КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

Р.Ф.ГАБИТОВ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Казань-2013

Направление подготовки : 080100.62 «Экономика» (бакалавриат, 2 курс, 4 семестр; очное обучение).

Дисциплина: «Финансовая математика»

Количество часов: 70 (в т.ч.: 18 ч. – лекции, 18 ч. – практические занятия, 34 ч. – самостоятельная работа).

Темы: 1. Простые проценты. 2. Математические формулы определения среднего срока погашения кредитов и различных методов погашения кредитов по простым процентам. 3.Дисконтирование по простым процентам. 4. Декурсивный метод начисления сложных процентов. 5. Антисипативный метод начисления сложных процентов. 6. Финансовые расчеты с учетом удержания комиссионных. 7. Учет инфляции в финансовых расчетах. 8.Постоянные финансовые ренты (аннуитеты). 9.Переменные финансовые ренты.

Ключевые слова: *процент, простой процент, сложный процент, дисконт, математическое дисконтирование, банковское дисконтирование, комиссионные, инфляция, уровень инфляции, индекс инфляции, реинвестирование, постоянная финансовая рента, переменная финансовая рента.*

Дата начала использования: 1 февраля 2013 г.

Автор-составитель: Габитов Рафхат Фархатович, старший преподаватель кафедры математики и экономической информатики КФУ.

Габитов Р.Ф.

Финансовая математика. Конспект лекций / Р.Ф. Габитов, Каз.федер.ун-т. –

Казань, 2013. — 203с·

В предлагаемых лекциях содержится изложение методов количественного анализа финансовых, кредитных и коммерческих операций. В теоретическом материале рассматриваются зависимости между такими параметрами финансовых операций, как стоимостные характеристики, сроки и процентные ставки. Практический материал состоит из задач, охватывающих расчёт операций кредитования, начисления простых и сложных процентов, учёт векселей, составление амортизационного плана погашения кредитов и т.д. Материал лекций можно изучать самостоятельно, решая предлагаемые задачи и отвечая на теоретические вопросы, тем самым проводя самоконтроль усвоения материала. Электронная версия курса : http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479

Принято на заседании кафедры математики и экономической информатики

Протокол № 11 от 26.06.2013

Содержание

Лекция 1. Простые проценты

Аннотация. В данной теме даются понятия процентов или процентных денег, первоначального капитала, процентной ставки, наращенной суммы; приводятся формулы простого процента для различных случаев задания сроков; рассматриваются три варианта расчёта простых процентов, расчёт с переменными ставками, реинвестирование.

Ключевые слова. Процент, простой процент, первоначальный капитал, наращенная сумма, переменная ставка, реинвестирование.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

1.1. Проценты (математический и банковский смысл).

<u>Опр.1.1</u> <u>*Процентными деньгами*</u> или <u>*процентами*</u> (interest) называют доход от инвестированного капитала. При этом сумма денег, данных взаймы, называется <u>*основной суммой капитала*</u> или <u>*первоначальный капитал*</u> (обозначение: K).

<u>Опр.1.2</u> Отношение процента за определённый период к основной сумме капитала называют <u>*нормой процента*</u> или <u>*процентной ставкой*</u> (*rate of interest*). Выражается в процентах (обозначение: p) или в десятичных, реже - в обыкновенных дробях (удельная процентная ставка). Обозначается через i: $$i = \frac{p}{100}$$

Пример1.1: Иванов взял в сбербанке ссуду на 100 тысяч рублей. Если банк начисляет 2500 рублей процентных денег за использование этой суммы в течение 6 месяцев, какой будет процентная ставка за этот период?

Решение:

$$i = \frac{2500}{100000} = 0{,}025\,(2{,}5\%)$$

1.2. Простые проценты.

Пусть *K*- основная сумма капитала, *i*-процентная ставка за 1 год, *n*-срок ссуды. Обозначив проценты за весь срок ссуды через *I*, получим:

$$I = Kni \quad (1.1)$$

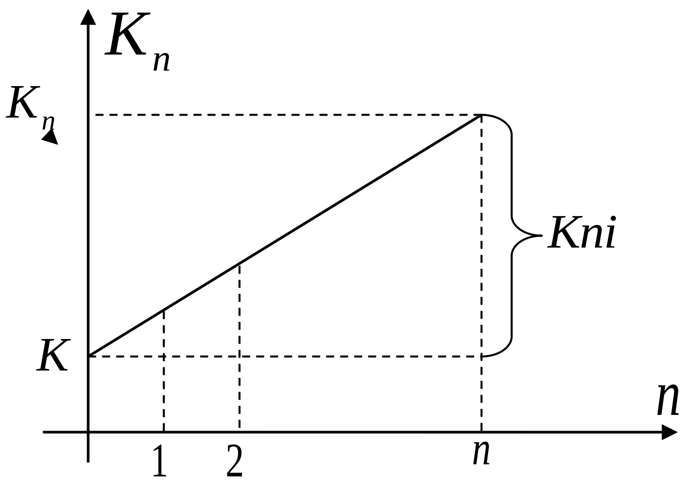
Формула (1.1) позволяет определить процентные деньги (проценты) за весь срок ссуды, здесь *i*- процентная ставка за рассматриваемый период времени.

Если через K_n обозначить сумму в конце срока ссуды (итоговая сумма или *наращенная сумма*), то:

$$K_n = K + I = K + Kni = K(1+ni) \quad (1.2)$$

Формула (1.2) называется формулой *простых процентов* (*simple interest*), а множитель $(1+ni)$ - множителем наращения простых процентов.

На чертеже наращение по простой процентной ставке изображается в виде наклонной прямой:



<u>*Пример1.2:*</u> Ссуда равна 700 тыс. рублей, срок 4 года, проценты простые по ставке 20% годовых. Определить проценты и наращенную сумму.

Решение:

Здесь K=700тыс., n=4, p=20.

По формулам (1.1) и (1.2) находим:

$$I = Kn\frac{p}{100} = 700 \cdot 4 \cdot 0{,}2 = 560\ \text{тыс.руб}.$$

$$K_n = K + I = 700 + 560 = 1260\ \text{тыс.руб}.$$

1.3. Формулы простого процента для различных случаев задания сроков.

В вышеприведенных формулах (1.1) и (1.2) время *n* задавалось в годах. В том случае, когда срок ссуды задается в месяцах, тогда

$$n = \frac{m}{12},$$

где *m* - число месяцев, и формулы (1.1) и (1.2) приобретут вид:

$$I = K\frac{mi}{12} \quad (1.3)$$

$$K_m = K\left(1+\frac{mi}{12}\right) \quad (1.4)$$

Если время задается в днях d, то используются два различных способа для подсчета n:

Чаще всего используется деление числа дней на 360 (обыкновенный простой процент – *ordinary interest*).

Второй способ – деление на 365 или 366 – в високосном году (точный простой процент – *exact interest*). Для обоих этих случаев формулы (1.1) и (1.2) можно записать в виде:

$$I = K\frac{di}{T} \quad (1.5)$$

$$K_d = K\left(1+\frac{di}{T}\right) \quad (1.6)$$

Здесь T=360 или 365 (366) дней – временна́я база.

1.4. Три варианта расчета простых процентов.

Число дней ссуды можно измерять приближенно и точно. В первом случае месяц принимается равным 30 дням. Во втором случае подсчитывается число дней между датой выдачи и датой погашения ссуды. День выдачи и день погашения считаются за 1 день.

В зависимости от того, какой способ измерения используется, на практике применяются 3 варианта расчета простых процентов.

1) Точные проценты с точным числом дней ссуды. Этот вариант называется *английским*, так как используется в Великобритании, США. Обозначается

$^{365}/_{365}$ или $^{ACT}/_{ACT}$

2) Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды. Называется *французским* или банковским способом (Banker's Rule). Используется во Франции, Бельгии, Швейцарии. Обозначение:

$^{365}/_{360}$ или $^{ACT}/_{360}$

3) Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды. Называется *немецким* способом, применяется в Германии, Швеции, Дании. Обозначение: $360/360$

<u>*Пример 1.3:*</u> Ссуда в размере 1 млн. рублей выдана 20.01.2008г. по 5.10.2008г. включительно под 18 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов? Задачу решить при трёх вариантах расчёта простых процентов.

Решение:

1) $^{365}\!\!\diagup_{365}$: $d = 279 - 20 = 259, T = 366$ (год високосный).

По формуле (1.6), учитывая $i = \dfrac{p}{100} = \dfrac{18}{100} = 0{,}18$:

$$K_d = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{259 \cdot 0{,}18}{366}\right) = 1127377{,}05$$ рублей.

2) $^{365}\!\!\diagup_{360}$: $d = 259, T = 360$

$$K_d = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{259 \cdot 0{,}18}{360}\right) = 1129500{,}00$$ рублей.

3) $^{360}\!\!\diagup_{360}$: $d = 10 + 8 \cdot 30 + 5 = 255, T = 360$

$$K_d = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{255 \cdot 0{,}18}{360}\right) = 1127500{,}00$$ рублей.

1.5. Расчёты с переменными ставками.

В рассмотренной выше формуле (1.2) рассматривался один период времени продолжительностью n лет, в котором процентная ставка была неизменной. Пусть рассматривается m периодов времени по $n_1; n_2; ...; n_m$ лет. Причем, в каждом из этих периодов времени процентная ставка будет своя: $i_1; i_2; ...; i_m$. Тогда формула (1.2) будет иметь вид:

$$K_n = K(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m) = K\left(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t\right) \quad (1.7)$$

Пример 1.4: Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: 1-й год - 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Необходимо определить множитель наращения за 2,5 года.

Решение:

$$1+n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m =$$

$$= 1 + 1 \cdot 0{,}16 + 0{,}5 \cdot 0{,}17 + 0{,}5 \cdot 0{,}18 + 0{,}5 \cdot 0{,}19 = 1{,}43$$

1.6. Реинвестирование.

В практике при инвестировании средств в кратко-срочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока. Это есть реинвестирование средств, полученных на каждом этапе наращения с помощью постоянной или переменной ставок. Наращенная сумма в этом случае будет определяться по формуле:

$$K_n = K(1+n_1 i_1)\cdot(1+n_2 i_2)\cdot\ldots\cdot(1+n_m i_m) \quad (1.8)$$

где i_m - размер ставок, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются во времени и соответственно равны n и i, то формула (1.8) приобретёт вид:

$$K_n = K(1 + ni)^m \quad (1.9)$$

где m- количество повторений реинвестирования.

<u>*Пример 1.5:*</u> 100000 рублей положены 1 января на месячный депозит под 20% годовых. Какова наращенная сумма, если инвестирование повторяется 3 раза? Год невисокосный.

Решение:

Рассмотрим различные варианты инвестирования:

1) $^{365}\!/_{365}$: $\quad i=\dfrac{20}{100}=0{,}2$

$$K_n=100\cdot\left(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}2\right)\cdot\left(1+\frac{28}{365}\cdot 0{,}2\right)\cdot\left(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}2\right)=105{,}013$$

млн. рублей.

2) $^{365}\!/_{360}$:

$$K_n=100\cdot\left(1+\frac{31}{360}\cdot 0{,}2\right)\cdot\left(1+\frac{28}{360}\cdot 0{,}2\right)\cdot\left(1+\frac{31}{360}\cdot 0{,}2\right)=105{,}088$$

млн. рублей.

3) $^{360}\!/_{360}$:

$$K_n=100\cdot\left(1+\frac{30}{360}\cdot 0{,}2\right)^3=105{,}084$$ млн. рублей.

1.7. Вопросы для самоконтроля.

1) По какой линии изменяется наращенная сумма в случае простого процента?
2) Что называется обыкновенным простым процентом?
3) Что называется точным простым процентом?
4) Какие существуют три варианта расчета простых процентов?
5) Когда применяются расчёты с переменными ставками?
6) Как называется процесс последовательного повторения наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока?

1.8. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№1.20, 1.22, 1.23, 1.26, 1.27, 1.29.

1.9. Глоссарий по лекции 1.

Наращенная сумма – итоговая сумма в конце срока ссуды.

Первоначальный капитал - сумма денег, данных взаймы.
Процент - доход от инвестированного капитала.

Процентная ставка - отношение процента за определённый период к основной сумме капитала.

Реинвестирование - неоднократное последовательное повторение наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока.

1.10. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Лекции «Основы финансовой математики» http://iloveeconomics.ru/sites/default/files/03.1_osnovy_finmat._lekcii_1_i_2_26.04.12.pdf
3) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
4) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 5-10.
5) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 20-26.

1.11. Список сокращений и обозначений.

365/365 (ACT/ACT) - точные проценты с точным числом дней ссуды;
365/360 (ACT/360) - обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;
360/360 - обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Лекция 2. Математические формулы определения среднего срока погашения кредитов и различных методов погашения кредитов по простым процентам

Аннотация. В данной теме выводятся математические формулы определения среднего срока погашения кредитов, а также рассматриваются различные формы погашения кредитов, из которых подробно разобран случай погашения кредита по убывающей сумме долга или по амортизационному плану.

Ключевые слова. Средний срок погашения кредитов, погашение единовременной выплатой, расчёт «меньше ста», погашение равными долями, погашение кредита по убывающей сумме долга, амортизационный план.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

2.1. Определение среднего срока погашения кредитов.

Предположим, что заемщик получил у одного и того же кредитора *n* ссуд $K_1, K_2, ..., K_n$ на различные сроки $d_1, d_2, ..., d_n$ под разные процентные ставки $p_1, p_2, ..., p_n$.

Для расчета среднего срока погашения ссуд воспользуемся следующим утверждением:

Сумма процентных платежей, начисленных на n *ссуд на начальных условиях, равна одному процентному платежу, начисленному на сумму ссуд при средней процентной ставке* p_s *и среднем сроке* d_s.

Исходя из последнего утверждения, запишем:

$$\frac{K_1 p_1 d_1}{100T} + \frac{K_2 p_2 d_2}{100T} + \ldots + \frac{K_n p_n d_n}{100T} = \frac{(K_1 + K_2 + \ldots + K_n) p_s d_s}{100T} \quad \text{или}$$

$$K_1 p_1 d_1 + K_2 p_2 d_2 + \ldots + K_n p_n d_n = (K_1 + K_2 + \ldots + K_n) p_s d_s, \quad (2.1)$$

где p_s - средняя процентная ставка,

d_s - средний срок.

Рассмотрим три случая:

а) Полученные на разные сроки ссуды имеют одинаковую величину и даны под одинаковые процентные ставки.

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_n = K, \quad p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p, \quad d_1 \neq d_2 \neq \ldots \neq d_n.$$

Из формулы (2.1) для этого случая получим:

$$Kpd_1 + Kpd_2 + ... + Kpd_n = (K + K + ... + K)\,pd_s$$ или

$$d_s = \frac{Kp(d_1 + d_2 + ... + d_n)}{Knp}$$ отсюда

$$d_s = \frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{n} \quad (2.2)$$

б) Ссуды различной величины выданы на разные сроки под одинаковые процентные ставки.

$$K_1 \neq K_2 \neq ... \neq K_n, \quad p_1 = p_2 = ... = p_n = p, \quad d_1 \neq d_2 \neq ... \neq d_n.$$

По формуле (2.1):

$$K_1 pd_1 + K_2 pd_2 + ... + K_n pd_n = (K_1 + K_2 + ... + K_n)\,pd_s$$ или

$$d_s = \frac{p(K_1 d_1 + K_2 d_2 + ... + K_n d_n)}{(K_1 + K_2 + ... + K_n)\, p}$$ или

$$d_s = \frac{K_1 d_1 + K_2 d_2 + ... + K_n d_n}{K_1 + K_2 + ... + K_n} \quad (2.3)$$

в) Ссуды выданы различной величины, на разные сроки под разные процентные ставки.

$K_1 \neq K_2 \neq ... \neq K_n,\qquad p_1 \neq p_2 \neq ... \neq p_n,\qquad d_1 \neq d_2 \neq ... \neq d_n.$

Из формулы (2.1) непосредственно следует:

$$d_s = \frac{K_1 p_1 d_1 + K_2 p_2 d_2 + ... + K_n p_n d_n}{(K_1 + K_2 + ... + K_n)\, p_s} \quad (2.4)$$

Если в формуле (2.4) средняя процентная ставка неизвестна, предположим, что $d_1 = d_2 = ... = d_n = d_s = d.$

Тогда из формулы (2.1):

$K_1 p_1 d + K_2 p_2 d + ... + K_n p_n d = (K_1 + K_2 + ... + K_n) p_s d$ или

$(K_1 p_1 + K_2 p_2 + ... + K_n p_n) d = (K_1 + K_2 + ... + K_n) p_s d$ отсюда:

$$p_s = \frac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + ... + K_n p_n}{K_1 + K_2 + ... + K_n} \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в (2.4), окончательно получим

$$d_s = \frac{K_1 p_1 d_1 + K_2 p_2 d_2 + ... + K_n p_n d_n}{K_1 p_1 + K_2 p_2 + ... + K_n p_n} \quad (2.6)$$

Для определения календарного дня одновременного погашения всех ссуд необходимо средний срок погашения ссуд, вычисленный по одной из вышеприведенных формул, прибавить к дню первого планового платежа.

Следует определить также количество дней между плановыми платежами.

<u>Пример 2.1:</u> Заёмщику выданы три ссуды одним кредитором: 50000 рублей со сроком погашения 20.03.2008г., 40000 – 14.06.2008г. и 70000 – 23.08.2008г. Процентная ставка составляет 18% годовых. Когда лучше выплатить весь долг, чтобы при этом не понесли ущерба ни кредитор, ни заёмщик?

Решение:

Здесь $K_1 = 50000, K_2 = 40000, K_3 = 70000$

По таблице порядковых номеров дней для високосного года имеем: $d_1 = 0, d_2 = 166 - 80 = 86, d_3 = 236 - 80 = 156.$

Это случай (б), поэтому по формуле (2.3) находим:

$$d_s = \frac{K_1 d_1 + K_2 d_2 + K_3 d_3}{K_1 + K_2 + K_3} = \frac{50000 \cdot 0 + 40000 \cdot 86 + 70000 \cdot 156}{50000 + 40000 + 70000} =$$

$$= 89{,}75 \approx 90$$

Порядковый номер дня погашения ссуд составит: $80 + 90 = 170.$ В таблице ему соответствует дата 18.06.2008г., которая и будет сроком погашения ссуд.

2.2. Формы погашения кредитов.

В условиях контрактов по краткосрочным кредитам могут оговариваться различные формы погашения кредитов, увеличенных на процентный платёж.

1) Погашение наращенной суммы долга единовременной выплатой в конце срока.

Если кредит выдан под простые проценты, то заёмщик в конце срока должен выплатить сумму, определяемую по формуле (2.2) предыдущей лекции: $K_n = K(1+ni)$.

2) Погашение суммы кредита с удержанием процентов при выдаче кредита.

В этом случае заёмщик получит сумму (K-I).

Для нахождения погашаемой суммы K необходимо воспользоваться формулой:

$$K = (K - I)\frac{100}{100 - np} \quad (2.7)$$

Расчёт по формуле (2.7) называется расчётом «меньше ста».

<u>*Пример 2.2:*</u> Кредит выдаётся на 3 года по простой процентной ставке 18% годовых. Какой будет получаемая при оформлении кредита сумма, если проценты удерживаются при выдаче кредита и заёмщик рассчитывает получить 500000 рублей?

Решение:

По формуле (2.7) имеем:

$$K = (K - I)\frac{100}{100 - np} = 500000\frac{100}{100 - 3\cdot 18} = 1086956{,}52 \text{ рублей.}$$

3) Погашение краткосрочного кредита в течение срока кредита равными долями.

В этом случае ежемесячный взнос вычисляется по формуле:

$$b = \frac{K + I}{m} \quad (2.8)$$

4) Погашение кредита по убывающей сумме долга или по амортизационному плану.

Здесь в каждом расчетном периоде процентный платёж начисляется на сумму долга, уменьшенную на уже выплаченную часть долга.

Пусть кредит в сумме K получен на срок m месяцев по ставке простых процентов p% годовых. Составить амортизационный план погашения кредита.

Ежемесячная выплата основного долга будет одна и та же $\frac{K}{m}$, а процентный платёж будет уменьшаться в каждом следующем месяце, так как проценты начисляются на остаток долга.

В первом месяце проценты начисляются на всю сумму K, месячная ставка $\frac{p}{12}$, тогда процент равен:

$$I_1 = \frac{Kp}{12 \cdot 100} = \frac{Kp}{1200}$$

Во втором месяце остаток долга составит $K-\dfrac{K}{m}$,

тогда $$I_2=\left(K-\frac{K}{m}\right)\frac{p}{1200}=\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{Kp}{1200}$$

В третьем месяце остаток основного долга $K-\dfrac{2K}{m}$,

$$I_3=\left(K-\frac{2K}{m}\right)\frac{p}{1200}=\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{Kp}{1200}$$

....

В l-м месяце:

$$I_l=\left(K-\frac{(l-1)K}{m}\right)\frac{p}{1200}=\left(1-\frac{l-1}{m}\right)\frac{Kp}{1200}$$ или

$$I_l=\left(1-\frac{l-1}{m}\right)\frac{Ki}{12} \quad (2.9)$$

Из последней формулы следует, что процентный платёж в m-м последнем месяце будет:

$$I_m = \left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{Kp}{1200}$$

Найдём общий процентный платёж $I = I_1 + I_2 + ... + I_m$:

$$I = \frac{Kp}{1200} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{Kp}{1200} + ... + \left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{Kp}{1200} =$$

$$= \left(1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) + ... + \left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\right)\frac{Kp}{1200};$$

Выражение в скобках - это арифметическая прогрессия, где $a_1 = 1, d = -\frac{1}{m}, a_m = 1 - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}.$ По формуле суммы m членов арифметической прогрессии находим: $$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m = \frac{1 + {}^{1}\!/\!{}_{m}}{2} \cdot m = \frac{m+1}{2}$$

Тогда $$I = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{Kp}{1200} = \frac{(m+1)Kp}{2400}$$ или

$$I = \frac{(m+1)Ki}{24} \quad (2.10)$$

Пример 2.3: Потребительский кредит выдан на сумму 20 млн.рублей. Годовая процентная ставка составляет 12%, срок погашения 10 месяцев. Составить план погашения кредита (амортизационный план).

Решение:

Здесь K=20 млн., m=10, $i = \frac{p}{100} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Размер месячной выплаты основного долга:

$\frac{K}{m}=\frac{20}{10}=2$ млн. рублей.

Вычислим процентный платёж для каждого месяца по формуле (2.9) $I_l=\left(1-\frac{l-1}{m}\right)\frac{Ki}{12}$: $I_1=\frac{20\cdot 0{,}12}{12}=0{,}20;$

$$I_2=\left(1-\frac{1}{10}\right)\frac{20\cdot 0{,}12}{12}=0{,}9\cdot 0{,}2=0{,}18;$$

$$I_3=\left(1-\frac{2}{10}\right)\frac{20\cdot 0{,}12}{12}=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16;$$

$I_4=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14;$ $I_5=0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}12;$ $I_6=0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}10;$

$I_7=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08;$ $I_8=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06;$ $I_9=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04;$

$I_{10}=0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02.$

Занесём полученные данные в таблицу:

Месяц	Основной долг (млн.руб.)	Месячная выплата осн.долга (млн.руб.)	Месячный процентный платёж I_l (млн.руб.)	Месячный взнос $\frac{K}{m}+I_l$ (млн.руб.)
1	20	2	0,20	2,20
2	20-2=18	2	0,18	2,18
3	16	2	0,16	2,16
4	14	2	0,14	2,14
5	12	2	0,12	2,12
6	10	2	0,10	2,10
7	8	2	0,08	2,08
8	6	2	0,06	2,06
9	4	2	0,04	2,04
10	2	2	0,02	2,02
$\sum$	0	20	**1,10**	21,1

В качестве проверки находим общую величину процентных платежей по формуле (2.10):

$$I=\frac{(m+1)Ki}{24}=$$

$$=\frac{11\cdot 20\cdot 0{,}12}{24}=1{,}10$$

$$b=\frac{K+I}{m}=\frac{20+1{,}10}{10}=2{,}11$$ млн. рублей.

2.3. Вопросы для самоконтроля.

1) Какое утверждение используется для расчета среднего срока погашения ссуд?
2) Как определяется календарный день одновременного погашения всех ссуд?
3) Какие формы погашения кредитов существуют?
4) В чём суть погашения кредита по амортизационному плану?

2.4. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№2.8, 2.11, 2.13, 3.9, 3.12.

2.5. Глоссарий по лекции 2.

Погашение краткосрочного кредита равными долями - форма погашения кредита, при которой ежемесячный взнос вычисляется по формуле: $b=(K+I)/\mathrm{m}$.

Погашение кредита по амортизационному плану - форма погашения кредита, при которой в каждом расчетном периоде процентный платёж начисляется на сумму долга, уменьшенную на уже выплаченную часть долга.

Погашение суммы кредита с удержанием процентов при выдаче кредита – форма погашения кредита, при которой заёмщик получит сумму (K-I).

Расчёт «меньше ста» - расчёт погашаемой суммы кредита по формуле $K=100(K-I)/(100-np)$.

2.6. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Лекции «Основы финансовой математики» http://iloveeconomics.ru/sites/default/files/03.1_osnovy_finmat._lekcii_1_i_2_26.04.12.pdf
3) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
4) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 11-17.
5) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 26-36.

2.7. Список сокращений и обозначений.

p_s - средняя процентная ставка;

d_s - средний срок;

$\sum$ - итоговая суммарная строка в таблице амортизационного плана.

Лекция 3. Дисконтирование по простым процентам

Аннотация. В данной теме даётся понятие процесса дисконтирования, при этом различается два вида дисконтирования: математическое и банковское, также рассматриваются наращение по простой учётной ставке и эквивалентность двух видов простых ставок.

Ключевые слова. дисконт, современная стоимость, будущий платёж, математическое дисконтирование, банковское дисконтирование.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

3.1. Математическое дисконтирование.

Рассмотрим задачу нахождения первоначальной суммы K по значению величины наращенной суммы K_n.

Такие задачи возникают, например, при покупке краткосрочных обязательств, оплата которых должником произойдет в будущем (вексель).

<u>Опр.3.1</u> Операция нахождения первоначальной суммы K по величине наращенной суммы K_n называется <u>*дисконтированием*</u>, а процентный платёж - <u>*дисконтом*</u> (discount - скидка). Обозначается D.

$$D = K_n - K \quad (3.1)$$

Таким образом, дисконтирование – это определение любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на более ранний момент времени.

Такой прием называют ***приведением*** стоимостного показателя к некоторому промежуточному или начальному моменту времени.

Величину K, найденную с помощью дисконтирования, называют ***современной стоимостью*** или современной величиной (present value) будущего платежа K_n.

В зависимости от вида процентной ставки, применяемой при дисконтировании, различают два вида дисконтирования:

При *математическом дисконтировании* применяется процентная ставка (наращения) $i = \frac{p}{100}$.

Рассмотрим задачу: Какую первоначальную сумму ссуды K надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму K_n, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке i (задача, обратная наращению первоначальной суммы про простым процентам)?

Из формулы простых процентов $K_n = K(1+ni)$:

$$K = \frac{K_n}{1+ni} \quad (3.2)$$

В формуле (3.2) множитель $\frac{1}{1+ni}$ называется <u>*дисконтным*</u> или дисконтирующим <u>*множителем*</u>. Он показывает, какую долю составляет первоначальная сумма долга K в окончательной K_n.

При этом разность $D = K_n - K$ можно рассматривать не только как проценты I, начисленные на K, но и как дисконт с суммы K_n. Поэтому:

$$D = I = \frac{Knp}{100} = Kni \quad (3.3)$$

<u>*Замечание 3.1:*</u> В случае задания срока в днях берётся временная база $T = 365(366)$ и точное число дней в каждом месяце (английский вариант).

<u>Пример3.1:</u> Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 310 тыс. рублей. Кредит выдан под 16% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временна́я база *T*=365 дней? Найти сумму дисконта?

Решение:

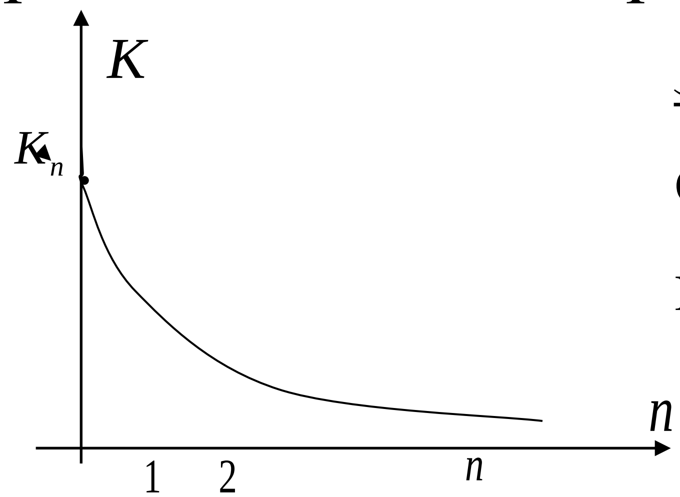
По формуле (3.2), где $n = \frac{180}{365}, \quad i = \frac{16}{100} = 0{,}16:$

$$K = \frac{310000}{1 + \frac{180}{365} \cdot 0{,}16} = 287328{,}59 \quad \text{рублей.}$$

Дисконт находим по формуле (3.1):

$$D = 310000 - 287328{,}59 = 22671{,}41 \text{ рублей.}$$

Графически математическое дисконтирование можно представить в виде кривой:



Замечание 3.2: При математическом дисконтировании $K > 0$ независимо от n и i.

Свойства дисконтированной величины K.

1) Чем больше процентная ставка i, тем больше размер дисконта D и тем меньше K.

2) Чем больше срок n, тем меньше K:

$$\lim_{n\to\infty} K = \lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{1+ni} = 0$$

3.2. Банковское дисконтирование (банковский учёт).

Суть *банковского дисконтирования* заключается в следующем: банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или иному платёжному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, которая указана на векселе, то есть покупает (учитывает) его с дисконтом.

Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. В свою очередь владелец векселя с помощью учёта имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объёме, однако ранее указанного на нём срока.

При банковском дисконтировании применяется учётная ставка простых процентов, которая обозначается через q и измеряется в процентах, а удельная учетная ставка $j = \frac{q}{100}$.

Замечание 3.3: Проценты в этом случае начисляются не на K, а на наращенную сумму K_n, которая накопилась бы за срок n.

Замечание 3.4: Если срок задаётся в днях, то чаще всего применяется временная база T=360 дней и точное число дней в каждом месяце (французский вариант).

Учитывая Замечание 3.3, формула (3.3) в этом случае будет иметь вид:

$$D = \frac{K_n n q}{100} = K_n n j \quad (3.4)$$

С другой стороны дисконт равен $D = K_n - K.$

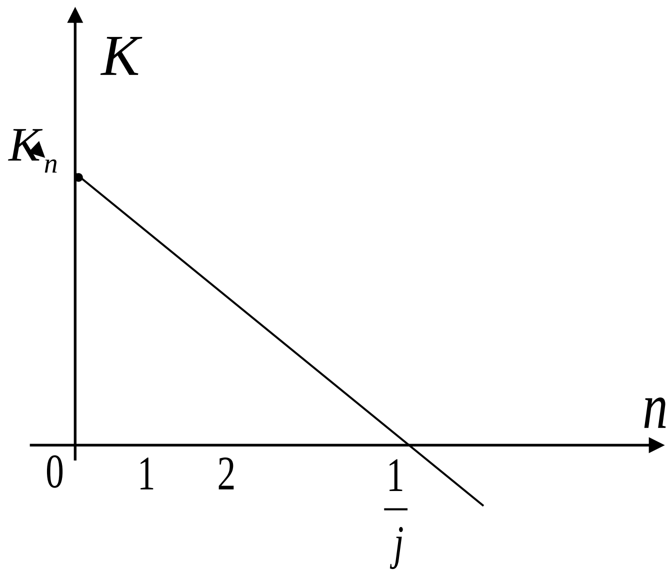
Приравняв правые части последних равенств, получим:

$K_n - K = K_n n j,$ откуда:

$$K = K_n (1 - nj) \quad (3.5)$$

Формула (3.5) называется формулой банковского дисконтирования, а множитель $(1 - nj)$ является в этом случае дисконтным множителем.

В случае банковского дисконтирования графическая иллюстрация будет следующей:



<u>*Замечание 3.5:*</u> При банковском дисконтировании накладываются жёсткие условия на размер учётной процентной ставки и на срок дисконтирования *n*, так как из графика видно, что при достаточно большом сроке дисконтирования и большой величине учётной ставки

может наступить момент, когда K обратится в ноль или даже станет отрицательной. Согласно формуле (3.5), если дисконтный множитель $1 - nj = 0$ или $n = \frac{1}{j}$, то $K = 0$, если же $1 - nj < 0$ или $n > \frac{1}{j}$, то $K < 0$.

Учитывая это, при банковском дисконтировании должно выполняться условие:

$$0 < n < \frac{1}{j} \quad (3.6)$$

Например, при ставке q=10% (j=0,1) через 10 лет (n=10) K=0, а при q=20% (j=0,2) K=0 уже через 5 лет (n=5). Это видно из формулы (3.5), в которой дисконтный множитель обращается в ноль.

Пример 3.2: Вексель выдан на сумму 1 млн. рублей с уплатой 16.11.2008года. Владелец векселя учёл его в банке 13.09.2008года по учётной ставке 20% годовых. Определить полученную при учёте сумму и дисконт.

Решение:

По таблице порядковых номеров дней високосного года получим: $d = 321 - 257 = 64$ дня.

По формуле (3.5) для французского варианта расчёта:

$$K = 1000000 \cdot \left(1 - \frac{64}{360} \cdot 0{,}2\right) = 964444{,}44 \quad \text{руб.}$$

Дисконт найдем по формуле (3.1):

D=1000000-964444,44=35555,56 руб.

Одинаковые по величине ставки i и j приводят к разным финансовым результатам. Сравним дисконтные множители по процентной и учётной ставкам:

$\dfrac{1}{1+ni}$ и $1-nj$. Предположив, что $j=i$, найдём разность:

$\dfrac{1}{1+ni}-(1-ni)=\dfrac{1-1+n^2i^2}{1+ni}=\dfrac{n^2i^2}{1+ni}$. Полученная дробь всегда

положительна $\dfrac{n^2i^2}{1+ni}>0,$ и из формул (3.2) и (3.5) следует, что при одинаковых наращенных суммах первоначальная (приведённая) сумма при процентной ставке будет больше первоначальной суммы при учётной ставке.

Учитывая вышеизложенное, можно сделать вывод:

При прочих равных условиях учётная ставка дисконтирует сильнее, чем процентная.

3.3. Наращение по простой учётной ставке.

Пусть необходимо определить сумму, которая указывается на векселе, при этом текущая сумма долга задана. Тогда из формулы (3.5):

$$K_n = \frac{K}{1-nj} \quad (3.7)$$

Последняя формула называется формулой наращения по простой учетной ставке, а множителем наращения здесь является дробь $\frac{1}{1-nj}$.

<u>Замечание 3.6:</u> В формуле (3.7) знаменатель должен быть положительным: $1-nj>0$ или $n<\frac{1}{j}$.

Сравним множители наращения для учётной и процентной ставок: $\frac{1}{1-nj}$ и $1+ni$.

Для этого найдём их разность при $j=i$:

$\frac{1}{1-ni}-(1+ni)=\frac{1-1+n^2i^2}{1-ni}=\frac{n^2i^2}{1-ni}$. Учитывая Замечание 3.6, полученная дробь всегда положительна: $\frac{n^2i^2}{1-ni}>0$.

Вывод: Наращение по учётной ставке даёт более быстрый рост, чем по процентной.

3.4. Эквивалентность двух видов простых ставок.

Из полученных ранее выводов, следует, что выбор конкретного вида процентной ставки заметно влияет на финансовые итоги операции. Однако, возможен такой подбор величин ставок, при котором результаты наращения или дисконтирования будут одинаковыми.

Такие ставки называются эквивалентными.

Опр.3.2 Две процентные ставки i и j называются *эквивалентными*, если они при прочих равных условиях (одинаковых K, K_n, n) приводят к одинаковым финансовым результатам.

Для вывода формул эквивалентности ставок приравняем множители наращения и дисконтирования для процентной и учётной ставок: $1+ni=\dfrac{1}{1-nj}$. Откуда:

$$ni=\frac{1}{1-nj}-1=\frac{1-1+nj}{1-nj}$$ или

$$i=\frac{j}{1-nj} \quad (3.8)$$

Далее аналогично из равенства $\dfrac{1}{1+ni}=1-nj$ находим:

$$j=\frac{i}{1+ni} \quad (3.9)$$

Самостоятельное задание: вывести формулы, аналогичные (3.8) и (3.9) для случая, когда срок задаётся в месяцах $n = \dfrac{l}{12}$.

При сроке в днях необходимо рассмотреть два случая: когда временные базы для обеих ставок одинаковы (T=360 дней) и когда временные базы разные (T_i =365(366) дней, T_j =360 дней). Рассмотрим последний случай. Приравняем множители наращения:

$$1 + ni = \frac{1}{1 - nj} \quad \text{при} \quad n = \frac{d}{T_i} \quad \text{и} \quad n = \frac{d}{T_j}$$

$$1+\frac{d}{T_i}i=\frac{1}{1-\frac{d}{T_j}\,j}$$ или $$\frac{d}{T_i}i=\frac{1}{1-\frac{d}{T_j}\,j}-1$$

$$\frac{d}{T_i}i=\frac{1-1+\frac{dj}{T_j}}{1-\frac{dj}{T_j}}$$

$$\frac{d}{T_i}i=\frac{dj}{T_j-dj}$$ Отсюда имеем:

$$i=\frac{j}{T_j-dj}T_i \quad (3.10)$$ Аналогично выводится:

$$j=\frac{i}{T_i+di}T_j \quad (3.11)$$

Самостоятельное задание: рассмотреть первый случай.

3.5. Вопросы для самоконтроля.

1) Что называется дисконтированием?
2) По какой формуле находится дисконт?
3) Какую величину называют современной стоимостью?
4) Какие виды дисконтирования различают?
5) Какая ставка применяется при математическом дисконтировании?
6) Что называется дисконтным множителем?
7) Какая ставка применяется при банковском дисконтировании?
8) Какие ставки i и j называются эквивалентными?

3.6. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№4.9, 4.11, 4.13, 4.14, 5.12, 5.14, 5.18, 6.5, 6.7, 10.8, 10.11.

3.7. Глоссарий по лекции 3.

Дисконт - процентный платёж при дисконтировании.
Дисконтирование - операция нахождения первоначальной суммы по величине наращенной суммы.

Дисконтный множитель - множителем, который показывает, какую долю составляет первоначальная сумма долга в окончательной.

Математическое дисконтирование - дисконтирование, при котором применяется процентная ставка (наращения).

Современная стоимость - величина *K*, найденная с помощью дисконтирования.

Эквивалентные ставки – ставки, которые при прочих равных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам.

3.8. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Лекции «Основы финансовой математики» http://iloveeconomics.ru/sites/default/files/03.1_osnovy_finmat._lekcii_1_i_2_26.04.12.pdf
3) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
4) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 18-26, 41-44.
5) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 30-36, 68-76.

3.9. Список сокращений и обозначений.

D - дисконт;

$1/(1+ni)$ - дисконтный множитель в случае математического дисконтирования;

$(1-nj)$ - дисконтный множитель в случае банковского дисконтирования;

T_i - временная база для процентной ставки;

T_j - временная база для учётной ставки.

Лекция 4. Декурсивный метод начисления сложных процентов

Аннотация. В данной теме даётся понятие сложного процента, а также рассматриваются два способа начисления сложных процентов, выводятся формулы капитализации декурсивным методом при различной периодичности начисления сложных процентов. Приводится графическая иллюстрация декурсивного метода начисления сложных процентов, а также сравнение наращенных сумм по простой и сложной процентным ставкам. Рассматривается начисление сложных процентов при дробном числе лет, вводятся понятия номинальной и уравнивающей ставок сложных процентов.

Ключевые слова. Сложный процент, декурсивный метод, непрерывное начисление сложных процентов, общий способ, смешанный способ, номинальная ставка, эффективная ставка, уравнивающая ставка, релятивная ставка.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

4.1. Сложные проценты.

<u>Опр.4.1.</u> <u>*Сложными процентами*</u> называют проценты, начисляемые в каждом расчётном периоде на наращенную сумму (на $K+I$, а не на K).

Так называемое начисление «процента на процент».

Различают два способа начисления сложных процентов:

- <u>*декурсивный*</u> (последующий), когда сложные проценты начисляются и добавляются к капиталу в конце каждого расчётного периода;
- <u>*антисипативный*</u> (предварительный), когда проценты начисляются в начале каждого расчётного периода на сумму, которая будет наращена в конце этого расчётного периода.

4.2. Формулы расчёта наращенной суммы при начислении сложных процентов декурсивным методом.

а) Начисление сложных процентов (*капитализация*) производится 1 раз в году (ежегодное).

Пусть на первоначальный капитал *K* в течение *n* лет в конце каждого года начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке *p*. Найдём наращенную за это время сумму K_n .

За первый год процентный платёж будет: $I_1 = \frac{Kp}{100}$,

тогда наращенная сумма в конце 1-го года:

$$K_1 = K + I_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K(1+i).$$

Во втором году:

$$K_2 = K_1 + I_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

или $$K_2 = K(1+i)^2.$$

Аналогично: $K_3 = K(1+i)^3$ и так далее.

В конце n-го года: $$K_n = K(1+i)^n \quad (4.1)$$

Формула (4.1) называется формулой наращения капитала декурсивным методом при ежегодной капитализации, где $(1+i) = r$ - сложный декурсивный коэффициент, $(1+i)^n$ - множитель наращения. Формулу (4.1) можно ещё записать в виде: $K_n = Kr^n$.

б) Начисление сложных процентов m раз в году: m=4 (ежеквартальное), m=12 (ежемесячное), m=365 (ежедневное).

Пусть на сумму K в течение n лет начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке p, но начисление производится m раз в году в конце каждого расчётного периода. Найдём K_n.

Продолжительность расчётного периода составляет $1/m$ часть года. Процентный платёж за первый период первого года будет:

$$I_{1/m} = \frac{Kp}{100} \cdot \frac{1}{m} = \frac{Kp}{100m} = \frac{Ki}{m}$$

В конце первого расчётного периода:

$$K_{1/m} = K + \frac{Ki}{m} = K\left(1 + \frac{i}{m}\right).$$

В конце 2-го расчётного периода:

$$K_{2/m} = K_{1/m} + \frac{K_{1/m}\, i}{m} = K_{1/m}\left(1 + \frac{i}{m}\right) = K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^2 \text{ и т.д.}$$

В конце последнего m-го периода первого года:

$$K_{m1} = K_{m/m} = K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m.$$

Следовательно, учитывая (4.1), в конце n-го года:

$$K_{mn} = K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} \qquad (4.2)$$

Формула (4.2) называется формулой капитализации при начислении сложных процентов m раз в году.

в) Непрерывное начисление сложных процентов.

В этом случае число расчётных периодов стремится к бесконечности $(m \to \infty)$, а продолжительность расчётного периода стремится к нулю $\left(\frac{1}{m} \to 0\right)$.

Наращенная сумма:

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_{mn} = \lim_{m\to\infty} K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = K \cdot \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

В последнем пределе неопределённость 1^{∞} раскрывается с помощью 2-го замечательного предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828$$ (2-й замечательный предел).

Из последнего равенства:

$$K_n = K\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}\cdot i\cdot n} = K\cdot e^{i\cdot n}$$

Итак, формула наращенной суммы при непрерывной капитализации имеет вид:

$$K_n = K\cdot e^{i\cdot n} \quad (4.3)$$

Пример4.1: В банк сделан вклад на сумму 25000 рублей сроком на 3 года по сложной ставке 12% годовых. Найти наращенные суммы, если начисление процентов производится декурсивным методом:

а) 1 раз в год; б) 4 раза в год; в) ежемесячно;
г) ежедневно; д) непрерывно.

Решение:

а) по ф.(4.1): $K_n = K(1+i)^n = 25000(1+0{,}12)^3 = 35123{,}20$ р.

б) по ф.(4.2): $K_{4,3} = 25000\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 3} = 35644{,}02$ руб.

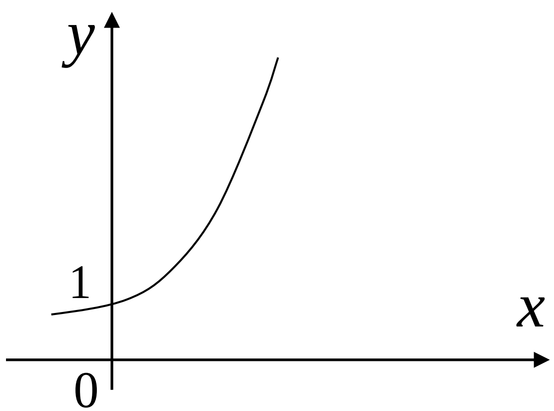
в) по ф.(4.2): $K_{12,3} = 25000\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12\cdot 3} = 35769{,}22$ руб.

г) по ф.(4.2): $K_{365,3} = 25000\left(1+\frac{0{,}12}{365}\right)^{365\cdot 3} = 35831{,}12$ руб.

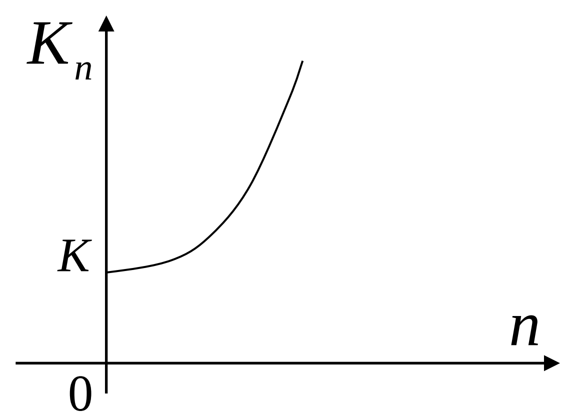
д) по ф.(4.3): $K_n = 25000\cdot e^{0{,}12\cdot 3} = 35833{,}24$ руб.

4.3. Графическая иллюстрация декурсивного метода начисления сложных процентов.

Из формулы (4.1) ($K_n = K \cdot (1+i)^n = K \cdot r^n$) видно, что наращенная сумма изменяется по показательному закону. График показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$ имеет вид:



Следовательно, график для наращенной суммы:



4.4. Сравнение наращенных сумм по простой и сложной процентным ставкам.

а) Аналитический способ сравнения.

Наращенные суммы по простой и сложной процентным ставкам при ежегодной капитализации, соответственно, равны:

$$K_n = K \cdot (1 + ni)$$

$$K_n = K \cdot (1 + i)^n$$

Пусть величины *K*, *n*, *i* в обеих формулах равны.

Сравним множители наращения (МН): $(1 + ni)$ и $(1 + i)^n$.

Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + ... + b^n$$

Тогда:

$$(1+i)^n = 1 + ni + \frac{n(n-1)}{2!}i^2 + ...$$

Первые два члена этого разложения дают МН по простой процентной ставке. Если срок n<1, тогда:

$\frac{n(n-1)}{2!}i^2 < 0$ и МН по простой ставке будет больше, чем МН по сложной процентной ставке.

Выводы: 1)При сроке n<1 простые проценты дают больший рост наращенной суммы, чем сложные при начислении процентов 1 раз в год.

2) Если n=1, то (n-1)=0 и в разложении останутся только два первых слагаемых, следовательно:

$(1+i)^n = 1+ni,$ то есть обе процентные ставки дают одинаковый рост.

3) Если срок n>1, то сложные проценты дают больший рост наращенной суммы, чем простые при начислении процентов 1 раз в год, так как в этом случае: $$\frac{n(n-1)}{2!} i^2 > 0.$$

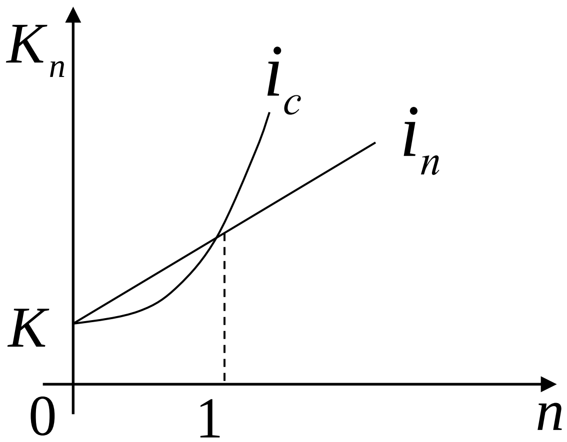
б) <u>Табличный способ сравнения</u>.

Пусть i_n - ставка простых процентов, а i_c - сложных и. $i_n = i_c = 0{,}12$ (p=12%). Рассмотрим МН для обеих процентных ставок:

МН	Срок ссуды					
	1 мес.	3 мес.	6 мес.	1 год	2 года	10 лет
$(1+ni)$	1,01	1,03	1,06	1,12	1,24	2,2
$(1+i)^n$	1,00949	1,0287	1,0583	1,12	1,2544	3,1058

в) <u>Графический способ сравнения</u>.

Построим в одной системе координат графики для наращенных сумм по простой и сложной процентным ставкам:



4.5. Начисление сложных процентов при дробном числе лет.

Пусть срок *n* задаётся в годах и *n* - нецелое число лет, тогда можно записать: *n*=*a*+*b*, где $a = [n]$ - целая часть *n*, а $b = \{n\}$ - дробная часть *n*, $0 \le b < 1$.

В этом случае применяют 2 способа:

1) Общий $K_n = K \cdot (1+i)^n = K \cdot (1+i)^{a+b}$ (4.4)

2) Смешанный

$$K_n = K \cdot (1+i)^a \cdot (1+bi) \quad (4.5)$$

По формуле (4.5) наращенная сумма будет больше, чем по формуле (4.4).

4.6. Номинальная и уравнивающая ставки сложных процентов.

<u>Опр.4.2</u> Если сложные проценты по годовой ставке p_c начисляются 1 раз в году, то ставка p_c (i_c) называется <u>*номинальной.*</u>

<u>Опр.4.3</u> Если сложные проценты по годовой ставке p_c начисляются m раз в году, то ставка $\frac{p_c}{m}\left(\frac{i_c}{m}\right)$ называется <u>*релятивной*</u> (относительной).

Например, номинальной процентной ставке 24% годовых соответствуют релятивные: полугодовая 12%, квартальная 6%, месячная 2%.

Часто возникает необходимость определить такую ставку сложных процентов, которая при начислении 1 раз в году привела бы к такому же финансовому результату, что и релятивная при начислении *m* раз в году.

<u>Опр.4.4</u> Годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же финансовый результат, что *m*-разовое начисление процентов по релятивной ставке, называется <u>*эффективной*</u> или <u>*уравнивающей*</u> (обозначение p_u (i_u)).

Из последнего определения следует:

$$\cancel{K}(1+i_u)^{\cancel{n}} = \cancel{K}\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{m\cancel{n}} \quad \text{или} \quad 1+i_u = \left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{m} \qquad (*)$$

Отсюда: $$i_u = \left(1 + \frac{i_c}{m}\right)^m - 1 \quad (4.6)$$

Из соотношения (*) следует:

$$1 + \frac{i_c}{m} = \sqrt[m]{1 + i_u}$$

Откуда получаем:

$$i_c = m \cdot \left(\sqrt[m]{1 + i_u} - 1\right) \quad (4.7)$$

Соотношения (4.6) и (4.7) определяют связь между номинальной и уравнивающей процентными ставками.

4.7. Вопросы для самоконтроля.

1) Что называется сложным процентом?
2) Какой способ начисления сложных процентов называется декурсивным?
3) Какой способ начисления сложных процентов называется антисипативным?
4) По какому закону изменяется наращенная сумма при декурсивном методе?
5) Как зависит наращенная сумма от количества начислений процентов в году при декурсивном методе?
6) Какие проценты (простые или сложные при начислении процентов 1 раз в год) дают больший рост наращенной суммы при сроке $n<1$?
7) Какие проценты (простые или сложные при начислении процентов 1 раз в год) дают больший рост наращенной суммы при сроке $n>1$?
8) Какая процентная ставка называется номинальной?
9) Какая процентная ставка называется релятивной?
10) Какая процентная ставка называется эффективной?

4.8. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№7.17, 7.19, 7.23, 11.11, 11,13.

4.9. Глоссарий по лекции 4.

Декурсивный метод – метод начисления сложных процентов, когда проценты начисляются и добавляются к капиталу в конце каждого расчётного периода.

Капитализация **-** начисление сложных процентов.

Номинальная процентная ставка – ставка, при которой сложные проценты по годовой процентной p_c ставке начисляются 1 раз в году.

Релятивная процентная ставка – ставка, получающаяся делением номинальной процентной ставки на количество m начислений сложных процентов в году.
Сложный процент - процент, начисляемый в каждом расчётном периоде на наращенную сумму.

Эффективная процентная ставка – годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же финансовый результат, что m-разовое начисление процентов по релятивной процентной ставке.

4.10. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Лекции «Основы финансовой математики» http://iloveeconomics.ru/sites/default/files/03.1_osnovy_finmat._lekcii_1_i_2_26.04.12.pdf
3) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
4) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 27-32, 45-47.
5) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 43-49.
6) Финансовая математика: с задачами и решениями: Учеб.-метод. Пособие. – 2-е изд.: Перев. с серб. Елены Кочович. – М.: Финансы и статистика, 2004. - С.67-70.

4.11. Список сокращений и обозначений.

r - сложный декурсивный коэффициент;
МН – множитель наращения;
p_c - номинальная процентная ставка;
p_c / m - релятивная процентная ставка;
p_u - уравнивающая процентная ставка.

Лекция 5. Антисипативный метод начисления сложных процентов

Аннотация. Данная тема является продолжением предыдущей темы и даёт понятие второго метода начисления сложных процентов – антисипативного. Далее даётся сравнение двух методов (антисипативного и декурсивного) в определении наращенной суммы. Вводятся понятия номинальной и уравнивающей учётных ставок. Выводятся формулы математического и банковского дисконтирования для сложных процентов.

Ключевые слова. Антисипативный метод, учётная ставка сложного процента, эффективная учётная ставка.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

5.1. Формулы расчёта наращенной суммы при начислении сложных процентов антисипативным методом.

<u>Опр.5.1</u> Если сложные проценты начисляются в начале каждого расчётного периода на сумму, которая будет наращена в конце этого расчётного периода, то в этом случае говорят, что проценты начисляются <u>*антисипативным*</u> методом.

а) <u>Начисление процентов производится 1 раз в году.</u>

Пусть на первоначальный капитал K в течение n лет в начале каждого года начисляются сложные проценты по годовой учётной ставке q_c . Найдём наращенную за это время сумму K_n .

За первый год процентный платёж будет: $I_1 = \dfrac{K_1 q_c}{100}$,
тогда наращенная сумма в начале 1-го года:

$K_1 = K + I_1 = K + \dfrac{K_1 q_c}{100}$. То есть: $K_1 - \dfrac{K_1 q_c}{100} = K$.

Отсюда: $K_1\left(1 - \dfrac{q_c}{100}\right) = K$ или

$$K_1 = \frac{K}{\left(1 - \frac{q_c}{100}\right)} = \frac{K}{(1 - j_c)}, \quad \text{где} \quad j_c = \frac{q_c}{100}.$$

В начале второго года наращенная сумма будет:

$K_2 = K_1 + I_2 = K_1 + K_2 j_c$. Отсюда: $K_2 = \dfrac{K_1}{(1 - j_c)}$, или

$$K_2 = \frac{K}{\left(1 - j_c\right)^2}.$$

Аналогично, в начале *n*-го года:

$$K_n = \frac{K}{\left(1 - j_c\right)^n}, \quad (5.1)$$

где $\frac{1}{\left(1 - j_c\right)^n}$ является множителем капитализации

при антисипативном методе.

б) <u>Начисление сложных процентов *m* раз в году.</u>

Пусть на сумму K в течение n лет начисляются сложные проценты по годовой учётной ставке q_c m раз в году в начале каждого расчётного периода.

Найдём наращенную сумму.

Продолжительность расчётного периода составляет $1/m$ часть года. Процентный платёж за первый период первого года будет:

$$I_{1/m} = \frac{K_{1/m} q_c}{100} \cdot \frac{1}{m} = \frac{K_{1/m} j_c}{m}.$$

Соответственно, наращенная сумма будет:

$$K_{1/m} = K + \frac{K_{1/m} j_c}{m}.$$

Откуда: $$K_{1/m} - \frac{K_{1/m} j_c}{m} = K$$ или

$$K_{1/m} = \frac{K}{1 - \frac{j_c}{m}}$$

В начале 2-го расчётного периода:

$$K_{2/m} = K_{1/m} + \frac{K_{2/m} j_c}{m}$$ и $$K_{2/m} = \frac{K_{1/m}}{1 - \frac{j_c}{m}} = \frac{K}{\left(1 - \frac{j_c}{m}\right)^2}$$

В начале последнего m-го периода первого года:

$$K_{m1} = K_{m/m} = \frac{K}{\left(1 - \frac{j_c}{m}\right)^m}$$

Следовательно, учитывая (1), в начале n-го года:

$$K_{mn} = \frac{K}{\left(1 - \frac{j_c}{m}\right)^{mn}} \qquad (5.2)$$

Формула (5.2) называется формулой капитализации при начислении сложных процентов антисипативным методом m раз в году.

<u>*Замечание5.1:*</u> При антисипативном методе временна́я база T=360дней, так как применяется учётная ставка $q_c(j_c)$.

5.2. Сравнение наращенных сумм при декурсивном и антисипативном методах начисления сложных процентов.

Наращенные суммы при ежегодной капитализации по декурсивному и антисипативному методам, соответственно, равны:

$$K_n = K \cdot \left(1 + i_c\right)^n \qquad\qquad K_n = \frac{K}{\left(1 - j_c\right)^n}$$

Пусть величины *K*, *n*, *i*, *j* в обеих формулах, соответственно, равны (*K*=*K*, *n*=*n*, *i*=*j*).

Сравним множители наращения (МН):

$\left(1 + i_c\right)^n$ и $\dfrac{1}{\left(1 - j_c\right)^n}$. Учитывая, что $i_c = j_c$, найдём разность: $$\frac{1}{1-i_c}-(1+i_c)=\frac{1-(1+i_c)(1-i_c)}{1-i_c}=$$

$$=\frac{1-(1-i_c^2)}{1-i_c}=\frac{i_c^2}{1-i_c}>0,$$ так как всегда $i_c<1.$

Следовательно: $$\frac{1}{1-i_c}>(1+i_c)$$ или

$$\frac{1}{(1-i_c)^n}>(1+i_c)^n.$$

<u>*Вывод5.1:*</u> Антисипативный метод даёт бóльшую величину наращенной суммы, чем декурсивный.

5.3. Сравнение наращенных сумм при начислении сложных процентов антисипативным методом 1 раз и *m* раз в году.

Сравним наращенные суммы:

$$K_n = \frac{K}{(1 - j_c)^n} \qquad K_{mn} = \frac{K}{\left(1 - \frac{j_c}{m}\right)^{mn}}$$

Пусть величины *K*, *n*, *i*, *j* в обеих формулах, соответственно, равны. Сравним множители наращения (МН):

$$\frac{1}{(1 - j_c)^n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{j_c}{m}\right)^{mn}} \quad \text{или}$$

сравним знаменатели: $(1-j_c)^n$ и $\left(1-\dfrac{j_c}{m}\right)^{mn}$ или $1-j_c$ и $\left(1-\dfrac{j_c}{m}\right)^{m}$. По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{m}=1-\frac{mj_c}{m}+\frac{m(m-1)}{2!}\cdot\left(-\frac{j_c}{m}\right)^{2}+\ldots$$ или

$$\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{m}=1-j_c+\frac{(m-1)}{2}\cdot\frac{j_c^2}{m}+\ldots$$

Так как m>1, то

$\dfrac{(m-1)}{2}\cdot\dfrac{j_c^2}{m}>0,$ следовательно $\left(1-\dfrac{j_c}{m}\right)^{m}>1-j_c$.

Из последнего неравенства следует:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^m} < \frac{1}{1-j_c} \quad \text{или} \frac{1}{\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{mn}} < \frac{1}{(1-j_c)^n}$$

<u>*Вывод5.2:*</u> При антисипативном методе начисления сложных процентов ежегодная капитализация даёт большую величину наращенной суммы, чем при начислении процентов *m* раз в году.

<u>*Пример5.1:*</u> Определить наращенную сумму через два года, если первоначальная сумма 5 тысяч рублей. Сложные проценты начисляются антисипативным методом по ставке 11% годовых:

а) ежегодно, б) по полугодиям, в) поквартально, г) ежемесячно.

Решение.

Здесь $K = 5000,\quad j_c = 0{,}11$

а) По ф.(5.1) $K_n = \dfrac{5000}{(1-0{,}11)^2} = 6312{,}33$ рублей,

б) По ф.(5.2) $K_{2,2} = \dfrac{5000}{\left(1-\dfrac{0{,}11}{2}\right)^{2\cdot 2}} = 6269{,}64$ рублей,

в) По ф.(5.2) $K_{4,2} = \dfrac{5000}{\left(1-\dfrac{0{,}11}{4}\right)^{4\cdot 2}} = 6249{,}61$ рублей, г) По ф.(5.2) $K_{12,2} = \dfrac{5000}{\left(1 - \dfrac{0{,}11}{12}\right)^{12\cdot 2}} = 6236{,}71$ рублей.

Этот пример подтверждает Вывод5.2, сделанный ранее, кроме того из примера видно, что, в отличие от декурсивного метода, при антисипативном: чем больше периодов начисления, тем меньше наращенная сумма.

5.4. Номинальная и уравнивающая учётные ставки.

<u>Опр.5.2</u> Если сложные проценты по годовой ставке q_c начисляются 1 раз в год, то ставка $q_c\ (j_c)$ называется <u>*номинальной.*</u>

<u>Опр.5.3</u> Если сложные проценты по годовой ставке q_c начисляются *m* раз в год, то ставка $\frac{q_c}{m}\left(\frac{j_c}{m}\right)$ называется <u>*релятивной*</u> (относительной).

<u>Опр.5.4</u> <u>*Уравнивающей*</u> или эффективной учётной ставкой (обозначение $q_u\ (j_u)$) называется такая ставка, которая при начислении 1 раз в год приводит к такому же финансовому результату, что и релятивная, начисляемая *m* раз в году.

Из последнего определения следует:

$$\frac{K}{(1-j_u)^n}=\frac{K}{\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{mn}} \quad \text{или } 1-j_u=\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^m \ (*)$$

Отсюда:

$$j_u=1-\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^m \qquad (5.3)$$

Из соотношения (*) следует:

$$1-\frac{j_c}{m}=\sqrt[m]{1-j_u}$$

Откуда получаем:

$$j_c = m\cdot\left(1-\sqrt[m]{1-j_u}\right) \quad (5.4)$$

Соотношения (5.3) и (5.4) определяют связь между номинальной и уравнивающей учётными ставками.

5.5. Вопросы для самоконтроля.

1) При каком методе начисления сложных процентов проценты начисляются в начале каждого расчётного периода на сумму, которая будет наращена в конце этого расчётного периода?
2) Какая временная база применяется при антисипативном методе?
3) Какой метод (антисипативный или декурсивный) даёт бо́льшую величину наращенной суммы?
4) Как зависит наращенная сумма от количества начислений процентов в году при антисипативном методе?
5) Какая учётная ставка называется номинальной?
6) Какая учётная ставка называется релятивной?
7) Какая учётная ставка называется эффективной?
8) Что называется математическим дисконтированием при сложных процентах?
9) По какой формуле определяется дисконтный множитель при математическом дисконтировании?
10) Что называется банковским дисконтированием при сложных процентах?
11) По какой формуле определяется дисконтный множитель при банковском дисконтировании?

5.6. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№8.13, 8.15, 8.17, 9.12, 9.14, 9.16, 11.14, 11.16.

5.7. Глоссарий по лекции 5.

Антисипативный метод – метод начисления сложных процентов, когда проценты начисляются и добавляются к капиталу в начале каждого расчётного периода на сумму, которая будет наращена в конце этого расчётного периода.

Банковское дисконтирование при сложных процентах - это операция, обратная операции наращения по антисипативному методу.

Математическое дисконтирование при сложных процентах - это операция, обратная операции наращения по декурсивному методу.

Номинальная учётная ставка – ставка, при которой сложные проценты по годовой учётной q_c ставке начисляются 1 раз в году.

Релятивная учётная ставка – ставка, получающаяся делением номинальной учётной ставки на количество m начислений сложных процентов в году.

Эффективная учётная ставка – годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же финансовый результат, что m-разовое начисление процентов по релятивной учётной ставке.

5.8. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Лекции «Основы финансовой математики» http://iloveeconomics.ru/sites/default/files/03.1_osnovy_finmat._lekcii_1_i_2_26.04.12.pdf
3) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
4) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 32-40.
5) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 49-61.
6) Финансовая математика: с задачами и решениями: Учеб.-метод. Пособие. – 2-е изд.: Перев. с серб. Елены Кочович. – М.: Финансы и статистика, 2004. - С.71-75.

5.9. Список сокращений и обозначений.

$1/(1-j_c)^n$ - множителем капитализации при антисипативном методе;

q_c - номинальная учётная ставка;

q_c/m - релятивная учётная ставка;

q_u - уравнивающая процентная ставка;

$(1-j_c)^n$ - дисконтный множитель по сложной учётной ставке.

Лекция 6. Финансовые расчеты с учетом удержания комиссионных

Аннотация. В данной теме даются понятия комиссионных для простой и сложной ставок процентов. Также приводится сравнение величин наращенных сумм по различным ставкам. Выводятся формулы эквивалентности различных ставок.

Ключевые слова. Комиссионные, эквивалентные ставки процентов.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

6.1. Учёт удержания комиссионных в расчётах по простым процентам.

Пусть при выдаче кредита по простой ставке процентов банк удерживает комиссионные. Тогда погашаемая сумма с процентами будет:

$$K_n = (K - \Delta K)\cdot(1 + ni_k) \quad (6.1)$$

Здесь i_k - простая ставка процентов, характеризующая доходность кредитной операции с учётом комиссионных.

ΔK - сумма комиссии, которую можно представить в виде:

$$\Delta K = GK \quad (6.2)$$

В формуле (6.2) G - это коэффициент, показывающий долю комиссионных в кредите, $0 < G < 1$.

С другой стороны, погашаемая сумма с процентами, начисляемыми по простой ставке процентов i, будет определяться обычной формулой наращения:

$$K_n = K(1 + ni) \quad (6.3)$$

Приравняв правые части (6.1) и (6.3), получим:

$$(K - \Delta K) \cdot (1 + ni_k) = K(1 + ni)$$ или с учётом (6.2):

$$(K - GK) \cdot (1 + ni_k) = K(1 + ni).$$

Сократив на K последнее равенство, получим:

$$(1 - G) \cdot (1 + ni_k) = 1 + ni$$ или

$$1+ni_k=\frac{1+ni}{1-G},\quad \text{откуда:}$$

$$ni_k=\frac{1+ni-1+G}{1-G}=\frac{G+ni}{1-G}\qquad \text{Следовательно,}$$

$$i_k=\frac{G+ni}{n(1-G)}\quad (6.4)$$

Формула (6.4) определяет простую процентную ставку, учитывающую комиссионные, когда время задаётся в годах. Если время задаётся в месяцах, то $n=\frac{m}{12}$, если время задаётся в днях, то $n=\frac{d}{T}$, где T=365(366) или 360.

Пример6.1: При выдаче кредита на 7 месяцев под простые 19% годовых удержаны комиссионные в размере 2% от суммы кредита. Определить доходность кредитной операции с учётом комиссионных.

Решение.

Здесь G=0,02; i=0,19; $n = 7/12$ По формуле (6.4):

$$i_k = \frac{0{,}02 + \frac{7}{12}0{,}19}{\frac{7}{12}(1 - 0{,}02)} \approx \frac{0{,}13083333}{0{,}57166667} \approx 0{,}2289$$ или

$$p_k = 22{,}89\%$$

6.2. Учёт удержания комиссионных в расчётах по сложным процентам.

Если кредит выдан по ставке сложных процентов i_c на n лет и при этом удерживаются комиссионные $\Delta K = GK,$ тогда будем иметь:

$$K_n = (K - GK)\cdot(1 + i_k)^n,$$ где i_k - ставка сложных процентов, учитывающая комиссионные.

С другой стороны, погашаемая сумма с процентами, начисляемыми по сложной процентной ставке i, будет:

$$K_n = K(1 + i)^n$$

Приравняв правые части последних двух равенств, получим:

$$(K - GK)\cdot(1+i_k)^n = K(1+i)^n$$ Откуда:

$$(1+i_k)^n = \frac{(1+i)^n}{1-G}$$ или

$$1+i_k = \frac{1+i}{\sqrt[n]{1-G}}$$ Окончательно имеем:

$$i_k = \frac{1+i}{\sqrt[n]{1-G}} - 1 \quad (6.5)$$

Формула (6.5) определяет сложную процентную ставку с учётом комиссионных, когда время задаётся в годах.

Пример6.2: Кредит выдан на 3 года по сложной процентной ставке 20% годовых. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 1,5% от его суммы. Определить доходность кредитной операции с учётом комиссионных.

Решение.

Здесь G=0,015; i=0,2; n=3. По формуле (6.5):

$$i_k = \frac{1+0{,}2}{\sqrt[3]{1-0{,}015}} - 1 \approx 0{,}2061$$ или (20,61%).

6.3. Сравнение величин наращенных сумм по различным ставкам.

1) Наращение по простой учётной и по сложной учётной ставкам.

$$K_n = \frac{K}{1 - nj_П} \qquad \text{и} \qquad K_n = \frac{K}{(1 - j_c)^n}$$

Пусть $j_П = j_c = j$. Тогда при прочих равных условиях (K=K, n=n) достаточно сравнить знаменатели дробей: $1 - nj_П$ и $(1 - j_c)^n$. Согласно формуле бинома Ньютона второе выражение можно представить в виде:

$$(1-j_c)^n = 1 - nj + \frac{n(n-1)}{2!}(-j)^2 - \ldots \quad (*)$$

Если n<1 года, то (n-1)<0 и

$$\left(1 - nj + \frac{n(n-1)}{2!}(-j)^2 - \ldots\right) < (1-nj),$$ следовательно:

$$(1-j_c)^n < 1 - nj$$ или

$$\frac{K}{1-nj_П} < \frac{K}{(1-j_c)^n},$$ то есть: $$K_n^П < K_n^c.$$

<u>*Вывод 6.1*</u>: При сроке n<1 года простая учётная ставка даёт меньшую величину наращенной суммы, чем сложная учётная.

Если n=1 году, то согласно (*), (n-1)=0 и все слагаемые, кроме двух первых обращаются в нуль и

$$(1-j_c)^n = 1-nj$$

<u>*Вывод 6.2*</u>: При сроке n=1 году $K_n^{П} = K_n^c$.

При сроке n>1 года из равенства (*) вытекает:

$$(1-nj+\frac{n(n-1)}{2!}(-j)^2-...) > (1-nj)$$ или

$$(1-j_c)^n > 1-nj$$ то есть: $$\frac{K}{1-nj_П} > \frac{K}{(1-j_c)^n}.$$

<u>*Вывод 6.3*</u>: При сроке n>1 года наращенная сумма по простой учётной ставке больше наращенной суммы по сложной учётной ставке.

Учитывая результаты сравнения по простой ставке $i_П$ и простой учётной ставке $j_П$, а также по простой и сложной ставкам процентов $i_П$ и i_c, можно записать следующие соотношения:

а) при n<1 года:

$$(1+i_c)^n < (1+ni_П) < (1-nj_П)^{-1} < (1-j_c)^{-n}$$

б) при n=1 году:

$$(1+i_c)^n = (1+ni_П) < (1-nj_П)^{-1} = (1-j_c)^{-n}$$

в) при n>1 года:

$$(1+ni_П) < (1+i_c)^n < (1-j_c)^{-n} < (1-nj_П)^{-1}$$

Сравнивая результаты дисконтирования по различным ставкам процентов, необходимо учесть, что дисконтирование - операция обратная наращению, поэтому достаточно все выше приведённые соотношения возвести в степень (-1):

а) при n<1 года:

$$(1+i_c)^{-n} > (1+ni_П)^{-1} > (1-nj_П) > (1-j_c)^n$$

б) при n=1 году:

$$(1+i_c)^{-n} = (1+ni_П)^{-1} > (1-nj_П) = (1-j_c)^n$$

в) при n>1 года:

$$(1+ni_П)^{-1} > (1+i_c)^{-n} > (1-j_c)^n > (1-nj_П)$$

<u>Замечание</u>: Все сравнения проведены при условии, что $i_{П} = i_c = j_{П} = j_c$.

6.4. Эквивалентность различных ставок.

Рассмотрим различные формулы наращенных сумм:

а) $K_n = K(1+ni_{П})$ и $K_n = K(1+i_c)^n$

Приравняем множители наращения (МН):

$1+ni_{П} = (1+i_c)^n$. Отсюда получим:

$$i_{П} = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n} \quad (6.6)$$

$$i_c = \sqrt[n]{1+ni_П} - 1 \quad (6.7)$$

б) $K_n = K(1-nj_П)^{-1}$ и $K_n = K(1-j_c)^{-n}$

Приравняем МН:

$(1-nj_П)^{-1}$ и $(1-j_c)^{-n}$ или $1-nj_П$ и $(1-j_c)^n$

$1-nj_П = (1-j_c)^n$ Отсюда:

$$j_П = \frac{1-(1-j_c)^n}{n} \quad (6.8)$$

$$j_c = 1 - \sqrt[n]{1-nj_П} \quad (6.9)$$

где $0 < j_П < \dfrac{1}{n}$

в) $i_П$ и i_c при начислении сложных процентов m раз в году: $K_n = K(1+ni_П)$ и $K_{mn} = K\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn}$

Приравняем МН: $1+ni_П$ и $\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn}$: $1+ni_П = \left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn}$ Отсюда получим

$$i_П = \frac{\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn}-1}{n} \quad (6.10)$$

$$i_c = m\left(\sqrt[mn]{1+ni_П}-1\right) \quad (6.11)$$

г) i_c и j_c при начислении m раз в году:

$$K_{mn} = K\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn} \quad \text{и} \quad K_{mn} = \frac{K}{\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{mn}}$$

Приравняем МН:

$$\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn} = \left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{-mn} \quad \text{или} \quad 1+\frac{i_c}{m} = \left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{-1} \qquad (**)$$

Отсюда получим $\dfrac{i_c}{m} = \dfrac{m}{m-j_c} - 1 = \dfrac{j_c}{m-j_c}$ или

$$i_c = \frac{mj_c}{m-j_c} \qquad (6.12)$$

Из соотношения (**) получим:

$$1-\frac{j_c}{m}=\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{-1} \qquad \text{или} \qquad \frac{j_c}{m}=1-\frac{m}{m+i_c}=\frac{i_c}{m+i_c}$$

Отсюда получим

$$j_c=\frac{mi_c}{m+i_c} \qquad (6.13)$$

д) $j_П$ и j_c при начислении сложных процентов m раз в году:

$$K_n=K(1-nj_П)^{-1} \qquad \text{и} \qquad K_{mn}=K\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{-mn}$$

Приравняем величины обратные МН:

$$1-nj_П=\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{mn} \qquad (***)$$

Отсюда получим:

$$j_{П} = \frac{1-\left(1-\frac{j_c}{m}\right)^{mn}}{n} \quad (6.14)$$

Из соотношения (***) также следует:

$$j_c = m\left(1-\sqrt[mn]{1-nj_{П}}\right) \quad (6.15)$$

где $0 < j_{П} < \dfrac{1}{n}$

6.5. Вопросы для самоконтроля.

1) В каких пределах изменяется коэффициент, показывающий долю комиссионных в кредите?
2) Какая учётная ставка (простая или сложная) при сроке $n<1$ года даёт меньшую величину наращенной суммы?
3) Какая учётная ставка (простая или сложная) при сроке $n=1$ года даёт меньшую величину наращенной суммы?
4) Какая учётная ставка (простая или сложная) при сроке $n>1$ года даёт меньшую величину наращенной суммы?
5) Зависит ли доходность кредитной операции с учётом удержания комиссионных от суммы кредита?

6.6. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№12.11, 12.13, 12.16.

6.7. Глоссарий по лекции 6.

Комиссионные за выдачу кредита - сбор, который осуществляет банк непосредственно при выдаче кредита. Чаще всего такие комиссии снимаются при «наличном» кредитовании.

Комиссионные сборы в банке - это платежи, которые вносятся заёмщиком за различные услуги банка. В такие услуги могут включаться: рассмотрение кредитной заявки, выдача кредита, выдача наличных средств или перечисление безналичных средств.

6.8. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Лекции «Основы финансовой математики» http://iloveeconomics.ru/sites/default/files/03.1_osnovy_finmat._lekcii_1_i_2_26.04.12.pdf
3) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
4) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 48-50.
5) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 82-83.

6.9. Список сокращений и обозначений.

i_k - ставка процентов, характеризующая доходность кредитной операции с учётом комиссионных;

G - коэффициент, показывающий долю комиссионных в кредите;

$i_П$ - простая процентная ставка;

i_C - сложная процентная ставка;

$j_П$ - простая учётная ставка;

j_C - сложная учётная ставка.

Лекция 7. Учет инфляции в финансовых расчетах

Аннотация. Данная тема рассматривает такие понятия, как инфляция, уровень (или темп) инфляции, индекс инфляции. Выводится формула для наращенной суммы в условиях инфляции. Определяется действительная ставка процентов с учётом инфляции (для простой и сложной ставок процентов).

Ключевые слова. Инфляция, уровень инфляции , темп инфляции, индекс инфляции, реальный доход, реальное значение суммы с учётом инфляции.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

7.1. Уровень и индекс инфляции.

В приведённых ранее формулах наращения денежные суммы рассматривались по номиналу, то есть не принималась во внимание реальная покупательная способность денег.

Опр.7.1 *Инфляция* - это обесценение денег относительно товаров и услуг, то есть снижение покупательной способности денег вследствие роста цен на товары и услуги.

Учёт инфляции необходим, по крайней мере, в двух случаях:

1) при расчёте наращенной суммы денег;

2) при определении действительной ставки процентов, учитывающей инфляцию.

При количественной оценке инфляции используют:

- *уровень* (или темп) *инфляции* (τ);
- *индекс инфляции.* $(I_и)$.

Уровень инфляции (УИ) показывает, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период:

$$\tau = \frac{\Delta S}{S} \cdot 100\%$$

Здесь ΔS - сумма, на которую нужно увеличить величину S, чтобы сохранить её покупательную способность в условиях инфляции.

В расчётах τ обычно берут в десятичных дробях:

$$\tau = \frac{\Delta S}{S} \quad (7.1)$$

Отсюда: $\Delta S = S\tau$

Сумма, покупательная способность которой с учётом инфляции должна соответствовать покупательной способности суммы S, будет равна:

$$S_\tau = S + \Delta S = S + S\tau = S(1+\tau)$$ или, обозначив

$$I_и = 1+\tau \quad (7.2)$$

будем иметь:

$$S_\tau = S \cdot I_и \quad (7.3)$$

Индекс инфляции $I_и = 1+\tau$ показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Соотношение (7.2) характеризует взаимосвязь между уровнем и индексом инфляции.

Определим УИ за некоторый срок (например, один год) на основании значений уровня инфляции за периоды, меньшие этого срока (например, один месяц).

Для первого периода: $S_{\tau_1} = S(1+\tau_1);$

для второго: $S_{\tau_2} = S_{\tau_1}(1+\tau_2) = S(1+\tau_1)\cdot(1+\tau_2);$

и так далее, для *l*-го периода получим:

$$S_{\tau_l} = S(1+\tau_1)\cdot(1+\tau_2)\cdot\ldots\cdot(1+\tau_l);$$

Индекс инфляции за весь срок будет равен:

$$I_u = (1+\tau_1)\cdot(1+\tau_2)\cdot\ldots\cdot(1+\tau_l) \quad (7.4)$$

Из (7.2) и (7.4) следует, что УИ за весь срок:

$$\tau = (1+\tau_1)\cdot(1+\tau_2)\cdot\ldots\cdot(1+\tau_l)-1 \quad (7.5)$$

Пусть продолжительности рассматриваемых периодов равны и УИ в каждом периоде одинаковы: $(\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_l = \tau_0)$, тогда формула (7.4) преобразуется:

$$I_u = (1+\tau_0)^l \quad (7.4')$$

Выражение для УИ будет следующим:

$$\tau = (1+\tau_0)^l - 1 \quad (7.5')$$

Пример7.1: Найти годовой уровень инфляции, если постоянный уровень инфляции в месяц составляет 2% .

Решение.

Здесь τ_0 =0,02; l=12; По формулам (7.4′) и (7.5′):

$$I_u = (1 + 0{,}02)^{12} \approx 1{,}2682$$

$$\tau = (1 + 0{,}02)^{12} - 1 \approx 0{,}2682 \quad (26{,}82\%)$$

<u>Вывод:</u> Постоянный уровень инфляции 2% в месяц приводит к росту цен за год в размере $I_u = 1{,}2682$

Таким образом действительный УИ за год будет 26,82%, а не 24%, что является результатом суммирования.

7.2. Расчёт наращенной суммы в условиях инфляции.

Если имеется некоторая сумма S, тогда её *реальное значение* с учётом инфляции через некоторый период времени будет:

$$C = \frac{S}{I_{и}}$$

По данным Примера 7.1 реальное значение суммы S=3000 рублей через год будет равно

$$C = \frac{3000}{1,2682} = 2365,56 \text{ рублей.}$$

Пусть в банк сделан вклад равный сумме *K* на *n* лет, а предполагаемый УИ за этот период времени составит τ , тогда наращенная сумма по простой ставке с учётом инфляции будет:

$$C = \frac{K_n}{I_u} = \frac{K(1+ni)}{1+\tau} \quad (7.6)$$

При постоянном годовом уровне инфляции равном τ_0 формула (7.6) будет иметь вид:

$$C = \frac{K(1+ni)}{(1+\tau_0)^n} \quad (7.6')$$

При ставке сложных процентов и их начислении 1 раз в году будем иметь, соответственно, формулы:

$$C=\frac{K(1+i_c)^n}{1+\tau} \quad (7.7)$$

и

$$C=\frac{K(1+i_c)^n}{(1+\tau_0)^n} \quad (7.7')$$

При начислении сложных процентов m раз в году:

$$C=\frac{K\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn}}{1+\tau} \quad (7.8)$$

$$C=\frac{K\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn}}{(1+\tau_0)^n} \quad (7.8')$$

Разность $D_u = C - K$ называется *реальным доходом*.

Пример7.2: Вклад в сумме 100 тысяч рублей положен в банк на 8 месяцев с ежемесячным начислением сложных процентов по номинальной ставке 25% годовых. Определить реальный доход вкладчика при ожидаемом ежемесячном уровне инфляции 1%.

Решение.

Здесь τ_0 =0,01; *K*=100000; i_c =0,25; *m*=12; *l*=8; $n = \dfrac{8}{12}$;

Из формулы (7.8′) следует:

$$C = \frac{K\left(1+\dfrac{i_c}{m}\right)^{mn}}{(1+\tau_0)^l} = \frac{100000\cdot\left(1+\dfrac{0,25}{12}\right)^{\cancel{12}\cdot\frac{8}{\cancel{12}}}}{(1+0,01)^8} =$$

$$=\frac{100000\cdot 1{,}17933922}{1{,}08285671}=108910$$ рублей. Реальный доход будет: $D_u=C-K=108910-100000=8910$ рублей.

7.3. Определение действительной ставки процентов с учётом инфляции.

а) *Простая ставка процентов.*

Обозначим сумму, покупательная способность которой в следствие инфляции за n лет будет равна покупательной способности суммы K_n, через $K_{n,\tau}$

Согласно формуле (7.3): $K_{n,\tau}=K_n\cdot I_u=K_n\cdot(1+\tau)$

Итак: $K_{n,\tau} = K(1+ni)(1+\tau)$, (*)

где τ - УИ за срок n лет.

С другой стороны, наращенная сумма с учётом инфляции равна: $K_{n,\tau} = K(1+ni_\tau)$, (**) где i_τ -это ставка простых процентов, учитывающая инфляцию.

Приравняв правые части равенств (*) и (**), будем иметь:

$$\cancel{K}(1+ni_\tau) = \cancel{K}(1+ni)(1+\tau),$$

$$1+ni_\tau = 1+ni+\tau+ni\tau \quad \text{или}$$

$$i_\tau = \frac{ni+\tau+ni\tau}{n} \quad (7.9)$$

Равенство (7.9) может быть выражено и через индекс инфляции I_u. Действительно, переписав (*) в виде $K_{n,\tau} = K(1+ni)I_u$, будем иметь:

$$1+ni_\tau = (1+ni)I_u \quad \text{или}$$

$$i_\tau = \frac{(1+ni)I_u - 1}{n} \qquad (7.9')$$

<u>*Пример3:*</u> Банк выдал кредит на 7 месяцев в размере 500 тысяч рублей по простой ставке процентов 24% годовых. Ожидаемый ежемесячный уровень инфляции составляет 2%. Определить:

а) ставку процентов с учётом инфляции,

б) погашаемую сумму,

в) сумму процента за кредит.

Решение.

Здесь τ =0,02; K=500000; i =0,24; $n=\dfrac{7}{12}$;

а) из формулы (7.9) следует:

$$i_\tau=\frac{\frac{7}{12}\cdot 0{,}24+0{,}02+\frac{7}{12}\cdot 0{,}24\cdot 0{,}02}{\frac{7}{12}}\approx 0{,}2791\quad(27{,}91\%)$$

б) по формуле (**) находим:

$$K_{n,\tau}=500000\cdot\left(1+\frac{7}{12}\cdot 0{,}2791\right)\approx 581404{,}17\ \text{рублей.}$$

в) $I_u=K_{n,\tau}-K=581404{,}17-500000=81404{,}17$ руб.

б) *Сложная ставка процентов.*

Согласно формуле (7.3) для сложных процентов:

$$K_{n,\tau} = K_n \cdot I_u = K_n \cdot (1+\tau) = K(1+i_c)^n (1+\tau)$$

С другой стороны, можно записать:

$K_{n,\tau} = K(1+i_\tau)^n, \quad (***)$ где i_τ - ставка сложных процентов с учётом инфляции.

Приравняв правые части последних равенств, получим:

$$\cancel{K}(1+i_\tau)^n = \cancel{K}(1+i_c)^n(1+\tau) \quad \text{или} \quad 1+i_\tau = (1+i_c)\sqrt[n]{1+\tau}$$

Окончательно имеем:

$$i_\tau = (1+i_c)\sqrt[n]{1+\tau} - 1 \quad (7.10)$$

Формулу (7.10) можно выразить и через I_u, вычисленный за весь срок *n* лет:

$$i_\tau = (1 + i_c)\sqrt[n]{I_u} - 1 \quad (7.10')$$

Учитывая, что $I_u = (1+\tau_0)^n$, где τ_0 - среднегодовой уровень инфляции, из формулы (7.10´) получим:

$i_\tau = (1 + i_c)(1+\tau_0) - 1$ или

$$i_\tau = i_c + \tau_0 + i_c\tau_0 \quad (7.11)$$

<u>Пример7.4:</u> Кредит в размере 5 млн. рублей выдаётся на 4 года, доходность операции составляет 15% годовых по сложной ставке процентов. Расчётный уровень инфляции составляет 18% в год. Определить:

а) ставку процентов с учётом инфляции,

б) погашаемую сумму,

в) сумму процента за кредит.

Решение.

Здесь τ_0 =0,18; K=5000000; i_c =0,15; n=4 года

а) из формулы (7.11) следует:

$$i_\tau = 0{,}15 + 0{,}18 + 0{,}15 \cdot 0{,}18 = 0{,}357 \quad (35{,}7\%)$$

б) из формулы (***) получим:

$$K_{n,\tau} = 5000000 \cdot (1 + 0{,}357)^4 = 16954672 \quad \text{руб.,}$$

в) $$I_u = 16954672{,}10 - 5000000 = 11954672 \quad \text{руб.}$$

7.4. Вопросы для самоконтроля.

1) Что называется инфляцией?
2) Что называется уровнем инфляции?
3) Что показывает индекс инфляции?
4) Можно ли суммировать ежемесячный уровень инфляции для определения уровеня инфляции за год?
5) По какой формуле определяется реальное значение суммы S с учётом инфляции?
6) По какой формуле определяется действительная простая ставка процентов с учётом инфляции?
7) По какой формуле определяется действительная сложная ставка процентов с учётом инфляции?

7.5. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№13.10, 13.12, 13.19.

7.6. Глоссарий по лекции 7.

Индекс инфляции - коэффициент, показывающий, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Инфляция - обесценение денег относительно товаров и услуг, то есть снижение покупательной способности денег вследствие роста цен на товары и услуги.

Реальное значение суммы S - отношение этой суммы к индексу инфляции.

Реальный доход - разность между реальным значением суммы S и первоначальной суммой.

Уровень инфляции - коэффициент, показывающий, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период.

7.7. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Лекции «Основы финансовой математики» http://iloveeconomics.ru/sites/default/files/03.1_osnovy_finmat._lekcii_1_i_2_26.04.12.pdf
3) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
4) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 51-54.
5) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 83-89.

7.8. Список сокращений и обозначений.

УИ - уровень инфляции;

$I_и$ - индекс инфляции;

C - реальное значение суммы S с учётом инфляции;

$D_и$ - реальный доход;

$K_{n,\tau}$ - сумма, покупательная способность которой в следствие инфляции за n лет будет равна покупательной способности суммы K_n;

i_τ - действительная ставка процентов с учётом инфляции.

Лекция 8. Постоянные финансовые ренты (аннуитеты)

Аннотация. В данной теме даются понятия потока платежей, финансовой ренты, аннуитета, Рассматриваются основные виды рент: дискретные и непрерывные, постоянные и переменные, пренумерандо и постнумерандо, верные и условные и т.д. Выводятся формулы для постоянных финансовых рент.

Ключевые слова. Поток платежей, финансовая рента, аннуитет, член ренты, период ренты, срок ренты, годовая рента, *a*-срочная рента, пренумерандо, постнумерандо.

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

8.1. Основные понятия.

В финансовой практике часто приходится иметь дело не с отдельными разовыми платежами, а с последовательностью или рядом выплат. Например, погашение потребительского кредита, перечисление пенсии на счёт в банке и т.д.

Опр.8.1 *Потоком платежей* называется последовательность платежей.

Опр.8.2 *Финансовой рентой (или рентой)* называется поток платежей с положительными членами и одинаковыми временными интервалами между платежами.

Замечание: Иногда подобного рода потоки платежей называют *аннуитетами*, что, строго говоря, применимо только к ежегодным выплатам.

К параметрам ренты относятся:

- *член ренты* - размер отдельного платежа;
- *период ренты* - временной интервал между двумя последовательными платежами;
- *срок ренты* - время от начала первого периода ренты до конца последнего;
- *процентная ставка* - сложная ставка используемая при наращении и дисконтировании платежей.

Дополнительными параметрами ренты могут быть:

- Число поступлений денежных средств в год (a);
- Число начислений сложных процентов в год (m).

8.2. Основные виды рент.

а) По количеству платежей в году различают *дискретные* и *непрерывные* (частые платежи).

Дискретные, в свою очередь, подразделяются на: *годовые*, когда платежи производятся 1 раз в году и *a-срочные*, когда платежи производятся *a* раз в году.

б) По частоте начислений процентов в году ренты подразделяются на:

- ренты с ежегодным начислением;
- ренты с начислением *m* раз в году;
- ренты с непрерывным начислением.

в) По величине своих членов - на:
постоянные (платежи одинаковых размеров) и *переменные* (платежи разных размеров).

г) По моменту выплат платежей в пределах периода ренты - на:
пренумерандо (платежи в начале периодов) и *постнумерандо* (платежи в конце периодов).

д) Кроме того, ренты подразделяются по вероятности выплат на:
верные (подлежат безусловной уплате (кредит) и *условные* (уплата в зависимости от наступления некоторого случайного события (страховые аннуитеты или пожизненная выплата пенсии)).

е) По количеству своих членов - на:

ограниченные (срок заранее оговорён)

бесконечные или вечные (срок операции продолжителен и не оговаривается конкретными датами).

ж) По соотношению начала срока ренты и какого-либо момента времени, упреждающего начало ренты (начало действия контракта) на:

немедленные;

отсроченные (погашение долга в рассрочку после льготного периода).

8.3. Анализ постоянных финансовых рент.

а) Постоянная годовая финансовая рента пренумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

Пусть на некоторый счёт в начале каждого года в течение n лет вносится одна и та же сумма K. На аккумулируемые (накапливаемые) средства начисляются сложные проценты декурсивным методом по ставке p% годовых. Определим конечную величину вкладов через n лет.

Здесь K - размер члена ренты, $i = \dfrac{p}{100}$ - ставка ренты, n - срок ренты.

Первый взнос K, вкладываемый в начале 1-го года, будет наращиваться в течение n лет, при этом наращенная декурсивным методом сумма будет:

$K_1 = K(1+i)^n = Kr^n$, где r=(1+i) - сложный декурсивный коэффициент (СДК). Второй взнос K вкладывается на (n-1) год и соответствующая наращенная сумма будет:

$$K_2 = K(1+i)^{n-1} = Kr^{n-1}$$ и так далее.

Последний взнос K вкладывается в начале n-го года на 1 год, в конце которого наращенная сумма составит:

$$K_n = K(1+i) = Kr.$$

Совокупная величина всех вкладов с процентами (наращенная сумма) будет равна:

$$S_n = K_1 + K_2 + ... + K_n$$ или

$$S_n = Kr^n + Kr^{n-1} + ... + Kr = K(r^n + r^{n-1} + ... + r).$$

Сумма, записанная в скобках последнего выражения есть геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = r, q = r.$

По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ получим:

$$S_n = K \cdot \frac{r(1-r^n)}{1-r} = K \cdot \frac{r(r^n - 1)}{r-1}, \quad (8.1)$$

где $\dfrac{r(r^n - 1)}{r-1}$ называется <u>*коэффициентом аккумуляции вкладов*</u>.

Так как каждый год поступала одна и та же сумма K, то

в течение n лет было перечислено на счёт $S = n \cdot K$.
Тогда процентный платёж ренты равен:

$$I = S_n - S = S_n - n \cdot K \quad (8.2)$$

б) Постоянная годовая финансовая рента пренумерандо

с начислением сложных процентов m раз в году.
Рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем для первого взноса:

$$K_1 = K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = Kr^n,$$ где $$r = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} -$$ СДК.

Для второго взноса:

$$K_2 = K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m(n-1)} = Kr^{n-1},$$ и так далее

Для n-го года: $$K_n = K\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = Kr$$

$$S_{mn} = K_1 + K_2 + \ldots + K_n = K(r^n + r^{n-1} + \ldots + r)$$ или

$$S_{mn} = K\frac{r(r^n - 1)}{r-1} \quad (8.3)$$

$$I = S_{mn} - n \cdot K \quad (8.4)$$

Замечание: Заменив в формулах (8.1) и (8.3) СДК их соответствующими выражениями, можно, представить данные формулы в виде:

$$S_n = K \cdot \frac{(1+i)\cdot((1+i)^n - 1)}{i} \quad (8.1')$$

$$S_{mn} = K \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1} \quad (8.3')$$

в) Постоянная *a*-срочная финансовая рента пренумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

Пусть одна и та же сумма K вносится на счёт ежегодно a раз равными долями в начале каждого периода в течение n лет, а процент начисляется 1 раз в конце года. Тогда каждый раз вносится сумма $\frac{K}{a}$. Определим наращенную сумму за весь срок ренты.

В начале 1-го периода 1-го года сумма $\dfrac{K}{a}$ вносится на срок *n* лет, наращенная сумма при этом будет:

$$K_{1/a} = \frac{K}{a}(1+i)^{n} = \frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}na} = \frac{K}{a}r^{na},$$ где $r = (1+i)^{\frac{1}{a}}$ – СДК, *na* – общее число периодов за *n* лет.

В начале 2-го периода 1-го года та же сумма вносится на срок $\left(n - \dfrac{1}{a}\right)$ лет, наращенная сумма при этом будет:

$$K_{2/a} = \frac{K}{a}(1+i)^{n-\frac{1}{a}} = \frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}(na-1)} = \frac{K}{a}r^{na-1},$$ и так далее

В начале последнего периода 1-го года сумма $\frac{K}{a}$ вносится на срок $\left(n-1+\frac{1}{a}\right)$ лет, наращенная сумма при этом будет:

$$K_{a/a}=\frac{K}{a}(1+i)^{n-1+\frac{1}{a}}=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}(na-a+1)}=\frac{K}{a}r^{na-a+1}.$$

В начале 1-го периода 2-го года та же сумма вносится на срок (n-1) лет, наращенная сумма при этом будет:

$$K_{a+1/a}=\frac{K}{a}(1+i)^{n-1}=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}(na-a)}=\frac{K}{a}r^{na-a},$$

В начале 2-го периода 2-го года та же сумма вносится на срок на срок $\left(n-1-\dfrac{1}{a}\right)$, наращенная сумма при этом будет:

$$K_{a+2/a}=\frac{K}{a}(1+i)^{n-1-\frac{1}{a}}=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}(na-a-1)}=\frac{K}{a}r^{na-a-1},$$ и т.д.

В начале последнего периода 2-го года сумма вносится

на срок $\left(n-2+\dfrac{1}{a}\right)$ лет, наращенная сумма при будет:

$$K_{2a/a}=\frac{K}{a}(1+i)^{n-2+\frac{1}{a}}=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}(na-2a+1)}=\frac{K}{a}r^{na-2a+1},$$ и т.д.

В начале 1-го периода последнего года та же сумма вносится на срок 1 год, наращенная сумма будет:

$$K_{(n-1)a+1/a}=\frac{K}{a}(1+i)=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}a}=\frac{K}{a}r^{a},$$

В начале второго периода последнего года сумма вносится на срок $\left(1-\frac{1}{a}\right)$ лет, наращенная сумма будет:

$$K_{(n-1)a+2/a}=\frac{K}{a}(1+i)^{1-\frac{1}{a}}=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}(a-1)}=\frac{K}{a}r^{a-1}, \qquad \text{и т.д.}$$

В начале последнего периода последнего года сумма вносится на срок $\frac{1}{a}$ лет, наращенная сумма будет:

$$K_{na/a}=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}}=\frac{K}{a}(1+i)^{\frac{1}{a}}=\frac{K}{a}r.$$

Тогда наращенная сумма будет:

$$S_{n,a}=\frac{K}{a}(r^{na}+r^{na-1}+...+r).$$

Сумма, записанная в скобках последнего выражения есть геометрическая прогрессия, у которой $b_1=r,\ q=r.$ По формуле суммы *na* первых членов геометрической прогрессии $S_n=\dfrac{b_1(1-q^{na})}{1-q}$ получим:

$$S_{n,a}=\frac{K}{a}\cdot\frac{r(1-r^{na})}{1-r}=\frac{K}{a}\cdot\frac{r(r^{na}-1)}{r-1} \quad (8.5)$$

или

$$S_{n,a}=\frac{K}{a}\cdot(1+i)^{\frac{1}{a}}\frac{((1+i)^{n}-1)}{(1+i)^{\frac{1}{a}}-1} \quad (8.5')$$

г) Постоянная *a*-срочная финансовая рента пренумерандо с начислением сложных процентов *m* раз в году.

Пусть одна и та же сумма *K* вносится на счёт ежегодно *a* раз равными долями в начале каждого периода в течение *n* лет. Сложный процент начисляется *m* раз в году декурсивным методом. Найдём наращенную сумму за весь срок ренты.

Получить данную формулу можно путём подстановки СДК в данном случае $r=\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{\frac{m}{a}}$ в формулу (8.5):

$$S_{mn,a}=\frac{K}{a}\cdot\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{\frac{m}{a}}\cdot\frac{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{\frac{m}{a}}-1}\qquad(8.6)$$

д) Постоянная m-срочная финансовая рента пренумерандо с начислением сложных процентов m раз в году.

Это частный случай пункта (г) с СДК $r = \left(1 + {}^{i}\!/_{m}\right)$, поэтому формула будет следовать из формулы (8.6), если в ней заменить a на m:

$$S_{mn,m} = \frac{K}{m} \cdot \left(1 + {}^{i}\!/_{m}\right) \cdot \frac{\left(1 + {}^{i}\!/_{m}\right)^{mn} - 1}{{}^{i}\!/_{m}} \qquad (8.7)$$

8.4. Постоянные финансовые ренты постнумерандо.

а) Постоянная годовая финансовая рента постнумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

Пусть на некоторый счёт в конце каждого года в течение n лет вносится одна и та же сумма K. На аккумулируемые средства начисляются сложные проценты декурсивным методом по годовой процентной ставке i. Определим конечную величину вкладов через n лет.

Первый взнос K, вкладываемый в конце 1-го года, будет наращиваться в течение (n-1) лет, при этом наращенная декурсивным методом сумма будет:

$$K_1 = K(1+i)^{n-1} = Kr^{n-1},$$ где $r=(1+i)$ - СДК.

Второй взнос K вкладывается на (n-2) года и соответствующая наращенная сумма будет:

$$K_2 = K(1+i)^{n-2} = Kr^{n-2}$$ и так далее.

Предпоследний взнос К вкладывается в конце (n-1)-го года на 1 год, наращенная сумма составит:

$$K_{n-1} = K(1+i) = Kr.$$

В конце последнего года:

$$K_n = K.$$

$$S'_n = K_1 + K_2 + \ldots + K_n$$

$$S'_n = Kr^{n-1} + Kr^{n-2} + ... + Kr + K = K(r^{n-1} + r^{n-2} + ... + r + 1).$$

Сумма, записанная в скобках последнего выражения есть геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 1, q = r$.

По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ получим:

$$S'_n = K \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = K \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad (8.8)$$

где $\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ - коэффициентом аккумуляции вкладов.

Сравнивая формулу (8.8) с формулой (8.1) для годовой ренты пренумерандо, можно записать:

$$S_n = r \cdot S'_n \qquad \text{или} \qquad S'_n = \frac{S_n}{r} \quad (8.9)$$

Учитывая выражение для СДК, формулу (8.8) можно переписать в виде:

$$S'_n = K \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (8.8')$$

Учитывая формулу (8.9), можно получить формулы для конечных сумм вкладов для различных случаев:

б) Постоянная годовая финансовая рента постнумерандо с начислением сложных процентов *m* раз в году.

$$S'_{mn} = K \cdot \frac{\left(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m}\right)^{m} - 1} \quad (8.10)$$

в) Постоянная a-срочная финансовая рента постнумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

$$S'_{n,a} = \frac{K}{a} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{a}} - 1} \qquad (8.11)$$

г) Постоянная a-срочная финансовая рента постнумерандо с начислением сложных процентов m раз в году.

$$S'_{mn,a} = \frac{K}{a} \cdot \frac{\left(1 + {}^{i}\!/_{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + {}^{i}\!/_{m}\right)^{\frac{m}{a}} - 1} \qquad (8.12)$$

д) Постоянная m-срочная финансовая рента постнумерандо с начислением сложных процентов m раз в году.

Это частный случай пункта (г), когда a=m,

поэтому формула будет следовать из формулы (8.12):

$$S'_{mn,m} = \frac{K}{m} \cdot \frac{\left(1 + {}^{i}\!/\!_{m}\right)^{mn} - 1}{{}^{i}\!/\!_{m}} \quad (8.13)$$

Процентный платёж за весь срок финансовой ренты будет определяться по формуле:

$$I = S'_n - K \cdot n \quad (8.14)$$

8.5. Вопросы для самоконтроля.

1) Что называется потоком платежей?
2) Что называется финансовой рентой?
3) К каким потокам платежей, строго говоря, применимо понятие аннуитета?
4) Какие существуют ренты по количеству платежей в году?
5) Чем отличается годовая рента от *а*-срочной?
6) Какие различают ренты по частоте начислений процентов в году?
7) Какие различают ренты по величине своих членов?
8) Какие различают ренты по моменту выплат платежей в пределах периода ренты?
9) Какие различают ренты по вероятности выплат?
10) По какой формуле определяется коэффициент аккумуляции вкладов?

8.6. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№14.11, 14.13, 14.16.

8.7. Глоссарий по лекции 8.

Аннуитет - поток платежей с ежегодными выплатами.

Период ренты - временной интервал между двумя последовательными платежами.

Постнумерандо - ренты с платежами в конце периодов.
Поток платежей - последовательность платежей.

Пренумерандо - ренты с платежами в начале периодов.

Срок ренты - время от начала первого периода ренты до конца последнего.

Финансовая рента - сумма денег, данных взаймы.

Член ренты - размер отдельного платежа.

8.8. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
3) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 55-60.
4) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 94-125.

8.9. Список сокращений и обозначений.

СДК - сложный декурсивный коэффициент;

S_n - совокупная величина всех вкладов с процентами;

I - процентный платёж ренты.

Лекция 9. Переменные финансовые ренты

Аннотация. Эта тема является продолжением предыдущей темы, в ней выводятся формулы для переменных финансовых рент в двух случаях: с постоянным и относительным изменениями платежей.

Ключевые слова. Переменные финансовые ренты, ренты с абсолютным изменением платежей, ренты с относительным изменением платежей .

Методические рекомендации по изучению темы. Вначале необходимо изучить теоретическую часть с определениями основных понятий, выводом формул, а также практическую, включающую в себя задачи с решениями. После этого следует ответить на теоретические вопросы и решить задачи, приведённые в конце темы. Для контроля усвоения материала необходимо пройти тестирование по данной теме. Вопросы, возникшие при изучении данной темы, можно обсудить в разделе Обсуждений.

9.1. Переменные финансовые ренты с абсолютным изменением платежей.

Если члены ренты изменяются по закону арифметической прогрессии, то в этом случае говорят о *переменных финансовых рентах с постоянным абсолютным изменением платежей*.

а) Годовая переменная финансовая рента пренумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

Пусть в начале каждого года в течение n лет на некоторый счёт поступают денежные средства, равные: K; $K+d$; $K+2d$; …; $K+(n-1)d$.

На аккумулируемые средства по сложной ставке i декурсивным методом начисляются проценты.

Необходимо найти наращенную сумму.

Первый взнос K вносится в начале 1-го года и за n лет наращенная декурсивным методом сумма будет:

$K_1 = K(1+i)^n = Kr^n$, где r=(1+i) - сложный декурсивный коэффициент (СДК). Второй взнос K+d вкладывается на (n-1) год и соответствующая наращенная сумма будет:

$$K_2 = (K+d)\cdot r^{n-1}$$

для 3-го взноса: $K_3 = (K+2d)\cdot r^{n-2}$ и так далее.

Последний взнос K+(n-1)d вкладывается в начале n-го года на 1 год, в конце которого наращенная сумма составит: $K_n = \left(K+(n-1)d\right)\cdot r.$

Совокупная величина всех наращенных сумм будет:

$$S_n = K_1 + K_2 + ... + K_n =$$

$$= K(r^n + r^{n-1} + ... + r^2 + r) + d(r^{n-1} + 2r^{n-2} + ... + (n-2)r^2 + (n-1)r)$$

или $S_n = K \cdot \dfrac{r(r^n - 1)}{r - 1} + dA \quad (*)$, где

$$A = r^{n-1} + 2r^{n-2} + ... + (n-2)r^2 + (n-1)r.$$

Умножим обе части последнего равенства на r:

$Ar = r^n + 2r^{n-1} + ... + (n-2)r^3 + (n-1)r^2$, затем из него

вычтем исходное равенство:

$$Ar - A = A(r-1) = r^n + r^{n-1} + ... + r^3 + r^2 + r - nr =$$

$$= \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} - nr.$$

Из последнего равенства имеем:

$$A = \frac{r}{r-1} \cdot \left(\frac{r^n - 1}{r-1} - n \right) \quad (**)$$

Подставим (**) в (*): $S_n = Kr\frac{r^n - 1}{r-1} + \frac{rd}{r-1} \cdot \left(\frac{r^n - 1}{r-1} - n \right)$

или

$$S_n = \left(K + \frac{d}{r-1} \right) r \frac{r^n - 1}{r-1} - \frac{rnd}{r-1} \quad (9.1')$$

Последнюю формулу перепишем в виде:

$$S_n = \left(K + \frac{d}{i} \right) (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{(1+i)nd}{i} \quad (9.1)$$

Чтобы вычислить процентный платёж, необходимо из S_n вычесть общую сумму всех взносов S.

Используем формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ В нашем случае: $a_1 = K; a_n = K + d(n-1)$, следовательно:

$$S = \frac{K + K + d(n-1)}{2} \cdot n$$

или

$$S = \frac{2K + d(n-1)}{2} \cdot n \quad (9.2)$$

Процентный платёж равен:

$$I = S_n - S$$

Соответствующие формулы для годовой переменной ренты постнумерандо будут:

$$S'_n = \frac{S_n}{r} = \left(K + \frac{d}{r-1}\right)\frac{r^n - 1}{r-1} - \frac{nd}{r-1} \quad (9.3')$$

$$S'_n = \left(K + \frac{d}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nd}{i} \quad (9.3)$$

б) Переменная годовая финансовая рента

с начислением сложных процентов m раз в году.

Подставляя соответствующее значение для СДК

$r = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$ в формулы $(9.1'), (9.3'),$ получим:

Из последнего равенства имеем:

$$S_{mn}=\left(K+\frac{d}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}-1}\right)\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}\frac{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}-1}-\frac{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}nd}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}-1} \qquad (9.4)$$

$$S'_{mn}=\left(K+\frac{d}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}-1}\right)\frac{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}-1}-\frac{nd}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m}-1} \qquad (9.5)$$

в) Переменная *a*-срочная финансовая рента пренумерандо и постнумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

Подставим $r=\left(1+i\right)^{\frac{1}{a}}$ в формулы $(9.1'), (9.3'),$ записав *na* (количество периодов начисления %%) вместо *n*.

$$S_{n,a}=\left(K+\frac{d}{(1+i)^{1/a}-1}\right)(1+i)^{1/a}\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/a}-1}-\frac{(1+i)^{1/a}nda}{(1+i)^{1/a}-1} \quad (9.6)$$

$$S'_{n,a}=\left(K+\frac{d}{(1+i)^{1/a}-1}\right)\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/a}-1}-\frac{nda}{(1+i)^{1/a}-1} \quad (9.7)$$

г) Переменная *a*-срочная финансовая рента с начислением сложных процентов *m* раз в году.

Подставим $r=\left(1+{i}/{m}\right)^{\frac{m}{a}}$ в формулы $(9.1'), (9.3')$,

заменив *n* на *na*.

$$S_{mn,a}=\left(K+\frac{d}{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}-1}\right)\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}\frac{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}-1}-\frac{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}nda}{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}-1}\quad(9.8)$$

$$S'_{mn,a}=\left(K+\frac{d}{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}-1}\right)\frac{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}-1}-\frac{nda}{\left(1+{}^{i}\!/_{m}\right)^{m/a}-1}\quad(9.9)$$

д) Переменная *m*-срочная финансовая рента пренумерандо и постнумерандо с начислением сложных процентов *m* раз в году.

Это частный случай предыдущего пункта, когда $a=m$.

Вывести самостоятельно.

9.2. Переменные финансовые ренты с относительным изменением платежей.

Если члены ренты изменяются по закону геометрической прогрессии, то в этом случае говорят о *переменных финансовых рентах с постоянным относительным изменением платежей*.

а) Годовая переменная финансовая рента пренумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

Пусть в начале каждого года в течение n лет на некоторый счёт поступают денежные средства, равные: K; Kq; Kq^2; …; Kq^{n-1}.

На аккумулируемые средства по сложной ставке i декурсивным методом начисляются проценты.

Необходимо найти наращенную сумму.

Первый взнос K вносится в начале 1-го года и за n лет наращенная декурсивным методом сумма будет:

$K_1 = K(1+i)^n = Kr^n$, где $r=(1+i)$ - сложный декурсивный коэффициент (СДК). Второй взнос Kq вкладывается на (n-1) год и соответствующая наращенная сумма будет:

$$K_2 = Kq \cdot r^{n-1}$$

для 3-го взноса: $K_3 = Kq^2 \cdot r^{n-2}$ и так далее.

Предпоследний взнос: $K_{n-1} = Kq^{n-2} \cdot r^2$;

Последний взнос: $K_n = Kq^{n-1} \cdot r$.

Совокупная величина всех наращенных сумм будет:

$$S_n = K_1 + K_2 + ... + K_n = K(r^n + qr^{n-1} + ... + q^{n-2}r^2 + q^{n-1}r) \quad (***)$$

Выражение в скобках - это геометрическая прогрессия,

в которой $b_1 = r^n; q^* = \frac{q}{r}.$ Используем формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$ Тогда из (***) получим:

$$S_n = Kr^n \frac{\left(q/r\right)^n - 1}{q/r - 1}$$ или после преобразований:

$$S_n = Kr \frac{r^n - q^n}{r - q} \quad (9.10')$$

Формулу $(9.10')$ можно представить и в другом виде:

$$S_n = K(1+i)\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \quad (9.10)$$

Для постнумерандо будем иметь: $S'_n = K\dfrac{r^n - q^n}{r-q} \quad (9.11')$

$$S'_n = K\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \quad (9.11)$$

Чтобы вычислить процентный платёж I, нужно найти сумму всех взносов S и вычесть её из наращенной суммы за весь срок ренты. Сумма S - геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = K;\ q^* = q.$

Используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, будем иметь:

$$S = K \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Соответствующие процентные платежи для пренумерандо и постнумерандо:

$$I = S_n - S \qquad \text{и} \qquad I = S_n' - S$$

б) Начисление сложных процентов m раз в году.

Подставляя соответствующее значение для СДК:

$$r = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

в формулы $(9.10')$, $(9.11')$, получим:

$$S_{mn} = K\left(1+ {}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m} \frac{\left(1+ {}^{i}\!/\!_{m}\right)^{mn} - q^{n}}{\left(1+ {}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m} - q} \quad (9.12)$$

и

$$S'_{mn} = K \frac{\left(1+ {}^{i}\!/\!_{m}\right)^{mn} - q^{n}}{\left(1+ {}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m} - q} \quad (9.13)$$

в) Переменная *a*-срочная финансовая рента пренумерандо и постнумерандо с начислением сложных процентов 1 раз в году.

Подставим $r = (1+i)^{\frac{1}{a}}$ в формулы $(9.10'), (9.11'),$ заменив

n на *na*:

$$S_{n,a} = K(1+i)^{1/a} \frac{(1+i)^n - q^{na}}{(1+i)^{1/a} - q} \quad (9.14)$$

и

$$S'_{n,a} = K \frac{(1+i)^n - q^{na}}{(1+i)^{1/a} - q} \quad (9.15)$$

г) Переменная *a*-срочная финансовая рента с начислением сложных процентов *m* раз в году.

Подставим $r = \left(1 + {i}/{m}\right)^{\frac{m}{a}}$ в формулы $(9.10'), (9.11')$,

заменив *n* на *na*.

$$S_{mn,a} = K\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m/a} \frac{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{mn} - q^{na}}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m/a} - q} \qquad (9.16)$$

и

$$S'_{mn,a} = K \frac{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{mn} - q^{na}}{\left(1+{}^{i}\!/\!_{m}\right)^{m/a} - q} \qquad (9.17)$$

д) Переменная m-срочная финансовая рента пренумерандо и постнумерандо с начислением сложных процентов m раз в году.

Это частный случай предыдущего пункта, когда $a=m$. Вывести самостоятельно.

<u>Пример9.1:</u> Вкладчик вносит в банк в начале первого года 10 тысяч рублей и предполагает, что каждый следующий вклад будет больше предыдущего на 2 тысячи рублей. Какой суммой будет располагать вкладчик в конце пятого года, если i=0,15, а капитализация ежегодная?

Решение.

Здесь i =0,15; K=10000; d =2000; n=5; годовая рента пренумерандо с абсолютным изменением платежей.

Из формулы (9.1) следует:

$$S_n = \left(10 + \frac{2}{0{,}15}\right)(1+0{,}15)\,\frac{(1+0{,}15)^5 - 1}{0{,}15} - \frac{(1+0{,}15)\cdot 5\cdot 2}{0{,}15} =$$

$= 104{,}25390$ тыс.рублей.

$$I = S_n - S = S_n - \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$ где

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 10 + 2 \cdot (5-1) = 18$$ следовательно:

$$\hat{I} = 104{,}25390 - \frac{10+18}{2} \cdot 5 = 34{,}25390$$ тыс.рублей.

<u>Пример9.2:</u> В начале каждого полугодия в течение 4 лет на счёт в банке поступали денежные средства: первый взнос 1000 рублей, а каждый следующий на 10% больше предыдущего. На аккумулируемые средства ежеквартально начислялись сложные проценты по ставке i=0,14. Определить наращенную сумму и I.

Решение.

Здесь i =0,14; K= b_1 =1000; q =1,1; n=4; m=4; a=2.

Здесь a-срочная рента пренумерандо с относительным изменением платежей.

Воспользуемся формулой (9.16):

$$S_{mn,a}=1000\cdot\left(1+{}^{0,14}\!/_{4}\right)^{4/2}\frac{\left(1+{}^{0,14}\!/_{4}\right)^{4\cdot4}-1{,}1^{4\cdot2}}{\left(1+{}^{0,14}\!/_{4}\right)^{4/2}-1{,}1}=$$

$$=15248{,}54 \quad \text{рублей.}$$

$$I=S_{mn,a}-S=S_{mn,a}-\frac{b_1(q^{4\cdot2}-1)}{q-1}=15248{,}54-\frac{1000\cdot(1{,}1^{8}-1)}{1{,}1-1}=$$

$$=3812{,}65 \quad \text{рублей.}$$

9.3. Вопросы для самоконтроля.

1) Какие ренты называются переменными?
2) В каком случае переменные ренты называют с постоянным абсолютным изменением платежей?
3) В каком случае переменные ренты называют с относительным изменением платежей?
4) Чем отличаются переменные ренты пренумерандо от постнумерандо?
5) Чем характеризуется переменная *а*-срочная финансовая рента?

9.4. Задания для практики.

Решить примеры: [2]: №№15.11, 15.13, 15.16.

9.5. Глоссарий по лекции 9.

Ренты а-срочные - ренты с платежами, производимыми *а* раз в году.

Ренты годовые - ренты с платежами, производимыми 1 раз в году.
Ренты с абсолютным изменением платежей – переменные финансовые ренты, члены которой изменяются по закону арифметической прогрессии.

Ренты с относительным изменением платежей - переменные финансовые ренты, члены которой изменяются по закону геометрической прогрессии.

9.6. Использованные информационные ресурсы.

1) ДК «Финансовая математика»: URL: http://bars.kpfu.ru/course/view.php?id=1479
2) Гипертекстовое учебное пособие «Основы финансовой математики» - http://www.bodrenko.org/finance
3) Сборник задач по финансовой математике / Под ред. Р.Ш. Марданова - Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001.-С. 61-68.
4) Четыркин Е.М. Финансовая математика.- М.: Изд-во «Дело», 2007.- С. 126-146.

9.7. Список сокращений и обозначений.

%% - сложные проценты;

b_1 - первый член геометрической прогрессии;

q^* - знаменатель геометрической прогрессии.

Глоссарий.

Аннуитет - поток платежей с ежегодными выплатами.

Антисипативный метод – метод начисления сложных процентов, когда проценты начисляются и добавляются к капиталу в начале каждого расчётного периода на сумму, которая будет наращена в конце этого расчётного периода.

Банковское дисконтирование при сложных процентах - это операция, обратная операции наращения по антисипативному методу.

Декурсивный метод – метод начисления сложных процентов, когда проценты начисляются и добавляются к капиталу в конце каждого расчётного периода.

Дисконт - процентный платёж при дисконтировании.

Дисконтирование - операция нахождения первоначальной суммы по величине наращенной суммы.

Дисконтный множитель - множителем, который показывает, какую долю составляет первоначальная сумма долга в окончательной.

Индекс инфляции - коэффициент, показывающий, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Инфляция - обесценение денег относительно товаров и услуг, то есть снижение покупательной способности денег вследствие роста цен на товары и услуги.

Капитализация - начисление сложных процентов.

Комиссионные за выдачу кредита - сбор, который осуществляет банк непосредственно при выдаче кредита. Чаще всего такие комиссии снимаются при «наличном» кредитовании.

Комиссионные сборы в банке - это платежи, которые вносятся заёмщиком за различные услуги банка. В такие услуги могут включаться: рассмотрение кредитной заявки, выдача кредита, выдача наличных средств или перечисление безналичных средств.

Математическое дисконтирование - дисконтирование, при котором применяется процентная ставка (наращения).

Математическое дисконтирование при сложных процентах - это операция, обратная операции наращения по декурсивному методу.

Наращенная сумма – итоговая сумма в конце срока ссуды.

Номинальная процентная ставка – ставка, при которой сложные проценты по годовой процентной p_c ставке начисляются 1 раз в году.

Номинальная учётная ставка – ставка, при которой сложные проценты по годовой учётной q_c ставке начисляются 1 раз в году.

Первоначальный капитал - сумма денег, данных взаймы.

Период ренты - временной интервал между двумя последовательными платежами.

Погашение краткосрочного кредита равными долями - форма погашения кредита, при которой ежемесячный взнос вычисляется по формуле: $b=(K+I)/m$.

Погашение кредита по амортизационному плану - форма погашения кредита, при которой в каждом расчетном периоде процентный платёж начисляется на сумму долга, уменьшенную на уже выплаченную часть долга.

Погашение суммы кредита с удержанием процентов при выдаче кредита – форма погашения кредита, при которой заёмщик получит сумму (K-I).

Постнумерандо - ренты с платежами в конце периодов.

Поток платежей - последовательность платежей.

Пренумерандо - ренты с платежами в начале периодов.
Процент - доход от инвестированного капитала.

Процентная ставка - отношение процента за определённый период к основной сумме капитала.

Расчёт «меньше ста» - расчёт погашаемой суммы кредита по формуле K=100(K-I)/(100-np).

Реальное значение суммы S - отношение этой суммы к индексу инфляции.

Реальный доход - разность между реальным значением суммы S и первоначальной суммой.

Реинвестирование - неоднократное последовательное повторение наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока.

Релятивная процентная ставка – ставка, получающаяся делением номинальной процентной ставки на количество m начислений сложных процентов в году.

Релятивная учётная ставка – ставка, получающаяся делением номинальной учётной ставки на количество m начислений сложных процентов в году.

Ренты а-срочные - ренты с платежами, производимыми a раз в году.

Ренты годовые - ренты с платежами, производимыми 1 раз в году.

Ренты с абсолютным изменением платежей – переменные финансовые ренты, члены которой изменяются по закону арифметической прогрессии.

Ренты с относительным изменением платежей - переменные финансовые ренты, члены которой изменяются по закону геометрической прогрессии.

Сложный процент - процент, начисляемый в каждом расчётном периоде на наращенную сумму.

Современная стоимость - величина K, найденная с помощью дисконтирования.

Срок ренты - время от начала первого периода ренты до конца последнего.

Уровень инфляции - коэффициент, показывающий, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период.

Финансовая рента - сумма денег, данных взаймы.

Член ренты - размер отдельного платежа.

Эквивалентные ставки – ставки, которые при прочих равных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам.

Эффективная процентная ставка – годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же финансовый результат, что m-разовое начисление процентов по релятивной процентной ставке.

Эффективная учётная ставка – годовая ставка сложных процентов, которая даёт тот же финансовый результат, что m-разовое начисление процентов по релятивной учётной ставке.