограничение дает нам $Y_B = 2$.

Из закона Вальраса известно, что в случае двух рынков равновесие на одном из них означает равновесие и на другом. Выберем для рассмотрения рынок блага X. Тогда $X_A + X_B = 2$ или $1+\dfrac{1}{p}=2$. Следовательно, равновесная цена $p^* = 1$. Она дает нам равновесное размещение благ между индивидами: $X_A = Y_A = 1$ и $X_В = 1, Y_B = 2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 3

Цену блага X примем за счетную цену (*numeraire*), т. е. за 1. Затем найдем функции спроса индивидов A и B на благо Y как функции от его цены (p).

$$MRS_{XY}^{A}=\frac{Y_A}{X_A}=\frac{1}{p}\Rightarrow pY_A = X_A \Rightarrow Y_A = \frac{X_A}{p}.$$

Бюджетное ограничение для индивида A: $X_A + pY_A = m \Rightarrow$ $\Rightarrow X_A = m - pY_A$, где m — доход индивида A.

Отсюда функция спроса на Y индивида A:

$$Y_A=\frac{m-pY_A}{p}=\frac{m}{2p}.$$

Так как изначальное наделение для индивида A — 10 единиц блага Y, то можно определить, что $m = 10p$. Следовательно, индивид A предъявит спрос на 5 единиц блага Y $\left(\dfrac{10p}{2p}=5\right)$.

Поскольку блага X и Y для индивида B абсолютно взаимодополняемые, то для него всегда $X_B = Y_B$. Бюджетное ограничение для индивида B: $X_B + pY_B = m \Rightarrow X_B = m - pY_B$, где m — доход индивида B.

Отсюда функция спроса на Y индивида B: $Y_B=\dfrac{m}{1+p}$.

Так как изначальное наделение для индивида B — 20 единиц блага X и 5 единиц блага Y, то m индивида B: $20 + 5p$. Следовательно, индивид B предъявит спрос на благо Y, равный:

$$\frac{20+5p}{1+p}.$$

Отсюда следует, что суммарный со стороны индивидов A и B на благо Y:

$$5+\frac{20+5p}{1+p}.$$

Поскольку изначальное наделение благом Y индивида A составляло 5 единиц, а индивида B — 10 единиц, то легко заключить, что суммарное предложение блага Y равно 15 единиц. Отсюда:

$$5+\frac{20+5p}{1+p}=15.$$

Решение этого уравнения дает нам равновесную цену $p^* = 2$. При данной равновесной цене спрос индивида B на благо $Y = 10$. Следовательно, равновесное размещение благ между индивидами: $X_A = 10$, $Y_A = 5$; $X_B = 10$, $Y_B = 10$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 4

4.1. Определим спрос на Q_1 и Q_2 и выразим его через I. Для этого составляем функцию Лагранжа:

$$V = Q_1^{0.5}Q_2^{0.5} + \lambda(I - P_1Q_1 - P_2Q_2).$$

Максимизируем полезность, для чего находим условия первого порядка:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_1} = 0.5Q_1^{-0.5}Q_2^{0.5} - \lambda P_1 = 0; \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_2} = 0.5Q_1^{0.5}Q_2^{-0.5} - \lambda P_2 = 0; \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = I - P_1Q_1 - P_2Q_2 = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Умножаем обе части уравнения (i) на Q_1 и упрощаем выражение:

$$0.5Q_1^{0.5}Q_2^{0.5} - \lambda P_1Q_1 = 0;$$

$$0.5U - \lambda P_1Q_1 = 0;$$

$$Q_1 = \frac{\alpha U}{\lambda P_1}. \qquad \text{(i}'\text{)}$$

Аналогично умножаем обе части (ii) на Q_2 и упрощаем выражение. Получаем:

$$Q_2 = \frac{0.5U}{\lambda P_2}. \qquad \text{(ii}''\text{)}$$

Теперь подставляем (i′) и (ii″) в (iii):

$$I - \frac{0.5P_1U}{\lambda P_1} - \frac{0.5P_2U}{\lambda P_2} = 0;$$

$$\lambda I = 0.5U + 0.5U = U;$$

$$\lambda = \frac{U}{I}. \qquad \text{(iii}'\text{)}$$

И наконец, подставляем (iii′) назад в (i′) и (ii″), что дает нам функции спроса на товары, выраженные через I:

$$Q_1 = \frac{0.5U}{P_1} \cdot \frac{I}{U} = \frac{0.5I}{P_1} = \frac{0.5(P_L L_1 + P_K K_1)}{P_1};$$

$$Q_2 = \frac{0.5U}{P_2} \cdot \frac{I}{U} = \frac{0.5I}{P_2} = \frac{0.5(P_L L_2 + P_K K_2)}{P_2}.$$

Теперь определим функции предложения товаров. В случае Q_1 необходимо вывести функцию общих затрат из производственной функции. Для этого надо решить задачу на минимизацию этих затрат:

$$Z = P_K K_1 + P_L L + \lambda(Q_1 - K_1^{0.5} L_1^{0.5}).$$

Получаем следующие условия первого порядка:

$$\frac{\partial Z}{\partial K_1} = P_K - 0.5\lambda\ K_1^{-0.5} L_1^{0.5} = 0; \qquad \text{(v)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L_1} = P_L - 0.5\lambda\ K_1^{0.5} L_1^{-0.5} = 0; \qquad \text{(vi)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Q_1 - K_1^{0.5} L_1^{0.5} = 0. \qquad \text{(vii)}$$

Разделив (v) на (vi), получаем:

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{L_1}{K_1},$$

или

$$P_K K_1 = P_L L_{1,}$$

или

$$K_1 = \frac{P_L L_1}{P_K}.$$

Следовательно $C_1 = P_K K_1 + P_L L_1 = 2P_L L_1$.

Теперь осталось только избавиться от L_1 в данном выражении. Для этого подставляем полученное выше выражение для K_1 в $Q_1 = K_1^{0.5} L_1^{0.5}$:

$$Q_1 = \left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{0,5} L_1.$$

Откуда

$$L_1 = Q_1 \left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{-0.5}.$$

Подставляем выражение для L_1 в функцию общих затрат C_1:

$$C_1 = 2P_K^{0.5} P_L^{0.5} Q_1.$$

Отсюда функция предложения Q_1:

$$P_1 = MC_1 = 2P_K^{0.5} P_L^{0.5}.$$

При совершенной конкуренции $P_1 = MC_1$, а функция предельных издержек есть функция предложения Q_1.

Определим функцию предложения Q_2. Так как в производстве в секторе 2 отсутствует капитал, то ее нахождение значительно упрощается.

$$Z = P_L L_2 + \lambda\left(Q_2 - \frac{3}{2} L_2\right).$$

При совершенной конкуренции на рынке труда:

$$\frac{\partial Z}{\partial L_2} = P_L - \frac{3}{2}\lambda = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Q_2 - \frac{3}{2} L_2 = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{3}{2} L_2 = Q_2 \Rightarrow L_2 = \frac{2}{3} Q_2.$$

Теперь для нахождения функции предложения Q_2 надо составить функцию общих затрат C_2.

$$C_2 = P_L L_2 = P_L \frac{2}{3} Q_2.$$

Тогда функция предложения Q_2:

$$P_2 = MC = \frac{2}{3} P_L.$$

Осталось определить спрос на факторы. Для этого применяем лемму Шепарда (см. подсказку к вопросу 4.1):

$$L_1 = \frac{\partial C_1}{\partial P_L} = P_K^{0.5} P_L^{-0.5} Q_1;$$

$$K_1 = \frac{\partial C_1}{\partial P_K} = P_K^{-0.5} P_L^{0.5} Q_1;$$

$$L_2 = \frac{\partial C_2}{\partial P_L} = \frac{2}{3} Q_2.$$

Теперь внесем полученные результаты в таблицу VI.1.

Таблица VI.1

Двухсекторная конкурентная экономика

Рынки товаров		
Товар 1		
Спрос:	$Q_1 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{P_1}$	(1)
Предложение:	$P_1 = 2P_K^{0.5} P_L^{0.5}$	(2)
Товар 2		
Спрос:	$Q_2 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{P_2}$	(3)
Предложение:	$P_2 = \frac{2}{3} P_L$	(4)
Рынки факторов		
Рынок капитала		
Спрос	$K_D = K_1 = P_K^{-0.5} P_L^{0.5} Q_1$	(5)
Предложение	$K_S = 100$	(6)
Рынок труда		
Спрос	$L_D = L_1 + L_2 = P_K^{0.5} P_L^{-0.5} Q_1 + \frac{2}{3} Q_2$	(7)
Предложение	$L_S = 100$	(8)

4.2. Примем цену $P_K = 1$.

В секторе товара 1 подставим в уравнение (1) выражение для P_1 из уравнения (2):

$$Q_1 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{2P_K^{0.5} P_L^{0.5}}.$$

Затем приравняем спрос и предложение на рынке капитала — правые части уравнений (5) и (6), — а затем подставим полученное выше выражение для Q_1:

$$100 = P_K^{-0.5} P_L^{0.5} Q_1;$$

$$100 = \frac{0.5(P_L L + P_K K)}{2P_K}.$$

Отсюда получаем:

$$100 = \frac{0.5(100P_L + 100)}{2};$$

$$P_L = 3.$$

Из уравнений (2) и (1) находим:

$$P_1 = 2\sqrt{3} \approx 3.46;$$

$$Q_1 = \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57.74.$$

Теперь легко находим:

$$P_2 = 2; \qquad Q_2 = 100.$$

4.3. Убедимся, что найденные значения равновесных цен товаров и факторов обеспечивают нам равновесие и на рынке труда. Иначе говоря, проверим действие закона Вальраса.

Приравняем спрос на труд к предложению труда:

$$1^{0.5} \cdot (3^{-0.5}) \cdot 57.74 + \frac{2}{3}(100) = 33.333 + 66.667 = 100.$$

4.4. Из (4.3) следует, что в производстве Q_1 задействована $^1/_3$ общего количества располагаемого труда, в производстве Q_2 – $^2/_3$.

Доход труда $P_L L = 3 \cdot 100 = 300$.

Доход капитала $P_K K = 1 \cdot 100 = 100$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 5

Представим исходную комбинацию благ индивида 1 через избыточный спрос $X_1 = E_{x1} + 78$ и $Y_1 = E_{y1}$. Введем избыточный спрос в функцию полезности индивида и максимизируем ее при наличии бюджетного ограничения $(P_x E_{x1} + P_y E_{y1})$.

$$V_1 = (E_{x1} + 78) E_{y1} + 2(E_{x1} + 78) + 5E_{y1} - \lambda(P_x E_{x1} + P_y E_{y1}).$$

Приравняем нулю частные производные по V_1:

$$\partial V_1/\partial E_{x1} = E_{y1} + 2 - \lambda P_x = 0;$$
$$\partial V_1/\partial E_{y1} = E_{x1} + 83 - \lambda P_y = 0;$$
$$\partial V_1/\partial \lambda = -(P_x E_{x1} + P_y E_{y1}) = 0.$$

Решаем систему уравнений и получаем функции избыточного спроса для индивида 1:

$$\lambda = (E_{x1} + 83)/P_y = (E_{y1} + 2)/P_x;$$
$$- E_{x1}P_1 - E_{y1}P_2 = 0;$$
$$E_{y1}P_y + 2P_y = E_{x1}P_x + 83P_x;$$
$$E_{x1} = - E_{y1}P_y/P_x;$$
$$E_{y1} = (E_{x1}P_x + 83P_x - 2P_y)/P_y;$$
$$E_{x1} = -(E_{x1}P_x + 83P_x - 2P_y)/P_x;$$
$$E_{x1} = P_y/P_x - 41.5;$$
$$E_{y1} = 41.5\, P_x / P_y - 1.$$

Таким образом, избыточный спрос представлен как функции от соотношения цен. Увеличение P_x относительно P_y уменьшит E_{x1} и увеличит E_{y1}. Увеличение P_y относительно P_x увеличит E_{x1} и уменьшит E_{y1}.

Аналогичным образом поступаем с функцией полезности индивида 2.

В итоге решения новой системы уравнений получаем следующие функции избыточного спроса для индивида 2:

$$E_{x2} = 84\, P_y /P_x - 1;$$
$$E_{y2} = P_x /P_y - 84.$$

В соответствии с требованиями «очищения» рынка можно записать:

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} = 85\, P_y /P_x - 42.5 = 0;$$
$$E_y = E_{y1} + E_{y2} = 42.5\, P_x / P_y - 85 = 0.$$

При решении первого из уравнений имеем $P_y/P_x = 0.5$, а при решении второго — $P_x /P_y = 2$, что, как видно, одно и то же.

Подставляем соотношения цен в индивидуальные функции избыточного спроса и получаем:

$$E_{x1} = -41; \quad E_{x2} = 82; \quad E_{y1} = 41; \quad E_{y2} = -82.$$

Индивид 1 отдает 41 единицу блага X индивиду 2 в обмен на 82 единицы блага Y.

Следовательно, парето-эффективная комбинация благ:

$$X_1 = 37; \quad X_2 = 41; \quad Y_1 = 82; \quad Y_2 = 82.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 6

6.1. Фиксируем полезность индивида 1 и составляем соответствующее уравнение Лагранжа:
$L = U_2(X_2,Y_2) + \lambda[U_1(X_1,Y_1) - \bar{U}_2] = X_2^{2/3} Y_2^{1/3} + \lambda[X_1^{1/3} Y_1^{2/3} - \bar{U}_1]$.

Поскольку то, что получает индивид 2, не получает индивид 1, и наоборот, то, следовательно

$$X_2 = 1000 - X_1;$$
$$Y_2 = 1000 - Y_1.$$

В результате уравнение Лагранжа становится функцией только двух переменных — X_1 и Y_1:

$L = (1000 - X_1)^{2/3}(1000 - Y_1)^{1/3} + \lambda[X_1^{1/3} Y_1^{2/3} - \bar{U}_1]$.

Условия максимума первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1000 - Y_1}{1000 - X_1}\right)^{2/3} + \frac{2\lambda}{3}\left(\frac{Y_1}{X_1}\right)^{1/3} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1000 - X_1}{1000 - Y_1}\right)^{1/3} + \frac{\lambda}{3}\left(\frac{X_1}{Y_1}\right)^{2/3} = 0.$$

Перенося члены с λ в правую часть и производя деление верхних уравнений на нижние, получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1000 - Y_1}{1000 - X_1}\right) = 2\left(\frac{Y_1}{X_1}\right),$$

или

$$\frac{X_1}{1000 - X_1} = \frac{4Y_1}{1000 - Y_1},$$

что представляет условие эффективности в обмене (равенство MRS^1_{XY} и MRS^2_{XY}).

Теперь можно заполнить таблицу и по значениям X_1 и Y_1 (или X_2 и Y_2) построить контрактную кривую (см. рис. 6.1).

6.2. В результате указанного размещения благ индивиды 1 и 2 получают по 500 единиц полезности каждый (точка S в коробке Эджуорта). На контрактной кривой можно найти такую точку (точка O в коробке Эджуорта), где, например, $X_1 = 660$, $Y_1 = 327$; $X_2 = 340$, $Y_2 = 673$. В этом случае $U_1 = 522$ и $U_2 = 536$.

	X_1	Y_1	$U_1 = X_1^{2/3}\ Y_1^{1/3}$	X_2	Y_2	$U_2 = X_2^{1/3}\ Y_2^{2/3}$
A	0	0	0	1000	1000	1000
B	100	27	65	900	973	948
C	200	59	133	800	941	891
D	300	97	206	700	903	830
E	400	143	284	600	857	761
F	500	200	368	500	800	684
G	600	273	461	400	727	596
H	700	368	565	300	632	493
I	800	500	684	200	500	368
J	900	692	825	100	308	212
K	1000	1000	1000	0	0	0

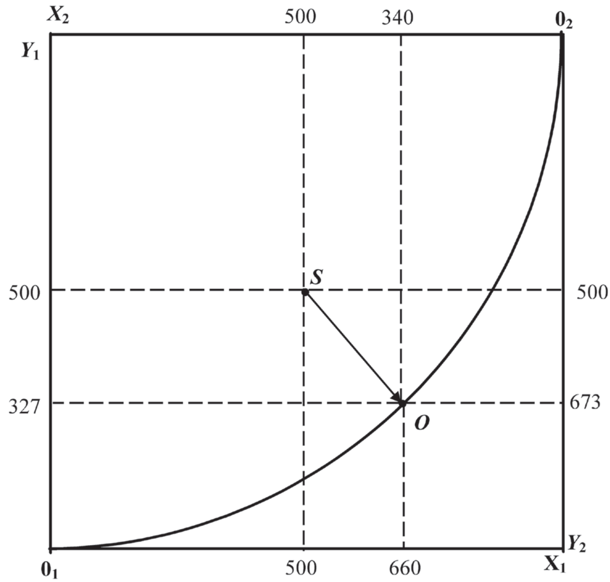


Рис. 6.1. Коробка Эджуорта для «экономики обмена» и контрактная кривая

6.3. $\mathrm{MRS}^1_{XY} = \dfrac{\partial U_1 / \partial X_1}{\partial U_1 / \partial Y_1} = \dfrac{2Y_1}{X_1}$ и $\mathrm{MRS}^2_{XY} = \dfrac{\partial U_2 / \partial X_2}{\partial U_2 / \partial Y_2} = \dfrac{Y_2}{2X_2}$.

Индивид 1, таким образом, готов отдавать Y за X, а индивид 2 — наоборот. На рис. 6.1 видно, что при перемещении из точки S в точку A приобретает больше X и меньше Y, а индивид 2 — наоборот.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 7

7.1. Строим квадрат со сторонами 21×21 (рис. 7.1).

7.2. Из условий задачи находим $U_1^0 = 3600$ и $U_2^0 = 16\,200$. Легко представить кривые безразличия индивидов 1 и 2, например, через X_1 и X_2.

$$Y_1 = 3600/X_1; \qquad Y_2 = 16\,200/X_2$$

Задавая различные значения X_1 и X_2 в интервале от 0 до 210, можно получить соответствующие им значения Y_1 и Y_2. Например, $X_1 = 40$, $Y_1 = 90$; $X_1 = 50$, $Y_1 = 72$; $X_1 = 60$, $Y_1 = 60$; $X_1 = 80$, $Y_1 = 45$; $X_1 = 90$, $Y_1 = 40$; $X_1 = 100$, $Y_1 = 36$. По данным точкам можно построить кривую безразличия для индивида 1 (U_1^0). Аналогичным образом строится кривая безразличия для индивида 2 (U_2^0).

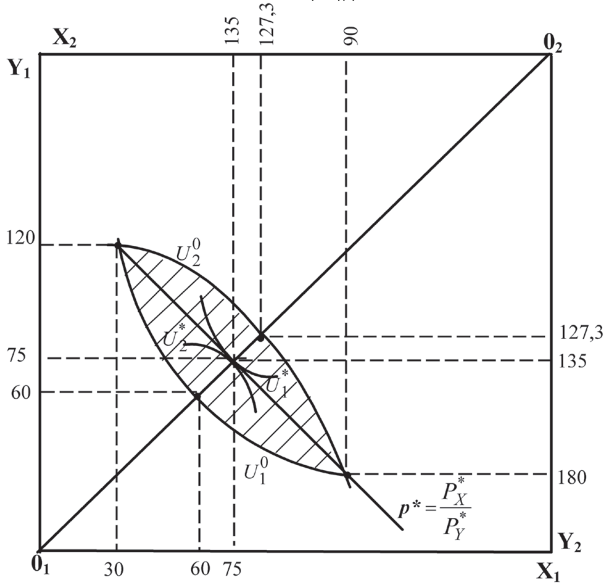


Рис. 7.1. Коробка Эджуорта: общее равновесие и парето-эффективность

7.3. Область внутри кривых безразличия индивидов, включая сами кривые от одной точки их пересечения до другой (см. заштрихованную область на рис. 7.1).

7.4. Для нахождения уравнения контрактной кривой надо помнить, что в любой точке этой кривой имеет место эффективность в обмене, т. е. $\mathrm{MRS}^{1}_{XY} = \mathrm{MRS}^{2}_{XY}$.

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_1}{X_1};$$

$$\mathrm{MRS}^2_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_2}{X_2}.$$

Далее можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{Y_2}{X_2}; \\ X_1 + X_2 = 210; \\ X_1 + X_2 = 210 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$Y_1 = \frac{X_1 Y_2}{X_2} \Rightarrow Y_1 = \frac{X_1(210 - Y_1)}{(210 - X_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 210\ Y_1 - X_1 Y_1 = 210\ X_1 - X_1 Y_1 \Rightarrow X_1 = Y_1$$

Получили уравнение контрактной кривой (на рис. 6.1 – диагональ квадрата, представляющего коробку Эджуорта).

Аналогичный результат получился бы, если бы записали выражение не для Y_1, а для Y_2. Контрактная кривая также представляла бы диагональ квадрата (уравнение $X_2 = Y_2$).

7.5. Найдем координаты точек, в которых кривые безразличия индивидов 1 и 2, проходящие через точку изначального размещения благ, пересекают контрактную кривую.

Для этого составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = Y_1; \\ Y_1 = \dfrac{3600}{X_1}. \end{cases}$$

Получаем $Y_1^2 = 3600 \Rightarrow Y_1 = 60, \quad \mathrm{X}_1 = 60.$

Аналогично:

$$\begin{cases} X_2 = Y_2; \\ Y_2 = \dfrac{16\ 200}{X_2}. \end{cases}$$

Отсюда $Y_2 = 127.3$, $X_2 = 127.3$.

7.6. Индивид 1 максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_1(X_1,Y_1) + \lambda(I_1 - P_X\ X_1 - P_Y\ Y_1),$$

где I_1 — бюджет индивида 1. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 1 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_1 = \mathbf{1 \cdot 30} + 2 \cdot 120 = 270$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} - \lambda = 0 \Rightarrow Y_1 = \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_1 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 270 - X_1 - 2Y_1 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 270 \Rightarrow \lambda = 67.5.$$

Отсюда: $Y_1 = 67.5$; $X_1 = 135$.

Индивид 2 также максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_2(X_2,Y_2) + \lambda(I_2 - P_X\ X_2 - P_Y Y_2),$$

где I_2 — бюджет индивида 2. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 2 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_2 = 1 \cdot 180 + 2 \cdot 90 = 360$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2} - \lambda = 0 \Rightarrow Y_2 = \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_2 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 360 - X_2 - 2Y_2 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 360 \Rightarrow \lambda = 90.$$

Отсюда: $Y_2 = 90$; $X_2 = 180$.

В итоге получаем $X_1 + X_2 = 257.5$ и $Y_1 + Y_2 = 157.5$. Таким образом, благо X окажется в дефиците, а благо Y — в избытке.

Заказанная комбинация благ не будет эффективной, так как не лежит на контрактной кривой. Уравнение контрактной кривой $X_1 = Y_1$ ($X_2 = Y_2$) предполагает, что количество единиц блага X в распоряжении любого из индивидов должно быть равно находящемуся в его же распоряжении количеству единиц блага Y.

7.7. Проводим аналогичные расчеты при $P_X = 2$.

Индивид 1 максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_1(X_1,Y_1) + \lambda(I_1 - P_X X_1 - P_Y Y_1),$$

где I_1 — бюджет индивида 1. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 1 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_1 = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 120 = 300$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} - 2\lambda = 0 \Rightarrow Y_1 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_1 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 300 - 2X_1 - 2Y_1 = 0 \Rightarrow 300 = 4X_1.$$

Отсюда: $X_1 = 75$, $Y_1 = 75$.

Индивид 2 также максимизирует свою полезность при наличии бюджетного ограничения. Используем метод Лагранжа.

$$L = U_2(X_2,Y_2) + \lambda(I_2 - P_X X_2 - P_Y Y_2),$$

где I_2 — бюджет индивида 2. Он находится умножением цен на количество соответствующих благ у индивида 2 при изначальном их размещении. Таким образом: $I_2 = 2 \cdot 180 + 2 \cdot 90 = 540$.

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow Y_2 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow X_2 = 2\lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 540 - 2X_2 - 2Y_2 = 0 \Rightarrow 4X_2 = 540.$$

Отсюда: $X_2 = 135$, $Y_2 = 135$.

В итоге получаем $X_1 + X_2 = 210$ и $Y_1 + Y_2 = 210$. Таким образом, нет ни избытка, ни дефицита. Рынок «расчищается», и обеспечивается общее экономическое равновесие. Одновременно заказанные комбинации благ находятся на контрактной кривой, следовательно, достигается парето-эффективная комбинация благ.

В последнем легко убедиться, обратившись к условию эффективности в обмене:

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{Y_1}{X_1} = \mathrm{MRS}^2_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{Y_2}{X_2} = 1.$$

Это равенство MRS^1_{XY} и MRS^2_{XY} на рис. 7.1 представлено в точке касания кривых безразличия U_1^* и U_2^*.

При ценах, заданных «секретарем рынка» в п. 7.7:

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{P_X^*}{P_Y^*} = 1 = p^*,$$

где $\frac{P_X^*}{P_Y^*} = p^*$ — относительная равновесная цена. На рис. 7.1 луч, представляющий эту цену, проходит через точку касания кривых безразличия U_1^* и U_2^*.

7.8. $U_1^* = 75 \cdot 75 = 5625$; $U_2^* = 135 \cdot 135 = 18\,225$. При изначальном размещении благ $U_1^0 = 3600$, $U_2^0 = 16\,200$.

Отсюда: $\Delta U_1 = 5625 - 3600 = 2025$; $\Delta U_2 = 18\,225 - 16\,200 = 2025$. Очевидно, что это изменение является парето-улучшением (оба индивида повысили свое благосостояние).

Суммарная полезность индивидов в п. 7.7 составляет $U_1^* + U_2^* = 23\,850$. Суммарная полезность в исходном состоянии $U_1^0 + U_2^0 = 19\,800$. Следовательно, общий прирост полезности $\Delta U = 23\,850 - 19\,800 = 4050$.

Полезность, полученная в п. 7.7, отвечает парето-эффективному состоянию «экономики обмена». Это означит, что ее нельзя повысить за счет изменения размещения благ.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 8

8.1. Находим, что

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_1}{X_1};$$

$$\mathrm{MRS}^2_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\partial U_X / \partial X}{\partial U_Y / \partial Y} = \frac{Y_2}{X_2}.$$

Условие парето-эффективности:

$$\mathrm{MRS}^1_{XY} = \mathrm{MRS}^2_{XY} \Rightarrow \frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2} \Rightarrow \frac{Y_1}{X_1} = \frac{10 - Y_1}{10 - X_1}.$$

После перемножения получаем:

$$10Y_1 - Y_1X_1 = 10X_1 - X_1Y_1 \Rightarrow X_1 = Y_1.$$

Отсюда: $U_1 = X_1^{0.5}X_1^{0.5} = X_1 \Rightarrow U_1 = 10 - X_2$.

Аналогично можно показать, что $U_2 = X_2$. В результате получаем уравнение границы возможных полезностей:

$$U_1 = 10 - U_2$$

Эта граница представлена на рис. 8.1

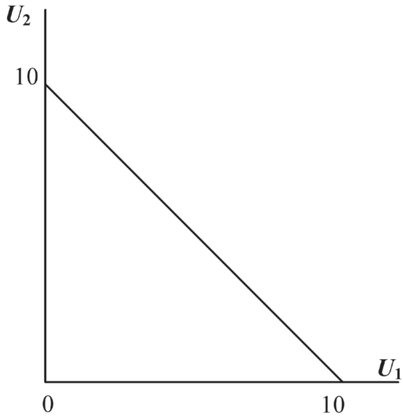


Рис. 8.1. Граница возможных полезностей

8.2. $U_1^0 = 2^{0.5} \cdot 2^{0.5} = 2$; $U_2^0 = 8^{0.5} \cdot 8^{0.5} = 8$.

Легко догадаться, что уравнение контрактной кривой есть $X_1 = Y_1$, или, что то же самое, $X_2 = Y_2$.

См. рис. 8.2. Диагональ квадрата (коробки Эджуорта) 0^10^2 есть контрактная кривая. Точка A — точка изначального размещения благ.

8.3. $\mathrm{MRS}_{XY}^1 = \mathrm{MRS}_{XY}^2 = \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{Y_2}{X_2} = \dfrac{P_X}{P_Y} = p^* = 1.$

Следовательно, относительная равновесная цена (p^*) есть любой луч, пересекающий контрактную кривую под прямым углом. На рис. 8.2 эти лучи проведены через точку A и точку желаемого «секретарем рынка» размещения (точку B), где индивид 1 имеет $X_1 = 6$, $Y_1 = 6$; индивид 2, в свою очередь, обладает $X_2 = 4$, $Y_2 = 4$. Исходя из заданных нам функций полезностей индивидов можно заметить, что в точке B $U_1 = 6$, $U_2 = 4$ (что и нужно «секретарю рынка»).

Используя рис. 8.2, нетрудно заметить, что для достижения нового распределения полезностей между индивидами «секретарю рынка» надо передать индивиду 2 от индивида 1 либо 8 единиц Y_1, либо 8 единиц X_1. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно из точки A провести прямые горизонтальную и вертикальную линии до соединения с лучом, представляющим относительную равновесную цену и пересекающему под прямым углом контрактную кривую в точке B. После указанного перераспределения относительная равновесная цена (p^*) обеспечит автоматический переход в точку B — к желаемому «секретарем рынка» распределению полезностей.

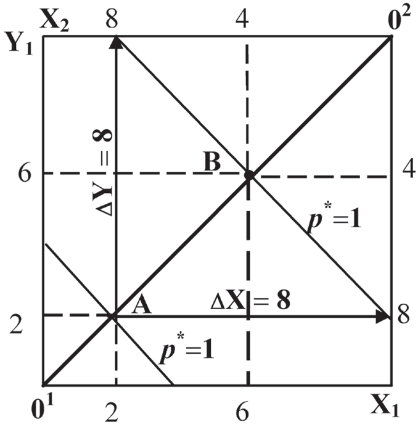


Рис. 8.2. Коробка Эджуорта и перераспределение

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 9

9.1. См. рис. 9.1.

9.2. а) Точка I не является точкой оптимума, так как она не является точкой касания изоквант. Напротив, изокванты X_1 и Y_3 пересекаются в точке I. В точках касания изоквант соблюдается условие парето-эффективности для производства $(\mathrm{MRTS}_{LK}^{X} = \mathrm{MRTS}_{LK}^{Y})$.

б) $22.5 + 25 = 47.5$. Отсюда $\Delta K = 70 - 47.5 = 22.5$

$50L_Y$ отвечает $10L_X$. Следовательно, $\Delta L = 55 - 10 = 45$.

$$\mathrm{MRTS}^X_{LK} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{22.5}{45} = 0.5.$$

9.3. Соединяем указанные точки кривой (см. рис. 9.1).

9.4. а) См. рис. 9.2.

б) См. рис. 9.2. Координаты точки I ($X_1 = 40$, $Y_1 = 30$). Нахождение в точке I означает неэффективность, поскольку она находится слева от кривой продуктовой трансформации (границы производственных возможностей). При имеющихся в данной экономике ресурсах можно достичь более высокого объема выпуска.

в) См. рис. 9.2. Нет, не будет. Переход из точки I в точку F сокращает выпуск блага X. Поэтому, несмотря на то что он переводит экономику из неэффективного состояния в эффективное, парето-улучшения не происходит.

9.5. $\mathrm{MRS}_{XY} = \mathrm{MRPT}_{XY} = \dfrac{\Delta X}{\Delta Y} = \dfrac{100}{125} = 0.8.$

9.6. Нет, не обеспечат: $\mathrm{MRPT}_{XY} = \dfrac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \dfrac{P_X}{4} = \dfrac{4}{5}$.

Отсюда $P_X = 3.2$.

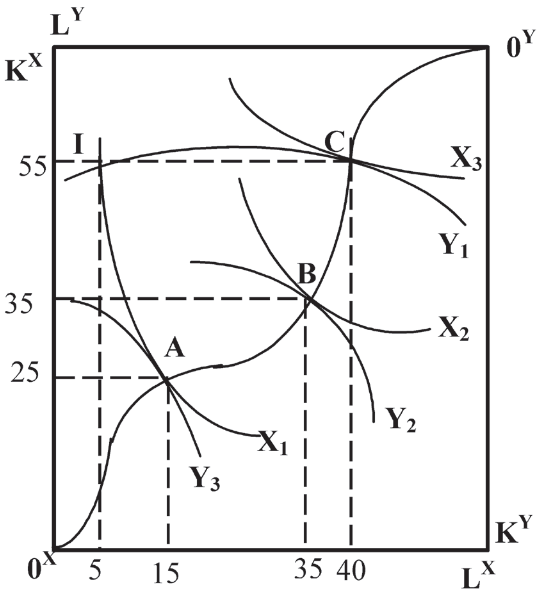


Рис. 9.1. Коробка Эджуорта для производства

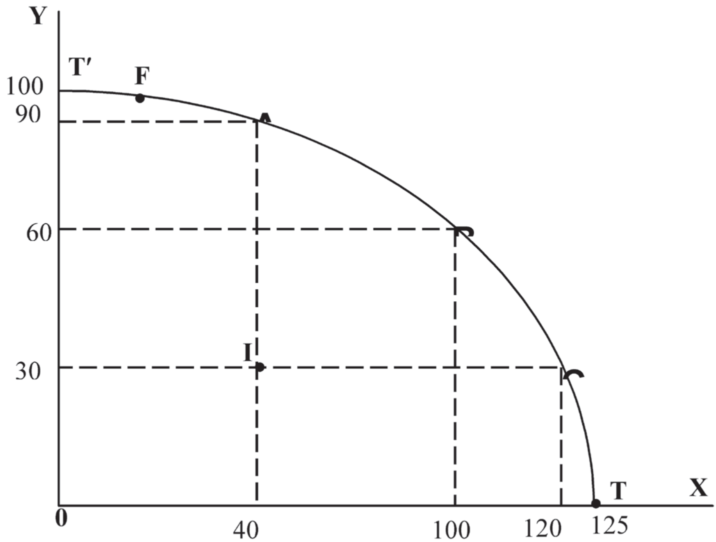


Рис. 9.2. Кривая продуктовой трансформации

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 10

10.1. $$\mathrm{MRTS}_{LK}^{X} = \frac{K_X}{L_X}; \quad \mathrm{MRTS}_{LK}^{Y} = \frac{K_Y}{L_Y};$$

$$\frac{K_X}{L_X} = \frac{2K_Y}{L_Y};$$

$$\frac{K_X}{L_X} = \frac{2(100 - K_X)}{200 - L_X} \Rightarrow 200K_X = 200L_X - L_X K_X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_X(200 - K_X) = 200K_X.$$

Отсюда

$$L_X = \frac{200K_X}{200 - K_X}.$$

Определяем значения L_X при $K_X = 0,\ 25,\ 50,\ 75$ и 100

По имеющимся в условии задачи данным строим коробку Эджуорта для производства, проводим в ней диагональ и по данным таблицы строим контрактную кривую для производства.

L_X	K_X	L_Y	K_Y
0	0	200	100
28.6	25	171.4	75
66.7	50	133.3	50
120	75	80	25
200	100	0	0

10.2. Производство блага X капиталоинтенсивно, так как $\dfrac{K_X}{L_X} > \dfrac{K_T}{L_T}$, где K_T и L_T — общие количества капитала и труда. В коробке Эджуорта этот факт отражен расположением вогнутой контрактной кривой для производства выше диагонали.

Капиталоинтенсивность производства блага X вдвое выше капиталоинтенсивности производства блага Y. В этом легко убедиться, рассчитав соответствующие значения L_Y и K_Y (см. таблицу) и сопоставив $\dfrac{K_X}{L_X}$ и $\dfrac{K_Y}{L_Y}$ в любых точках (кроме крайних). Например, $\dfrac{75}{120} : \dfrac{25}{80} = 2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 11

11.1. Преобразуем уравнение кривой продуктовой трансформации:

$$9Y^2 = 100 - X^2;$$

$$Y^2 = \frac{100 - X^2}{9};$$

$$Y = \frac{1}{3}(100 - X^2)^{0.5}.$$

Теперь находим предельную норму продуктовой трансформации:

$$\mathrm{MRPT}_{XY} = \frac{dY}{dX} = \frac{1}{6}(100 - X^2)^{-0.5}(-2X) = -\frac{X}{3}(100 - X^2)^{-0.5}.$$

11.2. Для вогнутой по отношению к началу координат кривой продуктовой трансформации должны соблюдаться условия: $\dfrac{dY}{dX} < 0$; $\dfrac{d^2Y}{dX^2} > 0$.

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{6}(100 - X^2)^{-1.5} > 0,$$

так как по условиям задачи $X < 10$ во всех точках кривой, кроме точки ее соединения с осью $0Y$.

Кривая продуктовой трансформации вогнута, если а) имеет место убывающая отдача от масштаба в производстве обоих благ; б) если нарушается допущение об однородности факторов (например, один из факторов производства имеет убывающую производительность в производстве какого-либо блага); в) при допущении об однородности факторов и постоянной отдаче от масштаба выпуск благ требует использования факторов в различных пропорциях (например, производство одного блага — трудоинтенсивное, другого — капиталоинтенсивное, скажем, $\frac{K_X}{L_X} < \frac{K_Y}{L_Y}$).

11.3. $$-\frac{X}{3}(100 - X^2)^{-0.5} = -\frac{4}{7};$$

$$\frac{X^2}{9}(100 - X^2)^{-1} = \frac{16}{49} \Rightarrow (100 - X^2)^{-1} = \frac{144}{49X^2} \Rightarrow$$

$$100 - X^2 = \frac{49X^2}{144} \Rightarrow 193X^2 = 14\ 400 \Rightarrow X^* = 8.64;$$

$$Y^* = \frac{1}{3}(100 - X^2)^{0.5} = \frac{1}{3}(100 - 8.64^2)^{0.5} = 1.68.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 12

12.1 Выражаем L_X и L_Y через X и Y соответственно и получаем уравнение для кривой продуктовой трансформации:

$$X^2 + 4Y^2 = 100.$$

Крайние точки данной кривой: $X = 10$, $Y = 0$; $X = 0$, $Y = 5$. Затем находим общий дифференциал данного уравнения:

$$2XdX + 8YdY = 0,$$

или

$$-\frac{dY}{dX} = MRPT_{XY} = \frac{X}{4Y}.$$

12.2 Условия оптимума (парето-эффективности) предполагают, что $\mathrm{MRPT}_{XY} = \mathrm{MRS}_{XY}$.

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{Y}{X}.$$

Следовательно,

$$\frac{X}{4Y} = \frac{Y}{X};$$

$$X^2 = 4Y^2;$$

$$X^2 + 4Y^2 = 2X^2 = 10.$$

В результате получаем:

$$X^* = \sqrt{50} = 7.07; \qquad Y^* = \sqrt{12.5} = 3.535.$$

Общественная полезность:

$$U = \sqrt{7.07 \cdot 3.535} \approx 5.66.$$

12.3. Поскольку:

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{Y^*}{X^*} = \frac{P_X^*}{P_Y^*} = MRPT_{XY},$$

следовательно:

$$\frac{P_X^*}{P_Y^*} = \frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{50}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, предложенные «аукционистом» цены обеспечат парето-эффективность.

Ценность выпуска составит

$$P_X^* X^* + P_Y^* Y = 1 \cdot 7.07 + 2 \cdot 3.535 = 14.14.$$

12.4. В таком случае из уравнения $X^2 + 4Y^2 = 100$ получаем, что $Y^2 = 9 \Rightarrow Y = 3$. При таких значениях:

$$U = \sqrt{8 \cdot 3} \approx 4.9;$$

$$P_X^* X^* + P_Y^* Y = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 14.0.$$

Легко заметить, что в результате отклонения от парето-эффективной комбинации благ общественная полезность и ценность выпуска снизились.

12.5. От подготовки к войне ресурсов не прибавляется, следовательно, граница производственных возможностей и MRPT_{XY} остаются прежними. С ростом «оборонного сознания» меняется только MRS_{XY}.

$$\mathrm{MRS}_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{3Y}{X}.$$

Отсюда:

$$\frac{X}{4Y} = \frac{3Y}{X}; \qquad 12Y^2 = X^2.$$

Следовательно:

$$12Y^2 + 4Y^2 = 100;$$

$$Y^* = 2.5; \qquad X^* = 8.66.$$

Соотношение цен:

$$\frac{P_X^*}{P_Y^*} = \frac{X}{4Y} = 0.866.$$

Оно говорит нам о росте относительной цены пушки (если раньше 1 пушка стоила 0.5 одной единицы масла, то теперь приблизительно $^7/_8$ той же единицы масла).

Определим занятость до возникновения напряженности между страной Дураков и страной Баранов. Из условий задачи находим, что $L_X = X^2$; $L_Y = 0.5Y^2$. Из полученных в п. 6.2 значений X^*, Y^* получаем $L_X \approx 50$, $L_Y \approx 6.25$. В условиях подготовки к войне $L_X^W \approx 75$, $L_Y^W \approx 6.25$. Таким образом, изменение занятости в производстве пушек $\Delta L_X = 75 - 50 = 25$, а изменение занятости в производстве масла $\Delta L_Y = 6.25 - 12.5 = -6.25$.

12.6. Теперь $\mathrm{MRS}_{XY} = \dfrac{Y}{3X}$. Отсюда:

$$\frac{X}{4Y} = \frac{Y}{3X}; \qquad 4\mathrm{Y}^2 = 3X^2.$$

Следовательно:

$$X^2 + 3X^2 = 100;$$

$$X^* = 5; \qquad Y^* \approx 4.33;$$

$$\frac{P_X^*}{P_Y^*} = \frac{X}{4Y} \approx 0.289.$$

Очевидно, что цена пушки относительно единицы масла ниже, чем в предыдущих ситуациях ($0.289 < 0.5 < 0.866$).

В условиях долгосрочного мира занятость распределяется следующим образом: $L_X^P = 25$, $L_Y^P \approx 18.75$. Таким образом, изменение занятости в производстве пушек $\Delta L_X = 25 - 75 = -50$, а изменение занятости в производстве масла $\Delta L_Y = 18.75 - 6.25 = 12.5$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 13

13.1. См. ответ на вопрос 13.6.

13.2. $U_A = 200$, $U_B = 0$.

13.3. Оптимальные значения U_A и U_B находятся в точке пересечения луча, выходящего под углом 45° из начала координат (его уравнение $U_A = U_B$), с границей возможных полезностей ($U_A + 2U_B = 200$). Совместное решение этих двух уравнений дает нам $U_A = 66^2/_3$, $U_B = 66^2/_3$.

13.4. Заметим, что $U_A + U_B$ достигает максимума в пределах области достижимых полезностей тогда, когда она соединяется с границей возможных полезностей в точке ницшеанского оптимума. Следовательно, $U_A = 200$, $U_B = 0$.

13.5. «Творец политики» находит следующее решение:

$$L = U_A^{0.5} \cdot U_B^{0.5} + \lambda(200 - U_A - 2U_B);$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_A} = 0.5\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0.5\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}};$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_B} = 0.5\frac{U_A^{0.5}}{U_B^{0.5}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0.5\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 200 - U_A - 2U_B = 0 \Rightarrow U_A = 200 - 2U_B.$$

Отсюда:

$$\frac{U_B^{0.5}}{U_A^{0.5}} = 0.5\frac{U_A^{0.5}}{U_B^{0.5}};$$

$$\frac{U_B^{0.5}}{(200 - 2U_B)^{0.5}} = 0.5\frac{(200 - U_B)^{0.5}}{U_B^{0.5}};$$

$2U_B = 200 - 2U_B \Rightarrow 4U_B = 200 \Rightarrow U_B = 50$, $U_A = 100$.

13.6. См. ниже рис. 13.1.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 14

14.1. «Творец политики» находит следующее решение

$$L = Y_A^{0.5} + Y_B^{0.5} + \lambda(100 - Y_A - Y_B);$$

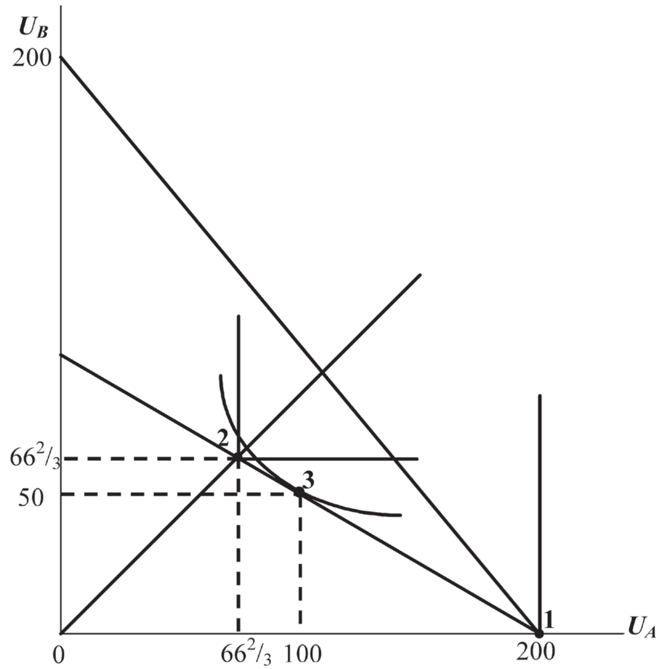


Рис. 13.1. Социальные оптимумы:
(·) 1 — ницшеанский и утилитаристский оптимумы,
(·) 2 — роулсианский оптимум, (·) 3 — оптимум Бернулли–Нэша.

$$\frac{\partial L}{\partial Y_A} = \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} = \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_B} = \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} = \lambda.$$

Отсюда $Y_A = Y_B = 50$.

14.2. Теперь «творец политики» находит следующее решение

$$L = Y_A^{0.5} + Y_B^{0.5} + \lambda(100 - 2Y_A - Y_B);$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_A} = \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_A^{0.5}} = 2\lambda \Rightarrow \frac{1}{4Y_A} = 4\lambda^2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_B} = \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{Y_B^{0.5}} = \lambda \Rightarrow \frac{1}{4Y_B} = \lambda^2.$$

Отсюда $Y_B = 4Y_A \Rightarrow Y_B = 80,\ Y_A = 20.$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 15

15.1. Представим функцию общественного благосостояния как $W = \frac{1}{1-e}y_1^{1-e} + \frac{1}{1-e}y_2^{1-e}$. Тогда $dW = y_1^{-e}dy_1 + y_2^{-e}dy_2 = 0.$ Отсюда наклон кривой равного общественного благосостояния $\left.\frac{dy_2}{dy_1}\right|_{dW=0} = -\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^e$.

15.2. $-\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^e = -1$ при $e = 0$, что отвечает утилитаристскому критерию.

15.3. Функция Лагранжа для «творца политики»:

$$L = \frac{1}{1-e}\left[y_1^{1-e} + y_2^{1-e}\right] - \lambda[y_1 + y_2 - 1],$$

и тогда условия первого порядка (кроме ресурсного ограничения):

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = y_i^{-e} - \lambda = 0, \quad i = 1.2.$$

Следовательно, $y_1^{-e} = y_2^{-e}$, что предполагает $y_1 = y_2$. Значение e в данном случае не влияет на оптимальное решение.

15.4. Теперь функция Лагранжа для «творца политики»

$$L = \frac{1}{1-e}\left[y_1^{1-e} + y_2^{1-e}\right] - \lambda[\alpha y_1 + y_2 - 1],$$

и условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = y_1^{-e} - \lambda a = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = y_2^{-e} - \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \alpha y_1 - \alpha y_2 = 0.$$

Избавляясь от λ, получаем $y_2^e = \alpha y_1^e$ и $y_2 = 1 - \alpha y_1$. Решая эти уравнения, получаем $y_1 = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\alpha^{\frac{e}{1-e}}}$ и $y_2 = 1 - \frac{1}{1+\alpha^{\frac{e}{1-e}}}$.

Отсюда можно заключить, что рост α снижает y_1 и увеличивает y_2, тогда как рост e, напротив, увеличивает y_1 и снижает y_2. Это можно интерпретировать следующим образом: α измеряет, во что обходится (сколько стоит) перераспределение в пользу индивида 1 (чем выше затраты на него, тем меньше доход индивида). С другой стороны, e измеряет неприятие неравенства «творцом политики»; при $\alpha > 1$ перераспределение в пользу индивида 1 становится дороже, но неприятие неравенства «творцом политики», напротив, направляет перераспределение в пользу индивида 1. Следовательно, при выработке оптимального решения «творец политики» будет взвешивать затраты на перераспределение, с одной стороны, и «ценность» перераспределения с точки зрения его этических установок — с другой.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 16

16.1. Набор достижимых аллокаций $\{(x, y): x + y \leq 100\}$.

16.2. Если (x, y) такие, что $x + y < 100$, то от «пирога» после раздела остается $100 - x - y$ и это может быть передано Адаму, Еве или же им обоим для увеличения их полезности. Однако в таком случае раздел пирога не является парето-эффективным. В результаты можно заключить, что $\{(x, y): x + y = 100\}$ — набор парето-эффективных аллокаций.

16.3. Так как x — это полезность и доход Адама, а y — полезность и доход Евы, то свобода от зависти предполагает, что $x \geq y$ и что $y \geq x$, а это соблюдается только тогда, когда $x = y$. В таком случае набор всех достижимых свободных от зависти аллокаций $\{(x, y): x = y \text{ и } x + y \leq 100\}$. Следовательно, некоторые свободные от зависти аллокации достижимы, но не являются парето-эффективными.

16.4. Учитывая особые функции полезности, которые линейны по отношению к доходу, предельные полезности дохода обеих индивидов постоянны и равны 1 независимо от величины дохода. Тогда все (x, y), такие что $x + y = 100$, удовлетворяют утилитаристскому критерию. Раз предельная полезность дохода постоянна, то, следовательно, утилитарист не заботится о распределении полезностей. Значит, есть не единственное утилитаристское решение. Набор утилитаристских решений тождественен набору парето-эффективных аллокаций $\{(x, y)\text{: } x + y = 100\}$.

Напротив, максиминное решение является единственным. Так как следует максимизировать полезность наименее обеспеченного индивида, то $x = y = 50$.

16.5. Нет принципиального различия с предыдущим ответом. Однако должно быть ясно, что «творец политики» здесь может выбрать как только разделение дара в 100 д. е., так и в дополнение использование налога для разделения 50 д. е. Адама. В этом случае надо проводить четкое разграничение между тем, как должен быть разделен дар в 100 д. е. и конечным распределением дохода. Пусть (x, y) будет разделением дара, а $(\hat{x}, \hat{y})$ — конечным распределением дохода. Предположим далее, что «творец политики» может только разделить дар, но не в состоянии ничего сделать по отношению к изначально располагаемой Адамом сумме, т. е. $x \geq 0$. Так как $\hat{x} = 50 + x$, $\hat{y} = y$ и $x + y = 100$, то набор утилитаристких (парето-эффективных) аллокаций $\{(\hat{x}, \hat{y})\text{: } \hat{x} + \hat{y} = 150$ и $\hat{x} > 0\}$. Раздел дара не определен, но распределен он должен быть весь $\{(x,y)\text{: } x + y = 100\}$.

По той же причине максиминное решение относительно конечного распределения $\hat{x} = \hat{y} = 75$. Однако для его достижения «творец политики» даст Адаму из дара только 25 д. е., так как 50 д. е. он уже имеет. Следовательно, максиминное распределение дара $x = 25$, $y = 75$.

16.6. Ресурсное ограничение (набор достижимых аллокаций) может быть представлен как $\{(x,y)\text{: } 2x + y = 100\}$, поскольку если все отдать Адаму, то он получит только 50 д. е. (половина дара исчезает в процессе перераспределения), тогда как если Ева получает все, то на нее придется 100 д. е.

Задача «творца политики»-утилитариста:

$$\max_{x \geq 0,\, y \geq 0} L = x + y + \lambda(100 - 2x - y).$$

Условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda^* \leq 0 \qquad x^* \geq 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda^* \leq 0 \qquad y^* \geq 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2x^* - y^* = 0.$$

Предположим, что $x^* > 0$. Тогда $\lambda^* = 0.5$. Однако в то же время, из следующего неравенства следует, что $\lambda^* \geq 1$. Из этого противоречия очевидно, что $x^* > 0$ не есть оптимальное решение для «творца политики»-утилитариста. У него остается единственный вариант: $x^* = 0$, $y^* = 100$.

Максиминное решение может быть получено, если заметить, что ресурсное ограничение везде имеет отрицательный наклон. Следовательно, надо найти достижимое распределение, которое уравнивает полезности, т. е. решить систему уравнений:

$$x = y;$$

$$2x + y = 100.$$

Отсюда следует, что Адам получит $66^2/_3$ д. е., Ева — $33^1/_3$ д. е.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 17

17.1. Произведем подсчет полезностей каждого из индивидов в каждом из состояний.

Состояние	U_A	U_B
0	100	100
1	117	117
2	81	169

Состояние 1 превосходит состояние 0 по критерию Парето. Состояние 2 превосходит состояние 0 по критерию Калдора, но не по критерию Парето (состояния 2 и 0 парето-

несравнимые). Состояния 2 и 1 парето-несравнимые, но состояние 2 превосходит состояние 1 по критерию Калдора.

17.2. Простая утилитаристская функция общественной полезности для индивидов A и B есть $W = U_A + U_B$, а роулсианская функция для тех же индивидов $W = \min\{U_A, U_B\}$. В таком случае по утилитаристскому критерию состояние 1 предпочтительнее состояния 0, состояние 2 предпочтительнее состояния 0 и состояние 2 предпочтительнее состояния 1. По критерию Роулса, только состояние 1 предпочтительнее состояния 0, тогда как при переходе из состояния 0 в состояние 2 общественное благосостояние не возрастает, так же как и при переходе из состояния 1 в состояние 2.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 18

18.1. Условие равновесия $w = VMP \Rightarrow w = P \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial L_Y} \Rightarrow 50 = \dfrac{1000}{L_Y^{0.5}} \Rightarrow 2500 L_Y = 1\,000\,000 \Rightarrow L_Y = 400$. Отсюда $Y = 40\,000$. Так как производственные функции заводов одинаковы, то $L_x = 400$, $X = 40\,000$.

18.2. Если химзавод создает внешний негативный эффект ($\alpha < 0$), то на его решения о найме и выпуске этот факт никак не повлияет ($L_Y = 400$, $Y = 40\,000$). Однако у пивзавода VMP по этой причине снизится.

Теперь:

$$50 = P \cdot \frac{\partial X}{\partial L_X} = 1000 L_X^{-0.5} (Y - 38000)^{-0.1} = 1000 L_X^{-0.5} (2000)^{-0.1} = 468 L_X^{-0.5}$$

Отсюда $L_x = 87$ (вместо 400 ранее), а выпуск $X = 2000(87)^{0.5}(2000)^{-0.1} = 8723$ (вместо 40 000 ранее).

18.3. Поскольку выпуск химзавода $Q(Y)$ равен 38 000, то можно найти L_Y из $38000 = 2000 L_Y^{0.5}$. $L_Y = 361$.

Ставку налога можно найти из:

$(1 - t)VMP_L = (1 - t)1000(361)^{-0.5} = 50$.

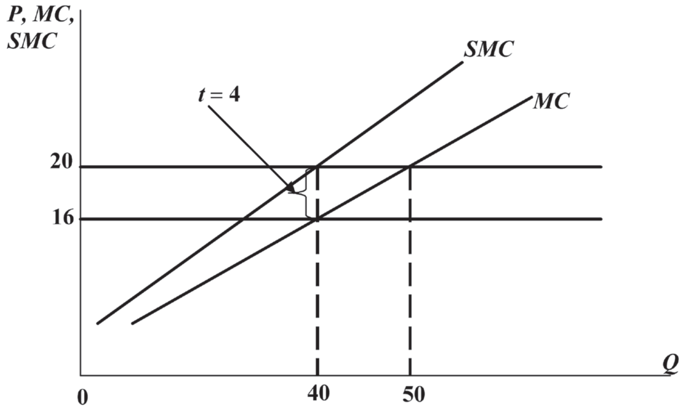
Отсюда $t = 0.05$. Этот налог снизит P_Y до 0.95 и наем на 39 работников. Пивзавод, как и в первом случае, будет выпускать 40 000 единиц продукции и нанимать 400 работников.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 19

19.1. $P = MC \Rightarrow 20 = 0.4Q \Rightarrow Q = 50.$

19.2. $P = SMC \Rightarrow 20 = 0.5Q \Rightarrow Q = 40$. При общественно оптимальном выпуске ($Q = 40$) $MC = 0.4Q = 0.4 \cdot 40 = 16$. Отсюда налоговая ставка $t = 20 - 16 = 4$.

19.3.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 20

20.1. Если каждая фирма действует независимо, то частные предельные затраты (MC_1 и MC_2) просто приравниваются к ценам.

$P_1 = MC_1 \Rightarrow 2 = Q_1/50 \Rightarrow Q_1 = 100;$

$P_2 = MC_2 \Rightarrow 3 = 2Q_2/100 \Rightarrow Q_2 = 150.$

20.2. Объединенная фирма максимизирует свою прибыль как разность между общей выручкой и суммарными затратами:

$\pi = 2Q_1 + 3Q_2 - Q_1^2/100 - Q_1^2/100 + Q_1;$

$\partial\pi/\partial Q_1 = 2 - 2Q_1/100 + 1 = 0 \Rightarrow Q_1 = 150;$

$\partial\pi/\partial Q_2 = 3 - 2Q_2/100 = 0 \Rightarrow Q_2 = 150.$

20.3. Полные общие издержки пасеки (TSC_1) должны учитывать ее влияние на снижение издержек выращивания яблок:

$TSC_1 = Q_1^2/100 - Q_1.$

Тогда предельные общественные издержки (MSC_1) можно приравнять к цене и получить общественно эффективный выпуск:

$$MSC_1 = 2Q_1/100 - 1 = 2 \Rightarrow Q_1^* = 150.$$

Чтобы вывести пасеку на общественно эффективный выпуск, можно предоставить ей субсидию на единицу продукции (s). Ее надо вычесть из частных предельных издержек.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 21

21.1. Приравниваем предельные затраты каждого хозяйства к цене и находим выпуск и прибыль при раздельном хозяйствовании:

$$P_1 = MC_1 \quad 15 = 0.2Q_1 + 5 \Rightarrow Q_1 = 50;$$

$$P_2 = MC_2 \quad 15 = 0.4Q_2 + 7 \Rightarrow Q_2 = 20;$$

$$\pi_1^{\,0} = P_1Q_1 - TC_1 = 15{\cdot}50 - 0.1{\cdot}50^2 - 5{\cdot}50 + 0.1{\cdot}20^2 = 290;$$

$$\pi_2^{\,0} = P_2Q_2 - TC_2 = 15{\cdot}20 - 0.2{\cdot}20^2 - 7{\cdot}20 - 0.025{\cdot}50^2 = 17.5.$$

21.2. С тем чтобы определить оптимальный налог и субсидию на единицу продукции, сначала нужно найти общественно-оптимальную величину выпуска для первого и второго хозяйств. Она находится путем приравнивания к цене предельных *общественных* затрат (MSC). Предельные общественные затраты первого хозяйства учитывают негативный внешний эффект, который его деятельность оказывает на затраты второго, т. е. $0.025Q_1^{\,2}$. Предельные общественные затраты второго хозяйства, напротив, исключают положительный внешний эффект, который его деятельность оказывает на затраты первого, т. е. $0.1\ Q_2^{\,2}$. Тогда:

$$MSC_1 = P_1 \quad 0.2Q_1 + 5 + 0.05Q_1 = 15 \Rightarrow Q_1^* = 40;$$

$$MSC_2 = P_2 \quad 0.4Q_2 + 7 - 0.2Q_2 = 15 \Rightarrow Q_2^* = 40.$$

Теперь подсчитаем, какую величину нужно добавить к предельным затратам первого хозяйства (иначе говоря, каким налогом обложить каждую единицу его продукции) и какую величину необходимо вычесть из предельных затрат второго (иначе говоря, какую субсидию предоставить на каждую единицу его продукции) с тем, чтобы и первое, и второе хозяйство вышли на оптимальный выпуск в 40 единиц:

$$0.2Q_1 + 5 + t = 15 \;\Rightarrow\; t = 15 - 5 - 0.2 \cdot 40 = 2;$$
$$0.4Q_2 + 7 - s = 15 \;\Rightarrow\; s = 0.4 \cdot 40 - 15 + 7 = 8.$$

21.3. После объединения двух ранее самостоятельных хозяйств в одно прибыль определяется как:

$$\pi = 15(Q_1 + Q_2) - 0.125\,Q_1^{\,2} - 5Q_1 - 0.1Q_2^{\,2} - 7Q_2.$$

Максимизируем прибыль. Находим частные производные и приравниваем к нулю:

$$\partial\pi/\partial Q_1 = 15 - 0.25Q_1 - 5 = 0;$$
$$\partial\pi/\partial Q_2 = 15 - 0.20Q_2 - 7 = 0.$$

Отсюда $Q_1 = 40$; $Q_2 = 40$ (следовательно, совокупный выпуск $= 80$) и совокупная прибыль $\pi = 360$. Прирост прибыли по сравнению с прибылью при раздельном хозяйствовании составил $\Delta\pi = 360 - (290 + 17.5) = 52.5$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 22

22.1. $L_X + L_Y = 20$. Отсюда:

$$L_Y = 20 - L_X;$$
$$F_T = F^X + F^Y;$$
$$F_T = 10L_X - 0.5L_X^2 + 5(20 - L_X) = 5L_X - 0.5L_X^2 + 100.$$

Приравниваем средние уловы на озерах X и Y:

$$\frac{F_x}{L_X} = \frac{F_Y}{L_Y} \;\Rightarrow\; 10 - 0.5L_X = 5.$$

Отсюда $\mathrm{L}_X = 10$ и $\mathrm{L}_Y = 10$.

$$F_T = 50 - 0.5(100) + 100 = 100.$$

22.2. $$\max F_T: 5L_X - 0.5\,L_X^2 + 100;$$

$$\frac{dF_T}{dL_X} = 5 - L_X = 0. \qquad L_X = 5,\ F_T = 112.5.$$

22.3. В случае свободного доступа $F_X = 10L_X - 0.5L_X^2 = 10 \cdot 10 - 0.5\,(10)^2 = 50$. Средний улов в этом случае $= 50/10 = 5$.

В случае ограниченного доступа, обеспечивающего максимальный суммарный улов, $F_X = 10L_X - 0.5\,L_X^2 = 10 \cdot 5 - 0.5\,(5)^2 = 37.5$. Средний улов в этом случае $= 37.5/5 = 7.5$.

Цена лицензии равна разности между средними уловами, т. е. 2.5.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 23

23.1. Из условий задачи очевидно, что $AC = MC = 50\ 000$

Тогда объем добычи при совершенной конкуренции будет выбран при равенстве $AR = MC$.

$$AR = \frac{PQ}{N}.$$

Объем добычи из каждой скважины (q):

$$q = \frac{Q}{N} = 5000 - N.$$

Тогда $AR = 50q = 250\ 000 - 50N = 50\ 000$. В результате

$$N = 4000; \quad q = 5000 - 4000 = 1000.$$

Отсюда следует, что равновесная добыча

$$qN = 1000 \cdot 4000 = 4\ 000\ 000.$$

Общественные предельные затраты выше частных, поскольку имеет место негативный внешний эффект — добыча из еще одной скважины снижает добычу из всех остальных.

23.2. Общественно эффективный объем производства будет при условии $VMP = MC$. Общая выручка (TR) равна $PQ = 250\ 000N - 50N^2$. Отсюда $VMP = 250000 - 100N = 50000 \Rightarrow$ $\Rightarrow N = 2000$.

Далее, $q = 5000 - 2000 = 3000$. Общая добыча $qN = 3000 \cdot$ $\cdot\ 2000 = 6\ 000\ 000$. Таким образом, заметим, что количество скважин сократилось на 1000, добыча из каждой скважины выросла на 2 тыс. баррелей, а общая добыча — на 2 млн баррелей.

23.3. Обозначим цену лицензии как T (так как цена лицензии есть, в сущности, налог на доступ к добыче). Тогда $AR - T = MC$. При $N = 2000$, $AR = 50 \cdot 3000 = 150\ 000$. Следовательно, цена лицензии (T) $= 150\ 000 - 50\ 000 = 100\ 000$ USD.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 24

24.1. Фабрика максимизирует свою прибыль при $X = 6$. Находится из $\dfrac{\partial \pi}{\partial X} = 1200 - 200X = 0$.

Отсюда $U(Y_i, X) = 9Y - Y_i^2 - 6Y_i \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial Y} = 9 - 2Y - 6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Y = 1.5$ часа.

24.2. $U(Y_i, X) = 9 \cdot 1.5 - 1.5^2 - 1.5X$. Отсюда $\dfrac{\partial U}{\partial X} = -1.5$. Это можно интерпретировать как готовность каждого индивида заплатить 1.5 д. е. за каждую единицу снижения сброса сточных вод.

24.3. Так как озером пользуются 1000 индивидов, то их суммарная готовность заплатить за это $1000 \cdot 1.5 = 1500$ д. е.

При $X = 6$ прибыль фабрики $\pi = 1200 \cdot 6 - 100 \cdot 36 = 7200 - 3600 = 3600$. Если фабрика снизит сброс сточных вод на 1 единицу, то ее прибыль сократится до $\pi = 1200 \cdot 5 - 100 \cdot 25 = 6000 - 2500 = 3500$. Таким образом, фабрика потеряет 100 д. е. прибыли. Однако потребители озера готовы заплатить 1500 д. е. Очевидно, что средств им хватит.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 25

25.1. $U(c, l) = 1 - 1^2 = 0$.

25.2. $U(c, l) = \text{s} - (\text{s})^2 = {}^3/_{16}$. На эту величину увеличится полезность каждого потребителя. Следовательно, будет иметь место улучшение.

25.3. Если каждый потребляет одно и то же количество блага, то $c = l$. Следовательно, $U(c) = c - c^2 \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial c} = 1 - 2c = 0 \Rightarrow c = {}^1/_2$.

25.4. Потребуется кооперация между всеми 100 владельцами коттеджей.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 26

26.1. $$\frac{\partial \pi_a}{\partial X} = 48 - 2X = 0 \Rightarrow X = 24;$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial Y} = 60 - 2Y - X = 0 \Rightarrow Y = 18.$$

Отсюда $\pi_a = 48 \cdot 24 - 24^2 = 1152 - 576 = 576$, а $\pi_d = 60 \cdot 18 - 18^2 - 24 \cdot 18 = 1080 - 324 - 432 = 324$.

$$\pi_a + \pi_d = 576 + 324 = 900.$$

26.2. $X = 0 \Rightarrow \pi_d = 60Y - Y^2 \cdot \dfrac{\partial \pi_d}{\partial Y} = 60 - 2Y = 0 \Rightarrow Y = 30.$
$\pi_d = 60 \cdot 30 - 30^2 = 900.$

26.3. После полной компенсации ущерба от шума $\pi_d = 60Y - Y^2 - XY + XY = 60\ Y - Y^2$. В результате $Y = 30$, $\pi_d = 900$.

$$\pi_a = 48X - X^2 - XY = 48X - X^2 - 30X.$$

$\dfrac{\partial \pi_a}{\partial X} = 48 - 30 - 2X = 0 \Rightarrow X = 9$, $\pi_a = 81$. $\pi_a + \pi_d = 900 + 81 = 981$

26.4. $\pi_\Sigma = \pi_a + \pi_d = 48X - X^2 + 60Y - Y^2 - XY.$

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial X} = 48 - 2X - Y = 0 \Rightarrow Y = 48 - 2X$$

$\dfrac{\partial \pi_d}{\partial Y} = 60 - 2Y - X = 0 \Rightarrow 60 - 2(48 - 2X) - X = 0 \Rightarrow X = 12.$

Отсюда $Y = 48 - 2 \cdot 12 = 24$.

$\pi_\Sigma = \pi_a + \pi_d = 48 \cdot 12 - 12^2 + 60 \cdot 24 - 24^2 - 12 \cdot 24 = 1008.$

26.5. После сокращения полетов на 1 единицу $\pi_a = 48 \cdot 23 - 23^2 = 1104 - 529 = 575$. Таким образом, π_a снижается на 1 д. е.

После снижения числа полетов до 23

$$\pi_d = 60 \cdot 18 - 18^2 - 23 \cdot 18 = 1080 - 324 - 414 = 342.$$

Таким образом, π_d возрастает на 18 д. е. Очевидно, что после полной компенсации ущерба аэропорту от сокращения полетов на 1 единицу чистая прибыль девелопера остается выше на 17 д. е.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 27

27.1. Выпуск находится из уравнений: $P_1 = MC_1$ и $P_2 = MC_2$.

$$40 = 15 + 0.5Q_1 \Rightarrow Q_1 = 50.\ 90 = 5 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = 85;$$

$$\pi_1 = 40 \cdot 50 - 10 - 15 \cdot 50 - 0.25 \cdot 50^2 = 615;$$

$$\pi_2 = 90 \cdot 85 - 5 - 5 \cdot 85 - 0.5 \cdot 85^2 - 50^2 = 1107.5;$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 615 + 1107.5 = 1722.5.$$

27.2. $\pi_1 = 40Q_1 - 10 - 15Q_1 - 0.25\,Q_1^2$.

Находим предельную прибыль (предельную выгоду) фирмы 1

$$B_1'(Q_1) = \frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 40 - 15 - 0.5Q_1 = 25 - 0.5Q_1;$$

$$\pi_2 = 90Q_2 - 5 - 5Q_2 - 0.5\,Q_2^2 - Q_1^2\,.$$

Находим предельный ущерб фирмы 2 от деятельности фирмы 1 (отрицательную предельную прибыль):

$$D_2'(Q_1) = -\frac{\partial\pi_2}{\partial Q_1} = 2Q_1.$$

Оптимально определить выпуск там, где $B_1'(Q)_1 = D_1'(Q)_1$. Поэтому $25 - 0.5Q_1 = 2Q_1 \Rightarrow Q_1 = 10$. Отсюда плата фирмы 1 ($f$) за выпуск единицы продукции (Q_1) = $D_2'(Q_1) = 2 \cdot 10 = 20$ д. е.

Далее определяем:

$$\pi_1 = 40Q_1 - 10 - 15Q_1 - 0.25\,Q_1^2 - 20Q_1 =$$
$$= 40 \cdot 10 - 10 - 15 \cdot 10 - 0.25 \cdot 10^2 - 20 \cdot 10 =$$
$$= 400 - 385 = 15 \text{ д. е.}$$

Теперь осталось определить:

$$\pi_2 = 90Q_2 - 5 - 5Q_2 - 0.5\,Q_2^2 - Q_1^2 + 20Q_1 =$$
$$= 90 \cdot 85 - 5 - 5 \cdot 85 - 0.5 \cdot 85^2 - 10^2 + 20 \cdot 10 = 3707.5 \text{ д. е.;}$$
$$\pi_1 + \pi_2 = 15 + 3707.5 = 3722.5.$$

Графически решение представлено на рис. 27.1

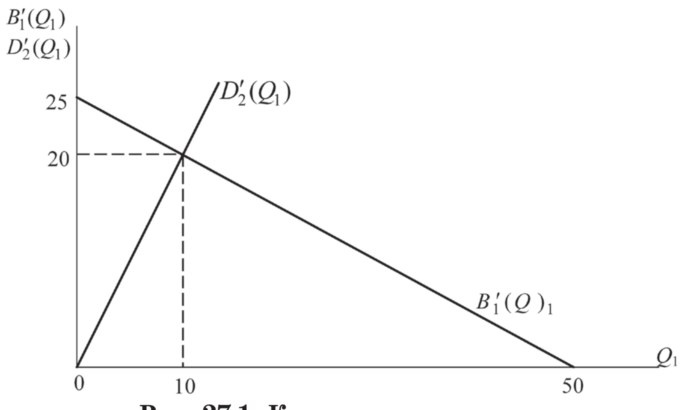


Рис. 27.1. Коузианское решение

27.3. Аналогично путем приравнивания предельной выгоды к предельному ущербу находим, что $Q_1 = 10$, а оптимальная «взятка» (b) за сокращение выпуска на единицу продукции также равна 20 д. е.

Отсюда

$$\pi_2 = 90 \cdot 85 - 5 - 5 \cdot 85 - 0.5 \cdot 85^2 - 10^2 - 20\,(50 - 10) = 2707.5;$$

$$\pi_1 = 40 \cdot 10 - 10 - 15 \cdot 10 - 0.25 \cdot 10^2 + 20 \cdot (50 - 10) = 1015;$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1015 + 2707.5 = 3722.5.$$

27.4. Составим уравнение для прибыли объединенной фирмы

$$\pi_\Sigma = 40Q_1 + 90Q_2 - 10 - 15Q_1 - 0.25Q_1^2 - 5 - 5Q_2 - 0.5Q_2^2 - Q_1^2;$$

$$\frac{\partial \pi_\Sigma}{\partial Q_1} = 25 - 2.5Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = 10;$$

$$\frac{\partial \pi_\Sigma}{\partial Q_2} = 85 - Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = 85.$$

$$\pi_\Sigma = 40Q_1 + 90Q_2 - 10 - 15Q_1 - 0.25Q_1^2 - 5 - 5Q_2 - 0.5Q_2^2 - Q_1^2 = 3722.5.$$

27.5.

№ п/п	Q_1	Q_2	π_1	π_2	π_Σ
1	50	85	615	1107,5	1722,5.
2	10	85	15	3707,5	3722,5
3	10	85	1015	2707,5	3722,5
4	10	85	–	–	3722,5

Теорема Коуза выполняется. И запретительный, и разрешительный правовые режимы приводят к парето-эффективности, что подтверждает совпадение результатов коузианских сделок с результатами объединенной фирмы. Неэффективность наблюдается только в первом случае.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 28

28.1. Кривые спроса на общественное благо складываются по вертикали. Для этого удобнее пользоваться обратными функциями спроса: $P = 100 - Q_A$ и $P = 200 - Q_B$. Отсюда получаем, что при выпуске от 0 до 100 $P = 300 - 2Q_\Sigma$. При выпуске от 100 и до 200 спрос на это благо предъявляет только группа B и, соответственно, ее спрос тогда совпадает с общественным спросом на общественное благо, т. е. $P = 200 - Q_B$.

При $P = MC = 140 = 200 - Q_B \Rightarrow Q_B = 60$ не попадает в интервал от 100 до 200. В данном случае очевидно, что оптимальное количество общественного блага находится в интервале от 0 до 100.

$$140 = 300 - 2Q_\Sigma.$$

Отсюда $Q_\Sigma^* = 80$.

28.2. В случае частного блага кривые спроса складываются по горизонтали. Получаем совокупный спрос $Q_B = 300 - 2P$ при цене от 0 до 100. при цене от 100 до 200, совокупный спрос совпадает со спросом группы B, т. е. $Q_B = 200 - P$.

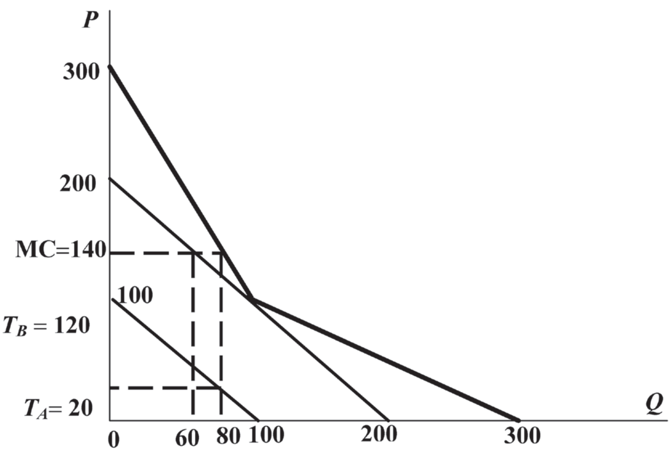
Поскольку $P = MC = 140$, то совокупный спрос совпадает со спросом группы B. Следовательно, $Q_B = 200 - 140 = 60$.

28.3. $Q^*_\Sigma = 80$, а $P = 140 \Rightarrow T = P \cdot Q^*_\Sigma = 140 \cdot 80 = 11200$ д. е.

$100 - P_A = 80$. В этом случае P_A есть налоговая цена (T_A) общественного блага для группы A. Очевидно, что $T_A = 20$.

$$200 - P_B = 80 \Rightarrow P_B = T_B = 120.$$

28.4.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 29

29.1. Оптимальные распределения дохода на покупки благ каждым из раздельно живущих студентов $I_G = {}^1/_3$ и $I_X = {}^2/_3$ (следует из степенных коэффициентов функции Кобба-Дугласа). Следовательно, $G_i = 100/100 = 1$, а $X_i = 200/0.2 = 1000$.

29.2. $U_A(G, X_A) = 1^{1/3} \cdot 1000^{2/3} = 100$; $U_B(G, X_B) = 1^{1/3} \cdot 1500^{2/3} = 131$

29.3. $\mathrm{MRS}^i_{G,X_i} = \dfrac{X_i}{2G}$.

$$\mathrm{MRS}^{A}_{G,X} = 1000/2 = 500;\ \mathrm{MRS}^{B}_{G,X} = 1500/2 = 750.$$

Это говорит о том, что вместе они готовы пожертвовать $1250X$ за $1G$, то есть пожертвовать 1250 ккал за еще 1 картину, которая в действительности обошлась бы им в 500 ккал (из того, что $P_G / P_X = 500$). При том же бюджете они могли бы обеспечить чистый выигрыш в полезности, приобретя дополнительную картину. Следовательно, ситуация не является парето-эффективной.

29.4. $\mathrm{MRS}^{A}_{G,X} + \mathrm{MRS}^{B}_{G,X} = \dfrac{X_A + X_B}{2G} = MRT_{G,X} = \dfrac{P_G}{P_X} = 500.$

Следовательно, $X_A + X_B = 1000G$.

Бюджетное ограничение $0.2(X_A + X_B) + 100G = 600$. Подставляем $1000G$ и получаем $G = 2$. Отсюда $X_A + X_B = 2000$. При условии, что студенты делят расходы на картины пополам, получаем:

$$U_A = U_B = 2^{1/3} \cdot 1000^{2/3} = 126 \Rightarrow U_A + U_B = 252.$$

По сравнению с исходом ситуации из вопроса 30.2 студент B теряет 5 единиц полезности. Следовательно, переход в парето-эффективное состояние здесь не является парето-улучшением. Поэтому студенту B выгоднее быть «безбилетником».

29.5. Если студент A берет на себя 75% расходов на 2 картины, а студент B — 25%, то студенту A удастся приобрести только 750 ккал. $[300 - (0.75 \cdot 200)]/0.2$. Студент B окажется в состоянии приобрести 1250 ккал. Отсюда:

$$U_A = 2^{1/3} \cdot 750^{2/3} = 104$$
$$U_B = 2^{1/3} \cdot 1250^{2/3} = 146$$
$$U_A + U_B = 250.$$

По сравнению с исходом ситуации из вопроса 30.2 студент A приобретает 4 единицы полезности, а студент B теряет — 15 единиц полезности. Имеет место парето-улучшение, но парето-эффективность не достигается (сумма полезностей, как видим, меньше, чем в исходе ситуации из вопроса 30.4). Теоретически это положение может быть достигнуто на основе добровольного обмена.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 30

30.1. Ответ на вопрос требует какого-то предположения о том, каковы ожидания каждого относительно оплаты общественного блага другим. Если каждый исходит из предположения, что другие будут безбилетниками, то тогда, естественно, $G = 0$ и $U_i = 0$.

30.2. На границе производственных возможностей выполняется равенство в дифференциалах $2XdX + 200GdG = 0$. Из него следует:

$$MRT_{G,X} = -\frac{dX}{dG} = \frac{200G}{2dX} = \frac{100G}{X}.$$

Далее находим $\mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{X_i}{G} = \frac{X/100}{G}$.

Парето-эффективность требует, чтобы сумма всех MRS равнялась MRT. Отсюда $\sum_{i=1}^{100} \mathrm{MRS}_i = \frac{X}{G} = \frac{100G}{X} \Rightarrow X = 10G$.

Подставляем в выражение для границы возможных полезностей и получаем: $200G^2 = 5000 \Rightarrow G = 5,\ X = 50$.

$X_i = X/100 = 0.5$. Следовательно, полезность каждого индивида

$$U_i = 5^{0.5} \cdot 0.5^{0.5} = 1.57.$$

Отношение потоварного налога на единицу блага X для финансирования оптимального количества G к рыночной цене X должна быть равна $\mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{X_i}{G} = \frac{1}{10}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 31

31.1. Для ответа на этот вопрос найдем $\mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{MU_G}{MU_X}$;

$$MU_G = \frac{\partial U}{\partial G} = \frac{100}{G^2};\ MU_X = \frac{\partial U}{\partial X} = 1 \Rightarrow \mathrm{MRS}^i_{G,X} = \frac{100}{G^2}.$$

Находим далее $MRT_{G,X} = \frac{P_G}{P_X} = 10$; отсюда

$$\sum_{i=1}^{1000} MRS^i_{G,X} = \frac{100\,000}{G^2} = 10 \Rightarrow G = 100.$$

31.2. $P_G \cdot G = 10 \cdot 100 = 1000$ д. е. $\Rightarrow$ каждый житель будет тратить на общественное благо 1 д. е. из своего дохода в 1000 д. е. При $P_X = 1$ д. е. на оставшиеся 999 д. е. своего дохода каждый житель будет покупать 999 единиц частного блага.

31.3. Бюджетное ограничение каждого жителя может быть записано как $X_i + G/100 = 1000$. Каждый житель максимизирует свою полезность при данном бюджетном ограничении. Следовательно

$$L = X_i - 100/G + \lambda(1000 - X_i - G/100)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1;$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{100}{G^2} - \lambda \frac{100}{10\,000} = 0 \Rightarrow 100G^2 = 1\,000\,000 \Rightarrow G = 100.$$

Каждый житель проголосует за парето-эффективное количество.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 32

32.1. (б). Яхт-клуб предпочтительнее больницы, больница — моста. Кроме того, в паре яхт-клуб–мост побеждает яхт-клуб.

32.2. (г) Возникает «парадокс голосования» (нетранзитивность коллективного предпочтения): мост предпочтительнее яхт-клуба, яхт-клуб — больницы, а больница — моста.

32.3. Строительство моста, так он предпочтительнее яхт-клуба, а яхт-клуб — больницы.

32.4. Строительство больницы, так как она предпочтительнее моста, а мост — яхт-клуба. Имеет место манипулирование голосованием через повестку дня.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ № 33

33.1. Будет установлено 30 фонарей. За это предложение проголосуют «Крупняк», «Здоровяк» и «Середняк». За 40 фонарей проголосуют только «Здоровяк» и «Крупняк», а «Середняк» будет голосовать против, так как его предельные выгоды (80) стали бы меньше падающих на него расходов (100).Количество фонарей будет парето-эффективным, так как $\Sigma MB = MC = AC = 500$.

33.2. В таком случае было бы принято предложение установить 40 фонарей. Это их количество превышает парето-эффективное. Затраты «С роду так» будут равны его предельным выгодам (40). Затраты «Бедняка» на 1 фонарь будут ниже его предельной выгоды от него на 10 единиц. Однако более всего выиграет «Середняк» — 20 единиц с каждого фонаря. Закон Директора выполняется, так как «Середняк» занимает позицию медианного избирателя. «Крупняк» и «Здоровяк» проиграли бы. Им пришлось бы выплачивать в сумме 350 д. е. за каждый фонарь, тогда как их суммарные предельные выгоды равны лишь 220. Следовательно, их чистые потери от каждого фонаря составили бы 130 единиц.

33.3. При правиле единогласия было бы установлено только 10 фонарей. Предложение установить 20 фонарей было бы заблокировано «С роду так». Естественно, что оно не было бы парето-эффективным. Общество недополучало бы в сумме 200 единиц полезности с каждого фонаря $(180 - 100) + (160 - 100) + (140 - 100) + (120 - 100) = 200$.

33.4. Если бы «Крупняк» стал диктатором, то было бы установлено 50 фонарей. Легко убедиться, что потери общества были бы точно такими же, как и при правиле единогласия.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

AC — средние затраты
AR — средняя выручка
LAC — средние затраты в длительном периоде
LMC — предельные затраты в длительном периоде
LTC — общие затраты в длительном периоде
MC — предельные затраты
MP_X — предельный продукт ресурса X
MR — предельная выручка
MRPT_{XY} — предельная норма продуктовой трансформации
MRS_{XY} — предельная норма замещения в потреблении блага X благом Y
MRT_{XY} — предельная норма трансформации
MRP_X — предельная выручка предельного продукта
MRTS_{XY} — предельная норма технического замещения
MSC — предельные общественные затраты
NS — чистое предложение
MU_X — предельная полезность блага X
P, p — цена
P^D — цена спроса
P^S — цена предложения
Q, q — объем (потребления, производства, покупки, продажи и т. п.)
Q^D — объем спроса
Q^S — объем предложения
SAC — средние затраты в коротком периоде
SMC — предельные затраты в коротком периоде
STC — общие затраты в коротком периоде
TE — удерживающий доход
TC — общие затраты
TR — общая выручка
$U(x_1, x_2, ..., x_n)$ — функция полезности набора благ $(x_1, x_2, ..., x_n)$
w — цена фактора
η — абсолютная величина эластичности спроса
Π, π — прибыль
$\mathbf{E}$ — оператор эластичности: $\mathbf{E}_x[y]$ — эластичность переменной y по переменной x.

Г-17 ***Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И.*** **Микроэкономика :** В 3-х т. Т. 3. Сборник задач / П. А. Ватник, А. П. Заостровцев. — СПб. : Экономическая школа ГУВШЭ. 2007. — 160 с. — ISBN 5-902402-04-2

Предлагаемый читателю сборник задач служит дополнением учебника «Микроэкономика» В. М. Гальперина, С. М. Игнатьева и В. И. Моргунова. Он охватывает все основные разделы соответствующего университетского курса и предназначен для расширения и углубления знаний, полученных при его изучении. Все задачи сопровождаются подробными решениями и комментариями, во многих случаях выходящими за рамки условий задачи.

Сборник предназначен для студентов, изучающих микроэкономику, преподавателей экономических дисциплин.

ББК 65.9

Учебник

Гальперин Вадим Максович
Игнатьев Сергей Михайлович
Моргунов Вячеслав Иванович

МИКРОЭКОНОМИКА
Том 3
Ватник Павел Абрамович
Заостровцев Андрей Павлович
СБОРНИК ЗАДАЧ

Редактор *М. К. Одинокова*
Художник *Г. О. Вельте*
Технический редактор *В. В. Бабич*
Корректор *М. К. Одинокова*
Компьютерная верстка *А. Ю. Павлова*
Подписано в печать 20.03.07. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,46. Уч.-изд. л. 12,6. Тираж 1500 экз. Заказ № _____

ООО “Экономикус“
192007, Санкт-Петербург, ул. Тамбовская, д. 22, лит. А, пом. 8Н
Отпечатено с оригинал-макета в ГУП “Типография “Наука“
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, д. 12