Санкт-Петербургский государственный университет

Высшая школа менеджмента

А. В. Бухвалов, В. В. Бухвалова

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ МЕНЕДЖЕРОВ

Учебное пособие

3-е издание, исправленное и дополненное

Санкт-Петербург

Издательство «Высшая школа менеджмента»

2010

УДК 51–3
ББК 65.290.2
Б94

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. **Д. Л. Волков**
(С.-Петерб. гос. ун-т);
д-р экон. наук, проф. **А. Б. Поманский**
(Институт финансовых исследований, Москва)

Печатается по решению Ученого Совета
Высшей школы менеджмента СПбГУ

Бухвалов А. В., Бухвалова В. В.

Б94 Финансовые вычисления для менеджеров: Учеб. пособие. 3-е изд., испр. и доп. / А. В. Бухвалов, В. В. Бухвалова; Высшая школа менеджмента СПбГУ. — СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2010. — 368 с.

ISBN 978-5-9924-0051-9

Книга является как основой отдельных курсов по финансовым вычислениям, так и вспомогательным пособием по курсам «Финансы», «Инвестиции», «Финансовый менеджмент», «Корпоративные финансы». В этом отношении она адресована студентам первого высшего образования экономических и управленческих специальностей, а также специальностей «Прикладная математика» и «Информатика».

Кроме того, книга может служить пособием для программ магистр делового администрирования, использоваться в практике консультирования, а также — для самообразования всеми, кто имеет дело с анализом инвестиционных проектов и банковским бизнесом.

В приложениях приведена не только элементарная информация об использовании пакета MS Excel, но изложены и более продвинутые вопросы, которые могут заинтересовать профессиональных программистов — например, основы применения языка AWK.

УДК 51–3

ISBN 978-5-9924-0051-9

Содержание

Введение **8**

1. Процентные вычисления **15**

1.1. Понятие процента . . . 15
1.2. Примеры задач на процентные числа . . . 17
1.3. Портфель ценных бумаг . . . 23
1.4. Начисление налогов . . . 25
1.5. Социально-экономические показатели . . . 28
1.6. Методы ценообразования . . . 30
1.7. Используем Excel . . . 38
Упражнения . . . 41

2. Простые проценты **45**

2.1. Определение простых процентов . . . 45
2.2. Разы и проценты . . . 47
2.3. Банковский депозит под простые проценты . . . 50
2.4. Процентный пункт . . . 52
2.5. Векселя . . . 53
2.6. Учет векселей . . . 54
2.7. Простой дисконт . . . 55
2.8. Приведение ценности денег к одному моменту времени . . . 56
2.9. Эквивалентность учетной и процентной ставок . . . 59
2.10. Влияние инфляции на ставку процента . . . 62
Упражнения . . . 64

3. Сложные проценты **67**

3.1. Определение сложных процентов . . . 67
3.2. Основные задачи на сложные проценты . . . 71
3.3. Непрерывное начисление сложных процентов . . . 73
3.4. Учет векселей по сложной учетной ставке . . . 74

3.5. Эквивалентность процентных ставок . . . 75
3.6. Эффективная процентная ставка . . . 79
3.7. Плавающий сложный процент . . . 80
3.8. Правило 69 и правило 72 . . . 81
3.9. Используем Excel . . . 83
Упражнения . . . 86

4. Амортизация **89**
4.1. Амортизационные отчисления . . . 89
4.2. Равномерная амортизация . . . 90
4.3. Правило суммы лет . . . 92
4.4. Метод фиксированного процента . . . 96
4.5. Метод двойного процента . . . 99
4.6. Влияние амортизации на налогообложение . . . 101
4.7. Используем Excel . . . 105
4.8. Амортизация в РФ . . . 109
Упражнения . . . 116

5. Банковские вклады **119**
5.1. Привлеченные средства коммерческого банка . . . 119
5.2. Основные параметры банковских вкладов . . . 120
5.3. Прогрессивный сберегательный счет . . . 123
5.4. Обезличенные металлические счета . . . 124
5.5. Сберегательный сертификат . . . 127
5.6. Приведенная ценность денег . . . 128
5.7. Балансовое равенство для приведенной ценности денег . . . 132
5.8. Используем Excel . . . 134
Упражнения . . . 136

6. Финансовые ренты **140**
6.1. Основные определения . . . 140
6.2. Функция $s_{n;i}$ . . . 141
6.3. Виды финансовых рент . . . 143
6.3.1. Ренты с начислением процентов в конце года . . . 143
6.3.2. Ренты с начислением процентов m раз в год . . . 147
6.3.3. Ренты с непрерывным начислением процентов . . . 154
6.4. Вычисление платежей финансовой ренты . . . 156
6.5. Бессрочная рента . . . 157

6.6. Погашение долгосрочной задолженности единовременным платежом . . . 158
6.7. Инвестиции в предприятия, использующие невосполняемые ресурсы . . . 159
6.8. Используем Excel . . . 160
Упражнения . . . 166

7. Приведенная ценность финансовой ренты **169**
7.1. Функция $a_{n;i}$ . . . 169
7.2. Как обеспечить получение ренты в будущем . . . 171
7.3. Приведенная ценность различных рент . . . 172
7.3.1. Ренты с начислением процентов в конце года . . . 172
7.3.2. Ренты с начислением процентов m раз в год . . . 173
7.3.3. Рента с непрерывным начислением процентов . . . 175
7.3.4. Бессрочная рента . . . 177
7.4. Погашение долгосрочной задолженности несколькими платежами . . . 182
7.5. Определение срока погашения долгосрочной задолженности . . . 184
7.6. Процентная ставка финансовой ренты . . . 186
7.7. Используем Excel . . . 188
Упражнения . . . 191

8. Операции с финансовыми контрактами **194**
8.1. Эквивалентность контрактов . . . 194
8.2. Продажа контрактов . . . 198
8.3. Выбор контракта, наиболее выгодного для покупателя . . . 201
8.4. Доходность контракта для кредитора . . . 203
8.5. Доходность потребительского кредита для продавца . . . 208
8.6. Доходность по облигациям . . . 211
8.7. Стоимость привлечения кредита . . . 214
8.8. Доходность портфеля облигаций . . . 215
8.9. Используем Excel . . . 218
Упражнения . . . 219

9. Принцип отсутствия арбитражных возможностей **224**
9.1. Финансовый арбитраж . . . 224
9.2. Форвардные контракты . . . 227
9.3. Цена поставки . . . 229

9.4. Форвардная цена и ценность форвардного контракта 234
9.5. Операции с облигациями 238
9.6. Используем Excel 246
Упражнения 250

10. Анализ инвестиционных проектов **254**
10.1. Инвестиционные проекты 254
10.2. Средняя норма прибыли на инвестиции 257
10.3. Срок окупаемости инвестиционного проекта 258
10.4. Метод чистой приведенной ценности 258
10.5. Метод внутренней нормы доходности 263
10.6. Сравнение критериев *NPV* и *IRR* 266
10.7. Влияние инфляции на инвестиционный проект 268
10.8. Инвестиции в дополнительное образование 269
10.8.1. Оценка потока денежных средств 270
10.8.2. Оценка проекта по критерию *NPV* 270
10.8.3. Анализ проекта: изменение ставки дисконтирования . 272
10.8.4. Анализ проекта: изменение заработной платы 273
10.8.5. Подводим итоги 280
10.9. Используем Excel 280
10.9.1. Строим диаграммы 282
10.9.2. Объясняем команду Подбор параметра 284
Упражнения 287

Ответы и указания к упражнениям **290**

Приложение А. Финансовые вычисления в Excel **311**
А.1. Основные сведения о Microsoft Excel 311
А.2. Как вводить вещественные числа 313
А.3. Ввод данных 314
А.4. Даты и время 319
А.5. Использование функций 321
А.6. Построение диаграмм 323

Приложение Б. Программирование на VBA **325**
Б.1. Редактор VBA 326
Б.2. Встроенные типы данных 327
Б.3. Функции, определяемые пользователем 331

Приложение В. Язык программирования AWK как инструмент поиска и обработки экономической информации **342**
В.1. Немного истории 344
В.2. AWK для начинающих 346

Приложение Г. Финансовые пирамиды **358**
Г.1. Модель с постоянным поступлением денег 359
Г.2. Модель с геометрическим ростом поступающих денег 361

Предметный указатель **365**

Введение

Мама очень уважала папу, потому что он работал в банке и разбирался в таких вещах, как проценты и акции, а в этом чаще всего разобраться просто невозможно. Но он говорил: „Проценты растут" или „Акции падают" — с таким видом, что всякий бы его зауважал.

Джеймс Барри. „Питер Пэн"

О чем эта книга? Эта книга посвящена технике финансовых вычислений — учебной дисциплине, которую обязательно изучают все экономически грамотные люди в условиях рыночной экономики — такой экономики, где начисление процента на капитал и связанное с этим понятие доходности инвестиций являются ключевыми. Отметим, что в России до 1917 г. этот материал изучали все коммерсанты, а сам он — в силу, одновременно, элементарности и крайней нужности — получил название *финансовой арифметики.*

Для кого эта книга? Эта книга написана для менеджера.

Учебник основан на опыте преподавания курсов финансового менеджмента, элементов финансовой математики, программирования финансовых задач в MS Excel различным категориям учащихся и практиков — от бакалавров до слушателей программ послевузовского обучения *Магистр делового администрирования.*

Не сложна ли эта книга для тех, кто страшно занят своим бизнесом и привык ограничивать свое использование компьютера рамками умной пишущей машинки? Не примитивна ли техника программирования для тех, кто умеет программировать? Мы надеемся, что обе категории читателей смогут вынести новое и полезное из этой книги. Те, кто раньше робел перед компьютером, смогут оценить удобство использования электронных таблиц MS Excel, созданных фирмой «Майкрософт» как часть интегрированного пакета Microsoft Office, что переводится на русский язык просто как „Майкрософтова контора“. Те, кто умел работать в этом пакете, познакомятся с широким кругом приложений в области финансовых вычислений и анализа различных финансовых инструментов.

Бизнесмены быстро и без труда осваивают вербальные понятия. Например, они очень быстро проникаются идеей важности учета трансакционных издержек. Не вдаваясь в детали, можно сказать, что данное понятие учитывает издержки на преодоление всех барьеров для достижения цели, кроме непосредственных прямых издержек производства и куплипродажи. Примеры трансакционных издержек встречаются на каждом шагу. Боретесь с недостатком информации — это трансакционные издержки. Боретесь с недостатком знания — они же. Вот последний случай и касается овладения техникой финансовых вычислений. Приобретение соответствующих навыков требует усилий — это трансакционные издержки. Утраченная выгода или потери, связанные с отсутствием навыка финансовых вычислений, — это тоже трасакционные издержки, но другие. Какие из них перевешивают? Приходилось встречаться с отечественными бизнесменами, которые любое количественное знание рассматривали, как тяжелое бремя трансакционных издержек, возлагаемое на них. Наоборот, они были готовы на любые трансакционные издержки, связанные с незнанием. Психологически это легкий путь, но вряд ли это путь успешного российского конкурентоспособного бизнеса. Это книга для тех, кто хочет конкурировать на современных рынках!

Как пользоваться этой книгой? Книга носит характер систематического учебного пособия. Методом освоения материала книги является работа с задачами — разобранными в тексте и данными для решения. В учебном пособии приведено с подробным решением около 130 примеров и около 250 упражнений дано для самостоятельной работы.

Как появилась эта книга? Данное учебное пособие основано на опыте авторов чтения подобных курсов как для студенческой аудитории, так и для слушателей различных форм дополнительного обучения в области финансового менеджмента и прикладной математики. Речь идет о ряде курсов, читаемых бакалаврам, магистрантам и аспирантам, слушателям программ Магистр делового администрирования Высшей школы менеджмента (до 2007 г. — факультета менеджмента) С.-Петербургского государственного университета, а также о прикладных курсах, читаемых на математико-механическом факультете того же университета.

Данная книга является уже четвертым последовательным изданием авторов на эту тему. Первая книга А.В. Бухвалова и А.В. Идельсона [3] явилась методическим осмыслением многочисленных, прежде всего зарубежных, публикаций по финансовой арифметике (Business Mathematics). Тираж книги быстро разошелся почти исключительно в Москве и был замечен профессиональными преподавателями. В первой версии вообще не шла речь об использовании компьютера, что очевидно затрудняло практическое освоение и применение теоретического материала.

Существенным шагом вперед стало издание книги А.В. Бухвалова, В.В. Бухваловой и А.В. Идельсона [4], в которой важнейшим нововведением стало систематическое обучение использованию пакета MS Excel для решения разнообразных финансовых задач. Отметим, что таблицы для расчетов были принципиально упразднены как устаревший инструмент. Кроме того, был существенно расширен круг обсуждаемых инструментов и проблем. Книга вышла с приложением CD ROM, содержащим в соответствии с лучшими зарубежными традициями полный комплект материалов: электронный задачник на базе MS Excel, слайды для преподавателя, разнообразные полезные дополнения в виде бонуса, включавшего, в частности, пакет MiKTEX, с помощью которого авторами созданы оригинал-макеты всех учебных пособий серии (некоторые преподаватели сообщали нам, что они по-прежнему пользуются нашей дистрибуцией для подготовки своих публикаций). Книга используется в качестве учебника в ряде российских вузов и в вузах стран СНГ, а также при чтении лекций консультантами (где особенно ценным оказался пакет на CD ROM с решением всех задач).

Учебное пособие А.В. Бухвалова и В.В. Бухваловой [5] явилось совершенно новой книгой. Оно использовало все методически плюсы предыдущих изданий: обучение через решение задач, объяснение приемов работы с MS Excel. Оно, однако, ушло от существенного минуса всего данного жанра литературы — иллюстративности задач. Наряду с обычными задачами-упражнениями на закрепление учебных навыков в книгу включены многочисленные практические задачи с реальными цифрами, взятыми из российской действительности.

Настоящее издание является переработанной и дополненной версией книги [5]. Основные дополнения коснулась переписанного материала про облигации (п. 8.6) и нового п. 10.8, посвященного анализу инвестиционного проекта, близкого многим обучающимся, — принятию решения об инвестициях в дополнительное образование. Исправления и улучшения внесены по всему тексту книги.

Что еще почитать? Мы не пытались сделать из данного учебного пособия ни книгу по финансам, ни книгу по математике, ни книгу по программированию. Это именно учебное пособие по самостоятельному курсу финансовых вычислений.

При отборе материала мы исходили из того, что необходимо, прежде всего, закрепить базисные навыки по использованию процента и приведения ценности денег во времени в простейшей ситуации — когда нет неопределенности. Такой случай называется детерминированным. Уже этот случай позволяет обыграть основную идею теории финансов — оценивание финансовых инструментов на основе принципа отсутствия финансового арбитража.

По основам теории финансов мы рекомендуем прекрасно написанный учебник З. Боди и Р. Мертона [2]. Отметим, что глава 4 этой книги, которую можно читать независимо от всего текста, может рассматриваться как хорошее дополнение к нашему курсу. Некоторые специальные вопросы, например учет амортизации во всех деталях, можно посмотреть в учебниках Д.Л. Волкова [7] и Я.В. Соколова и М.Л. Пятова [9].

Работы [6, 8, 10] посвящены применению пакета MS Excel в финансах. При этом авторы рассматривают целый ряд финансовых задач, который мы не затрагиваем в этой книге.

Что такое техника финансовых вычислений? Техника финансовых вычислений имеет в основном дело с формулами сложных процентов и суммирования геометрической прогрессии — поэтому в дореволюционной России этот раздел справедливо назывался *финансовой* или *коммерческой арифметикой.* Термин финансовая математика, часто использующийся в этом контексте сегодня в России, целесообразнее закрепить за более математически продвинутой областью финансового моделирования, учитывающей вероятностный характер финансовых величин, так как они касаются будущего. В нашем изложении мы не касаемся этих вопросов, связанных с неопределенностью. Можно сказать, что мы имеем дело с детерминированной постановкой задачи.

Однако именно упрощенный подход, без учета влияния неопределенности, чаще всего используется менеджерами на практике для принятия инвестиционных решений. Достаточно упомянуть основные методы обоснования эффективности капиталовложений: приведенной ценности (PV — Present Value), чистой приведенной ценности (NPV — Net Present Value), внутренней нормы доходности (IRR — Internal Rate of Return). С точки зрения экономики и менеджмента этими вопросами занимается теория инвестиций и, более общим образом, теория корпоративных финансов (см., например, [2]). В данной книге мы рассматриваем соответствующую технику математических вычислений, которая в книгах по корпоративным финансам, как правило, считается известной. Поэтому данный курс надо рассматривать как подготовительный для освоения курсов финансового менеджмента и корпоративных финансов.

Наше изложение основано на постепенном овладении читателем пакетом электронных таблиц MS Excel. Это программное обеспечение существенно меняется от версии к версии, поэтому мы должны сразу оговорить, что предполагается работа в наиболее распространенном сегодня в России русифицированном пакете MS Excel 2003 с загруженным Пакетом анализа.

Каждая глава нашей книги заканчивается разделом, посвященным применению Excel к задачам, рассмотренным в данной главе. Кстати, ориентацией на применение вычислительной техники вызвано то, что мы повсюду в книге используем в качестве разделителя целой и дробной части не десятичную запятую (как это до сих пор наиболее распространено в России и Европе), а точку (как это принято в США и во всех языках программирования), то есть *две целые и тридцать две сотых* мы записываем как 2.32. Это связано также с тем, что практически все финансовые временные ряды (в том числе — на российских аналитических сайтах в Интернете) заданы в этом числовом формате. В них символ „запятая“ имеет смысл разделителя между числами (файлы хранятся в csv-формате — comma-separated values format). Если, однако, ограничиться только разбором примеров из книги, то данный факт не повлияет на вашу работу на компьютере — вы можете пользоваться разделителем, уже установленным в настройках вашей операционной системы.

Для удобства читателя начальные и справочные сведения по работе с MS Excel даны в двух приложениях. Приложение А посвящено простейшим навыкам работы с этим пакетом. В приложении Б дается необходимый материал по программированию на языке VBA.

Приложение В носит более продвинутый характер. Оно посвящено применению языка AWK к обработке финансовой информации. Это приложение может представлять интерес и для профессиональных программистов, не знакомых с этим языком.

В приложении Г дается более продвинутая по сравнению с основным текстом модель финансовой пирамиды. Приведенные формулы могут рассматриваться как решение задачи о том, до какого момента участвовать в пирамиде. Подчеркнем, что авторы не советуют участвовать ни в каких пирамидах.

Автором всех приложений является В.В. Бухвалова.

После каждого раздела приведены упражнения для самостоятельного решения. Ответы и указания к упражнениям даны в конце книги. Решение задач необходимо всем, кто хочет освоить курс с помощью нашего учебного пособия.

При ссылках на подразделы и примеры дается двойная нумерация: сначала указывается номер раздела, а потом указывается номер подраздела или примера: например, п. 3.2.

Дополнительные материалы, связанные с этой книгой и ее проблематикой, можно найти на сайте

`http://bukhvalov.som.pu.ru`

Как был создан оригинал-макет этой книги? Оригинал-макет этой книги был создан в настольной издательской системе MiKTEX, являющейся интегрированной коллекцией, состоящей из компилятора с языка TEX и богатого набора утилит, позволяющих компоновать текст (оформленный в одном из множества доступных стилей), формулы и графику.

Благодарности. Авторы хотят выразить благодарность студентам и аспирантам, помогавшим при подготовке издания: А. Рогульской, А. Ганхуяг, А. Ковальчуку и А. Петрусевичу, а также В. Печенкиной, А. Чупраковой и М. Шубиной.

Слово памяти. В двух первых книгах по финансовой арифметике нашим соавтором выступал Александр Владимирович Идельсон, опытный математик и методист, внесший большой вклад в их содержание. Это был скромный и потрясающе работоспособный человек, светлую память о котором мы сохраним навсегда.

Литература

1. **Беннинга Ш.** *Финансовое моделирование с использованием Excel,* 2-е изд. Пер. с англ. — М.: Издательский дом „Вильямс“, 2007.
2. **Боди З., Мертон Р.** *Финансы.* Пер. с англ. — М.: Издательский дом „Вильямс“, 2004.
3. **Бухвалов А. В., Идельсон А. В.** *Самоучитель по финансовым расчетам.* Учеб. пособие — М.: Мир, Пресс-сервис, 1997.

4. **Бухвалов А. В., Бухвалова В. В., Идельсон А. В.** *Финансовые вычисления для профессионалов.* — СПб.: БХВ–Петербург, 2001.

5. **Бухвалов А. В., Бухвалова В. В.** *Финансовые вычисления для менеджеров.* — СПб.: Издат. дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2006.

6. **Винстон У. Л.** *Microsoft Excel: анализ данных и построение бизнес-моделей.* Пер. с англ. — М.: Издательско-торговый дом „Русская редакция“, 2005.

7. **Волков Д. Л.** *Финансовый учет: теория, практика, отчетность организации.* Учеб. пособие. — СПб.: Издат. дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2006.

8. **Мур Дж., Уэдерфорд Л. и др.** *Экономическое моделирование в Microsoft Excel,* 6-е изд. Пер. с англ. — М.: Издательский дом „Вильямс“, 2004.

9. **Соколов Я. В., Пятов М. Л.** *Бухгалтерский учет для руководителя* — М.: Проспект, 2008.

10. **Уокенбах Дж.** *Диаграммы в Excel.* Пер. с англ. — М.: Издательский дом „Вильямс“, 2003.

1. Процентные вычисления

1.1. Понятие процента

Процентом некоторой величины называется сотая доля этой величины. Такой величиной может быть месячный доход семьи, годовая прибыль фирмы, сумма государственного бюджета. Чтобы указать, что величина выражена в процентах, используется специальное обозначение: %. Термин „процент“ произошел от латинского *pro centum* — на сотню, или за сто. В финансовых и статистических расчетах, а также во многих других областях принято выражать доли величин в процентах. В старой России процент, получаемый за данную в долг или инвестируемую в некоторое предприятие сумму, называли *интересом*.

Необходимо различать два понимания термина процент. Во-первых, процент выступает как *процентное число*, указывая на часть целой величины или долю. Такое понятие процента несложно, но широко используется в социально-экономической статистике и законодательной практике регулирования предпринимательской деятельности. Например, доходы от налогов составили 78% в общей сумме доходов Федерального бюджета Российской Федерации в 1998 г., равной 302.4 млрд рублей. Примером законодательных формулировок, в которых используются процентные числа, являются нормы, определяющие налог на добавленную стоимость (НДС) в размере 18% или налог на прибыль корпораций в размере 24% (эти величины часто меняются законодателем, поэтому читатель должен ориентироваться на современные правовые акты).

Во-вторых, и это основное понимание в данной книге, процент связан с начислением сумм (процентных платежей) за определенные промежутки времени. При этом здесь аккуратнее было бы различать *ставку процента* (interest rate) как некоторое число, выраженное в процентах или долях (единицы) данной величины и *проценты* (interest) как соответствующее абсолютное количество данной величины. Например, при годовой ставке 10% по депозитному счету в банке, что есть указание на процентную ставку по депозиту, и абсолютной величине депозита в 1 000 руб. наращенная за год сумма 100 руб. называется процентами по вкладу. Часто говорят о перевложении этой суммы процентов и тогда мы приходим к сложным процентным ставкам (compounding), о которых тоже пойдет речь ниже. Мы, однако, не будем строго придерживаться этой терминологии, что более соответствует обычному российскому словоупотреблению — смысл всегда виден из контекста.

В настоящей главе мы рассмотрим лишь простейшие задачи на процентные вычисления, связанные с первым пониманием процента как процентного числа. Внимание — и здесь можно ошибиться!

При процентных вычислениях очень важно отчетливо понимать, какая величина принята за 100%. Эта величина называется *базой*. Например, в упомянутом выше примере с Федеральным бюджетом Российской Федерации базой является сумма бюджета в 302.4 млрд рублей. Тогда 78% налоговых поступлений означают, что величина налоговых поступлений составила

$$302.4 \times 78/100 = 236 \text{ млрд руб.}$$

Рассмотрим три задачи на процентные числа, на которые мы затем в тексте этого раздела будем ссылаться как на *три основные задачи*.

Основная задача 1. Определить число, которое составляет $n\%$ от числа A.

Решение. Обозначим искомое число через x и запишем условия задачи в следующем виде:

$$\begin{array}{lll} A & \text{принято за} & 100\%, \\ x & \text{составляет} & n\%. \end{array}$$

Эту запись иногда называют *процентной пропорцией*, которая может быть записана так:

$$\frac{A}{x} = \frac{100}{n},$$

откуда получаем формулу для вычисления значения числа x:

$$x = \frac{A \times n}{100}. \tag{1.1}$$

Основная задача 2. Определить число, $n\%$ которого равны A.

Решение. Обозначим искомое число через x и запишем условия задачи в следующем виде:

$$\begin{array}{lll} x & \text{принято за} & 100\%, \\ A & \text{составляет} & n\%. \end{array}$$

Имеет место следующая пропорция:

$$\frac{x}{A} = \frac{100}{n},$$

откуда получаем формулу для вычисления значения числа x:

$$x = \frac{A \times 100}{n}. \tag{1.2}$$

Основная задача 3. Определить, сколько процентов от числа B составляет число A.

Решение. Обозначим искомое число процентов через x и запишем условия задачи следующем виде:

$$\begin{array}{lll} B & \text{принято за} & 100\%, \\ A & \text{составляет} & x\%. \end{array}$$

Имеет место следующая пропорция:

$$\frac{B}{A} = \frac{100}{x},$$

откуда получаем формулу для вычисления значения числа x:

$$x = \frac{A}{B} \times 100\%. \tag{1.3}$$

Решение любых примеров на процентные числа базируется на решении этих трех основных задач.

1.2. Примеры задач на процентные числа

Пример 1.1. *В США применяется налог с продаж, величина которого меняется от штата к штату. В Калифорнии он, как правило, составляет* 8.75%. *Этот налог не указывается в продажной цене, а начисляется при оплате покупок. Покупатель выбрал в* Wal Mart *товары на сумму* \$39.53 *без учета налога с продаж. Какую сумму он заплатил в кассе?*

Решение. Обозначим через x сумму налога и запишем условия задачи в виде процентной пропорции:

$$\begin{aligned} \$39.53 &\ \text{составляют}\ 100\%, \\ x &\ \text{составляют}\ \ \ 8.75\%. \end{aligned}$$

Это основная задача 1. По формуле (1.1) вычисляем сумму налога:

$$x = \frac{39.53 \times 8.75}{100} = \$3.46.$$

Следовательно, покупатель при оплате покупок заплатил сумму, равную

$$39.53 + 3.46 = \$42.99. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.2. *В России в продажную цену товара включается налог на добавленную стоимость (НДС). Его величина для большинства товаров составляет* 18%. *Иногда он указывается отдельной строкой в кассовом чеке (это актуально для предпринимателей). При покупке товаров сумма НДС составила* 48.66 *руб. Какова стоимость товара без НДС?*

Решение. Обозначим через x стоимость товара без НДС и запишем условие задачи в виде процентной пропорции:

$$\begin{aligned} x\ \text{руб.} &\ \text{составляют}\ 100\%, \\ 48.66\ \text{руб.} &\ \text{составляют}\ \ \ 18\%. \end{aligned}$$

Это основная задача 2. Находим значение x по формуле (1.2):

$$x = \frac{48.66 \times 100}{18} = 270.33\ \text{руб.} \qquad \blacksquare$$

Пример 1.3. *Покупатель приобрел в магазине „Пятерочка“ товары на сумму* 110.90 *руб. По дисконтной карте ему была предоставлена скидка, равная* 7.50 *руб. Чему равна величина скидки в процентах от суммы покупки?*

Решение. Обозначим через x искомое число процентов и запишем условие задачи в виде процентной пропорции:

$$\begin{aligned} 110.90 \text{ руб. } &\text{ составляют } 100\%, \\ 7.50 \text{ руб. } &\text{ составляют } \quad x\%. \end{aligned}$$

Это основная задача 3. Значение x находим по формуле (1.3):

$$x = \frac{7.50}{110.90} \times 100\% = 6.76\%. \qquad \blacksquare$$

Не имеет никакого смысла складывать, вычитать или сравнивать количества процентов, относящиеся к разным базам. Например, если предприятие производит два продукта — A и B, причем продукт A приносит 20% прибыли, а продукт B — 15% прибыли, то совершенно неверно заключить, что от производства этих двух продуктов предприятие получает 35% прибыли или что при производстве продукта A оно получит сумму денег на 5% большую, чем при производстве продукта B. Ответ зависит от пропорций выпуска продуктов. Подобные задачи мы рассмотрим ниже.

Пример 1.4. *Господин Н, получив в наследство* \$65 000, *купил на них две квартиры: однокомнатную за* \$25 000 *и двухкомнатную за* \$40 000. *Через год он продал эти квартиры, получив от продажи однокомнатной квартиры* 40% *прибыли, а от продажи двухкомнатной квартиры* 30% *прибыли. Сколько процентов прибыли господин Н получил от продажи двух квартир?*

Решение. Вычислим сумму денег, полученную в качестве прибыли. По формуле (1.1) суммы прибыли от продажи однокомнатной и двухкомнатной квартир равны, соответственно,

$$25\,000 \times 0.4 = \$10\,000, \quad 40\,000 \times 0.3 = \$12\,000.$$

Всего господин Н получил прибыль, равную

$$\$10\,000 + \$12\,000 = \$22\,000.$$

Требуется определить, сколько процентов составляет \$22 000 от \$65 000. Обозначим искомое число процентов через x и найдем его значение по формуле (1.3):

$$x = \frac{22\,000}{65\,000} \times 100\% = 33.85\%. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.5. *Вычислим, на сколько процентов прибыль, полученная от продажи двухкомнатной квартиры господином Н из примера 1.4, больше, чем прибыль, полученная им от продажи однокомнатной квартиры.*

Решение. В предыдущем примере мы уже нашли, что прибыль от продажи однокомнатной квартиры равна \$10 000, а от продажи двухкомнатной квартиры — \$12 000. Надо найти, на сколько процентов число 12 000 больше числа 10 000. Базой (100%) в этом случае является число 10 000. Вычислим, сколько процентов составляет число 12 000 от числа 10 000. Обозначим искомое число процентов через x и найдем его значение по формуле (1.3):

$$x = \frac{12\,000}{10\,000} \times 100\% = 120\%.$$

Следовательно, сумма прибыли, полученная от продажи двухкомнатной квартиры, на 20% больше, чем сумма прибыли, полученной от продажи однокомнатной квартиры. ■

Пример 1.6. *Вычислим, на сколько процентов прибыль, полученная от продажи однокомнатной квартиры господином Н из примера 1.4, меньше, чем прибыль, полученная им от продажи двухкомнатной квартиры.*

Решение. В этом случае надо найти, на сколько процентов число 10 000 меньше числа 12 000. В этом примере базой (100%) является число 12 000. Вычислим, сколько процентов составляет число 10 000 от числа 12 000. Обозначим искомое число процентов через x и найдем его значение по формуле (1.3):

$$x = \frac{10\,000}{12\,000} \times 100\% = 83.33\%.$$

Следовательно, сумма прибыли, полученной от продажи однокомнатной квартиры, на 16.67% меньше, чем сумма прибыли, полученной от продажи двухкомнатной квартиры. ■

В следующем примере рассматриваются так называемые *безналоговые покупки.* Мы предворяем пример сообщением необходимой информации.

Безналоговые покупки в Европе. Когда вы делаете покупки в странах Европейского сообщества, то оплачиваете не только цену товара, но и налог на добавленную стоимость, который включается в продажную цену. Вы можете вернуть выплаченную сумму НДС, если получите при покупках *чеки безналоговых покупок.* Такие чеки выдаются во многих магазинах Европы. Безналоговые покупки в Европейском сообществе — это система возврата НДС для туристов, не являющихся гражданами Европейского сообщества. Сумма НДС возвращается при пересечении границы Европейского сообщества, если вы вывозите купленные товары с течение 90 дней со дня покупки и имеете на эти товары чеки безналоговых покупок. Когда вы покидаете Европейское сообщество, предъявите ваши покупки и чеки безналоговых покупок таможенным властям. Они поставят штамп на ваши чеки. После этого вы можете получить обратно выплаченную сумму НДС по чекам безналоговых покупок в специальных пунктах возврата налогов.

Пример 1.7. *В Великобритании НДС для большинства товаров составляет* 17.5%. *НДС входит в продажную цену товара. Какой процент составляет налог на добавленную стоимость в продажной цене?*

Решение. Цену товара без НДС примем за 100%. Тогда продажная цена товара составляет

$$100\% + 17.5\% = 117.5\%.$$

Обозначим через x искомое число процентов и запишем условие задачи в виде процентной пропорции:

$$\begin{array}{rcr} 117.5\% & \text{составляют} & 100\%, \\ 17.5\% & \text{составляют} & x\%. \end{array}$$

Это основная задача 3. Значение x находим по формуле (1.3):

$$x = \frac{17.5}{117.5} \times 100\% = 14.89\%. \qquad \blacksquare$$

При процентных расчетах нередко допускаются ошибки, связанные с начислением *сложного процента.* Это понятие будет подробно рассматриваться в третьей и последующих главах. Здесь мы разберем только решение нескольких примеров, связанных с ним.

Пример 1.8. *Некоторый товар подорожал в январе на* 10% *и в феврале еще на* 10%. *На сколько процентов подорожал товар за два месяца?*

Решение. Первоначальную цену товара примем за 100%. После первого повышения она стала равна

$$100\% + 100\% \times 0.1 = 110\%.$$

При втором повышении эта новая цена увеличится на 10%, то есть на 110%×0.1 = 11% от первоначальной цены. Таким образом, цена через два месяца составит

$$110\% + 11\% = 121\%$$

от первоначальной цены. Следовательно, цена товара за два месяца повысилась на 21%. ■

Замечание. Распространенная ошибка — просто сложить проценты:

$$10\% + 10\% = 20\%.$$

Ошибка заключается в том, что при этом складывают проценты, начисленные на разные базы.

Пример 1.9. *Цена товара уменьшилась в результате двух снижений цены на одно и то же число процентов с 800 руб. до 512 руб. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?*

Решение. Обозначим искомое число процентов через x. Первое снижение равно

$$800\times\frac{x}{100}\text{ руб.},$$

после чего цена стала равна

$$800 - 800\times\frac{x}{100} = 800\left(1 - \frac{x}{100}\right)\text{ руб.}$$

Эта новая цена снизилась при втором снижении на

$$800\left(1 - \frac{x}{100}\right)\frac{x}{100}\text{ руб.}$$

и стала равна:

$$800\left(1 - \frac{x}{100}\right) - 800\left(1 - \frac{x}{100}\right)\frac{x}{100} = 800\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2.$$

По условию задачи эта цена после второго снижения стала равна 512, то есть искомое число процентов x является корнем уравнения:

$$800\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 512,\ \text{откуда}\ \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 0.64.$$

Так как снижение цены не может произойти более чем на 100%, то

$$x \le 100,\ \text{откуда}\ 1 - \frac{x}{100} \ge 0,$$

поэтому последнее уравнение равносильно уравнению:

$$1 - \frac{x}{100} = 0.8, \text{ откуда } x = 20\%. \qquad \blacksquare$$

Заметим, что при решении этой задачи можно, конечно, применить формулу сложных процентов из главы 3.

Замечание. Распространенная ошибка при решении этой задачи состоит в следующем. Вычисляют общее снижение цены за два раза:

$$800 - 512 = 288 \text{ руб.}$$

Далее находят, сколько процентов составляет число 288 от первоначальной цены 800 руб. по формуле (1.3):

$$\frac{288}{800} \times 100\% = 36\%.$$

Делят это число на 2 и получают 18%. Сущность ошибки и здесь состоит в том, что не учитывается, что проценты в первый и во второй раз должны начисляться на разные базы.

1.3. Портфель ценных бумаг

Портфелем ценных бумаг данного лица (или организации) называется совокупность принадлежащих ему (ей) ценных бумаг. Ценными бумагами являются облигации, акции, векселя и другие финансовые инструменты, по которым держатель (владелец) портфеля может получить деньги. Сумма этих денег зависит от номинальных и рыночных стоимостей ценных бумаг и процентов, начисляемых по ним. Формирование портфеля ценных бумаг является одной из основных (и трудных) задач теории финансов, для решения которой необходимы вероятностные методы. В нашем учебнике мы рассмотрим только некоторые элементарные задачи об оценке доходности портфеля ценных бумаг.

Пример 1.10. *Пусть портфель ценных бумаг состоит из* 50 *облигаций, номинальная стоимость которых* 100 *руб., и* 30 *облигаций, номинальной стоимости* 50 *руб. По облигациям первого вида выплачивается* 10% *годового дохода, а по облигациям второго вида —* 15%. *Сколько процентов годового дохода получит держатель портфеля от всех входящих в него облигаций?*

Решение. Общая стоимость облигаций портфеля равна

$$50\times 100 + 30\times 50 = 6\,500 \text{ руб.}$$

Найдем общую сумму годового дохода от всех облигаций. От 50 облигаций первого вида владелец портфеля получит $50\times 100\times 0.1 = 500$ руб., а от 30 облигаций второго вида — $30\times 50\times 0.15 = 225$ руб. процентного дохода. Всего он получит $500+225 = 725$ руб. процентного дохода. Вычислим, сколько процентов составляет число 725 от числа 6 500 по формуле (1.3):

$$\frac{725}{6\,500}\times 100\% = 11\frac{2}{13}\%. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.11. *На сколько процентов доход владельца портфеля ценных бумаг из примера 1.10 от облигаций первого вида больше, чем доход от облигаций второго вида?*

Решение. При решении предыдущего примера мы нашли, что облигации первого вида принесли держателю портфеля 500 руб. процентных денег, а облигации второго вида — 225 руб. Вычислим по формуле (1.3), сколько процентов составляет число 500 от числа 225:

$$\frac{500}{225}\times 100\% = 222\frac{2}{9}\%.$$

Так как в данном случае 225 руб. принимались за 100%, то доход от облигации первого вида на $122\frac{2}{9}\%$ больше, чем доход от облигации второго вида. ■

Пример 1.12. *Держатель портфеля ценных бумаг из примера 1.10 хочет увеличить доходность своего портфеля до 12% (годовых), увеличив число облигаций второго вида. Сколько облигаций второго вида он должен для этого прикупить?*

Решение. Обозначим число облигаций второго вида, которые надо купить, через x. Общее число облигаций второго вида станет после этого равно $30 + x$. Стоимость всех облигаций портфеля станет при этом равна

$$50\times 100 + (30 + x)\times 50 \text{ руб.}$$

Доход от облигаций второго вида равен

$$(30 + x)\times 50\times 0.15 = 7.5(30 + x) \text{ руб.}$$

Доход от облигаций первого вида не изменился и составляет $50{\times}100{\times}0.1 = 500$ руб.

По формуле (1.3) составляем уравнение:

$$\frac{7.5(30+x)+500}{5000+50(30+x)}\times 100 = 12,$$

решив которое, находим, что $x = 36\frac{2}{3}$. Следовательно, владелец портфеля должен купить 37 облигаций второго вида (округляем число $36\frac{2}{3}$ в большую сторону). ∎

Пример 1.13. *Портфель ценных бумаг состоит из акций одного вида. В феврале цена акции повысилась на несколько процентов, в марте снизилась на столько же процентов, в апреле снова повысилась на то же число процентов, и так продолжалось до конца года. Что произошло с первоначальной (январской) ценой в ноябре?*

Решение. В марте цена акции понизилась на бо́льшую сумму, чем повысилась в феврале, так как база для начисления процентов в марте (цена акции в феврале) была больше, чем база для начисления процентов в феврале (январская цена). По условию примера в каждом четном месяце цена повышалась, а в каждом нечетном — снижалась. Как объяснено выше, снижение в нечетном месяце было больше, чем повышение в предыдущем. Поэтому в ноябре цена акции будет меньше, чем в январе.

Заметим, что если этот процесс будет продолжаться долго, то цена акции может стать как угодно близкой к нулю. ∎

1.4. Начисление налогов

Государство собирает налоги с отдельных граждан и организаций для того, чтобы финансировать общегосударственные расходы: содержание аппарата управления, армии, органов охраны порядка, науку, народное образование, социальное обеспечение и т. п. Существует много различных налогов, но их величина всегда устанавливается в процентах от налогооблагаемой базы. Например, подоходный налог является определенным процентом от величины полученных доходов, а налог с продаж — процентом от суммы покупки. Система налогообложения в России разнообразна и сложна, хотя в последнее время делаются попытки ее реформирования и упрощения.

Приведенные в этом пункте примеры, как и многие примеры в этой книге, используют условные данные. Цель этих примеров — рассмотреть возникающие на практике ситуации и показать, как выполняются необходимые вычисления.

В первом примере рассматривается налогообложение корпораций. Российское налоговое законодательстве охватывает много особых случаев, которые необходимо принимать во внимание при расчете затрат, которые не облагаются налогом. Поэтому мы рассматриваем пример, использующий данные о налогооблажении корпораций в США, где финансовая арифметика налогообложения не обременена таким количеством деталей.

Налоги на доходы корпораций определяются в США по трехступенчатой системе налогообложения следующим образом:

Налогооблагаемый доход (долл.)	Ставка налога (%)
До 50 000	15
От 50 000 до 75 000	25
Более 75 000	34

Налогооблагаемый доход вычисляется так: из валовой выручки вычитаются все затраты, включая амортизацию оборудования и расходы на выплату процентов за пользование капиталом. Роль амортизации при вычислении налогооблагаемого дохода мы рассмотрим в главе 4. Приведем пример вычисления налога с корпорации.

Пример 1.14. *Валовая выручка корпорации за год равна* $\$\,140\,000$, *производственные расходы составляют* $\$\,55\,000$. *Корпорация сделала заем в банке на сумму* $\$\,50\,000$, *за который выплатила* 8% *годовых. Амортизация оборудования равна* $\$\,12\,000$. *Вычислим сумму налога, которую должна выплатить корпорация.*

Решение. Расходы на выплату процентов за пользование капиталом, полученным в долг от банка, равны

$$\$\,50\,000 \times 0.08 = \$\,4\,000.$$

Налогооблагаемый доход равен

$$\$\,140\,000 - \$\,55\,000 - \$\,4\,000 - \$\,12\,000 = \$\,69\,000.$$

При таком доходе ставка налога равна 25%. Сумма налога равна

$$\$\,69\,000 \times 0.25 = \$\,17\,250. \qquad \blacksquare$$

По законодательству США дивиденды, выплаченные корпорацией по реализованным ею акциям, не исключаются из налогооблагаемого дохода (в противоположность расходам, выплачиваемым в качестве процентов на заемный капитал). Это делает для компании более привлекательным занимать деньги, чем использовать собственные средства.

В США налоги на доходы частных лиц также зависят от величины годового дохода гражданина и (без учета различных льгот) взимаются по двухступенчатой системе налогообложения:

Налогооблагаемый доход (долл.)	Ставка налога (%)
До 30 000	15
Более 30 000	28

Существенно различаются ставки налога на главу семейства и на отдельных лиц и т. п. Есть система льгот для лиц с низким доходом. Мы здесь не будем учитывать эти особенности налогообложения.

Расчет налога на доходы частных лиц производится так: с дохода до \$ 30 000 берется 15% налога. Если доход превышает \$ 30 000, но не превышает \$ 72 000, то на \$ 30 000 начисляется 15% налога, а на остальную сумму 28%. Если доход превышает \$ 72 000, то со всей суммы дохода налог начисляется по ставке 28%.

Пример 1.15. *Годовой доход г-на Смита равен* \$ 28 000*, г-на Холла —* \$ 68 000*, г-на Коллинза —* \$ 105 000*. Какой налог должен заплатить каждый из них.*

Решение. Г-н Смит должен заплатить 15% налога, так как его годовой доход меньше \$ 30 000:

$$\$\,28\,000 \times 0.15 = \$\,4\,200.$$

Так как годовой доход г-на Холла больше \$ 30 000, но не превосходит \$ 72 000, то его годовой налог состоит из двух составляющих. Во-первых, это 15%-й налог с \$ 30 000:

$$\$\,30\,000 \times 0.15 = \$\,4\,500.$$

С остальной суммы дохода, равной $ 38 000 ($ 68 000 – $ 30 000 = $ 38 000), он должен выплатить налог по ставке 28%:

$$\$\,38\,000 \times 0.28 = \$\,10\,640.$$

Всего г-н Холл должен заплатить

$$\$\,4\,500 + \$\,10\,640 = \$\,15\,140.$$

Доход г-на Коллинза превосходит $ 72 000, поэтому со всей суммы дохода он выплатит налог по ставке 28%. Сумма налога равна

$$\$\,105\,000 \times 0.28 = \$\,29\,400.$$

■

1.5. Социально-экономические показатели

Практически любая публикация, в которой обсуждаются какие-либо социально-экономические показатели, приводит значения этих показателей в процентах. При этом проценты вычисляются относительно некоторых значений этих же показателей, принятых за 100%. Например, если утверждается, что в августе 2001 г. доля семей в России, в которых был компьютер, составляла 5%, а в августе 2005 г. — 20%[1], то в первом случае за 100% было принято количество семей в России в августе 2001 г., а во втором — в августе 2005 г. Учитывая грустную статистику сокращения населения России в последние годы, это две разные величины, поэтому нельзя сделать вывод, что количество семей, имеющих компьютер, увеличилось за рассматриваемый период в 4 раза.

Таблица 1 является фрагментом таблицы Госкомстата Росийской Федерации, содержащей информацию об основных социально-экономических показателях в сентябре 1998 г.

Заметим, что в исходной таблице содержится информация о гораздо большем числе показателей. Но и приведенный фрагмент показывает, что основной формат информации в подобных таблицах — это относительные процентные числа. Как видно из приведенного фрагмента, информация в первом столбце таблицы выражена в абсолютных единицах (миллиардах рублей), а информация в остальных столбцах задана в относительных

[1] BusinessWeek Россия, №7/27 февраля 2006, с. 32.

Показатель	**Сентябрь 1998**	**В % к августу 1998**	**В % к сентябрю 1997**	**Сентябрь 1997 в % к августу 1997**
Валовый внутренний продукт, млрд рублей	257.0	101.8	90.1	103.7
Объем промышленной продукции, млрд рублей	132.0	96.9	85.5	100.3
Продукция сельского хозяйства, млрд рублей	53.9	137.2	85.0	124.4
Розничный товарооборот, млрд рублей	111.6	95.5	96.2	104.6

Таблица 1. Социально-экономические показатели в сентябре 1998 г.

процентах. Сказанное справедливо и для всей таблицы, а не только для приведенного фрагмента.

Однако в подобных таблицах, содержащих много разнообразных показателей, может не содержаться информации, необходимой для проведения какого-либо экономического анализа. И тогда встает задача вычисления по имеющимся в таблице показателям какого-либо дополнительного показателя. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.16. *На основе информации, имеющейся в табл. 1, вычислить валовый внутренний продукт (ВВП) в августе 1998 г. в процентах к августу 1997 г.*

Решение. Из таблицы видно, что в строке о ВВП приведены относительные проценты, связывающие следующие четыре величины: ВВП в августе 1998 г., ВВП в сентябре 1998 г., ВВП в августе 1997 г. и ВВП в сентябре 1997 г. Обозначим эти величины соответственно через a, b, c, d. В этих обозначениях величина ВВП в августе 1998 г. в процентах к августу 1997 г. равна отношению $\frac{a}{c}$. Из данных в таблице имеем следующие равенства:

$$\frac{b}{a} = 101.8\%,\ \frac{b}{d} = 90.1\%,\ \frac{d}{c} = 103.7\%\,.$$

Выполним следующие преобразования и получим формулу для вычисления величины $\frac{a}{c}$:

$$\frac{a}{c} = \frac{ab}{cb} = \frac{\left(\frac{b}{c}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{b}{d}\right)\times\left(\frac{d}{c}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{90.1\times 103.7}{101.8} = 91.8\%\,.$$

Полученный результат показывает, что в августе 1998 г. по сравнению с августом 1997 г. ВВП упал более чем на 8%. ■

1.6. Методы ценообразования

Цена является одной из четырех составляющих маркетинг-микса. Часто именно ценовая конкуренция является средством, с помощью которого фирма может завоевать новый сегмент рынка. Классический пример использования цены с целью завоевания нового рынка — появление в 1967 г. в США японских цветных телевизоров. Цены на эти телевизоры были установлены на $50–100 меньше, чем у аналогичных по характеристикам телевизоров, произведенных в США. Такая ценовая стратегия позволила японским производителям бытовой техники на долгие годы занять существенный сегмент американского рынка.

В этом пункте мы не будем излагать методы и приемы современного ценообразования, для ознакомления с которыми отсылаем читателя к специальной литературе. Мы коснемся только самых азов этой сложной проблемы и обсудим некоторые простейшие методы ценообразования. Будет показано, какие вычисления, связанные с процентами, потребуется выполнять при применении этих методов.

Обычно выделяют пять базовых методов установления цены продукта:

1. наценка (markup pricing);
2. стандартный метод (standard pricing);
3. целевой метод (target pricing);
4. рыночный метод (market pricing);
5. стратегический метод (strategical pricing).

На практике фирмы чаще всего устанавливают цены на свою продукцию, применяя более сложные подходы, но именно перечисленные выше методы являются отправной точкой при принятии ценовых решений.

Первые три метода (наценка, стандартный, целевой) относятся к так называемому *пассивному ценообразованию*. Пассивное ценообразование — это установление цен на товар на основе затрат фирмы на его производство и организацию реализации или под влиянием цен конкурентов. При таком подходе полностью игнорируются условия на рынке, где товар будет продаваться. Прежде чем перейти непосредственно к изложению перечисленных методов, обсудим ряд понятий, которые будут использованы.

Затраты фирмы на производство товара бывают двух типов: постоянные и переменные. *Постоянные затраты* (в литературе используется также термин *фиксированные затраты*) не зависят от объема производства, по крайней мере, в короткие промежутки времени. К ним относятся, например, затраты по содержанию управленческого аппарата фирмы, минимального количества работающих и складских помещений. Такие издержки возникают даже тогда, когда продукция вообще не выпускается. На долговременном этапе фирма может принять решение о закрытии производства, которое приведет к сокращению постоянных затрат.

Переменные затраты меняются с объемом выпускаемой продукции. К переменным затратам относятся, прежде всего, затраты на все виды сырья, используемого в производстве.

Наценка. Метод наценки (markup) является очень простым. Цена единицы продукта определяется добавлением наценки к общим затратам на ее производство. Необходимой информацией при использовании этого метода являются: постоянные затраты C_f и переменные затраты C_v в расчете на одну единицу продукта и величина наценки m в процентах. Величина m показывает, что полные затраты, равные сумме постоянных и переменных затрат, будут составлять в цене единицы продукта $(100-m)\%$. Если мы для удобства вычислений перейдем к долям единицы: $r = m/100$, то доля полных затрат в цене P составит $1 - r$:

$$P = \frac{C_f + C_v}{1 - r}\ . \tag{1.4}$$

Что касается постоянных затрат C_f, то чаще они известны для некоторой партии продукта, объема n. Обозначим эти затраты C_{fn}. Тогда постоянные затраты на производство единицы продукта равны $\frac{C_{fn}}{n}$, и формула

(1.4) принимает вид:

$$P = \frac{\dfrac{C_{fn}}{n} + C_v}{1 - r}\,. \tag{1.5}$$

Рассмотрим следующий пример на определение цены методом наценки.

Пример 1.17. *Фирма рассчитывает продать* 10 000 *единиц произведенного ею продукта, на производство которого было затрачено* 400 000 *руб. в виде постоянных затрат и еще* 50 *руб. на каждую единицу продукта (переменные затраты). Какой должна быть цена товара, если фирма хочет заработать на продаже партии* 10%*?*

Решение. Постоянные затраты известны для партии продукта, поэтому применяем формулу (1.5) при $C_{fn} = 400\,000$, $n = 10\,000$, $C_v = 50$ и $r = 0.1$:

$$P = \frac{\dfrac{400\,000}{10\,000} + 50}{1 - 0.1} = 100 \text{ руб.}$$ ■

Привлекательность метода наценки в его простоте. Однако он никак не учитывает ситуацию на рынке. Поэтому, применяя этот метод определения цены, фирма рискует как переоценить свой продукт, так и недооценить его. Например, если вместо 10 000 единиц продукта объем продаж составит только 9 000 единиц продукта (что на 10% меньше запланированного), то фирма ничего не заработает, а только вернет затраченное. Дальнейшее уменьшение объема продаж приводит к убыткам. Объединим эту информацию в следующей таблице.

Общие затраты	900 000	900 000	900 000
Объем продаж	10 000	9 000	8 000
Выручка	1 000 000	900 000	800 000
Доход (сумма)	100 000	0	−100 000
Доход (процент)	10%	0%	−10%

Стандартное ценообразование. Рассмотрим ситуацию, когда фирма продает свою продукцию в нескольких странах, каждая из которых имеет свою национальную валюту. Стандартное ценообразование предполагает, что фирма устанавливает одну и ту же цену на свой продукт в разных странах. В этом случае цена устанавливается только с учетом обменного курса валют. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.18. *Цена некоторого продукта фирмы равна* 2 675 *руб. Какой должна быть цена этого продукта в долларах, если обменный курс в момент установления цены составляет* 26.75 *руб. за доллар?*

Решение. Для того чтобы определить цену товара в долларах, необходимо поделить цену в рублях на обменный курс доллара:

$$P = \frac{2\,675}{26.75} = \$100. \quad \blacksquare$$

Стандартное ценообразование не учитывает не только рыночные условия, но и предпочтения потребителей в разных странах. Кроме того, обменный курс валют является сильно изменяющейся величиной. Поэтому, применяя этот метод определения цены, фирма, как и при методе наценки, рискует как переоценить свой продукт, так и недооценить его.

Целевое ценообразование. При целевом ценообразовании фирма устанавливает, какой должна быть доходность ее инвестиций, и вычисляет цену в связи с этой установкой. Исходными данными при применении метода целевого ценообразования являются: величина общих инвестиций I, желаемая доходность инвестиций r, общие затраты на производство единицы продукции C и ожидаемый объем продаж n. Цена единицы продукта P вычисляется по формуле:

$$P = C + \frac{Ir}{n}\,. \tag{1.6}$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.19. *Фирма инвестировала в организацию производства некоторого продукта* 500 000 *руб. и хочет заработать* 20% *на этих инвестициях. Общие затраты на производство единицы продукции составляют* 60 *руб. Ожидаемый объем продаж равен* 10 000 *единицы продукции. Какой должна быть установлена цена продукта, если применяется метод целевого ценообразования?*

Решение. Чтобы определить цену товара, применим формулу (1.6) при $C = 60$, $n = 10\,000$, $I = 500\,000$ и $r = 0.2$:

$$P = 60 + \frac{0.2 \times 500\,000}{10\,000} = 70 \text{ руб.} \quad \blacksquare$$

Следует отметить, что при целевом ценообразовании фирма получает желаемую доходность от своих инвестиций, если оценки затрат и объема продаж являются точными. В целом этот метод, как уже отмечалось ранее, никак не учитывает рыночные условия.

Рыночный метод ценообразования. Как следует из названия метода, он учитывает различные условия на рынке товара при установлении цены на него. Поэтому если эти условия различные в разных странах, то и цены тоже устанавливаются различные. С точки зрения маркетинга такой подход представляется обоснованным. Однако фирма обычно не раскрывает конкретных рыночных причин, которые влияют на увеличение цены. Более того, сам факт такого увеличения всячески замалчивается. Рассмотрим следующий пример, данные для которого взяты из каталогов фирмы IKEA в США и России, изданных летом 2005 г.

Пример 1.20. *Цена шезлонга* KARLSLUND *в России равна* 3 990 *руб. Цена того же шезлонга в США* — \$79. *Можно ли считать, что применялось стандартное ценообразование, если курс доллара на момент сравнения составляет* 27.80 *руб.? На сколько процентов дороже шезлонг в России?*

Решение. При курсе 27.80 руб. за доллар вычислим долларовый эквивалент цены шезлонга в России:

$$P_R = \frac{3\,990}{27.80} = \$143.53.$$

Как видим, цена шезлонга в России существенно выше. Определим теперь, на сколько процентов цена в России выше цены в США:

$$r = \frac{143.53 - 79}{79} = 81.68\%.$$

На полученный результат не влияет, в какой валюте вычисляются цены, действительно:

$$P_{USA} = 27.80 \times 79 = 2\,196.20 \text{ руб.}, \quad r = \frac{3\,990 - 2\,196.20}{2\,196.20} = 81.68\%.$$

Можно еще вычислить, при каком курсе доллара в России цены на шезлонг в России и США будут эквивалентны:

$$s = \frac{3\,990}{79} = 50.51 \text{ руб.}$$ ■

Разобранный пример, согласитесь, является очень неприятным и обидным для жителей России. Возьмем информацию о другом товаре из тех же каталогов фирмы IKEA.

Пример 1.21. *Цена лейки* БЕТНА *в России равна* 49 *руб. Цена этой же лейки в США* — \$2.99. *Можно ли считать, что применялось стандартное ценообразование, если курс доллара на момент сравнения составляет* 27.80 *руб.? В какой стране этот товар дороже и на сколько процентов?*

Решение. При курсе 27.80 руб. за доллар вычислим долларовый эквивалент цены лейки в России:

$$P_R = \frac{49}{27.80} = \$1.76.$$

Как видим, цена лейки в России ниже, чем ее цена в США. Определим теперь, на сколько процентов цена в США выше цены в России:

$$r = \frac{2.99 - 1.76}{1.76} = 69.64\%.$$

В том случае, если мы хотим вычислить, на сколько процентов цена в России ниже цены в США, то получим другой результат:

$$r = \frac{2.99 - 1.76}{2.99} = 41.05\%.$$

Этот пример еще раз наглядно демонстрирует, что необходимо однозначно указывать, какая величина является базой при определении процента. В первом случае базой является цена лейки в России и разница в ценах составляет 69.64%, а во втором — цена в США, и тогда разница в ценах составляет 41.05%. ■

Заметим, что из рассмотренных реальных примеров нельзя сделать вывод, что фирма IKEA применяет рыночный метод ценообразования. Было установлено только, что одна и та же продукция продается в США и России по разной цене. Только высший менеджмент фирмы IKEA знает, какие именно методы ценообразования применяются в этой фирме.

С реализацией рыночного метода ценообразования связан ряд серьезных проблем. Во-первых, если фирма установит относительно высокую цену на свой продукт в одной из стран, то ни правительству, ни потребителям это не понравится. Правительство в этой ситуации может потребовать объяснений. Известны даже случаи, когда фирму штрафовали за такую ценовую политику.

Во-вторых, при большой разнице цен на один и тот же товар в разных странах оптовики могут покупать товар в странах, где он стоит дешевле, и продавать его в странах, где он строит дороже. Такая практика называется *серым маркетингом (gray marketing)*.

Стратегическое ценообразование. При стратегическом методе ценообразования сначала во всех странах устанавливается минимальная стандартная цена (minimum standard price). После этого руководитель филиала в конкретной стране выполняет исследование местных условий и особенностей (структуры затрат на производство продукта, местного рынка сбыта, целей фирмы и т. п.). Менеджеры в каждой стране могут выбирать, продавать ли продукт по минимальной рекомендованной цене или увеличить ее. Принятие этого решения зависит от конкуренции на местном рынке, особенностей протребителей этого рынка, местного законодательства. Решение обычно принимается при непосредственном участии головного офиса.

Стратегическое ценообразование имеет несколько преимуществ. С одной стороны, фирма имеет возможность установить минимальную стандартную цену на свою продукцию, зафиксировав тем самым минимальные затраты на производство и реализацию единицы продукта. С другой стороны, эта цена может быть скорректирована с учетом национальных особенностей. Таким образом, этот метод ценообразования объединяет глобальный подход руководства головного офиса с локальным виденьем филиалами особенностей национальных рынков. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.22. *Французская фирма* YP *выпускает в продажу новую туалетную воду* Neopar *одновременно в США и России. В США 50 мл этой туалетной воды будет продаваться по минимальной рекомендованной цене, равной* \$35.5. *Предполагаемый объем продаж* — 10 000 *единиц товара. При такой цене фирме* YP *удастся возместить затраты на производство, доставку, рекламу и реализацию товара в США. В предположении, что полные затраты в России такие же, какой должна быть установлена цена в России, если предполагаемый объем продаж на* 10% *ниже? Курс доллара на момент установления цены составляет* 27.80 *руб.*

Решение. При курсе 27.80 руб. за доллар вычислим рублевый эквивалент цены туалетной воды в США:

$$P_{USA} = 27.8 \times 35.5 \, = \, 986.90 \text{ руб.}$$

Предполагаемая выручка S от продажи 10 000 единиц товара в США составит:

$$S = 986.90 \times 10\,000 \;=\; 9\,869\,000 \text{ руб.}$$

Объем продаж в России прогнозируется на уровне 9 000 ($= 10\,000 \times (1-0.1)$) единиц товара. Следовательно, чтобы сохранить размер выручки, следует установить цену P_R, которая вычисляется по формуле:

$$P_R = \frac{9\,869\,000}{9\,000} \;=\; 1\,096.56 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Розничная цена. Следует заметить, что всюду выше речь шла об определении цены продукции производителями, т.е. оптовой цены. Что касается розничных цен, то на них влияют многие факторы, среди которых налоги, таможенные сборы, транспортные расходы и наценки крупных и мелких оптовиков, а также торговая наценка. Чтобы у читателя сложилось правильное представление о том, из чего складывается розничная цена продукта, рассмотрим пример образования розничной цены килограмма соли первого сорта в г. Туле.[2]

Изменение цены	Процент	Новая цена (руб.)
Цена завода		1.40
1. НДС на границе	10%	1.54
2. Таможенный сбор	1.3%	1.56
3. Перевалка на станции Белгород	19.87%	1.87
4. Наценка дилера	9.63%	2.05
5. Перевозка до Тулы по ж/д	12.20%	2.30
6. Наценка крупного оптовика на станции Тула-Лихвинская	8.26%	2.49
7. Наценка крупного оптовика	8.03%	2.69
8. Наценка мелкого оптовика	12.27%	3.02
9. Розничная наценка	19.87%	3.62

[2]Источник: BusinessWeek Россия, №6/20 февраля 2006, с. 24.

Из приведенной таблицы видно, что на пути от производителя („Артемсоль“, Украина) до покупателя в г. Туле цена соли изменяется 9 раз и возрастает с 1.40 руб. до 3.62 руб. Таким образом, если за 100% принять цену завода, то розничная цена составляет 258.57%, а общее увеличение цены — 158.57%.

1.7. Используем Excel

	A	B	C	D
3	**Пример 1.1**			
4				
5	*Дано:*			
6	Процент НДС	8.75%		
7	Сумма покупки без НДС	$39.53		
8	*Вычислить:*			
9	Сумма в кассу?			
10	*Решение:*			
11	Сумма НДС =	$3.46	=B7*B6	
12	Сумма в кассу =	**$42.99**	=B7+B11	
13				
14	**Пример 1.2**			
15				
16	*Дано:*			
17	Сумма НДС	48.66р.		
18	Процент НДС	18%		
19	*Вычислить:*			
20	Сумма покупки без НДС?			
21	*Решение:*			
22	Сумма покупки без НДС =	**270.33р.**	=B17/B18	
23	Сумма в кассу =	318.99р.	=B17+B22	
24	*Проверка:*			
25	Сумма НДС =	48.66р.	=B22*B18	
26				

Рис. 1. Примеры на вычисление процентов

В этом пункте мы разберем, как решить примеры из текущей главы с помощью Excel. Для этого потребуется только умение вводить данные и работать с формулами, которые часто называют душой и сердцем электронных таблиц.

Те, кто не знаком с техникой ввода данных в Excel, должен прочесть соответствующие разделы в любом из доступных источников. Базовые сведения по этому вопросу содержатся в приложении А.

Приведем основные правила работы с формулами. Любые формулы в Excel начинаются со знака равенства. Без знака равенства вводимые данные интерпретируются как текст, если, конечно, они не являются числом.

Ячейка, в которую вводятся данные (формула — это один из видов данных), называется *активной*. После того как формула введена (нажата клавиша Enter), в активной ячейке появляется значение, вычисленное по введенной формуле, а саму формулу можно увидеть в строке формул.

Порядок вычислений (приоритет) по формуле традиционен для языков программирования: выражения в скобках вычисляются в первую очередь; умножение и деление выполняются до сложения и вычитания; операции одного приоритета выполняются слева направо. Для изменения порядка вычислений используются круглые скобки.

Если формула содержит адрес ячейки (ссылку), то результат вычисления по ней зависит от содержимого этой ячейки. При изменении содержимого ячейки может измениться и результат вычислений.

Ссылки на ячейку можно вводить вручную и с помощью мыши, *щелкнув* ячейку. После щелчка вокруг ячейки появляется бегущая штриховая рамка, а адрес ячейки записывается в формулу. Использование мыши уменьшает количество ошибок и экономит время ввода.

При вводе данных в активную ячейку не обязательно видеть ее в окне. Можно свободно перемещаться по рабочему листу и щелкать ячейки, участвующие в формуле. Быстро вернуться в активную ячейку можно, нажав клавиши Ctrl+Backspace.

Имеющиеся в этой книге рисунки с решениями примеров являются фрагментами рабочих листов, на которых эти решения выполнены. Эти листы имеют одинаковую структуру: в первой строке таблицы после слова Глава указано название главы, в тексте которой содержатся решаемые примеры. Каждый пример имеет номер, совпадающий с номером этого примера в тексте главы. Решения примеров, по возможности, также имеют одинаковую структуру: данные, вопрос, решение. Ячейки, содержащие ответы, выделены жирным шрифтом и рамкой. Рядом с ячейками, в которые введены формулы, записаны в качестве комментария эти формулы. Ячейки, содержащие комментарии, выделены серым фоном.

Надеемся, что сделанных пояснений будет достаточно, чтобы повторить решения первых двух примеров из настоящей главы (рис. 1).

Для того чтобы решения примеров в Excel выглядели так же, как на рисунках в книге, необходимо установить в ячейках правильные форма-

	A	B	C	D
1	**Глава: Процентные вычисления**			
2				
3	**Пример 1.14 (налог с корпорации)**			
4	*Данные:*			
5	Валовая выручка	$ 140 000.00		
6	Произв. расходы	$ 55 000		
7	Величина заема	$ 50 000		
8	Аморт.отчисления	$ 12 000		
9	Заемный процент	8%		
10	*Вопрос:*			
11	Сумма налога ?			
12	*Решение:*			
13	Облагаемый доход (B16) = B5-B6-B7*B9-B8			
14	Сумма налога = ЕСЛИ(B16<=50000; B16*15%;			
15	ЕСЛИ(B16<=75000;B16*25%; B16*34%))			
16	Облагаемый доход	$ 69 000		
17	Сумма налога	**$ 17 250.00**		
18				
19	**Пример 1.15 (налог с частного лица)**			
20	*Данные:*			
21	Доход	$ 68 000.00		
22	*Вопрос:*			
23	Сумма налога ?			
24	*Решение:*			
25	Сумма налога = ЕСЛИ(B21<=30000; B21*15%;			
26	ЕСЛИ(B21<=72000;4500+(B21-30000)*28%; B21*28%))			
27	Сумма налога	**$ 15 140.00**		
28				

Рис. 2. Примеры на вычисление налогов

ты. Установка форматов выполняется с помощью команды Ячейки... из меню Формат. Обычно о том, какой формат задан в ячейке, можно догадаться по отображаемому значению. Например, на рис. 1 в ячейках B6 и B18 задан *процентный* формат, а в ячейках B7 и B17 — *денежный*. При этом следует помнить, что между хранимыми и отображаемыми в ячейках значениями существуют определенные различия. Важно понимать, что форматирование никак не отражается на хранимых в ячейках числовых и текстовых значениях. Например, если ввести число с шестью знаками после десятичной точки в ячейку, которая отформатирована на отображение только двух знаков после десятичной точки, то на экране вы увидите число с двумя знаками после десятичной точки. Однако хранимое в ячейке значение никак не изменится, и при расчетах будет использоваться введенное значение — число с шестью знаками после десятичной точки.

В решениях примеров 1.14 и 1.15 (рис. 2) используется логическая функция ЕСЛИ() (формулы в ячейках B17, B27). Эта функция выполняет проверку условия, задаваемого первым аргументом, и возвращает значение второго аргумента, если условие выполнено, и значение третьего аргумента, если условие не выполнено:

=ЕСЛИ(условие; значение_да; значение_нет).

Так как в качестве аргументов функций могут, в свою очередь, использоваться любые другие функции, то с помощью вложений функций ЕСЛИ() друг в друга можно проверять последовательную цепочку условий. Именно так были запрограммированы формулы для определения налоговых отчислений.

Упражнения

1. В США налог с продаж (НП) для многих товаров составляет 8.75%. Он не включается в продажную цену, а начисляется при оплате покупок. Покупатель приобрел в Wal-Mart товары на сумму \$139.36 без учета НП. Какую сумму он заплатил в кассе?

2. В условиях упражнения 1 покупатель заплатил в кассу \$139.36. Сколько стоили купленные товары без учета НП?

3. В России в цену товаров включается налог на добавленную стоимость (НДС). В чеках некоторых торговых сетей, например Рамстора, имеется информация о сумме уплаченного НДС. Чему равен НДС, если при покупке на сумму 139.36 руб. сумма налога составила 25.08 руб.?

4. Торговая компания купила 80 столов по цене 450 руб. за стол и 55 шкафов по цене 720 руб. за шкаф. Компания продала всю эту мебель, получив от продажи столов 22% прибыли, а от продажи шкафов 15% прибыли. Сколько процентов прибыли получила компания от продажи всей мебели?

5. Вычислите, на сколько процентов прибыль, полученная компанией, рассмотренной в упражнении 4, от продажи столов, больше, чем прибыль, полученная компанией от продажи шкафов.

6. В условиях упражнения 4 вычислите, на сколько процентов прибыль, полученная компанией от продажи шкафов, меньше, чем прибыль, полученная от продажи столов.

7. Торговая компания из упражнения 4 увеличила количество закупленных столов на 40% и шкафов на 80%. На сколько процентов увеличилась прибыль компании, если вся закупленная продукция была продана?

8. В результате двукратного снижения цены на одно и то же число процентов цена домашнего кинотеатра уменьшилась с 62 тыс. руб. до 28 тыс. руб. На сколько процентов понижалась цена каждый раз?

9. В результате двукратного повышения цены на одно и то же число процентов цена автомобиля увеличилась с 300 тыс. руб. до 365 тыс. руб. Вычислите, на сколько процентов повышалась цена автомобиля каждый раз.

10. На сколько процентов новая цена автомобиля из упражнения 9 больше первоначальной цены?

11. На сколько процентов первоначальная цена автомобиля из упражнения 9 меньше новой цены?

12. Портфель ценных бумаг включает 20 облигаций, номинальная цена которых 50 руб., и 70 облигаций, номинальная цена которых 100 руб. Облигации первого вида приносят владельцу 12% дохода в год, второго — 9% дохода в год. Вычислите, сколько процентов годового дохода получит владелец данного портфеля от всех входящих в него облигаций.

13. Вычислите, на сколько процентов увеличится годовой доход владельца портфеля ценных бумаг из упражнения 12, если он приобретет еще 80 облигаций первого вида.

14. В условиях упражнения 12, на сколько процентов доход от облигаций первого вида меньше, чем доход от облигаций второго вида?

15. На сколько процентов доход, полученный владельцем портфеля ценных бумаг из упражнения 12 от облигаций второго вида, больше, чем доход, полученный им от облигаций первого вида?

16. Определите, сколько облигаций первого вида должен купить дополнительно владелец портфеля ценных бумаг из упражнения 12, чтобы его годовой доход от всех облигаций портфеля стал равен 10%.

17. Вычислите, что будет происходить с доходом (в процентах) владельца портфеля ценных бумаг из упражнения 12, если владелец этого портфеля будет покупать неограниченно много облигаций второго вида.

18. Вычислите, что будет происходить с доходом (в процентах) владельца портфеля ценных бумаг из упражнения 12, если владелец этого портфеля будет покупать неограниченно много облигаций первого вида.

19. Пусть налогооблагаемый доход равен валовой выручке, из которой вычитаются затраты на производство, амортизация оборудования и расходы на выплату процентов за пользование капиталом. Налоги на доходы корпорации определяются по следующей трехступенчатой шкале:

Налогооблагаемый доход (долл.)	Ставка налога (%)
До 50 000	15
От 50 000 до 75 000	25
Более 75 000	34

Валовая выручка корпорации за год составила \$ 800 000, производственные расходы корпорации равны \$ 180 000. Корпорация заняла в банке \$ 300 000 под 5% годовых. Амортизация оборудования равна \$ 22 000. Вычислите сумму налогов, которую должна заплатить корпорация.

20. Фирма по продаже обуви в течение года закупила обувь на сумму \$ 120 000, взяв эти деньги в кредит в банке под 10% годовых. Расходы на доставку обуви и организацию торговли в розницу составили 22% стоимости обуви. Вся обувь была продана за \$ 190 000. Используя таблицу шкалы налогов из упражнения 19, вычислите, какую сумму налога должна заплатить фирма.

21. Пусть доходы физических лиц облагаются налогом по следующей двухступенчатой шкале: 15% — при налогооблагаемом доходе до \$30 000 и 28% — при более высоком налогооблагаемом доходе.

    Г-жа М получила в прошлом году следующие доходы: \$ 38 000 в качестве зарплаты; владея пакетом акций и облигаций, получила \$ 2 100 дивидендов с акций и \$ 1 200 процентного дохода с облигаций. Кроме того, г-жа М продала часть своих акций за \$ 12 500. Так как на покупку этих акций в свое время было потрачено \$ 5 500, то доход от продажи равен \$ 6 500. Какую сумму налога должна заплатить г-жа М за прошлый год?

22. Г-н N в прошлом году получил заработную плату в размере \$ 62 000, продал автомобиль за \$ 12 000, получил дивиденды от акций, которыми он владеет, на сумму \$ 8 700. Используя шкалу налогов из упражнения 21, вычислите, какой налог должен заплатить г-н N за прошлый год, если сумма, полученная за проданный автомобиль, также является доходом?

23. Упражнения 23–27 составлены на основе данных из каталогов фирмы IKEA, изданных в США и России летом 2005 г.

    Цена подвесного сиденья для сада в России равна 3 290 руб. Цена этого же товара в США — \$99. Курс доллара на момент сравнения составляет 27.80 руб. На сколько процентов дороже этот товар в России?

24. В России установлена следующая цена на садовую мебель ТЭРНО: складной стол — 999 руб., складной стул — 799 руб. Цена этих же товаров в США — \$29.99 и \$24.99 соответственно. Курс доллара на момент сравнения составляет 27.80 руб. В какой стране эти товары дороже и на сколько процентов?

25. Цена защитного колпака от насекомых СОММАР в России равна 149 руб. Цена этого же товара в США — \$4.99. Можно ли считать, что применялось стандартное ценообразование, если курс доллара на момент сравнения составляет 27.80 руб.? В какой стране этот товар дороже и на сколько процентов?

26. Цена цветочного горшка ОЛЛОНЭ в России равна 799 руб. Цена этого же товара в США — \$19.99. Можно ли считать, что применялось стандартное ценообразование, если курс доллара на момент сравнения составляет 28.58 руб.? В какой стране этот товар дороже и на сколько процентов?

27. Цена держателя для кашпо ОДЛА в России равна 129 руб. Цена этого же товара в США — \$3.99. Можно ли считать, что применялось стандартное ценообразование, если курс доллара на момент сравнения составляет 28.47 руб.? В какой стране этот товар дороже и на сколько процентов?

28. На основе информации, имеющейся в табл. 1, вычислить объем промышленной продукции в августе 1998 г. в процентах к августу 1997 г.

29. На основе информации, имеющейся в табл. 1, вычислить объем продукции сельского хозяйства в августе 1998 г. в процентах к августу 1997 г.

30. На основе информации, имеющейся в табл. 1, вычислить объем розничного товарооборота в августе 1998 г. в процентах к августу 1997 г.

2. Простые проценты

Деньги в современном мире являются средством не только обеспечения удовлетворения потребностей людей, но и развития производства, торговли, социальной сферы. Если деньги не потрачены сегодня на потребление, а использованы в одном из вышеуказанном направлений, то говорят об *инвестициях*. При этом инвестор ожидает в будущем компенсирующий его сегодняшнее недопотребление поток платежей.

При инвестировании денег важную роль играет фактор времени: используемые в течение некоторого времени деньги должны приносить владельцу этих денег определенный доход, зависящий от длительности их использования. Величину дохода измеряют в процентах от суммы используемых денег. Практикуются два способа расчета процентов: начисление простых процентов и начисление сложных процентов. В этой главе мы рассмотрим вопросы, связанные с начислением простых процентов. Если в тексте говорится об $r\%$, то в формулах буквой r обозначается запись $r\%$ в виде десятичной дроби, т. е. 10% соответствует $r = 0.1$, а 100% — $r = 1$.

2.1. Определение простых процентов

Если сумма P увеличивается на $r\%$, то полученная в результате сумма S называется *наращенной суммой* и вычисляется по формуле[3]:

$$S = P + Pr = P(1 + r)\,.$$

При этом величина P называется *исходной суммой*, а Pr — *суммой начисленных процентов*. В дореволюционной русской литературе последняя величина называлась *интересом* или *интересами* — хотелось бы этот термин возродить.

[3]В этой и всех формулах далее мы интерпретируем выражение $(1+r)$ при, например, $r = 10\%$ не как $(1 + 10)$, а как $(1 + 0.1)$.

Пример 2.1. *Сбербанк выплачивает по пенсионным вкладам 4% годовых (простых). Вычислим, какая сумма будет через год на счете пенсионера, положившего на счет 1 200 руб.*

Решение. Через год на счету пенсионера будет сумма:

$$S = P(1 + r) = 1\,200(1 + 0.04) = 1\,248 \text{ руб.}$$ ■

Если имеется несколько периодов времени, в каждый из которых исходная сумма P увеличивается на r%, то говорят, что на сумму P начисляются *простые проценты. Наращенная сумма* S, полученная в результате начисления n раз по r% на сумму P, выражается формулой:

$$S = P + Prn, \text{ или } S = P(1 + rn)\ .$$

Формула, выражающая наращенную сумму при начислении простых процентов, получена при условии, что число n периодов начисления процентов — целое. По определению мы введем такую же формулу для любого положительного (не обязательно целого) числа периодов, которое будем обозначать буквой t:

$$S = P(1 + rt)\ . \tag{2.1}$$

Необходимость начисления процентов за нецелое число периодов встречается в практике финансовых расчетов часто. Например, если банк выплачивает по депозитам r% годовых (простых), то есть период начисления процентов равен одному году, то на депозит, пролежавший в банке 3 года и 3 месяца, банк должен начислить проценты за 3.25 периода. Какова должна быть в этом случае сумма начисленных процентов? Так как простые проценты начисляются на одну и ту же исходную сумму P, то естественно считать сумму начисленных процентов пропорциональной числу периодов, за которые эти проценты начисляются, то есть равной Prt, и в том случае, когда число t не является целым. Тогда наращенная сумма равна $P + Prt = P(1 + rt)$.

Это рассуждение не доказывает формулу (2.1), которую мы ввели по определению, но показывает естественность этой формулы для практики финансовых расчетов.

Заметим, что при заключении финансовых контрактов обычно оговаривается наименьшая часть периода начисления процентов: например, каждый полный день (1/360 часть периода начисления, равного году) или каждая полная неделя (1/52 часть периода начисления, равного году). В этих случаях t в формуле (2.1) принимает лишь значения соответственно $k/360$ или $k/52$ (k — целое). Например, если депозит пролежал в банке 2 года 16 дней, то в первом случае следует взять:

$$t = 2 + \frac{16}{360} = \frac{736}{360},$$

а во втором случае:

$$t = 2 + \frac{2}{52} = \frac{106}{52}.$$

На практике может использоваться любой период начисления процентов. Однако для сравнения различных условий кредитования финансисты приводят ставку процента за произвольный период к годовой. Это правило в большинстве стран даже закреплено законом. Например, если Сбербанк дает r% простых в год, то это соответствует квартальной ставке $r_4 = \frac{r}{4}$%. Таким образом, при $r = 4\%$ имеем $r_4 = \frac{4}{4} = 1\%$.

2.2. Разы и проценты

Когда в статистических отчетах, публицистике и в обыденной жизни сообщается об изменении какого-либо показателя, то это изменение в одних случаях указывается в *процентах*, а в других — в *разах*. В качестве примера приведем фразу из заметки, опубликованной в газете „Ведомости“ 9 августа 2005 г.: „В первом полугодии 2005 г. выручка «Акрона»[4] повысилась на 47% по сравнению с аналогичным периодом прошлого года, операционная прибыль увеличилась в 2,7 раза, а чистая прибыль в 3,3 раза“. Приведенный пример примечателен тем, что из трех взаимосвязанных экономических показателей (выручка, операционная прибыль и чистая прибыль) изменение первого указано в процентах, а двух других — в разах. В подобных случаях хотелось бы иметь эти изменения, выраженными в одних и тех же единицах. Но порой возникает путаница при переводе процентов в разы и разов в проценты.

Правило перевода предельно простое, если речь об *увеличении* (росте) некоторого показателя: *при переводе процентов в разы надо, рассматривая процент как десятичную дробь, прибавить число* 1*; при переводе*

[4] «Акрон» — компания-производитель калийных удобрений.

разов в проценты надо вычесть из разов 1 *и результат перевести в проценты.* Поясним на конкретных примерах, как получено и работает это правило.

Пример 2.2. *На первой странице газеты „Ведомости" от 1 августа 2005 г. можно было увидеть заголовок: „Зарплата россиян за 1,5 года выросла в 1,5 раза". На сколько процентов увеличилась зарплата россиян за рассматриваемый период?*

Решение. Обозначим через x среднюю зарплату в России в начале рассматриваемого периода (начало 2004 г.). Тогда из условия следует, что в конце рассматриваемого периода (середина 2005 г.) средняя зарплата составила $1.5x$. Следовательно, зарплата увеличилась на

$$1.5x - x = (1.5 - 1)x = 0.5x \text{ (руб.)}.$$

Мы так подробно расписали эти элементарные вычисления, чтобы было видно, что в круглых скобках из разов (1.5) вычитается 1. Переведем величину увеличения зарплаты в проценты от зарплаты в начале 2004 г. и получим, что зарплата увеличилась на 50%:

$$\frac{0.5x}{x} = 0.5 = 50\%. \qquad \blacksquare$$

Пример 2.3. *Предположим, что в некотором году инфляция составила* 150%. *Вычислим, во сколько раз выросли цены.*

Решение. Обозначим через x стоимость потребительской корзины в начале года, а через y — стоимость той же потребительской корзины в конце года. Тогда, если инфляция равна $i\%$, имеем следующее равенство, в которое подставляем величину инфляции, выраженную как десятичную дробь:

$$y = x(1+i) = x(1+1.5) = 2.5x.$$

Следовательно, цены выросли в 2.5 раза:

$$\frac{y}{x} = \frac{2.5x}{x} = 2.5. \qquad \blacksquare$$

Оставляем читателю в качестве упражнения рассмотрение разобранных примеров в общем виде и вывод соответствующих правил.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда имеет место уменьшение некоторого показателя. Любое уменьшение можно считать ростом на отрицательное количество процентов. Для роста в таком понимании, если обозначить r — величину роста, выраженную как десятичная дробь, то должно быть выполнено неравенство: $-1 \leq r$. Это неравенство означает, что процент уменьшения не может быть больше 100%, а процент увеличения может быть неограниченно большим. Такому обобщению понятия роста поставим в соответствие понятие *коэффициент изменения*. Коэффициент изменения — положительное число, на которое надо умножить начальное значение показателя, чтобы получить его конечное значение. При увеличении значения показателя коэффициент изменения будет больше 1, а при уменьшении — меньше 1. С учетом сказанного, можно сформулировать единое правило перевода процентов в коэффициент изменения: *при переводе процентов в коэффициент изменения нужно, рассматривая процент как десятичную дробь, прибавить* 1.

Приведем схематичное изображение этого правила:

рост на $r\%$	$\Longrightarrow$	**рост в** $\left(\dfrac{r}{100}+1\right)$ **раз**
уменьшение на $r\%$	$\Longrightarrow$	**уменьшение в** $\left(-\dfrac{r}{100}+1\right)$ **раз**

Пример 2.4. *Цена акции уменьшилась за год на* 20%. *Вычислим, чему равен коэффициент изменения цены акции.*

Решение. Обозначим через x цену акции в начале года. По условию цена акции в конце года составила

$$x - 0.2x = (-0.2 + 1)x = 0.8x.$$

Следовательно, коэффициент изменения цены акции равен 0.8. Мы так подробно расписали эти элементарные вычисления, чтобы было видно, что в круглых скобках к процентам роста (-0.2) прибавляется 1. ∎

Рассмотрим теперь ситуацию, когда имеет место уменьшение значения некоторого показателя x, которое выражается в разах. Предположим, что это значение уменьшилось в k раз. Это означает, что новое значение показателя равно x/k и составляет $1/k$ процентов от исходного значения. Соответственно, значение показателя изменилось на

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}\,(\%)\,.$$

Таким образом, *при уменьшении* значения некоторого показателя правило перевода разов в проценты может быть сформулировано следующим образом: *при переводе k разов в проценты нужно выразить в процентах дробь* $(k-1)/k$.

Приведем теперь схематичное изображение общего правила перевода разов в проценты:

рост в k раз	$\Longrightarrow$	**рост на** $(k-1)\times 100\%$
уменьшение в k раз	$\Longrightarrow$	**уменьшение на** $\dfrac{k-1}{k}\times 100\%$

Пример 2.5. *За 2 года цена некоторой модели цифрового фотоаппарата уменьшилась в 3 раза. Вычислим, на сколько процентов уменьшилась цена.*

Решение. Используем приведенное выше правило перевода при $k = 3$:

$$\frac{k-1}{k} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 66.67\%\,.$$

Следовательно, за 2 года цена фотоаппарата уменьшилась на 66.67%. ■

2.3. Банковский депозит под простые проценты

Формула (2.1) связывает между собой четыре величины: S, P, r и t. С помощью этой формулы, выделив любые три из них и задав их значения, можно вычислить значение четвертой величины. Таким образом, имеем четыре типа задач, соответствующих четырем возможным способам выделения трех объектов из четырех: определение величины наращенной суммы, определение величины необходимой исходной суммы, определение необходимого срока хранения и определение процента. Приведем по примеру на каждый из типов задач.

Пример 2.6. *В условиях примера 2.1 определим, какая сумма будет на счете вкладчика через пять лет и три месяца.*

Решение. По формуле (2.1): $S = 1\,200\times(1+5.25\times0.04) = 1\,452$ руб. ∎

Пример 2.7. *Банк выплачивает 6% простых в год. Господин Федоров хочет получить через 2 года и 6 месяцев 10 000 руб. на подарок сыну к 16-летию. Вычислим, какую сумму он должен положить в банк в настоящий момент.*

Решение. Нам дано: $S = 10\,000$ руб., $t = 2.5$, $r = 6\% = 0.06$. Из формулы (2.1) получаем формулу для вложенной суммы:

$$P = \frac{S}{1+rt}\ . \tag{2.2}$$

Подставляя данные задачи в эту формулу, получаем ответ:

$$P = 10\,000/(1+0.06\times2.5) = 10\,000/1.15 = 8\,695.65 \text{ руб.}$$ ∎

Пример 2.8. *В банк было положено 1 500 руб. Через 1 год 3 месяца на счете было 1 631.25 руб. Определим, сколько простых процентов в год выплачивает банк.*

Решение. Нам дано: $P = 1\,500$ руб., $t = 1.25$, $S = 1\,631.25$ руб. Из формулы (2.1) получаем формулу для r:

$$r = \frac{1}{t}\left(\frac{S}{P} - 1\right)\ . \tag{2.3}$$

Подставляем данные задачи в эту формулу:

$$r = \frac{1}{1.25}\times\left(\frac{1\,631.25}{1\,500} - 1\right) = \frac{0.0875}{1.25} = 0.07 = 7\%\,.$$ ∎

Пример 2.9. *В банке был открыт депозитный счет, на который было положено 1 500 руб. под 7% простых. Через некоторое время на счете стало 1 631.25 руб. Определим, сколько времени прошло с момента открытия счета.*

Решение. Нам дано: $P = 1\,500$ руб., $r = 7\%$ и $S = 1\,631.25$ руб. Из формулы (2.1) получаем формулу для t:

$$t = \frac{1}{r}\left(\frac{S}{P} - 1\right). \tag{2.4}$$

Подставляем данные задачи в эту формулу:

$$t = \frac{1}{0.07} \times \left(\frac{1\,631.25}{1\,500} - 1\right) = 1.25.$$ ■

2.4. Процентный пункт

Изменения ставки процента часто указывается в *процентных пунктах*. Если говорят, что ставка процента, равная $r\%$, увеличилась на i процентных пункта, то это означает, что новое значение ставки процента составляет $(r+i)\%$. Таким образом, если процентная ставка $r = 3\%$ увеличилась на 0.5 процентных пункта, то новое значение процентной ставки r составляет 3.5%. Это изменение можно охарактеризовать и в процентах от начального значения ставки (3%). Тогда следует указать, что процентная ставка увеличилась на

$$\frac{0.5}{3} = 0.167 = 16.7\%.$$

Однако банки не только увеличивают, но и уменьшают процентные ставки по вкладам. Если процентная ставка по вкладу составляла 10% и была уменьшена до 4%, то можно сказать, что процентная ставка была уменьшена на 6 процентных пунктов. Это изменение также можно охарактеризовать в процентах от начального значения ставки (10%). Тогда следует указать, что процентная ставка уменьшилась на

$$\frac{6}{10} = 0.6 = 60\%.$$

Как видно из приведенных примеров, задание изменения ставки процента в процентных пунктах является удобным и предполагает более простые вычисления (только сложение или вычитание).

2.5. Векселя

Вексель — простейший тип долгового обязательства. Слово *вексель* является калькой с немецкого глагола *Wechseln*, который означает *менять*. Простой вексель представляет из себя безусловное письменное обязательство одного лица выплатить определенную сумму денег другому лицу в указанную дату или по первому требованию. Поэтому все векселя именные и выпускаются в бумажном виде. Процедура получения денег по векселю называется его *гашением*.

В 1930 г. ряд стран заключили Женевскую вексельную конвенцию, которая установила Единообразный закон о переводном и простом векселях. СССР ратифицировал Женевскую вексельную конвенцию в 1937 г. и ввел в действие положение о переводном и простом векселе. Текст этого положения является переводом на русский язык Единообразного закона. Из-за жесткого государственного регулирования средств предприятий вексельное обращение в СССР не получило практического применения.

Положение существенно поменялось в последнее десятилетие XX века: в России не только действует положение о переводном и простом векселе, но векселя довольно широко используются хозяйствующими субъектами.

К преимуществам векселей (перед депозитами, например) можно отнести возможность их использования в качестве расчетного средства (при крупных покупках) и залога (при получении кредита). Также вексель можно передать другому лицу или продать на вторичном рынке. Однако следует иметь в виду, что использование векселей имеет и ряд неудобств. Во-первых, векселя на российском рынке выпускаются на сумму не менее 1 млн руб. Во-вторых, по нему довольно сложно досрочно получить деньги: лицо, выписавшее вексель, не обязано досрочно гасить его.

Векселя не торгуются на биржах, поэтому у них нет официальных котировок. Узнать средние цены каждого векселя можно в различных информационных системах, например в российской вексельной системе: www.bills.ru. Доход по векселю может выплачиваться в момент его погашения в виде фиксированного процента, если вексель покупался по номинальной стоимости. Сейчас на рынке в основном обращаются дисконтные векселя, которые гасятся по номинальной стоимости, а продаются по меньшей цене — с *дисконтом*. Рассмотрим пример.

Пример 2.10. *Г-н Иванов занял у г-на Петрова деньги, получив от него* 9 800 *руб., и выдал ему вексель, по которому обязался выплатить* 10 000 *руб. через три месяца. Определим, под какой годовой процент* r *выдан этот вексель?*

Решение. Применяем формулу (2.3) при $P = 9\,800$, $S = 10\,000$, $t = 0.25$:

$$r = \frac{1}{0.25} \times \left(\frac{10\,000}{9\,800} - 1 \right) = 0.0816 = 8.16\% \,. \qquad \blacksquare$$

2.6. Учет векселей

Простые проценты применяются в финансовой операции, которая называется *учетом векселей* и заключается в следующем: банк покупает вексель на сумму S у его владельца до истечения срока оплаты векселя по цене P, меньшей, чем S. Цена S рассчитывается по формуле:

$$P = S(1 - td) \,, \tag{2.5}$$

где t — число лет, остающееся с момента учета векселя до срока его оплаты, $d\%$ — учетная ставка, установленная банком.

Заметим, что процент наращения r и учетная ставка d характеризуют приращение денег в единицу времени в долях либо расходного платежа P, либо доходного платежа S:

$$r = \frac{S - P}{Pt}, \; d = \frac{S - P}{St}.$$

Как следует из этих формул, величина ставки наращения r и учетной ставки d должна быть согласована с единицей измерения t. Например, если время измеряется в годах, то и соответствующая ставка будет годовая, а если время измеряется в месяцах, то — месячная.

Пример 2.11. *Вексель выдан на* 10 000 *руб. с уплатой* 15 *октября. Владелец векселя учел его в банке* 15 *августа по учетной ставке* 10%. *Вычислим, какую сумму он получил. Вычислим также, какую сумму он получит, если срок уплаты по векселю* 15 *октября следующего года.*

Решение. Число дней между 15 августа и 15 октября равно 60. Считая, что в году 360 дней (так принято при банковском учете), имеем $t = 60/360 = 1/6$. По формуле (2.5) при $S = 10\,000$, $d = 0.1$, $t = 1/6$ получаем ответ на первый вопрос:

$$P = 10\,000 \times (1 - \frac{1}{6} \times 0.1) = 10\,000 \times \frac{59}{60} = 9\,833.33 \text{ руб.}$$

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно $360 + 60 = 420$ дней, т. е.

$$t = 420/360 = 7/6.$$

По формуле (2.5) при $S = 10\,000$, $d = 0.1$, $t = 7/6$ получаем ответ на второй вопрос:

$$P = 10\,000 \times (1 - \frac{7}{6} \times 0.1) = 10\,000 \times \frac{53}{60} = 8\,833.33 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

2.7. Простой дисконт

Простым дисконтом (по-английски — discount, по-итальянски — sconto) называется процентный доход, вычитаемый из ссуды в момент ее выдачи или взимаемый банком при учете векселя. Термином „дисконт“ называют порой также сам учет векселей.

Если процентная ставка простого дисконта — r%, величина ссуды — S (эта сумма должна быть возвращена), P — величина ссуды, полученная в момент ее выдачи, t лет — срок, на который выдается ссуда, то простой дисконт равен Srt и $P = S - Srt$. Следовательно, имеем формулу:

$$P = S(1 - rt). \tag{2.6}$$

Пример 2.12. *Финансовая компания дает ссуду 5 000 руб. на 3 года под простой дисконт, равный 5% в год. Определим, какую сумму получит клиент в момент получения ссуды.*

Решение. Находим P по формуле (2.6) при $S = 5\,000$, $r = 5\%$, $t = 3$:

$$P = 5\,000 \times (1 - 0.05 \times 3) = 5\,000 \times 0.85 = 4\,250 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Пример 2.13. *Производственная фирма берет в банке ссуду 10 000 руб. на три месяца. Определим, сколько она должна вернуть через три месяца, если возьмет ссуду под 8% простого дисконта.*

Решение. Применяем формулу (2.6) при $P = 10\,000$, $r = 0.08$, $t = 0.25$:

$$10\,000 = S(1 - 0.08 \times 0.25).$$

Из этого равенства находим значение S:

$$S = 10\,204.08 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Пример 2.14. *Вычислим, сколько должна вернуть банку фирма из примера 2.13, если она возьмет ссуду под 8% простых годовых.*

Решение. По формуле (2.1) при $P = 10\,000$, $r = 0.08$ и $t = 0.25$ получаем ответ:

$$S = 10\,000 \times (1 + 0.08 \times 0.25) = 10\,200 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Сравнивая полученный результат с результатом примера 2.13, мы видим, что кредитору выгоднее давать ссуду под простой дисконт, чем под простой процент.

2.8. Приведение ценности денег к одному моменту времени

В теории и на практике нам постоянно приходится решать вопрос о том, как соотносятся между собой суммы денег, полученные в различные моменты времени. Финансовая теория в этом вопросе придерживается *принципа невозможности межвременного арбитража:* ценность суммы денег S в фиксированный момент в будущем эквивалентна такой сумме денег P в текущий момент времени, которая, будучи подходящим образом использована на финансовом рынке, принесет нам ровно сумму S на рассматриваемый будущий момент времени. Вопрос о том, что следует понимать под *подходящим использованием*, является одной из серьезных задач теории корпоративных финансов. Достаточно отметить, что здесь необходимо учитывать такой фактор финансового рынка, как риск, — различное использование денег связано и с принятием инвестором различного риска. В простейшей постановке, принятой в этой книге, предполагается, что операции носят безрисковый характер.

Если в качестве подходящего использования денег мы рассматриваем возможность инвестировать их (положить в банк, купить облигации и т. п.) под простой годовой процент $r\%$, то сумма денег S через t лет, согласно формуле (2.1), будет равна $P(1+rt)$. Поэтому *приведенная* (или *современная*) *ценность* P суммы S, которая будет получена через t лет, вычисляется по формуле (2.2):

$$P = \frac{S}{1+rt} \, .$$

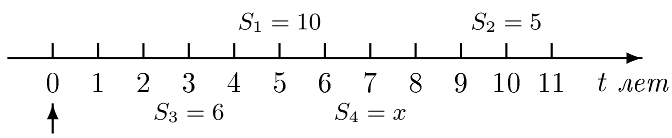
Вычисление приведенной ценности суммы денег называется *дисконтированием* этой суммы.

Термин „приведенная“ ценность не носит абсолютного характера — в качестве момента приведения (или точки отсчета) в расчетах может быть взят любой момент времени. Обычно понятие приведенной ценности применяется к потоку платежей (во времени). Мы вернемся к этому сюжету позже, а сейчас рассмотрим простейшие примеры с использованием простых процентов.

Два контракта называют *эквивалентными*, если приведенные ценности потоков платежей по этим контрактам одинаковы. Это понятие используется при изменении и для сравнения контрактов. Рассмотрим пример.

Пример 2.15. *Фирма обязалась заплатить за полученное от города производственное помещение* 1 000 000 *руб. через* 5 *лет и еще* 500 000 *руб. через* 10 *лет от настоящего момента. Фирма желает рассчитаться быстрее: уплатить* 600 000 *руб. через* 3 *года, а остальной долг выплатить через* 7 *лет (от настоящего момента). Вычислим, какая сумма должна быть выплачена через* 7 *лет, если на деньги начисляются* 8% *простых в год.*

Решение. Изобразим суммы (в 100 тыс. руб.) первого контракта над осью времени, а второго — под осью. Стрелкой внизу указан момент времени, который выбран за точку отсчета.



Дисконтируя все суммы на момент 0, находим приведенные к моменту 0 ценности этих сумм:

$$P_1 = \frac{S_1}{1+5r} = \frac{1\,000\,000}{1+5\times 0.08} = \frac{1\,000\,000}{1.4} = 714\,286\,,$$

$$P_2 = \frac{S_2}{1+10r} = \frac{500\,000}{1+10\times 0.08} = \frac{500\,000}{1.8} = 277\,778\,,$$

$$P_3 = \frac{S_3}{1+3r} = \frac{600\,000}{1+3\times 0.08} = \frac{600\,000}{1.24} = 483\,871\,,$$

$$P_4 = \frac{S_4}{1+7r} = \frac{x}{1+7\times 0.08} = \frac{x}{1.56}\,.$$

Контракты эквивалентны, если выполнено равенство $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$. Из этого равенства получаем уравнение:

$$714\,286 + 277\,778 = 483\,871 + \frac{x}{1.56}\,,$$

решив которое находим значение x:

$$x = (714\,286 + 277\,778 - 483\,871)\times 1.56 = 792\,8\,.$$

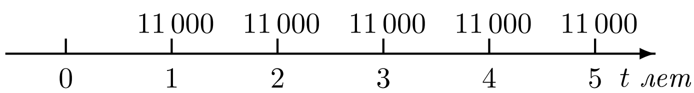
Следовательно, сократив сроки платежей, фирма уменьшила суммарные выплаты с 1 500 000 руб. до

$$600\,000 + 792\,780 = 1\,392\,780 \text{ руб.}$$ ■

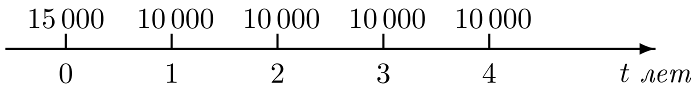
Пример 2.16. *Компания собирается приобрести набор мебели для офиса за* 55 000 *руб. Компания получила два предложения: выплатить цену мебели в течение* 5 *лет по* 11 000 *руб. в конце каждого года или заплатить в момент покупки* 15 000 *руб., а следующие четыре года платить по* 10 000 *руб. Выясним, какой контракт выгоднее для компании, если на деньги начисляются* 8% *простых в год.*

Решение. Изобразим потоки платежей по обоим контрактам:

1-й контракт:



2-й контракт:



Вычислим приведенную ценность контрактов P_1 и P_2 в момент 0:

$$\begin{aligned} P_1 = \quad & \frac{11\,000}{1+1\times 0.08} + \frac{11\,000}{1+2\times 0.08} + \frac{11\,000}{1+3\times 0.08} + \\ & + \frac{11\,000}{1+4\times 0.08} + \frac{11\,000}{1+5\times 0.08} = 44\,729.39 \text{ руб.}, \\ P_2 = \quad & 15\,000 + \frac{10\,000}{1+1\times 0.08} + \frac{10\,000}{1+2\times 0.08} + \\ & + \frac{10\,000}{1+3\times 0.08} + \frac{10\,000}{1+4\times 0.08} = 48\,520.22 \text{ руб.} \end{aligned}$$

Приведенная ценность в момент 0 первого предложения меньше, чем второго, следовательно, первый контракт выгоднее для компании. ■

2.9. Эквивалентность учетной и процентной ставок

Продолжим обсуждение формулы, которую банк использует при учете векселя:

$$P = S(1 - td)\ .$$

Для банка, учитывающего вексель на сумму S, учетная стоимость векселя P является приведенной стоимостью суммы S, которую банк получит от векселедателя при погашении векселя. Погашение векселя произойдет через срок t. При обычном инвестировании ситуация противоположная: известна начальная сумма P, на которую начисляется процент r, а конечная сумма S вычисляется по формуле

$$S = P(1 + tr)\ .$$

Предположим, что $t = 1$, то есть рассматривается период, равный одному году. Тогда имеем следующие формулы для процентных ставок начисления и учета:

$$r = \frac{S-P}{P}\ ,\ d = \frac{S-P}{S}\ . \tag{2.7}$$

Преобразуем формулы (2.7) к виду:

$$\frac{S}{P} = 1 + r\ ,\ \frac{P}{S} = 1 - d\ . \tag{2.8}$$

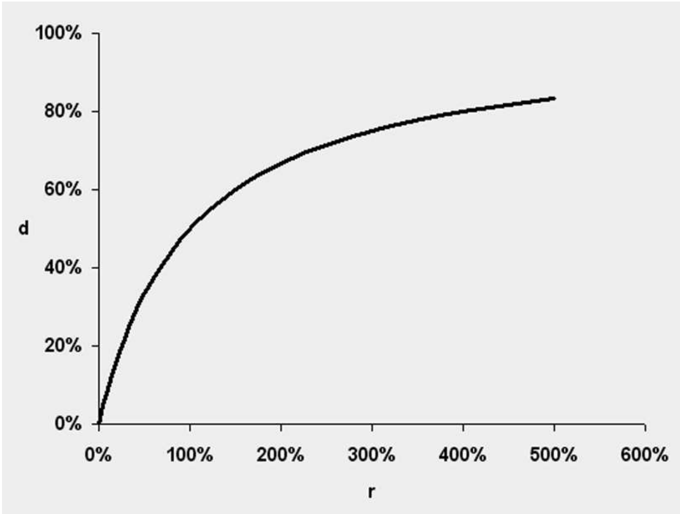


Рис. 3. График зависимости $d = \dfrac{r}{1+r}$

Из формул (2.8) получаем формулы, связывающие значения r и d (за один год), которые часто называют *условиями эквивалентности учетной и процентной ставок*:

$$r = \frac{d}{1-d}\ ,\ d = \frac{r}{1+r}\ . \tag{2.9}$$

Графическое изображение зависимостей, выраженных формулами (2.9), приведено на рис. 3 и 4.

Из формул (2.9) следует еще одна интерпретация процента учета d. Пусть сумма $S = 1$ хранится 1 год на депозите при процентной ставке r. В конце года сумма процентов на S будет равна r. Приведенное значение суммы процентов r будет равно

$$\frac{r}{1+r} = d\ . \tag{2.10}$$

Следовательно, можно считать, что дисконт d является суммой процентов, которые выплачиваются не в конце, а в начале периода.

Таким образом, различие между процентной и учетной ставками в том, что они оценивают один и тот же поток платежей относительно разных моментов времени. Для процентной ставки это начало периода, для учетной — конец периода. Рассмотрим пример.

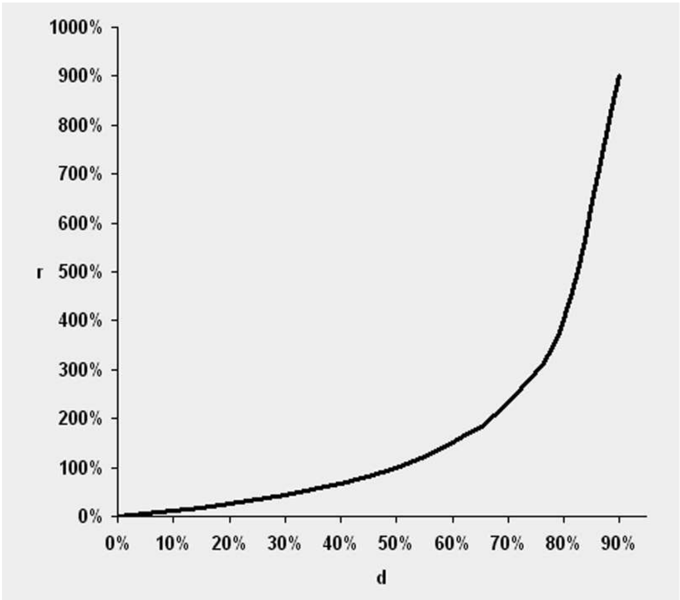


Рис. 4. График зависимости $r = \dfrac{d}{1-d}$

Пример 2.17. *Вычислим приведенную стоимость* 10 000 *руб., получаемых через год: а) при процентной ставке* $r = 10\%$; *б) при учетной ставке* $d = 10\%$.

Решение. При процентной ставке $r = 10\%$ получаем:

$$P = \frac{S}{1+rt} = \frac{10\,000}{1+0.1} = 9\,090.91 \text{ руб.}$$

При при учетной ставке $d = 10\%$ получаем:

$$P = S(1-dt) = 10\,000(1-0.1) = 9\,000 \text{ руб.}$$ ■

Необходимо помнить, что эквивалентность процентной и учетной ставок устанавливается только для определенного периода времени t. Формулы (2.9) получены при $t = 1$. В общем случае они принимают вид:

$$r = \frac{d}{1-dt}\,,\; d = \frac{r}{1+rt}\,. \tag{2.11}$$

Пример 2.18. *Годовая процентная ставка* $r = 10\%$. *Найдем эквивалентную учетную ставку* d *для периодов: а) один год; б) полгода.*

Решение. При процентной ставке $r = 10\%$ и $t = 1$ по формулам (2.11) получаем:

$$d = \frac{r}{1+rt} = 9.09\%\,.$$

При процентной ставке $r = 10\%$ и $t = 0.5$ получаем:

$$d = \frac{r}{1+rt} = 9.52\%\,. \qquad \blacksquare$$

2.10. Влияние инфляции на ставку процента

Интересно рассмотреть одновременное влияние процессов дисконтирования по ставке r и инфляции по ставке i за один период. ***Инфляция***, определяемая на микроэкономическом уровне как общий уровень роста цен типичной потребительской корзины (CPI — Consumer Price Index), означает, что на сегодняшние деньги вы сможете купить в $1+i$ раз меньше товара в конце периода. В результате современная сумма P эквивалентна по покупательной способности сумме S, определяемой формулой:

$$S = P(1+i)\,.$$

В этих обстоятельствах величину наращенного процента можно рассчитывать как в реальных деньгах — ***номинальный процент***, так и по покупательной способности (с поправкой на инфляцию) — ***реальный процент***. Ясно, что при наличии инфляции ставка номинального процента больше ставки реального процента. Номинальный процент должен использоваться в вычислениях в реальных терминах (без поправки на инфляцию); реальный процент используется, если данные специальным образом очищены от влияния инфляции.

Пусть сначала r — номинальный процент. Тогда после дисконтирования получаем:

$$P = S\frac{1+r}{1+i} = S\left(1 + \frac{r-i}{1+i}\right)\,.$$

Если величина инфляции невелика, то $1+i \approx 1$, откуда верна следующая приближенная формула:

$$P = S(1+r-i).$$

Следует заметить, что в условиях, характерных для России последнего десятилетия XX века, когда величина i менялась порой от тысяч до многих десятков процентов в год, пользоваться последней формулой было нельзя.

При переходе к рассмотрению реального процента r_1 следует учесть, что величина инфляции — ожидаемая величина, поэтому величина r_1 не может определяться нормативно — она получается в результате построения модели поведения инвестора. Простейшая *модель Фишера* утверждает, что номинальный процент r связан с реальным процентом r_1 с помощью формулы:

$$1 + r = (1 + r_1)(1 + i) \ . \tag{2.12}$$

Согласно этой модели норма процента полностью встроена в ценовой механизм. Номинальный процент включает в себя инфляционную премию, достаточную для того, чтобы кредитор получил компенсацию за уменьшенную покупательную способность будущих денег. Важно подчеркнуть, что номинальный процент строится на прогнозе, а не на историческом анализе инфляции за прошедший период. Фактические величины инфляции за предыдущий период играют роль для оценки инфляции на следующий период, но вовсе не основную — учитываются различные макроэкономические переменные.

При высокой инфляции и отсутствии на рынке инструментов с достаточной номинальной доходностью получаем ситуацию с отрицательной реальной нормой процента, имевшую место в России, например, в 1993 г. (так было в течение нескольких лет с доходностью к погашению по введенному в том году новому инструменту государственного заимствования — ГКО). Рассмотрим два простых численных примера.

Пример 2.19. *В начале 1996 г. ожидаемая годовая инфляция в России находилась на уровне $i = 50\%$. Годовой сертификат Сбербанка на сумму 1 млн руб. давал номинальную доходность $r = 90\%$ (это то, что было прямо написано на сертификате). Посчитаем реальную доходность сертификата.*

Решение. Для вычисления реального процента применим формулу (2.12):

$$r_1 = \frac{r - i}{1 + i} = \frac{0.90 - 0.50}{1 + 0.50} = 0.267 = 26.7\%.$$

Заметим, что для реального процента в надежном банке это очень много (менее 10% за рубежом), что означает встроенность в предлагаемый процент рисковой премии. ■

Пример 2.20. *В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет 20%. Определим, какую номинальную годовую процентную ставку следует установить по вкладам в банке, чтобы реальная годовая ставка r_1 равнялась 5%.*

Решение. Значение номинальной годовой процентной ставки найдем из формулы (2.12):

$$r = (1 + r_1)(1 + i) - 1 = (1 + 0.05)(1 + 0.20) - 1 = 0.26 = 26\%. \qquad \blacksquare$$

Упражнения

1. Вкладчик положил вклад, равный 3 000 руб., в банк, выплачивающий 7% простых в год. Какая сумма будет на счете вкладчика: а) через 3 месяца, б) через 1 год, в) через 3 года 5 месяцев?

2. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий 4% простых в год, чтобы получить 5 000 руб.: а) через 4 месяца, б) через 1 год, в) через 2 года 9 месяцев?

3. Фермер собирает деньги на постройку нового коровника и положил в банк 100 000 руб. Через 2 года 6 месяцев на счете было 120 000 руб. Сколько процентов (простых) выплачивает банк в год?

4. В банк, выплачивающий 6% простых годовых, положили 6 000 руб. Через сколько лет на счете будет 6 540 руб.?

5. Покупатель приобрел дом, который стоит \$ 50 000. Он уплатил \$ 20 000 и выдал продавцу вексель на \$ 35 000, который обязуется погасить через год. Под какой процент выдан этот вексель?

6. Фирма планирует приобрести новые помещения, за которые она должна заплатить \$ 120 000. Фирма имеет два предложения. По первому предложению фирма должна выплатить эту сумму за 3 года, выплачивая в конце каждого года по \$ 40 000. По второму предложению фирма должна заплатить сразу \$ 30 000, а остальные \$ 90 000 погашать равными суммами каждые полгода, выплатив весь долг к концу третьего года. Какое предложение выгоднее для фирмы? На деньги начисляются 6% годовых (простых).

7. В рассматриваемый год номинальная годовая процентная ставка по вкладу составляла $i = 12\%$, а реальная годовая ставка равнялась 3%. Каким был процент инфляции?

8. Компания получила в коммерческом банке ссуду в 90 000 руб. на два года под простой дисконт, равный 12% в год. Какую сумму получила компания на руки?

9. Компания из упражнения 8 желает получить при тех же условиях на руки 90 000 руб. Какую сумму она будет должна банку?

10. Какую сумму будет должна банку компания из упражнения 9, если она получит ссуду под 12% годовых (простых)? Что выгоднее компании: взять ссуду под простой дисконт или под простые проценты?

11. Г-н Петров имеет вексель на 15 000 руб., срок погашения которого 1 июля. Он хочет учесть его 1 марта того же года в банке, простая учетная ставка которого 7%. Какую сумму получит г-н Петров за этот вексель? Какую сумму получит г-н Петров, если срок этого векселя 1 июля следующего года?

12. Какую прибыль получит банк в результате учета 20 мая трех векселей по 20 000 руб. каждый, если срок оплаты первого векселя 10 сентября, а двух других — 1 октября того же года и учетная ставка этого банка равна 10%?

13. Клиент учел 1 февраля вексель на сумму 40 000 руб., срок погашения которого 1 июня того же года, и получил за него 38 790 руб. Какова учетная ставка банка?

14. Г-н Гаврилов должен выплатить г-ну Серову 20 000 руб. в следующие сроки: 5 000 руб. через 2 года, 5 000 руб. через 3 года и еще 10 000 руб. через 5 лет, считая от настоящего момента. Г-н Гаврилов предложил изменить контракт, обязавшись уплатить 10 000 руб. через 3 года и еще 10 000 руб. через 4 года от настоящего момента. Эквивалентны ли эти контракты, если на деньги начисляются 5% годовых (простых)? Если контракты не эквивалентны, то какой из них выгоднее для г-на Серова?

15. Какую сумму должен выплатить г-н Гаврилов из упражнения 14 по новому контракту через 4 года, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?

16. Г-н Иванов приобрел в кредит набор мебели, обязавшись выплачивать за него по 3 000 руб. каждый квартал в течение трех лет. Через год, сделав четыре платежа, г-н Иванов пожелал сразу погасить оставшийся долг. Какую сумму он должен заплатить, если на деньги начисляются 8% годовых (простых)?

17. Г-н Иванов из упражнения 16 пожелал сразу изменить первоначальный контракт и выплачивать свой долг равными ежегодными уплатами в течение трех лет. Какова должна быть каждая из этих уплат, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?

18. Торговая фирма планирует приобрести новые помещения, за которые она должна заплатить 120 000 руб. Фирма имеет два предложения. По первому предложению фирма должна выплатить эту сумму за 3 года, выплачивая в конце каждого года по 40 000 руб. По второму предложению фирма должна заплатить сразу 30 000 руб., а остальные 90 000 руб. погашать равными суммами каждые полгода, выплатив весь долг к концу третьего года. Какое предложение выгоднее для фирмы? На деньги начисляются 8% годовых (простых).

19. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет $i = 20\%$. Какую номинальную годовую процентную ставку следует установить по вкладам в банке, чтобы реальная годовая ставка r равнялась 3%?

20. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет $i = 20\%$. Какова реальная доходность по вкладу в банк, если годовой процент по нему равен 25%?

21. С начала 2004 г. по середину 2005 г. средняя зарплата в России выросла на 50% и составила \$ 300. Во сколько раз выросла зарплата? Вычислите величину средней зарплаты в начале 2004 г.

22. За рассматриваемый период стоимость типичной потребительской корзины выросла в 1.18 раза. Чему равен процент инфляции?

23. За полгода цена некоторой модели стиральной машины уменьшилась на 40%. Во сколько раз изменилась цена машины?

24. Во время рекламной акции цена некоторой модели телевизора была уменьшена в 1.5 раза. На сколько процентов уменьшилась цена?

3. Сложные проценты

В начале главы 2 мы уже говорили, что оценку дохода, который приносят вложенные в экономику деньги, принято проводить с помощью начисления процентов на первоначально вложенную сумму. Мы уже отмечали, что существует два способа начисления процентов: простые проценты и сложные проценты. В этой главе рассматриваются вопросы, связанные с начислением сложных процентов. Еще раз напомним, что, если в тексте говорится об $r\%$, то в формулах через r обозначается запись $r\%$ в виде десятичной дроби, т. е. 10% соответствует $r = 0.1$, а 100% соответствует $r = 1$.

3.1. Определение сложных процентов

Объясним на простом примере, почему в финансовых расчетах используются не только простые, но и сложные проценты. Предположим, что владелец депозитного счета, на который начисляется $r\%$ простых в год, по истечении каждого года изымает вклад вместе с начисленными процентами и тут же вновь открывает депозит на всю полученную сумму. В результате проценты в каждом следующем году будут начисляться не только на начальную сумму, но и на начисленные в предыдущем году проценты. Через t лет, таким образом, будет накоплена сумма S, равная $P(1+r)^t$, где P — сумма первоначального вклада. Формула

$$S = P(1+r)^t \tag{3.1}$$

называется *формулой сложных процентов для t лет.* Чтобы не заниматься бессмысленным переоформлением вкладов и иметь возможность вкладывать деньги в длительные проекты, банкиры уже давно стали использовать сложные проценты. Говорят, что Альберт Эйнштейн, открывший миру теорию относительности и считавшийся наиболее оригинальным умом планеты, считал сложный процент одним из чудес этого мира.

Поясним, как получается формула (3.1). В конце первого периода к исходной сумме P прибавляется сумма Pr. Наращенная сумма S_1 будет равна:

$$S_1 = P + Pr = P(1+r).$$

В конце второго периода к имеющейся сумме $P(1+r)$ прибавляется сумма $P(1+r)r$. Наращенная сумма S_2 составит:

$$S_2 = P(1+r) + P(1+r)r = P(1+r)^2.$$

Аналогично, к концу третьего периода будем иметь наращенную сумму

$$S_3 = P(1+r)^3,$$

и к концу t-го года наращенная сумма S_n будет равна:

$$S_n = P(1+r)^n\,.$$

При выводе последней формулы мы считали число лет t целым. Однако в практике финансовых расчетов часто приходится вычислять суммы, наращенные за нецелое число лет, например, за полгода ($t = 0.5$) или за 3 года 2 месяца ($t = 19/6$) и т. п.. Кроме того, процентная ставка r может объявляться для временного промежутка, не равного году, например, квартала или даже дня. Поэтому далее для обозначения временного промежутка, которому соответствует процентная ставка r, мы будем использовать термин *период*. По определению для произвольного (может быть, и нецелого) числа периодов t наращенная сумма при начислении сложных процентов вычисляется по формуле:

$$S = P(1+r)^t\,. \tag{3.2}$$

Множитель $(1+r)$ называется *множителем наращения*. В докомпьютерные времена для вычислений использовали специально составленные таблицы множителя наращения для различных значений r и t.

Формула (3.2) имеет смысл и при отрицательном значении процента r. В таком случае первоначальная сумма денег P со временем уменьшается. Это уменьшение не всегда носит негативный характер, а может описывать естественный процесс уменьшения ценности, как, например, при амортизации по методу фиксированного процента, о которой речь пойдет в главе 4.

В формуле (3.2) исходную сумму P называют также *текущей* или *приведенной ценностью* (present value) денег, а наращенную сумму S —

их *будущей ценностью* (future value). Используются также связанные с этими названиями обозначения PV и FV, с учетом которых формула (3.2) принимает вид:

$$FV = PV(1 + r)^t\,.$$

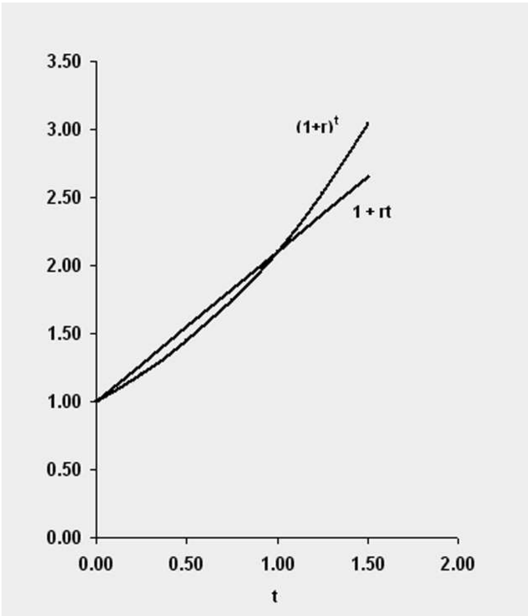


Рис. 5. Сравнение коэффициентов наращения $1 + rt$ и $(1 + r)^t$

При начислении процентов один раз за период при $t > 1$ наращенная сумма при сложных процентах больше, чем наращенная сумма при простых процентах, так как верно неравенство:

$$(1 + r)^t > 1 + rt\,. \tag{3.3}$$

Но при $t < 1$ неравенство (3.3) меняется на противоположное:

$$(1 + r)^t < 1 + rt\,. \tag{3.4}$$

Заметим, что максимальное превышение простого процента над сложным достигается при $t = 0.5$. На рис. 5 приведены графики функций $y = 1 + rt$ и $y = (1+r)^t$, которые наглядно показывают соотношение между коэффициентами наращения при простом и сложном процентах при различных t.

Финансовое учреждение может указывать процентную ставку на любой период начисления, но для сравнения следует привести такую ставку к годовой. Например, если банк начисляет $r_m\%$ сложных в месяц, то исходная сумма P за год превратится в наращенную сумму $S = P(1+r_m)^{12}$. Соответствующая годовая ставка r определяется равенством:

$$P(1+r_m)^{12} = P(1+r)\,,$$

из которого определяем значение r:

$$r = (1+r_m)^{12} - 1.$$

Например, если $r_m = 6\%$, применяя эту формулу, получаем:

$$r = (1+0.06)^{12} - 1 = 101.2\%\,.$$

Пример 3.1. *Банк начисляет ежегодно 8% сложных. Клиент положил в этот банк 20 000 руб. Какая сумма будет на его счете через 5 лет?*

Решение. Применяя формулу (3.2), находим наращенную сумму S при $P = 20\,000$, $r = 0.08$, $t = 5$:

$$S = 20\,000(1+0.08)^5 = 20\,000\times 1.469328 = 29\,386.56 \text{ руб.}$$

Заметим, что если бы банк выплачивал 8% простых, то через 5 лет на счете была бы меньшая сумма:

$$S = 20\,000(1+0.08\times 5) = 20\,000\times 1.4 = 28\,000 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

В практике финансовых расчетов ставку сложных процентов, как правило, указывают за период, равный году, но начисление сложных процентов может производиться каждое полугодие, квартал, месяц или даже день. При этом за каждый такой период, равный $1/m$ части года, начисляются сложные проценты по ставке r/m сложных процентов. В этом случае формула (3.2) примет вид:

$$S = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm},$$

где t — длительность промежутка времени, в течение которого начисляются сложные проценты (t измеряется в годах). Например, в случае одного квартала $t = 0.25$.

Чтобы показать, что при годовой ставке сложных процентов r вычисление сложных процентов производится m раз в году по ставке r/m, эту ставку обозначают j_m. Тогда последняя формула принимает вид:

$$S = P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{tm}. \tag{3.5}$$

Пример 3.2. *Решим пример 3.1 при $r = j_4 = 8\%$ и при $r = j_{12} = 8\%$.*

Решение. Применяем формулу (3.5) при $j_4 = 8\%$, получаем:

$$S = 20\,000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{5\times4} = 20\,000\times1.4859474 = 29\,718.95 \text{ руб.}$$

Применяем формулу (3.5) при $j_{12} = 8\%$, получаем:

$$S = 20\,000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{5\times12} = 20\,000\times1.4898457 = 29\,796.91 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Мы видим, что при увеличении числа периодов начисления процентов при той же годовой процентной ставке наращенная сумма, полученная за одно и то же время, увеличивается.

3.2. Основные задачи на сложные проценты

При использовании сложных процентов встречаются те же четыре типа задач, которые были рассмотрены для простых процентов. Задача первого типа встретилась в примерах 3.1 и 3.2. В следующих примерах решаются задачи остальных трех типов.

Пример 3.3. *Какую сумму следует вложить в банк, выплачивающий $j_{12} = 7\%$, чтобы получить 3 000 руб. через 4 года 6 месяцев?*

Решение. Применим формулу (3.5) при $j_{12} = 0.07,\ m = 12,\ t = 4.5$:

$$3\,000 = P\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{12\times4.5} = P(1+0.0058)^{54}.$$

Из этого равенства находим значение P:

$$P = 3\,000\times(1+0.0058)^{-54} = 3\,000\times0.7317655 = 2\,195.30 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

В предыдущем примере требовалось определить, какую сумму денег надо вложить в банк в настоящее время, чтобы получить сумму S через t лет в будущем. Решение такой задачи называется *дисконтированием суммы* S. Величина вклада определяется формулой:

$$P = S(1+r)^{-t}, \tag{3.6}$$

если начисление $r\%$ сложных производится один раз в год в течение t лет, и формулой:

$$P = S\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-tm}, \tag{3.7}$$

если начисление процентов производится по ставке j_m в течение t лет. Множитель $(1+r)^{-t}$ называется *дисконтным множителем.*

Пример 3.4. *Под какую процентную ставку* j_1 *следует вложить* 5 000 *руб., чтобы через* 2 *года получить* 7 000 *руб.?*

Решение. Применим формулу (3.2) при $S = 7\,000$, $P = 5\,000$, $t = 2:$

$$7\,000 = 5\,000 \times (1+r)^2.$$

Преобразуем последнее равенство и определим из него значение r:

$$(1+r)^2 = 1.4, \text{ откуда } 1+r = 1.183; \; r = 0.183 = 18.3\%\,. \qquad \blacksquare$$

Пример 3.5. *Определим годовую ставку начисляемых ежегодно процентов, если вложенная сумма денег удваивается через* 8 *лет.*

Решение. Применим формулу (3.2) при $S = 2P$, $t = 8$:

$$2P = P(1+r)^8.$$

Определим значение r из этого равенства:

$$1+r = \sqrt[8]{2} = 1.09051, \text{ откуда } r = 0.09051 = 9.051\%\,. \qquad \blacksquare$$

Пример 3.6. *Банк начисляет ежегодно* 8% *сложных. Клиент положил в этот банк* 20 000 *руб. Через несколько лет на его счету была сумма, равная* 29 386.56 *руб. Сколько лет начислялись проценты?*

Решение. Преобразуем формулу (3.2) и получим формулу для t:

$$t = \frac{\ln \dfrac{S_t}{P}}{\ln(1+r)}.$$

Используем эту формулу при $S = 29\,386.56$, $P = 20\,000$ и $r = 0.08$:

$$t = \frac{\ln \dfrac{29\,386.56}{20\,000}}{\ln(1+0.08)} = 5 \text{ лет.}$$ ■

3.3. Непрерывное начисление сложных процентов

Мы видели (пример 3.2), что сумма, наращенная за t лет при постоянной процентной ставке $j_m = j$, с увеличением числа m увеличивается (этот результат доказывается в общем виде в курсе высшей математики). Покажем, что при неограниченном увеличении m наращенная сумма $S = S_m$ стремится к конечному пределу:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}.$$

Обозначим $j/m = h$. Если $m \to \infty$, то $h \to 0$, тогда:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{h\to 0} P(1+h)^{\frac{j}{h}t} = P(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}})^{jt}.$$

Известно, что $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$ ($e = 2.718281828\ldots$), поэтому:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = Pe^{jt}.$$

Этот факт дает основание применять так называемое *непрерывное начисление процентов по годовой ставке* δ. Наращенная за время t сумма определяется формулой:

$$S = Pe^{\delta t}. \qquad (3.8)$$

Процентная ставка δ в этом случае называется *силой роста*. Иногда силу роста обозначают j_∞. Значение e^x для разных значений x можно вычислить с помощью финансового калькулятора или в Excel.

Пример 3.7. *Решить пример 3.1, если банк начисляет* $j_\infty = 8\%$.

Решение. Применяя формулу (3.8) при $P = 20\,000$, $\delta = j_\infty = 0.08$, $t = 5$, находим наращенную сумму:

$$S = 20\,000\,e^{0.08\times5} = 20\,000\,e^{0.4} = 20\,000\times1.49182 = 29\,836.49 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Сравнивая полученный результат с результатом примера 3.2, видим, что сумма, полученная при непрерывном начислении процентов, лишь немного больше суммы, полученной при применении ставки j_{12}.

Из формулы (3.8) непосредственно следует формула дисконтирования капитала при непрерывном начислении процентов:

$$P = Se^{-\delta t}. \tag{3.9}$$

3.4. Учет векселей по сложной учетной ставке

Операция *банковского учета*, рассмотренная в п. 2.5, иногда производится по сложной учетной ставке d_c, начисляемой один раз в год, или по сложной учетной ставке f_m, которая начисляется m раз в год в размере $f_m/m\%$. В этих случаях сумма денег P, выплачиваемая банком за вексель на сумму S, вычисляется по формулам:

$$P = S(1 - d_c)^t, \tag{3.10}$$

$$P = S\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{tm}, \tag{3.11}$$

где t — величина промежутка времени от момента учета векселя до срока его выкупа (в годах).

Пример 3.8. *Вексель выдан на* $10\,000$ *руб. с уплатой* 15 *октября. Владелец векселя погасил его в банке* 15 *августа того же года по сложной учетной ставке* 10%. *Сколько он получил? Сколько получит владелец векселя, если срок уплаты по нему* 15 *октября следующего года?*

Решение. Число дней между 15 августа и 15 октября равно 60. Применяем формулу (3.10) при $S = 10\,000$, $d_c = 0.1$, $t = 60/360 = 1/6 = 0.1(6)$:

$$P = 10\,000\times(1 - 0.1)^{0.1(6)} = 0.982593\times10\,000 = 9\,825.93 \text{ руб.}$$

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно $360 + 60 = 420$ дней, то есть $t = 420/360 = 7/6 = 1.1(6)$:

$$P = 10\,000\times(1 - 0.1)^{1.1(6)} = 0.8843338\times10\,000 = 8\,843.34 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Сравнивая результат этого примера с результатом примера 2.11, мы замечаем, что если срок от момента учета до момента выкупа векселя меньше года, то учет по сложной ставке выгоднее для банка, чем по простой ставке, а если этот срок больше года, то банку выгоднее учет по простой ставке.

3.5. Эквивалентность процентных ставок

При заключении финансовых контрактов каждый участник сделки стремится заключить контракт на наиболее выгодных для себя условиях. Условия контракта могут быть различными, и надо иметь возможность сравнивать контракты. При этом различные контракты могут предусматривать различные виды начисления процентов, и для сравнения таких контрактов необходимо разработать способы приведения различных процентных ставок к одному виду. Для этой цели вводятся понятия: *эквивалентность процентных ставок* и *эффективная процентная ставка*.

Мы познакомились с пятью основными видами процентных ставок, применяемых в финансовых расчетах: простые и сложные проценты, начисляемые один раз в год (обозначим их i_s и i_c); годовая ставка j_m, по которой m раз в год начисляется j_m/m сложных процентов; ставка непрерывных процентов (сила роста δ); простая учетная ставка d_s. Иногда рассматривают еще сложную учетную ставку d_c и учетную ставку f_m, начисляемую m раз в году, но на практике они не применяются. Напомним, что мы пока рассматриваем простейшие потоки платежей, которые состоят из двух компонент: расходного платежа в момент времени 0, равного исходной сумме P, и доходного платежа, равного наращенной сумме S и получаемого через t интервалов времени. Далее будем считать, что в качестве интервала времени используется финансовый год, а количество интервалов времени t может быть и дробным. Приведем формулы для вычисления наращенной суммы S для перечисленных выше пяти видов процентных ставок:

(1) $S = P(1 + ti_s)$,

(2) $S = P(1 + i_c)^t$,

(3) $S = P\left(1 + \dfrac{j_m}{m}\right)^{tm}$,

(4) $S = Pe^{\delta t}$,

(5) $S = \dfrac{P}{1 - td_s}$,

Две процентные ставки называют *эквивалентными*, если применение их к одинаковым суммам в течение одинаковых промежутков времени дает одинаковые наращенные суммы.

Приравнивая правые части любых двух из приведенных выше пяти формул и выражая из этого равенства одну процентную ставку через другую, мы получаем условие эквивалентности соответствующих процентных ставок за t лет. Таких равенств можно составить 15 и, следовательно, получить 30 формул для выражений одной из процентных ставок через эквивалентную ей другую процентную ставку. Приведем все эти формулы.

Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим уравнение:

$$P(1 + ti_s) = P(1 + i_c)^t,$$

решая которое относительно i_s и i_c выводим условия эквивалентности этих ставок:

$$i_s = \frac{(1 + i_c)^t - 1}{t}, \tag{3.12}$$

$$i_c = \sqrt[t]{1 + ti_s} - 1. \tag{3.13}$$

Заметим, что в обоих случаях величина эквивалентной процентной ставки зависит от t — числа лет, в течение которых применяются эти ставки.

Из формул (1) и (3) получаем условия эквивалентности i_s и j_m:

$$i_s = \frac{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm} - 1}{t}, \tag{3.14}$$

$$j_m = m(\sqrt[tm]{1 + ti_s} - 1). \tag{3.15}$$

Из формул (1), (4) получаем условия эквивалентности i_s и δ:

$$i_s = \frac{e^{\delta t} - 1}{t}, \tag{3.16}$$

$$\delta = \frac{\ln(1 + ti_s)}{t}. \tag{3.17}$$

Из формул (1), (5) получаем условия эквивалентности i_s и d_s:

$$i_s = \frac{d_s}{1 - td_s}, \tag{3.18}$$

$$d_s = \frac{i_s}{1 + ti_s}. \tag{3.19}$$

Из формул (2), (3) получаем условия эквивалентности i_c и j_m:

$$i_c = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1, \tag{3.20}$$

$$j_m = m(\sqrt[m]{1 + i_c} - 1). \tag{3.21}$$

Заметим, что эквивалентность ставки сложных процентов i_c и ставки j_m не зависит от числа лет начисления процентов t, то есть можно говорить, что формулы (3.20) и (3.21) устанавливают эквивалентность ставок i_c и j_m, не упоминая число лет t. Такая же независимость эквивалентности от числа лет начисления процентов имеет место для ставок j_m и δ (формулы (3.26) и (3.27)). Эти формулы приведены ниже.
Из формул (2), (4) получаем условия эквивалентности i_c и δ:

$$i_c = e^\delta - 1, \tag{3.22}$$

$$\delta = \ln(1 + i_c). \tag{3.23}$$

Из формул (2), (5) получаем условия эквивалентности i_c и d_s:

$$i_c = \frac{1}{\sqrt[t]{1 - td_s}} - 1, \tag{3.24}$$

$$d_s = \frac{1 - (1 + i_c)^{-t}}{t}. \tag{3.25}$$

Из формул (3), (4) получаем условия эквивалентности j_m и δ:

$$j_m = m(\sqrt[m]{e^\delta} - 1), \tag{3.26}$$

$$\delta = m \ln\left(1 + \frac{j_m}{m}\right). \tag{3.27}$$

Из формул (3), (5) получаем условия эквивалентности j_m и d_s:

$$j_m = m\left(\frac{1}{\sqrt[tm]{1 - td_s}} - 1\right), \tag{3.28}$$

$$d_s = \frac{1 - \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-tm}}{t}. \tag{3.29}$$

Из формул (4), (5) получаем условия эквивалентности δ и d_s:

$$\delta = -\frac{\ln(1 - td_s)}{t}, \tag{3.30}$$

$$d_s = \frac{1 - e^{-\delta t}}{t}. \tag{3.31}$$

Вычисление эквивалентных ставок применяется при изменении условий контракта. Рассмотрим примеры.

Пример 3.9. *Кредит предоставляется под 5% сложных годовых на 8 лет. Субъект, берущий этот кредит, хочет получить его под простые проценты (ту же сумму на тот же срок). Какая ставка простых процентов должна быть предусмотрена контрактом?*

Решение. Надо определить ставку i_s, эквивалентную ставке i_c за восемь лет. По формуле (3.12) имеем:

$$i_s = \frac{(1+0.05)^8 - 1}{8} = 0.05969 = 5.97\%\,,$$

то есть следует предоставить кредит под 5.97% простых. ∎

Пример 3.10. *Банк, выплачивающий на депозиты 7% сложных годовых, хочет перейти к начислению непрерывных процентов. Какую годовую ставку начисления непрерывных процентов (силу роста) δ должен установить банк, чтобы доходы вкладчиков остались без изменения?*

Решение. Требуется определить силу роста δ, эквивалентную ставке i_c сложных процентов. По формуле (3.23) получаем:

$$\delta = \ln(1+i_c) = \ln(1+0.07) = 0.0677 = 6.77\%.$$ ∎

Пример 3.11. *Заем на некоторую сумму был предоставлен под 5% простых годовых на 0.5 года. Какая эквивалентная учетная ставка соответствует этому долговому обязательству?*

Решение. Надо определить ставку d_s, эквивалентную ставке i_s за полгода. По формуле (3.19) при $i_s = 0.05$ и $t = 0.5$ имеем:

$$d_s = \frac{i_s}{1+ti_s} = \frac{0.05}{1+0.025} = 4.88\%.$$ ∎

3.6. Эффективная процентная ставка

Эффективной процентной ставкой, соответствующей данной процентной ставке, называется ставка сложных процентов i_c, эквивалентная данной процентной ставке и не зависящая от срока применения этой ставки.

Как следует из п. 3.5, эффективные процентные ставки существуют только для ставок j_m и δ. Они определяются по формулам (3.20) и (3.22). Вычисление эффективной процентной ставки применяется для определения реальной доходности финансовой операции. Эта доходность определяется соответствующей эффективной процентной ставкой. Рассмотрим примеры.

Пример 3.12. *Банк выплачивает по вкладам* 10% *годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этом банке при следующих видах начисления процентов: а) ежемесячно, б) ежеквартально, в) по полугодиям, г) непрерывно?*

Решение. Для того чтобы определить реальную доходность вкладов в банк, надо найти эффективную процентную ставку i_c при: а) $j_{12} = 0.1/12$, б) $j_4 = 0.1/4$, в) $j_2 = 0.1/2$, г) $\delta = 0.1$. Применим теперь соответствующие формулы:
а) по формуле (3.20) получаем:

$$i_c = (1 + 0.1/12)^{12} - 1 = 0.1047 = 10.47\%\,;$$

б) по формуле (3.20) получаем:

$$i_c = (1 + 0.1/4)^4 - 1 = 0.1038 = 10.38\%\,;$$

в) по формуле (3.20) получаем:

$$i_c = (1 + 0.1/2)^2 - 1 = 0.1025 = 10.25\%\,;$$

г) по формуле (3.22) получаем:

$$i_c = e^{0.1} - 1 = 0.1052 = 10.52\%\,.$$

■

3.7. Плавающий сложный процент

В договорах срочного вклада обычно оговаривается, что в случае невостребования вкладчиком вклада по истечении его срока действия договор продлевается (пролонгируется) на очередной срок, равный сроку вклада. Проценты при очередном сроке вклада начисляются по ставке, действующей в банке для данного вида вкладов на день продления договора[5]. Если процентная ставка изменяется в течение действия договора, то говорят, что применяется *плавающая* ставка процента. При плавающей процентной ставке наращенная сумма за два срока вклада будет вычисляться по формуле:

$$S = P(1 + r_1)^t (1 + r_2)^t \,, \tag{3.32}$$

где r_1 — процентная ставка за период по вкладу в первый срок, r_2 — процентная ставка за период по вкладу во второй срок, t — величина одного срока в периодах.

Если обобщить формулу (3.32) на k сроков и допустить, что сроки могут иметь различную длительность $(t_1,\ t_2, \dots, t_k)$, то получим общую формулу плавающего сложного процента:

$$S = P(1 + r_1)^{t_1} (1 + r_2)^{t_2} \cdots (1 + r_k)^{t_k}. \tag{3.33}$$

Плавающий сложный процент применяется на практике не только в договорах срочных вкладов, но и при выдаче ссуд и ипотеке. Применение плавающего процента свидетельствует о нестабильной обстановке на финансовом рынке. Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.13. *Два года назад вы заняли у приятеля* 5 000 *руб. и собираетесь вернуть долг сейчас. Какую сумму справедливо вернуть приятелю, если инфляция в эти годы составила* 16% *и* 11%? *Под справедливостью подразумевается возможность купить на возвращенные деньги то же количество благ, что и два года назад на одолженные деньги.*

Решение. Применяя формулу (3.32) при $t = 1$, $P = 5000$, $r_1 = 0.16$, $r_2 = 0.11$, получаем:

$$S = P(1 + r_1)\,(1 + r_2) \;=\; 5\,000\,(1 + 0.16)\,(1 + 0.11) \;=\; 6438 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

[5]Мы дословно процитировали условия продления невостребованного вклада из текста договора срочного вклада одного из крупных российских банков.

3.8. Правило 69 и правило 72

Имеются две полезные формулы, с помощью которых можно приблизительно вычислить время t (в периодах), за которое сумма, размещенная под r сложных процентов за период, удвоится. Из-за констант, которые используются в этих формулах, сами формулы получили названия „Правило 69“ и „Правило 72“. Так как обычно в качестве периода используется один год, далее будем предполагать, что период равен одному году.

> **Правило 69**: сумма, размещенная под r сложных годовых процентов, удваивается за $\left(\dfrac{69}{r} + 0.35\right)$ лет.

Заметим, что в формулу из правила 69 следует подставлять число r, записанное в процентах, а не десятичную дробь. Например, если $r = 25\%$, то в формулу вместо r подставляем число 25:

$$t = \frac{69}{25} + 0.35 = 3.11\,(\text{года}).$$

Точное значение времени удвоения суммы, размещенной под r сложных годовых процентов, определяется из равенства:

$$(1 + r)^t = 2,$$

прологарифмировав которое получаем формулу для t:

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)}\,. \tag{3.34}$$

Правило 69 можно использовать для довольно широкого диапазона значений r. Например, при $r = 25\%$ по правилу 69 получается результат, совпадающий со значением, вычисленным по формуле (3.34) и округленным до двух знаков после запятой (3.11). При $r = 40\%$ по формуле (3.34) получаем $t = 2.06$, а по правилу 69 — $t = 2.08$.

Покажем, как вывести формулу из правила 69. Логарифмическую функцию $\ln(1 + r)$ из формулы (3.34) разложим в ряд Маклорена:

$$\ln(1 + r) = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \cdots$$

Этот ряд сходится при $-1 < r \leq 1$, поэтому при малых значениях r можно использовать следующее приближенное равенство:

$$\ln(1+r) \approx r - \frac{r^2}{2}\,.$$

Подставим в формулу (3.34) это приближение и $\ln 2 \approx 0.69$:

$$t \approx \frac{0.69}{r - \dfrac{r^2}{2}} = \frac{0.69}{r(1 - \dfrac{r}{2})}\,. \tag{3.35}$$

При малых значениях r разложим в ряд Маклорена дробь $\dfrac{1}{1-\frac{r}{2}}$ и найдем ее приближенное значение:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{r}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k \approx 1 + \frac{r}{2}\,.$$

Подставим в формулу (3.35) это приближеное значение:

$$t \approx \frac{0.69\left(1 + \dfrac{r}{2}\right)}{r} = \frac{0.69}{r} + \frac{0.69}{2} \approx \frac{0.69}{r} + 0.35.$$

С учетом того, что в последнее равенство должно подставляться значение r, выраженное в процентах, получили формулу из правила 69:

$$t \approx \frac{69}{r \times 100} + 0.35.$$

Имеется менее точная, чем в правиле 69, но более простая формула для решения той же задачи:

Правило 72: сумма, размещенная под r сложных годовых процентов, удваивается за $\dfrac{72}{r}$ лет.

Заметим, что в формулу из правила 72 также следует подставлять число r, записанное в процентах, а не десятичную дробь.

Покажем, как вывести формулу, которая используется в правиле 72. Предположим, что значение r близко к 10%. Тогда имеет место следующее приближенное равенство:

$$1 - \frac{r}{2} \approx 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95.$$

Подставим последнее приближение в формулу (3.34):

$$t \approx \frac{0.69}{r \times 0.95} \approx \frac{0.72}{r}.$$

В последнее приближенное равенство должно подставляться значение r, выраженное в процентах, поэтому получаем формулу из правила 72:

$$t \approx \frac{72}{r \times 100}.$$

Для представления о точности вычислений по правилу 69 и правилу 72 приведем следующую таблицу (точность вычислений — два знака после запятой):

r (%)	Точное значение (годы)	Правило 72 (годы)	Правило 69 (годы)
40	2.06	1.80	2.08
35	2.31	2.06	2.32
30	2.64	2.40	2.65
25	3.11	2.88	3.11
20	3.80	3.60	3.80
15	4.96	4.80	4.95
10	7.27	7.20	7.25
5	14.21	14.40	14.15
3	23.45	24.00	23.35
1	69.66	72.00	69.35

3.9. Используем Excel

Продолжим изучение возможностей программы Excel, которые используются при решении финансовых задач. При решении примеров из главы 1 мы обсудили (и использовали) ввод данных с форматированием и работу с простыми формулами в Excel. В этой главе мы будем дополнительно использовать библиотеку встроенных функций. За деталями организации доступа к встроенным функциям Excel и использования команды **Функция** мы отсылаем читателя к приложению А. Заметим, что использование встроенных функций в Excel ничем, по существу, не отличается от их использования в любом популярном языке программирования.

Напомним читателю, что, для того чтобы решения примеров в Excel выглядели также, как на рисунках в книге, необходимо установить в ячейках правильные форматы, используя команду **Ячейки...** из меню **Формат**.

	A	B	C	D	E	F
1	**Глава : Сложные проценты**					
2						
3	**Пример 3.1**					
4						
5	*Дано:*					
6	*PV*	20 000р.				
7	i_c	8%				
8	t	5				
9	*Вычислить:*					
10	FV = ?					
11	*Решение:*					
12	FV =	**29 386.56р.**	=B6*(1+B7)^B8			
13	FV =	**29 386.56р.**	=БЗ(B6;B7;B8)			
14						

Рис. 6. Пример на вычисление сложного процента

На рис. 6 приведен фрагмент рабочего листа с решением примера 3.1. Сумма, которая будет на счете в банке через 5 лет (29 386.56 руб.), определена двумя способами: значение в ячейке B13 вычислено с помощью функции пользователя БЗ; значение в ячейке B12 — непосредственно по формуле сложных процентов (3.2).

Сделаем необходимые пояснения к приведенному решению примера 3.1. Заметим, что в Excel отсутствует встроенная функция, которая реализует вычисления по формуле

$$FV = PV(1+r)^t\,. \tag{3.36}$$

Неудобство из-за отсутствия встроенной функции, которая реализует вычисления по формуле 3.36, легко устранить, написав такую функция на VBA. Подробно о том, как это сделать, рассказано в приложении Б. Здесь мы приведем только простейший вариант текста такой функции БЗ (листинг 3.1):

Листинг 3.1

```
Function БЗ(ПривСтоим, Процент, Срок)
   БЗ = ПривСтоим*(1 + Процент)^ Срок
End Function
```

Использование функции, созданной пользователем, ничем не отличается от использования встроенной функции Excel, что и продемонстрировано при вычислении значения в ячейке B15. Однако следует иметь в виду две связанные с этим технические детали. Во-первых, при открытии xls-файла, в котором имеется хотя бы одна функция пользователя, программа Excel выдает запрос об открытии доступа к этим функциям. Во-вторых, для доступа к некоторой функции пользователя необходимо иметь открытым тот файл, в котором эта функция содержится.

Покажем теперь, как выполнить решение другого типичного примера на сложные проценты средствами Excel. На рис. 7 приведен фрагмент рабочего листа с решением примера 3.12. Для вычисления эффективной процентной ставки i_c при дискретном начислении процентов в Excel имеется встроенная финансовая функция ЭФФЕКТ, реализующая формулу (3.20):

$$i_c = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1\,.$$

Напомним, что вычисление эффективной процентной ставки i_c при непрерывном начислении процентов выполняется по формуле: $i_c = e^{\delta} - 1$. При записи вычислений по этой формуле в ячейке B15 была использована встроенная математическая функция EXP.

Имеется также встроенная финансовая функция НОМИНАЛ, которая по эффективной процентной ставке i_c и числу начисления процентов в период (m) вычисляет номинальную процентную ставку j_m по формуле (3.21):

$$j_m = m(\sqrt[m]{1 + i_c} - 1)\,.$$

	A	B	C	D	E	F
1	**Глава: Сложные проценты**					
2						
3	**Пример 3.12**					
4						
5	*Дано:*					
6	j_m	10%				
7	1) m	12				
8	2) m	4				
9	3) m	2				
10	4)	непрерывно				
11	*Вычислить:*					
12	i_c?					
13	*Решение:*					
14	1) i_c=	**10.47%**	=ЭФФЕКТ(B6;B7)			
15	2) i_c=	**10.38%**	=ЭФФЕКТ(6;B8)			
16	3) i_c=	**10.25%**	=ЭФФЕКТ(B6;B9)			
17	4) i_c=	**10.52%**	=EXP(B6)-1			
18						
19	*Проверка:*					
20	j_{12} =	10%	=НОМИНАЛ(B14;B7)			
21	j_4 =	10%	=НОМИНАЛ(B15;B8)			
22	j_2 =	10%	=НОМИНАЛ(B16;B9)			
23						
24						

Рис. 7. Пример на вычисление эффективной процентной ставки

Упражнения

1. Предприниматель положил 500 000 руб. в банк, выплачивающий 6.5% годовых (сложных). По условиям вклада проценты начисляются только один раз в конце года. Какая сумма будет на счете этого клиента: а) через 6 месяцев, б) через 1 год, в) через 3 года, г) через 6 лет 6 месяцев?

2. Решить упражнение 1, если банк начисляет проценты по ставке $j_4 = 6.5\%$.

3. Владелец мастерской может вложить деньги в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_6 = 10\%$. Какую сумму он должен вложить, чтобы получить 20 000 руб. через 3 года 3 месяца?

4. Фермер хочет вложить 30 000 руб., чтобы через 5 лет получить 40 000 руб. Под какую процентную ставку j_{12} он должен вложить свои деньги?

5. Через сколько лет 1 руб., вложенный в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_1 = 10\%$, превратится в 1 000 000 руб.?

6. Клиент вложил в банк 1 000 руб. Какая сумма будет на счете этого клиента через 1 год, если банк начисляет проценты по ставке: а) $j_1 = 5\%$, б) $j_6 = 5\%$, в) $j_{12} = 5\%$, г) $j_{360} = 5\%$, д) $j_\infty = 5\%$?

7. Какая сумма будет на счете клиента из упражнения 6 при условии д) через 8 лет?

8. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрерывные проценты по ставке $j_\infty = 7\%$, чтобы через 10 лет на счете было 500 000 руб.?

9. Банк начислял на вложенные в него деньги проценты по ставке j_4: первый год — 12%, второй год — 10%, третий и четвертый года — 9%. Какая сумма будет на счете в конце четвертого года, если 1 января первого года на этот счет было положено 30 000 руб.?

10. При $t = 2$ (года) определить ставку простых процентов i_s, эквивалентную ставке: а) $j_2 = 10\%$, б) $j_6 = 10\%$, в) $j_{12} = 10\%$, г) $j_\infty = 10\%$.

11. Банк выдает ссуду на 10 лет или под 7% годовых (сложных), или под простые проценты. Какую ставку простых процентов должен установить банк, чтобы полученный им доход не изменился?

12. Какую ставку сложных процентов должен установить банк из предыдущего упражнения, если он выдает ссуду под 7% простых годовых?

13. Определить ставку сложных процентов i_c, эквивалентную ставке: а) $j_2 = 10\%$, б) $j_6 = 10\%$, в) $j_{12} = 10\%$, г) $j_\infty = 10\%$.

14. Банк выплачивает на вложенные в него деньги 8% годовых (сложных). Какую ставку j_m должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились, если: а) $m = 2$, б) $m = 6$, в) $m = 12$, г) $m = \infty$?

15. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4 = 6\%$ и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?

16. Банк учитывает вексель за 60 дней до срока его оплаты по простой учетной ставке $d_s = 6\%$. Какую сложную учетную ставку d_c должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?

17. Банк учитывает вексель за 90 дней по учетной ставке $d_c = 15\%$ и желает перейти к простой учетной ставке d_s. Какой величины должна быть ставка d_s, чтобы доход банка не изменился?

18. Банк выплачивает по вкладам 8% годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этот банк, если начисление поквартально?

19. Банк выплачивает по вкладам 6% годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этот банк, если начисление процентов делается: а) по полугодиям, б) поквартально, в) ежемесячно, г) непрерывно?

20. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке $d_c = 8\%$. Какова реальная доходность этой операции?

21. Банк учел вексель за 90 дней до погашения по простой учетной ставке $d_s = 8\%$. Какова доходность i_c этой операции для банка?

22. Два года назад вы получили в банке ссуду в размере 60 000 руб. под 19% годовых, которая погашается единым платежом в конце срока. Во втором году банк увеличил процент по ссуде на 1 пункт, что допускалось условиями договора. Какую сумму вы должны были вернуть при начальных условиях? На сколько увеличилась эта сумма из-за изменения процентной ставки?

23. Три года назад вы получили в банке ссуду в размере 100 000 руб. под 19% годовых, которая погашается единым платежом в конце срока. На третий год банк уменьшил процент по ссуде на 1 пункт, чтобы избежать досрочного погашения ссуды. Какую сумму вы должны были вернуть при начальных условиях? На сколько уменьшилась эта сумма из-за изменения процентной ставки?

Дополнительные упражнения

24. Выведите формулу и сформулируйте правило, аналогичное правилу 69, для определения срока, за который сумма, размещенная под r сложных процентов за период, утроится. За какой срок по этому правилу сумма, размещенная под 25% сложных процентов за период, утроится? Сравните найденное значение срока с точным, вычисленным по формуле (3.34). Как бы вы назвали это правило?

25. Выведите формулу и сформулируйте правило, аналогичное правилу 72, для определения срока, за который сумма, размещенная под r сложных процентов за период, утроится. За какой срок по этому правилу сумма, размещенная под 25% сложных процентов за период, утроится? Сравните найденное значение срока с точным, вычисленным по формуле (3.34). Как бы вы назвали это правило?

26. Сравните значения точных сроков утроения суммы, размещенной под r сложных процентов за период, со сроками, вычисленными по правилам из упражнений 22 и 23 при различных значениях r. Результаты вычислений оформите в виде таблицы, как в это сделано в п. 3.8.

27. Выведите формулы эквивалентности для простой и сложной учетных ставок:

$$d_c = 1 - \sqrt[t]{1 - td_s}, \quad d_s = \frac{1 - (1 - d_c)^t}{t}\,.$$

4. Амортизация

В этой главе мы поведем речь об амортизации основных фондов (depreciation). *Амортизация* основных фондов — это (условный, регулируемый правилами налогового учета) процесс перенесения их стоимости по мере физического и морального износа на производимый продукт.

Отметим также, что в русскоязычной литературе можно встретить словосочетание *амортизация долга*, которое является калькой с английского выражения *loan amortization*, которое можно перевести на русский язык как *списание, постепенное погашение*. Об амортизации долга речь пойдет в главе 6.

4.1. Амортизационные отчисления

Процесс амортизации реализуется посредством *амортизационных отчислений*, размеры которых определяются выбранным методом амортизации и существующим законодательством. Амортизационные отчисления являются элементом себестоимости: увеличение их размера приводит к уменьшению прибыли предприятия, а следовательно, и налогооблагаемой базы для уплаты налога на прибыль.

Амортизационные отчисления влияют на вычисление следующих важных характеристик:

- налогооблогаемой прибыли — амортизационные отчисления относятся на себестоимость продукции и тем самым уменьшают сумму налога;
- прибыли акционерной компании, используемой для выплаты дивидендов;

Законом разрешается применение различных схем, которые отличаются скоростью амортизации основных фондов. При равномерной амортизации каждый год списываются равные доли первоначальной стоимости оборудования в течение нормативного периода его эксплуатации. Такой способ амортизации плох при высокой инфляции, так как приводит со временем к существенному занижению себестоимости продукции, если не проводится переоценка основных фондов. Поэтому в условиях инфляции предприятия предпочитают ускоренную амортизацию, при которой амортизационные отчисления в первые годы большие и уменьшаются со временем.

При расчете амортизационных отчислений используются три параметра: первоначальная стоимость, срок полезного использования (эксплуатации) и остаточная (ликвидационная) стоимость. Станки, оборудование, здания и другое имущество предприятий (основные фонды) имеют срок эксплуатации, определяемый специальными нормативами. Балансовая стоимость этого имущества, зафиксированная в бухгалтерских документах, уменьшается за время срока эксплуатации до нуля или до некоторой остаточной стоимости. Законодательство может оговаривать фиксированную остаточную стоимость. Суммы, на которые уменьшается стоимость имущества, называются *амортизационными отчислениями*. Рассмотрим основные способы расчета амортизационных отчислений.

4.2. Равномерная амортизация

Введем обозначения, которые будем использовать на протяжении всей этой главы. Первоначальную стоимость амортизируемого объекта обозначим через S, срок его эксплуатации — через n, а остаточную стоимость — через V.

Предположим сначала, что $V = 0$. При *равномерной амортизации* (РА) стоимость имущества уменьшается ежегодно на $(100/n)\%$, или на денежную сумму S/n. Таким образом, величина ежегодных амортизационных отчислений равна S/n. Стоимость имущества в конце k-го года S_k вычисляется по формуле:

$$S_k = S - k\,\frac{S}{n}\,,\ k = 1,\ \ldots,\ n\,. \tag{4.1}$$

Следовательно, величины S_k образуют убывающую арифметическую прогрессию, разность которой равна $(-S/n)$.

Если остаточная стоимость ненулевая ($V > 0$), то стоимость имущества в конце k -го года S_k вычисляется по формуле:

$$S_k = S - k\,\frac{S - V}{n}\,,\ k = 1,\ \ldots,\ n\,. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. *Фирма приобрела за* 110 000 *руб. измерительный прибор, срок службы которого составляет* 10 *лет. Составим таблицу амортизационных отчислений при РА. Остаточная стоимость прибора через* 10 *лет будет равна* 10 000 *руб.*

Решение. Вычислим сумму, которая должна быть списана за 10 лет:

$$S - V = 110\,000 - 10\,000 = 100\,000 \text{ руб.}$$

Ежегодно стоимость снижается на 10%, следовательно, ежегодные амортизационные отчисления равны

$$100\,000 \times 0.1 = 10\,000 \text{ руб.}$$

Построим таблицу изменения балансовой стоимости прибора по годам, используя формулу (4.2):

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	110 000
1	10 000	100 000
2	10 000	90 000
3	10 000	80 000
4	10 000	70 000
5	10 000	60 000
6	10 000	50 000
7	10 000	40 000
8	10 000	30 000
9	10 000	20 000
10	10 000	10 000

В англоязычной литературе понятию *равномерная амортизация* соответствует понятие *Straight-Line Depreciation*. В самом этом названии отмечается, что график изменения балансовой стоимости амортизируемого объекта представляет из себя прямую линию.

Построим график изменения балансовой стоимости прибора по годам (рис. 8), используя приведенную выше таблицу. На оси абсцисс будем откладывать периоды эксплуатации (годы), а на оси ординат — значения

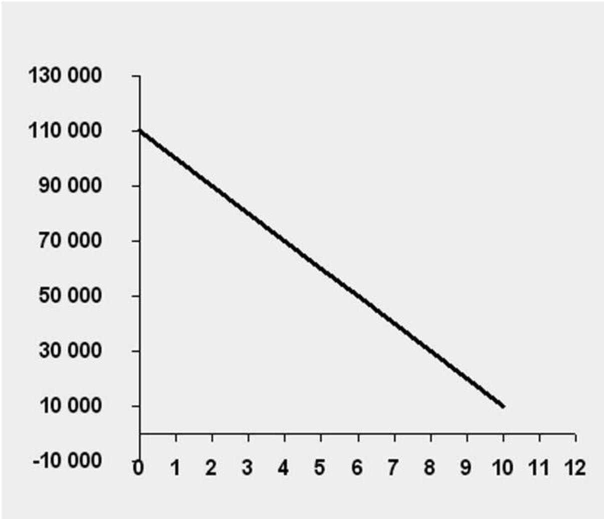


Рис. 8. График балансовой стоимости при РА

балансовой стоимости в конце соответствующего года. Из уравнения (4.2) видно, что график балансовой стоимости является прямой, которая пересекает ось ординат в точке $(0, S)$. Тангенс угла наклона прямой равен $-(S-V)/n$. ■

Обычно владелец имущества заинтересован в быстром уменьшении его балансовой стоимости и переносе ее на себестоимость продукции, так как при этом уменьшается база для исчисления налога и, следовательно, сумма налога. Надо заметить, что и реальный физический износ оборудования обычно идет быстрее в начале срока службы, чем в конце. Например, автовладельцы знают, что автомобиль изнашивается быстрее в первые годы эксплуатации, чем в последующие. Поэтому разработаны методы ускоренной амортизации. Рассмотрим эти методы.

4.3. Правило суммы лет

Правило суммы лет (ПСЛ)[6] для вычисления амортизационных отчислений состоит в следующем. Если срок амортизации равен n лет, то вычисляем по формуле суммы арифметической прогрессии величину K_n

[6]На английском языке — *Sum-of-the-Years'-Digits Depreciation.*

— сумму номеров лет:

$$K_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{4.3}$$

Амортизационных отчисления в i-м году вычисляется по формуле:

$$A_i = (S - V) \times \frac{n - (i-1)}{K_n}\,, \tag{4.4}$$

где, как и раньше, S — первоначальная стоимость имущества, V — его остаточная стоимость.

Амортизационные отчисления по ПСЛ образуют убывающую арифметическую прогрессию. Поэтому этот метод называется еще *методом убывающей арифметической прогрессии.* Вычислим разность этой арифметической прогрессии:

$$d = A_{i+1} - A_i = (S - V) \times \left(\frac{n - (i+1-1)}{K_n} - \frac{n - (i-1)}{K_n} \right) =$$
$$= \frac{S - V}{K_n} \times (-1) = -\frac{2\,(S - V)}{n(n+1)}\,.$$

Пример 4.2. *Фирма из примера 4.1 решила ускорить процесс амортизации, применив правило суммы лет. Составим таблицу амортизационных отчислений.*

Решение. Сначала вычислим сумму лет $K_{10} = \dfrac{1+10}{2} \times 10 = 55$.

Выпишем теперь номера лет периода амортизации в обратном порядке: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. По ПСЛ на конец первого года списывается 10/55 амортизируемой суммы (100 000 руб.), на конец второго года — 9/55 этой суммы и так далее. В конце десятого, последнего года амортизации, списывается 1/55 от амортизируемой суммы. Составим таблицу амортизационных отчислений и остаточных стоимостей по годам. Обращаем внимание читателя на то, что в этом и следующих примерах в этой главе мы будем округлять результаты вычислений в итоговых таблицах до целых рублей.

Год службы	Списываемая доля первоначальной стоимости	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	0	110 000
1	10/55	18 182	91 818
2	9/55	16 364	75 455
3	8/55	14 545	60 909
4	7/55	12 727	48 182
5	6/55	10 909	37 273
6	5/55	9 091	28 182
7	4/55	7 273	20 909
8	3/55	5 455	15 455
9	2/55	3 636	11 818
10	1/55	1 818	10 000

Построим график изменения балансовой стоимости прибора по годам (рис. 9) при амортизации по ПСЛ. Как и в предыдущем примере, на оси абсцисс будем откладывать периоды эксплуатации (годы), а на оси ординат — значения балансовой стоимости в конце соответствующего года.

Объясним, какая математическая функция соответствует графику, приведенному на рис. 9. Можно показать, что при амортизации по ПСЛ стоимость имущества в конце k -го года S_k вычисляется по формуле:

$$S_k = V + \frac{(n-k)(n-k+1)(S-V)}{n(n+1)}\,,\ k = 0,\ \ldots,\ n\,. \tag{4.5}$$

Из уравнения (4.5) следует, что график балансовой стоимости амортизируемого объекта является дугой левой ветви квадратичной параболы, которая соединяет точку с координатами $(0, S)$ с точкой с координатами (n, V). ∎

Сравним изменение балансовой стоимости прибора по годам при РА (пример 4.1) и при амортизации по ПСЛ (пример 4.2). Результаты сравнения удобно представить в виде таблицы:

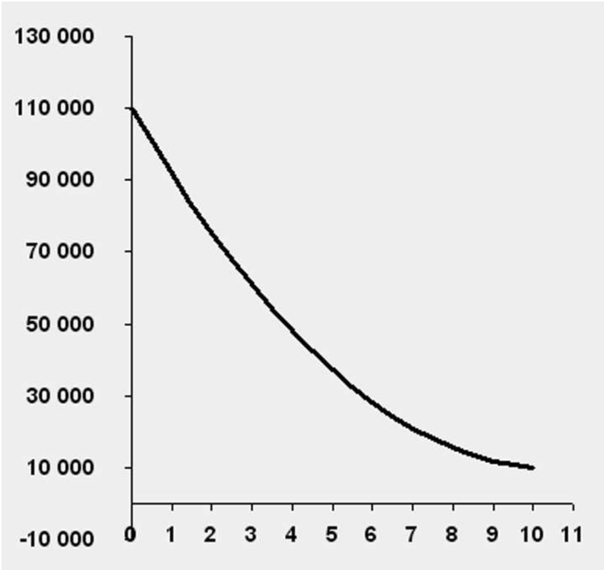


Рис. 9. График балансовой стоимости при амортизации по ПСЛ

Год службы	Стоимость на конец года (РА) (руб.)	Стоимость на конец года (ПСЛ) (руб.)	Разность (%)
0	110 000	110 000	0.00%
1	100 000	91 818	8.18%
2	90 500	75 455	16.16%
3	80 000	60 909	23.86%
4	70 000	48 182	31.17%
5	60 000	37 273	37.88%
6	50 000	28 182	43.64%
7	40 000	20 909	47.73%
8	30 000	15 455	48.48%
9	20 000	11 818	40.91%
10	10 000	10 000	0.00%

Сравнивая значения во втором и третьем столбцах последней таблицы, замечаем, что амортизация по ПСЛ действительно ускоренная: все года стоимость прибора на конец года при амортизации по ПСЛ меньше, чем при РА. Например, к концу четвертого года при РА стоимость прибора составляет 70 000 руб., а при амортизации по ПСЛ — 48 182 руб., что меньше на 31.17%.

4.4. Метод фиксированного процента

Метод постоянного или фиксированного процента (МФП)[7] состоит в том, что в конце каждого года стоимость, которую имущество имело в начале года, снижается на одно и то же число процентов от этой стоимости.

Выведем формулу для определения балансовой стоимости имущества на конец k-го года при амортизации по МФП. Обозначим через r фиксированную ставку процента (десятичная дробь), на которую снижается балансовая стоимость имущества каждый год. В конце первого года эта стоимость снизится на Sr и станет равна

$$S - Sr = S(1-r).$$

В конце второго года эта стоимость снизится на $S(1-r)r$ и станет равна

$$S(1-r) - S(1-r)\,r = S(1-r)^2.$$

Продолжая такое рассуждение, получим, что стоимость имущества в конце k-го года S_k вычисляется по формуле:

$$S_k = S(1-r)^k. \tag{4.6}$$

Из формулы (4.6) видно, что балансовая стоимость имущества не может стать равной 0, не зависимо от срока его службы.

Если срок службы имущества составляет n лет и его остаточная стоимость равна $V(>0)$, то можно определить число процентов r, на которое следует снижать стоимость каждый год, из уравнения:

$$S(1-r)^n = V.$$

Решая последнее уравнение относительно r, получаем формулу:

$$r = 1 - \sqrt[n]{\frac{V}{S}}\,. \tag{4.7}$$

[7]На английском языке — *Declining-Balance Depreciation.*

Заметим, что формула (4.6) является вариантом формулы для вычисления наращенной суммы при начислении сложных процентов, когда начисленные проценты не прибавляются к начальной сумме, а вычитаются из нее.

Метод фиксированного процента называют еще *методом геометрической прогрессии*, так как значения балансовой стоимости имущества по годам образуют убывающую геометрическую прогрессию с первым членом, равным S, и знаменателем, равным $(1 - r)$.

Отметим, что метод фиксированного процента имеет две вычислительные особенности. Во-первых, фиксированный процент r трудно вычислить, не имея под рукой хотя бы калькулятор со встроенной функцией возведения числа в произвольную степень[8]. Во-вторых, балансовая стоимость имущества не может быть снижена до нуля, так как все члены последовательности $S_k(1 - r)^k$ при $0 < r < 1$ положительны. Этих особенностей нет у *метода двойного процента*, который будет изложен в следующем пункте.

Пример 4.3. *Составим таблицу амортизации стоимости прибора из примера 4.1 при применении метода фиксированного процента.*

Решение. По формуле (4.7) вычислим фиксированный процент амортизации:

$$r = 1 - \sqrt[10]{\frac{10\,000}{110\,000}} = 1 - 0.7868 = 0.2132 = 21.32\%$$

Теперь составим таблицу амортизационных отчислений и балансовых стоимостей прибора по годам. Используя эту таблицу, построим график изменения балансовой стоимости прибора по годам при амортизации по МФП (рис. 10). Как и в предыдущем примере, на оси абсцисс будем откладывать периоды эксплуатации (годы), а на оси ординат — значения балансовой стоимости в конце соответствующего года.

[8]Напомним читателю, что $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	110 000
1	110 000 × 0.2132 = 23 453	86 547
2	86 547 × 0.2132 = 18 452	68 095
3	68 095 × 0.2132 = 14 518	53 577
4	53 577 × 0.2132 = 11 423	42 154
5	42 154 × 0.2132 = 8 987	33 166
6	33 166 × 0.2132 = 7 071	26 095
7	26 095 × 0.2132 = 5 564	20 531
8	20 531 × 0.2132 = 4 377	16 154
9	16 154 × 0.2132 = 3 444	12 710
10	12 710 × 0.2132 = 2 710	10 000

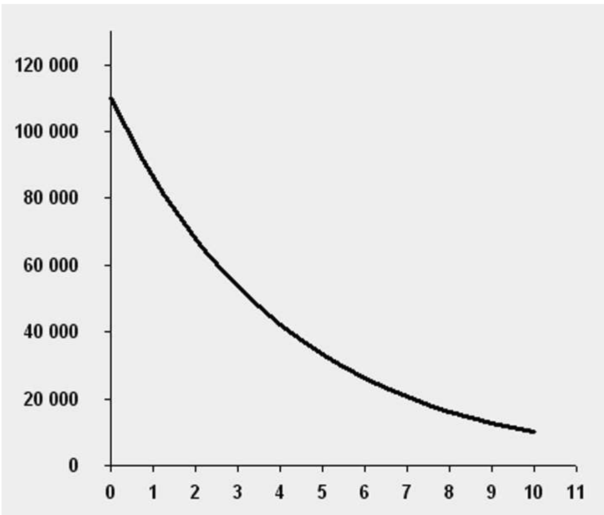


Рис. 10. График балансовой стоимости при амортизации по МФП

Объясним, какая математическая функция соответствует графику, приведенному на рис. 10. Из уравнения (4.6) следует, что график балансовой стоимости амортизируемого объекта является дугой графика показательной функции, которая соединяет точку с координатами $(0, S)$ на оси ординат с точкой с координатами (n, V). ■

Сравним изменение балансовой стоимости прибора по годам при амортизации по МФП (пример 4.3) и при амортизации по ПСЛ (пример 4.2). Результаты сравнения удобно представить в виде таблицы:

Год службы	Стоимость на конец года (МФП) (руб.)	Стоимость на конец года (ПСЛ) (руб.)	Разность (%)
0	110 000	110 000	0.00%
1	86 547	91 818	5.74%
2	68 095	75 455	9.75%
3	53 577	60 909	12.04%
4	42 154	48 182	12.51%
5	33 166	37 273	11.02%
6	26 095	28 182	7.40%
7	20 531	20 909	1.81%
8	16 154	14 555	−4.53%
9	12 710	11 818	−7.54%
10	10 000	10 000	0.00%

Сравнивая значения во втором и третьем столбцах последней таблицы, замечаем, что амортизация по МФП происходит быстрее: за исключением 8-го и 9-го годов, стоимость прибора на конец года при амортизации по МФП меньше, чем при ПСЛ. Например, к концу четвертого года при амортизации по ПСЛ стоимость прибора равна 48 182 руб., а при амортизации по МФП — 42 154 руб., что меньше на 12.51%.

4.5. Метод двойного процента

Метод двойного процента (МДП)[9] состоит в том, что фиксированный процент снижения стоимости имущества r принимается равным удвоенному проценту снижения амортизируемой стоимости при равномерной амортизации, то есть $r = 2/n$. Если при МДП стоимость имущества в последнем году оказывается больше остаточной, то амортизационные отчисления увеличивают либо только в последнем году на получившуюся разность, либо пропорционально каждый год.

[9]На английском языке — *Double-Declining-Balance Depreciation.*

Пример 4.4. *Составим таблицу амортизации стоимости прибора из примера 4.1 при МДП.*

Решение. При равномерной амортизации стоимость прибора снижалась ежегодно на $r = 1/10 = 10\%$. Следовательно, при МДП будем снижать стоимость прибора на 20% в год. Оформим результаты вычислений в виде таблицы:

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	110 000
1	$110\,000 \times 0.2 = 22\,000$	88 000
2	$88\,000 \times 0.2 = 17\,600$	70 400
3	$70\,400 \times 0.2 = 14\,080$	56 320
4	$56\,320 \times 0.2 = 11\,264$	45 056
5	$45\,056 \times 0.2 = 9\,011$	36 045
6	$36\,045 \times 0.2 = 7\,209$	28 836
7	$28\,836 \times 0.2 = 5\,767$	23 069
8	$23\,069 \times 0.2 = 4\,614$	18 455
9	$18\,455 \times 0.2 = 3\,691$	14 764
10	$14\,764 \times 0.2 = 2\,953$	11 811

Заметим, что остаточная стоимость прибора на конец десятого года, равна 11 811 руб., что больше, чем данная в условиях задачи. Чтобы остаточная стоимость на конец десятого года стала равна 10 000 руб., следует увеличить амортизационные отчисления в последнем году с суммы 2 953 руб. до суммы:

$$2\,953 + (11\,811 - 10\,000) = 4\,764 \text{ руб.}$$

Построим график изменения балансовой стоимости прибора по годам при амортизации по МДП (рис. 11). Как и при амортизации по МФП, этот график является дугой графика показательной функции, которая соединяет точку на оси ординат с координатами $(0, S)$ с точкой с координатами (n, V). ■

Сравнивая последнюю таблицу с двумя предыдущими (построенными при решении примеров 4.2 и 4.3), замечаем, что при амортизации по МДП

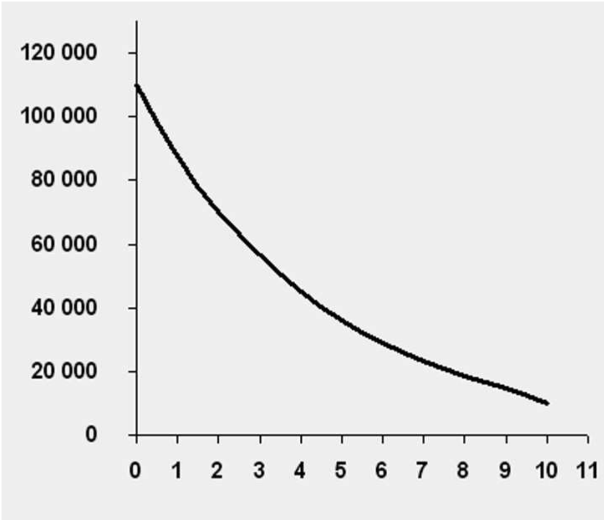


Рис. 11. График балансовой стоимости при амортизации по МДП

стоимость прибора за первые четыре года снизилась до балансовой стоимости немного меньшей, чем при амортизации по ПСЛ, но большей, чем при амортизации по МФП. В последующие годы снижение балансовой стоимости прибора замедляется.

4.6. Влияние амортизации на налогообложение

При определении налогооблагаемого дохода фирмы годовые амортизационные отчисления *вычитаются* из валовой прибыли, и, следовательно, величина налога на доходы компании за счет этого уменьшается. Покажем, что размеры величины уменьшения суммы налога зависят от способа начисления амортизации.

Пример 4.5. *Фирма приобрела и использует для контроля качества продукции пять одинаковых измерительных приборов. Цена одного прибора равна* 110 000 *руб., срок службы —* 10 *лет. Остаточная стоимость прибора через* 10 *лет будет равна* 10 000 *руб. Фирма имеет ежегодную валовую прибыль (выручка от реализации продукции после вычета всех затрат и процентов за использование капитала), равную* 600 000 *руб. Ставка налога на прибыль равна* 24%. *Покажем, как влияет на величину этого налога равномерная амортизация.*

Решение. Отметим, что при любом методе амортизации амортизационные отчисления для нескольких единиц одинакового оборудования равны амортизационным отчислениям для одной единицы этого оборудования, умноженным на число единиц оборудования.

При РА амортизационные отчисления для одного прибора составляют 10 000 руб. (пример 4.1). Так как фирма приобрела пять таких приборов, то амортизационные отчисления для них составят 50 000 руб. Используем эту информацию при составлении следующей таблицы:

Год службы	Валовая прибыль (руб.)	Амортизационные отчисления (РА) (руб.)	Налогооблагаемый доход (руб.)	Ставка налога (%)	Величина налога (руб.)
1	600 000	50 000	550 000	24	132 000
2	600 000	50 000	550 000	24	132 000
3	600 000	50 000	550 000	24	132 000
4	600 000	50 000	550 000	24	132 000
5	600 000	50 000	550 000	24	132 000
6	600 000	50 000	550 000	24	132 000
7	600 000	50 000	550 000	24	132 000
8	600 000	50 000	550 000	24	132 000
9	600 000	50 000	550 000	24	132 000
10	600 000	50 000	550 000	24	132 000

Итого: 1 320 000 руб. ■

Пример 4.6. *Найдем величину налога по годам фирмы из примера 4.5, если амортизационные отчисления рассчитываются по ПСЛ.*

Решение. Ранее (пример 4.2) были вычислены амортизационные отчисления для одного измерительного прибора при амортизации по ПСЛ. Используем эту информацию при составлении следующей таблицы:

Год службы	Валовая прибыль (руб.)	Амортизационные отчисления (ПСЛ) (руб.)	Налогооблагаемый доход (руб.)	Ставка налога (%)	Величина налога (руб.)
1	600 000	90 909	509 091	24	122 182
2	600 000	81 818	518 182	24	124 364
3	600 000	72 727	527 273	24	126 545
4	600 000	63 636	536 364	24	128 727
5	600 000	54 545	545 455	24	130 909
6	600 000	45 455	554 545	24	133 091
7	600 000	36 364	563 636	24	135 273
8	600 000	27 273	572 727	24	137 455
9	600 000	18 182	581 364	24	139 636
10	600 000	9 091	590 909	24	143 818

Итого: 1 320 000 руб. ■

Общая сумма налогов при амортизации по ПСЛ, выплаченных за 10 лет, совпадает с суммой налогов при РА (см. пример 4.5).

Однако ситуация изменится, если мы учтем фактор времени. Примем безрисковую годовую ставку процента равной 10% и вычислим приведенную ценность выплаченных налогов при РА:

$$50\,000\times\left(\frac{1}{1+0.1}+\frac{1}{(1+0.1)^2}+\frac{1}{(1+0.1)^3}+\right.$$
$$+\frac{1}{(1+0.1)^4}+\frac{1}{(1+0.1)^5}+\frac{1}{(1+0.1)^6}+\frac{1}{(1+0.1)^7}+$$
$$\left.+\frac{1}{(1+0.1)^8}+\frac{1}{(1+0.1)^9}+\frac{1}{(1+0.1)^{10}}\right) = 811\,083 \text{ руб.},$$

и при амортизации по ПСЛ:

$$\frac{90\,909}{1+0.1}+\frac{81\,818}{(1+0.1)^2}+\frac{72\,727}{(1+0.1)^3}+\frac{63\,636}{(1+0.1)^4}+$$
$$+\frac{54\,545}{(1+0.1)^5}+\frac{45\,455}{(1+0.1)^6}+\frac{36\,364}{(1+0.1)^7}+\frac{27\,273}{(1+0.1)^8}+$$
$$+\frac{18\,182}{(1+0.1)^9}+\frac{9\,091}{(1+0.1)^{10}} = 800\,699 \text{ руб.}$$

Таким образом, выгода от применения амортизации по правилу суммы лет *с учетом фактора времени* составляет сумму:

$$811\,083 - 800\,699 = 10\,384 \text{ руб.}$$

В процентном выражении выгода составляет

$$\frac{10\,384}{811\,083} \times 100\% = 1.19\%.$$

Как и ожидалось, при ускоренной амортизации по ПСЛ приведенная ценность выплаченных налогов оказалась меньше (на 1.19%). Наш пример носит условный характер, и мы вычислили влияние на величину налога на прибыль амортизации только части амортизируемого оборудования. В реальных условиях процент выгоды от применения амортизации по ПСЛ может оказаться существенно выше.

Аналогичным образом можно вычислить приведенную ценность выплаченных налогов при амортизации МФП и МДП. Оставляем это в качестве упражнения для читателя.

Для сравнения запишем результаты, полученные при решении примеров 4.5, 4.6, и предложенного выше упражнения в одну таблицу:

Способ начисления амортизации	Сумма налога за 10 лет (руб.)	Приведенная ценность в момент 0 (руб.)
РА	1 320 000	811 083
ПСЛ	1 320 000	800 699
МФП	1 320 032	798 147
МДП	1 320 000	799 623

Из таблицы видно, что все методы ускоренной амортизации дают величины приведенной ценности суммы налогов в момент 0 меньшие, чем при равномерной амортизации. Заметим, что в нашем примере МФП дал несколько лучший результат, чем два других. Следовательно, в интересах фирмы лучше использовать ускоренные методы амортизации. В каждом конкретном случае следует вычислить, какой из методов ускоренной амортизации принесет фирме большую экономию в выплате налогов.

4.7. Используем Excel

При решении примеров из этой главы в Excel необходимо много раз вводить в активные ячейки имена функций и адреса или значения аргументов этих функций. В ходе такой работы возможны ошибки двух видов: ошибки при наборе имени функции и ошибки в порядке следования аргументов. Процесс обнаружения таких ошибок (особенно второго вида) весьма трудоемкий. Чтобы по возможности избежать подобных ошибок, в Excel имеется специальная команда Функция в меню Вставка. Настоятельно советуем использовать эту команду при обращении к встроенным финансовым функциям. Учитывая важность и полезность команды Функция, мы посвятили ей отдельный подраздел в приложении А.

В Excel имеется пять встроенных функций, которые позволяют вычислять амортизационные отчисления всеми разобранными ранее способами. Приведем список основных аргументов, используемых в этих функциях:

Аргумент	**Назначение**
нач_стоим (cost)	начальная стоимость актива
ост_стоим (salvage)	остаточная стоимость актива
срок (life)	срок службы актива
период (period)	номер года службы

Ниже в тексте приведена таблица, в которой указаны имена функций в русифицированной и англоязычной версиях, их аргументы и названия методов амортизации, реализуемых соответствующими функциями. Если некоторый аргумент является необязательным (может быть опущен), то он указывается в таблице в квадратных скобках. Следует обратить внимание на тот факт, что в русифицированной версии Excel в качестве разделителя в списке аргументов функции используется символ <;>.

Сделаем некоторые пояснения к приведенной далее таблице встроенных функций, касающиеся использования необязательных параметров.

Если *актив* был принят на баланс в середине года, то в методе фиксированного процента (функция ФУО) амортизационное отчисление может быть определено более точно, если указать количество месяцев эксплуатации в первом году (параметр месяцы). По умолчанию этот параметр полагается равным 12.

Функция ДДОБ имеет необязательный параметр коэф, значение которого по умолчанию равно 2. При этом значении получается стандартный метод двойного процента. Если задать этот параметр равным, например, 3, то получится метод *тройного* процента.

Функция ПУО реализует тот же алгоритм, что и функция ДДОБ, но позволяет рассчитать амортизационные отчисления за период, границы которого заданы. Границы периода и срок эксплуатации должны быть заданы в одних и тех же единицах (днях, месяцах или годах).

Обращаем внимание читателя на то, что *во многих встроенных функциях* Excel *отсутствует проверка корректности значений аргументов этих функций.* Например, можно при равномерной амортизации задать остаточную стоимость больше начальной. В этом случае значением функции АПЛ будет отрицательное число, вычисленное по обычной формуле. Можно даже указать отрицательное число в качестве времени эксплуатации. И в этом случае значением функции будет отрицательное число, вычисленное по той же формуле. Предлагаем читателю самому убедиться в этом и быть предельно внимательным при использовании любых встроенных функций.

Функция	**Аргументы**	**Способ амортизации**
АПЛ SLN	(нач_стоим;ост_стоим;срок)	равномерная
АСЧ SYD	(нач_стоим;ост_стоим;срок; период)	правило суммы лет
ФУО DB	(нач_стоим;ост_стоим;срок; период[;месяц])	метод фиксированного процента
ДДОБ DBB	(нач_стоим;ост_стоим;срок; период[;коэф])	метод двойного процента
ПУО VDB	(нач_стоим;ост_стоим;срок; нач_период; кон_период[;коэф])	метод двойного процента

Опишем теперь, как выполнить решение примера 4.1 из этой главы с помощью Excel. Требуется составить таблицу амортизационных отчислений и стоимости оборудования в конце каждого периода при РА. В Excel амортизационные отчисления при РА вычисляются функцией АПЛ. Фрагмент рабочего листа с решением приведен на рис. 12.

Результирующую таблицу можно получить, последовательно заполнив *все* ее ячейки. Однако процесс получения этой таблицы будет более

	A	B	C
1	**Глава: Амортизация**		
2			
3	**Пример 4.1 (равномерная амортизация)**		
4	*Данные:*		
5	Начальная стоимость	110 000р.	
6	Остаточная стоимость	10 000р.	
7	Срок службы	10	
8	*Вопрос:*		
9	Амортизационные отчисления при равномерной амортизации ?		
10	*Решение:*		
11	Формула = АПЛ(B5;B6;B7) в интервале B15:B24		
12			
13	Год службы	Амортизационные отчисления	Стоимость на конец года
14	0	0р.	110 000р.
15	1	10 000р.	100 000р.
16	2	10 000р.	90 000р.
17	3	10 000р.	80 000р.
18	4	10 000р.	70 000р.
19	5	10 000р.	60 000р.
20	6	10 000р.	50 000р.
21	7	10 000р.	40 000р.
22	8	10 000р.	30 000р.
23	9	10 000р.	20 000р.
24	10	10 000р.	10 000р.
25			

Рис. 12. Пример на равномерную амортизацию

быстрым, если применить специальное программное средство, которое называется автоматическое заполнение (AutoFill).

Это средство предназначено для автоматического заполнения интервалов ячеек, значения в которых связаны какой-нибудь простой функциональной зависимостью. Например, в итоговой таблице интервал A14:A24 должен быть заполнен целыми числами от 0 до 10. Это заполнение можно выполнить двумя способами.

Первый способ больше подходит тем, кто предпочитает работать с мышью. Введем два значения-образца 0 и 1 в ячейки A14 и A15. Отметим эти два значения указателем заполнителя, для чего выделим диапазон A14:A15 и поместим указатель мыши в правый нижний угол этого диапазона. Указатель заполнителя имеет вид тонкого черного крестика. Растянем область заполнения вниз до ячейки A24, нажав *левую* клавишу мыши. Когда мы отпустим клавишу мыши, Excel заполнит столбец по образцу заполнения двух первых ячеек.

Для тех, кто предпочитает работать с меню, подменю и командами, приведем другое решение этой задачи:

1. Ячейка A14: 0.
2. Выделяем интервал A14:A24.
3. Выбираем меню Правка.
4. Выбираем команду Заполнить.
5. Выбираем команду Прогрессия.
6. В диалоговом окне Прогрессия устанавливаем флажки: ⊙ по столбцам; ⊙ арифметическая; шаг: 1.
7. Нажимаем кнопку OK.

Этот способ является более универсальным, так как позволяет заполнять интервалы ячеек, значения в которых связаны различными функциональными зависимостями. Например, его можно применить при заполнении интервалов B15:B24 и C15:C24. Для интервала B15:B24 надо выполнить следующие действия:

1. Ячейка B14: 0.
2. Ячейка B15: =АПЛ(B5;B6;B7;).
3. Выделяем интервал B15:B24.
4. Выбираем меню Правка.
5. Выбираем команду Заполнить.
6. Выбираем команду Вниз.

Обратите внимание на то, что в формуле, которая записана в ячейке B15, используются *абсолютные* адреса ячеек-аргументов (знак <$> перед именем строки и столбца). Это связано с тем, что далее мы будем копировать саму эту формулу, а не схему размещения ячеек-аргументов относительно вычисляемой ячейки. При заполнении интервала C15:C24 требуется скопировать схему вычисления, поэтому используются относительные адреса:

1. Ячейка C14: B5.
2. Ячейка C15: =C14-B15.
3. Выделяем интервал C15:C24.
4. Выбираем меню Правка.
4. Выбираем команду Заполнить.
6. Выбираем команду Вниз.

Решение остальных примеров этой главы не потребует никаких дополнительных приемов. По сравнению с решением примера 4.1 в этих решениях меняются только названия функции, вычисляющей величину амортизационных отчислений. Поэтому советуем сначала скопировать рабочий лист, на котором записано решение примера 4.1, на новый рабочий лист. Копирование рабочего листа выполняет команда Переместить/скопировать лист из меню Правка. В диалоговом окне этой команды следует установить флажок Создать копию и выделить название листа, перед которым надо поместить копию.

Существует более быстрый способ создания копии рабочего листа с помощью мышки: перетащить в нужное место ярлычок копируемого листа, удерживая нажатой клавишу Ctrl. Копия будет вставлена перед листом, над ярлычком которого стоит черный треугольник.

После создания копии сделайте необходимые изменения в заголовках (ячейки A3, A9) и тексте комментария (ячейка A11) и исправьте имя функции в формулах (ячейки B15:B24).

4.8. Амортизация в РФ

В этом пункте мы не ставим перед собой цель — подробно разобрать способы расчета амортизационных отчислений для бухгалтерской и налоговой отчетности, полностью соответствующие российскому законодательству. За этим мы отсылаем читателя к специальной литературе (например, [7, 9]), а также налоговому кодексу РФ (НК РФ) и положениям по бухгалтерскому учету основных средств (ПБУ). Наша цель — показать, что при выполнении некоторых вычислений невозможно обойтись только встроенными функциями Excel. Мы покажем, как организовать вычисления в таких случаях. Когда же подобные вычисления должны проводиться неоднократно, мы рекомендуем читателям самим создавать нужные функции, используя для этого встроенный в Excel язык программирования VBA. Сделать это совсем несложно — обычно требуется написать только несколько строк.

В настоящее время ПБУ разрешают рассчитывать амортизацию следующими способами: линейным (равномерным), уменьшаемого остатка (вариант метода фиксированного процента), по сумме чисел лет срока полезного использования (правило суммы лет), списанием стоимости пропорционально объему продукции (услуг)[10] (ССПП).

Из перечисленных методов только метод ССПП ранее не описан в этой главе. Метод ССПП, как следует из его названия, относится к линейным методам. Метод применяется для активов, создающих однородную продукцию и износ которых пропорционален объему выпуска за отчетный период. Он подходит, например, для амортизации транспортных средств (износ обычно считают пропорциональным общему пробегу) и множительной техники.

Подчеркнем, что *перечисленные выше способы разрешены для бухгалтерского учета, а не для налогооблажения.* Что касается налогооблажения, то можно с уверенностью сказать только, что НК РФ всегда разрешает использовать равномерную амортизацию. Применение других способов зависит от многих частных деталей и должно согласовываться с налоговыми органами.

Перечислим основные положения НК РФ и ПБУ, которые должны быть учтены при вычислении амортизационных отчислений любым из разрешенных способов:

1. Основные средства принимаются к учету по первоначальной стоимости, которая равна сумме фактических затрат на приобретение, за вычетом сумм налогов.
2. Начисление амортизационных отчислений начинается с 1-го числа месяца, следующего за месяцем принятия оборудования на учет.
3. Ежемесячные амортизационные отчисления равны 1/12 годовой суммы амортизации, независимо от того, какой способ амортизации применяется.

Рассмотрим два примера на вычисление амортизационных отчислений по методам ССПП и уменьшаемого остатка. Выбор для примеров именно этих методов связан с тем, что для них не предусмотрены реализующие их встроенные функции в Excel.

[10] На английском языке — Units of Production Method.

Пример 4.7. *В декабре 2004 г. фирма приобрела и ввела в эксплуатацию технологическое оборудование, срок службы которого равен 8 годам. Стоимость оборудования составила 72 000 руб., в том числе НДС — 12 000 руб. Остаточная стоимость оборудования через 8 лет равна 0 руб. Предполагается, что за 8 лет на купленном оборудовании будет произведено 100 000 штук некоторого продукта. Определим амортизационные отчисления, которые будут начислены за период по методу ССПП (списания стоимости пропорционально объему продукции), если за отчетный период было произведено 15 000 штук выпускаемого продукта.*

	A	B	C	D	E
1	**Глава: Амортизация**				
2					
3	**Пример 4.7 (ССПП)**				
4	*Данные:*				
5	Начальная стоимость объекта	60 000р.			
6	Остаточная стоимость объекта	0р.			
7	Общий объем производства (штук)	100000			
8	Объем производства за период	15000			
9	*Вопрос:*				
10	Сумма амортизационных отчислений за период?				
11	*Решение:*				
12	Аморт. отчисления =	**9 000р.**	=(B6-B7)*B9/B8		
13					
14					

Рис. 13. Пример на амортизацию методом ССПП

Решение. Так как основные средства принимаются к учету по первоначальной стоимости за вычетом сумм налогов, то амортизируемая стоимость оборудования составит

$$S = 72\,000 - 12\,000 = 60\,000 \text{ руб.}$$

Начисление амортизационных отчислений начинается с 1 января 2005 г. — 1-го числа месяца, следующего за месяцем принятия оборудования на учет. Амортизационные отчисления по методу ССПП вычисляются по формуле:

$$A = (S - V)\times\frac{n}{N}\,, \tag{4.8}$$

где K — общий объем продукции, которая будет произведена на этом оборудовании, k — объем продукции, произведенной за рассматриваемый период.

Используем формулу (4.8) при $S = 60\,000$ руб., $V = 0$ руб., $K = 100\,000$, $k = 15\,000$:

$$A = 60\,000 \times \frac{15\,000}{100\,000} = 9\,000 \text{ руб.}$$

Метод амортизации ССПП легко реализуется средствами Excel. Фрагмент рабочего листа с решением примера 4.7 приведен на рис. 13.

Среди встроенных функций MS Excel нет функции для метода ССПП. Поэтому другой подход к организации вычислений по этому методу заключается в создании такой функции и предполагает программирование на VBA (см. Приложение Б). ■

Пример 4.8. *В условиях примера 4.7 составить таблицу амортизационных отчислений методом уменьшаемого остатка (МУО) в соответствии с НК РФ. Это означает, что амортизационные отчисления определяются по МФП с коэффициентом 2 до достижения остаточной стоимости, равной 20% от первоначальной стоимости, а после этого (оставшийся срок до истечения срока службы оборудования) используется РА.*

Решение. Метод уменьшаемого остатка с коэффициентом, равным 2, является методом двойного процента (п. 4.5). Если срок службы оборудования равен 8 годам, то при равномерной амортизации стоимость оборудования снижалась бы ежегодно на $1/8 = 12.5\%$ амортизируемой стоимости оборудования. Удвоим эту норму процента и будем снижать стоимость оборудования МФП, приняв процент снижения $r = 25\%$, до достижения остаточной стоимости, равной 20% от первоначальной стоимости. Далее следует использовать РА. Запишем результаты вычислений в следующую таблицу (результаты вычислений округляются до целых рублей):

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0		60 000
1	$60\,000 \times 0.25 = 15\,000$	45 000
2	$45\,000 \times 0.25 = 11\,250$	33 750
3	$33\,750 \times 0.25 = 8\,437$	25 312
4	$25\,312 \times 0.25 = 6\,328$	18 984
5	$18\,984 \times 0.25 = 4\,746$	14 238
6	$14\,238 \times 0.25 = 3\,560$	10 679

В приведенной выше таблице для первых шести лет эксплуатации вычислены амортизационные отчисления и остаточная стоимость оборудования на конец года. Из таблицы видно, что в конце 6-го года остаточная стоимость (10 679) станет меньше 20% начальной стоимости ($60\,000 \times 0.2 = 12\,000$), поэтому, согласно НК, часть шестого года, седьмой и восьмой годы должна выполняться равномерная амортизация.

Определим сначала, какую часть шестого года можно применять МДП. Распишем амортизацию по месяцам. Как было отмечено выше, ежемесячные амортизационные отчисления равны 1/12 годовой суммы амортизации, независимо от того, какой способ амортизации применяется. Следовательно, величина амортизационных отчислений в месяц (шестой год) равна

$$\frac{3\,560}{12} = 296.63 \text{ руб.}$$

Из приведенной ниже таблицы видно, что после семи месяцев с такими амортизационными отчислениями остаточная стоимость станет равна примерно 20% начальной стоимости.

Месяц службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец месяца (руб.)
0		14 238
1	297	13 942
2	297	13 645
3	297	13 348
4	297	13 052
5	297	12 755
6	297	12 458
7	297	12 162

Далее следует перейти к равномерной амортизации. Срок равномерной амортизации равен 29 ($= 5 + 12 * 2$) месяцам, амортизируемая сумма — 12 162 руб. Следовательно, амортизационные отчисления в месяц составляют

$$\frac{12\,162}{29} = 419.37 \text{ руб.}$$

Таким образом, амортизационные отчисления за весь шестой год составляют

$$296.63 \times 7 + 419.37 \times 5 = 4\,173 \text{ руб.}$$

Заметим, что в рассматриваемом примере амортизационные отчисления в шестом году возросли от перехода с восьмого месяца к РА. Однако так бывает далеко не всегда. Предлагаем читателю проверить, что если срок эксплуатации оборудования составляет не 8, а 10 лет (остальные данные примера не изменились), то амортизационные отчисления в шестом году уменьшатся от перехода с восьмого месяца к РА и составят 3 224 руб.

Амортизационные отчисления в седьмом и восьмом году равны, так как происходит РА, и составляют

$$419 \times 12 = 5\,032 \text{ руб.}$$

Объединим результаты выполненных вычислений в единую таблицу:

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0		60 000
1	15 000	45 000
2	11 250	33 750
3	8 437	25 312
4	6 328	18 984
5	4 746	14 238
6	4 173	10 065
7	5 032	5 032
8	5 032	0

■

Прокомментируем теперь выполнение решения примера 4.8 в Excel (рис. 14). Отметим, что решение оформлено таким образом, чтобы его можно было использовать как сценарий и выполнять вычисления при различных значениях данных. Чтобы упростить формулы, которые используются при формировании таблиц, в ячейке B12 вычислено значение процента амортизации на первом этапе, а в ячейке B13 — значение остаточной стоимости, при которой следует переходить к РА.

В строку таблицы, соответствующую периоду 0, в ячейку C16 вводим формулу =B5. В строку, соответствующую периоду 1, заносим следующие формулы:

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Глава: Амортизация**						
2							
3	**Пример 4.8 (МУО)**						
4	*Данные:*						
5	Начальная стоимость	60 000р.					
6	Срок службы	8					
7	Коэффициент	2					
8	Процент	20%					
9	*Вопрос:*						
10	Амортизационные отчисления по МУО?						
11	*Решение:*						
12	k =	0.25	=1/B6*B7				
13	V =	12 000р.	=B5*B8				
14					6-ой год:	отчис. в месяц =	296.63р.
15	Год службы	Амортизационные отчисления	Стоимость на конец года		месяц	Стоимость на конец месяца	Амортизационные отчисления
16	0	0р.	60 000р.		0	14 238р.	0р.
17	1	15 000р.	45 000р.		1	13 942р.	297р.
18	2	11 250р.	33 750р.		2	13 645р.	593р.
19	3	8 438р.	25 313р.		3	13 348р.	890р.
20	4	6 328р.	18 984р.		4	13 052р.	1 187р.
21	5	4 746р.	14 238р.		5	12 755р.	1 483р.
22	**6**	**3 560р.**	**10 679р.**		6	12 458р.	1 780р.
23	6	4 173р.	10 065р.		**7**	**12 162р.**	2 076р.
24	7	5 032р.	5 032р.		8	11 865р.	
25	8	5 032р.	0р.				
26							
27	Срок РА (месяцы) =		29				
28	Амортизационные отчисления (месяц) =		419.37р.	=F23/C27			

Рис. 14. Пример на амортизацию по МУО

B17: =C16*B12 C17: =C16-B17

Обратите внимание на два знака $ в первой формуле. Они указывают на то, что адрес ячейки B12 является абсолютным и, следовательно, не будет меняться при копировании формулы. Напоминаем, что самый простой способ вставить два знака $ в адрес ячейки — нажать клавишу F4, установив курсор в позиции после обычного (относительного) адреса.

Момент перехода от МФП к РА определяется визуально, т. е. когда в столбце C впервые появляется величина, меньше или равная 20% исходной стоимости оборудования (число в ячейке B13). Так как балансовая стоимость в конце 6-го года меньше, чем 20% исходной стоимости оборудования (ячейка C22), то определяем, в каком месяце шестого года следует перейти к РА — таблица E15:G25. Из этой таблицы определяем, что переход к РА должен произойти с восьмого месяца шестого года. Далее вычисляем длину периода применения РА (29 месяцев) и величину амортизационных отчислений в месяц в этот период — 419 руб.

Итоговая таблица A15:C25 содержит информацию об амортизационных отчислениях для всего периода эксплуатации оборудования. Для наглядности в ней оставлено две строки, соответсвующие шестому году эксплуатации: строка 22 была получена до определения месяца перехода к РА, строка 23 — после дополнительных вычислений (таблица E15:G24).

Минусом описанного выше решения примера 4.8 в Excel является то, что момент перехода от МФП к РА определяется визуально. Это означает, что мы не сможем использовать это решение при других данных, если переход от МФП к РА будет происходить в другом периоде или месяце. Вообще говоря, имеющихся в Excel средств достаточно, чтобы обойти эту трудность. Для этого потребуются условные формулы, которые в данном случае будут настолько громоздкими и ненаглядными, что мы не будет приводить реализацию такого решения. Гораздо полезнее и проще написать на языке VBA функцию, которая будет вычислять амортизационные отчисления по МУО. В Приложении Б приведен текст этой функции, снабженный подробными комментариями.

Упражнения

Указания. В тексте упражнений используются те же сокращения для названий методов амортизации, что и в основном тексте главы: РА — равномерная, ПСЛ — по правилу суммы лет, МФП — методом фиксированного процента, МДП — методом двойного процента.

Если сумма остаточной стоимости не указана, то она равна 0.

1. Фирма приобрела машину для доставки товара за 450 000 руб., срок службы которой 5 лет. Составьте таблицу амортизационных отчислений и балансовой стоимости машины по годам, если применяется РА.

2. Решите упражнение 1 при условии, что остаточная стоимость машины 60 000 руб.

3. Для фирмы из упражнения 1 составьте таблицу амортизационных отчислений и балансовой стоимости машины по годам, если амортизация производится по ПСЛ.

4. Решите упражнение 3 при условии, что остаточная стоимость машины 60 000 руб.

5. Для фирмы из упражнения 1 составьте таблицу амортизационных отчислений и балансовой стоимости машины по годам, если амортизация производится МФП. Остаточная стоимость машины 60 000 руб.

6. Для фирмы из упражнения 1 составьте таблицу амортизационных отчислений и балансовой стоимости машины по годам, если амортизация производится МДП. Остаточная стоимость машины 60 000 руб.

Указания. В упражнениях 7–20 предполагается следующая (условная) прогрессивная шкала ставки налогообложения дохода фирмы:

Величина дохода (руб.)	Ставка налога (%)
До 200 000	15
Более 200 000	30

При этих условиях бухгалтерские суммы налогов, выплаченных за весь срок использования оборудования, могут не совпадать при различных способах амортизации.

Приведенные ценности вычисляются в момент 0. Ставка дисконтирования равна 10%.

7. Фирма из упражнения 1 в течение пяти лет имела ежегодную валовую прибыль (после вычета всех затрат и процентов за пользование капиталом) 350 000 руб. Составьте таблицу сумм налога, выплачиваемого этой фирмой по годам, если применяется РА.

8. Решите упражнение 7, если амортизационные отчисления рассчитываются по ПСЛ.

9. Вычислите по годам, на сколько процентов балансовая стоимость машины (упражнение 1) при амортизации по ПСЛ меньше, чем при РА.

10. Вычислите приведенную ценность величины налога, выплаченного фирмой из упражнений 1 и 7 за пять лет при РА.

11. Вычислите приведенную ценность величины налога, выплаченного фирмой из упражнений 1 и 7 за пять лет при амортизации по ПСЛ.

12. На сколько процентов приведенная ценность налогов, выплаченных фирмой из упражнений 1 и 7 за пять лет при амортизации по ПСЛ, меньше, чем та же величина, вычисленная при РА?

13. Для фирмы из упражнений 1 и 7 составьте таблицу сумм выплачиваемых налогов по годам при амортизации по МФП. Остаточная стоимость машины 60 000 руб.

14. Вычислите по годам, на сколько процентов балансовая стоимость машины (упражнение 1) при амортизации по МФП меньше, чем при РА. Остаточная стоимость машины 60 000 руб.

15. На сколько процентов сумма налога, выплаченного за пять лет фирмой из упражнений 1 и 7, при амортизации по МФП меньше, чем та же величина при РА?

16. Вычислите приведенную ценность величины налога, выплаченного фирмой из упражнений 1 и 7 за пять лет при амортизации по МФП. Остаточная стоимость машины равна 60 000 руб.

17. На сколько процентов приведенная ценность суммы налога, выплаченного за пять лет фирмой из упражнений 1 и 7 при амортизации по МФП, меньше, чем та же величина при РА? Остаточная стоимость машины равна 60 000 руб.

18. Для фирмы из упражнений 1 и 7 составьте таблицу сумм выплачиваемых налогов по годам при амортизации по МДП.

19. Вычислите приведенную ценность величины налога, выплаченного фирмой из упражнений 1 и 7 за пять лет при амортизации по МДП. Остаточная стоимость машины равна 60 000 руб.

20. Расположите методы амортизации в порядке их выгодности для фирмы из упражнений 1 и 7. Рассмотрите два случая: остаточная стоимость машины равна 0 руб.; остаточная стоимость машины равна 60 000 руб.

Дополнительные упражнения

21. Докажите, что при амортизации по ПСЛ стоимость имущества в конце k -го года S_k вычисляется по формуле (4.5):

$$S_k = V + \frac{(n-k)(n-k+1)(S-V)}{n(n+1)}\ ,\ k = 0, \ldots, n\,.$$

22. Используя формулу, полученную в упражнении 21, докажите, что в конце любого периода остаточная стоимость имущества при РА больше, чем стоимость имущества при амортизации по ПСЛ.

5. Банковские вклады

Банковские вклады являются самым простым и потому самым распространенным способом вложения денег для населения. В главах 2 и 3 мы уже рассматривали примеры, связанные с начислением простых и сложных процентов на банковские вклады. В этой главе мы подробнее остановимся на теме банковских вкладов и сберегательных сертификатов.

Основные положения, связанные с договором банковского вклада и правилами его функционирования, содержатся в Гражданском кодексе Российской Федерации (глава 44). Отметим, что, наряду с термином *вклад* в Гражданском кодексе Российской Федерации (статья 834), банками и в быту используется (как его синоним) термин *депозит*. Далее в этой главе мы будем употреблять оба термина, не отдавая предпочтения ни одному из них. В конкретных примерах будет применяться именно тот термин, который используется в информационных материалах банка.

По договору банковского вклада банк зачисляет сумму вклада на *банковский счет*, открытый клиенту (владельцу счета). Основные правила открытия и функционирования банковского счета изложены в главе 45 Гражданского кодекса Российской Федерации.

5.1. Привлеченные средства коммерческого банка

При осуществлении своей деятельности банк использует собственные и привлеченные средства. В этой книге не будем касаться вопросов, связанных со структурой и финансовым анализом собственных средств банка, отсылая читателя к специальной литературе, посвященной финансовому анализу деятельности банков.

Привлеченные средства банка бывают двух видов: *депозиты*[11], включающие средства на различных счетах и депозитные сертификаты; *займы*

[11] Депозит (от *лат. depositum*) — вещь, отданная на хранение.

(кредиты, полученные в Центральном банке и других банках и кредитных учреждениях, и средства, полученные в результате выпуска долговых обязательств). Банки предоставляют своим клиентам различные способы размещения временно свободных средств, выплачивая им за это доход в виде процентов. Для банка проценты, выплачиваемые клиентам, являются расходами. Лица (физические или юридические), размещающие свои средства на депозитах, являются кредиторами банка, а сам банк является в этой ситуации заемщиком.

5.2. Основные параметры банковских вкладов

Главным параметром банковского вклада является, естественно, его доходность. Доходность банковского вклада зависит прежде всего от срока хранения средств в банке и размера внесенной суммы — чем больше срок хранения и внесенная сумма, тем, вообще говоря, доходность выше. Исключение составляют банковские вклады *до востребования* или *текущие*, основное назначение которых — сохранить деньги от кражи или физического уничтожения. Эти вклады используют также для осуществления различных платежей. Доходность текущих вкладов мала. Например, доходность „Вклада до востребования Сбербанка России“ уже несколько лет составляет 0.1% (годовых)[12].

Срок хранения срочных банковских вкладов бывает в основном от одного месяца до пяти лет. По условиям договора о вкладе может быть предусмотрено автоматическое продление срока хранения вклада (*пролонгация*). Реальная доходность вклада зависит не только от номинальной ставки процента, но и частоты начисления процентов и суммы вклада. В том случае, когда вклад увеличивается на сумму начисленных процентов, говорят о *причислении* или *капитализации* процентов.

Пример 5.1. *При сумме вклада от* 1 000 *руб. до* 100 000 *руб. Сбербанк выплачивает по вкладу „Депозит Сбербанка России“ со сроком хранения 3 месяца и 1 день* 5.25% *годовых, а со сроком хранения 6 месяцев —* 7.75%. *Имеется возможность неоднократной пролонгации вкладов. Причисление процентов производится по истечении каждого 3-месячного периода, определяемого с даты открытия вклада (с даты окончания предыдущего срока), а также по истечении основного (пролонгированного) срока. Какова реальная доходность этих вкладов?*

[12]Процентные ставки для примеров и упражнений в этой главе взяты с сайтов соответствующих банков весной и летом 2006 г.

Решение. По условиям вклада проценты причисляются к вкладу 4 раза в год. Поэтому, чтобы определить реальную доходность вкладов, надо найти реальную процентную ставку i_c при $j_4 = 0.0525/4$ и при $j_4 = 0.0775/4$. Применим формулу (3.20) из главы 3 и вычислим реальную доходность для вклада со сроком хранения три месяца:

$$i_c(3) = (1 + 0.0525/4)^4 - 1 = 0.0535 = 5.35\%\,;$$

для вклада со сроком хранения шесть месяцев получаем:

$$i_c(6) = (1 + 0.0775/4)^4 - 1 = 0.0798 = 7.98\%\,.$$ ■

Чаще всего при досрочном изъятии вклада доход за неполный срок хранения начисляется по процентной ставке текущего вклада. Этот факт может повлиять на выбор срока хранения вклада. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5.2. *В условиях примера 5.1 велика вероятность того, что деньги, размещаемые в банке, понадобятся через 11 месяцев. При досрочном изъятии вклада доход за неполный срок хранения в Сбербанке составляет* 0.1%. *Какой срок хранения для вклада „Депозит Сбербанка России“ следует предпочесть: со сроком хранения три или шесть месяцев?*

Решение. Если выбрать вклад со сроком хранения 3 месяца, то три раза будут причисляться проценты по ставке $j_4 = 0.0525/4$, а за два месяца будут причислены проценты по ставке $j = 0.001$. Следовательно, реальная доходность для вклада на три месяца составляет:

$$i_c(3) = ((1 + 0.0525/4)^3(1 + 0.001/12\times 2) - 1)/(11/12) = 0.0437 = 4.37\%\,.$$

Если выбрать вклад со сроком хранения 6 месяцев, то два раза будут причисляться проценты по ставке $j_4 = 0.0775/4$, а за пять месяцев будут причислены проценты по ставке $j = 0.001$. Следовательно, реальная доходность для вклада на шесть месяцев составляет:

$$i_c(6) = ((1 + 0.0775/4)^2(1 + 0.001/12\times 5) - 1)/(11/12) = 0.0432 = 4.32\%\,.$$

Следовательно, в изменившихся условиях доходности вклада при разных сроках хранения почти сравнялись: доходность вклада со сроком хранения три месяца больше всего на 0.05%. ■

Однако даже самый простой способ инвестирования, банковские вклады, требует умения оценивать все имеющиеся возможности. А стратегия выбора одного типа банковского вклада на весь период инвестирования далеко не всегда является лучшей.

Пример 5.3. *В условиях примеров 5.1 и 5.2, когда велика вероятность того, что деньги, размещаемые в банке, понадобятся через 11 месяцев, вычислить доходность следующего способа инвестирования: сначала деньги размещаются на вкладе „Депозит Сбербанка России“ со сроком хранения шесть месяцев, а затем на оставшийся срок размещаются на таком же вкладе со сроком хранения три месяца.*

Решение. За первые шесть месяцев два раза будут причисляться проценты по ставке $j_4 = 0.0775/4$, а затем один раз будут причислены проценты по ставке $j_4 = 0.0525/4$ и далее два месяца будут причислены проценты по ставке $j = 0.001$. Реальная доходность при таком способе составляет:

$$i_c(6,3) = ((1+0.0775/4)^2(1+0.0525/4)(1+0.001/12\times 2)-1)/(11/12) = \\ = 0.0578 = 5.78\%.$$

Сравнивая эту доходность с доходностями, полученными в примере 5.2, видим, что последовательное использование вкладов с различными сроками хранения позволяет увеличить доходность на 1.41%. ■

Важной характеристикой вклада является также *минимальная сумма вклада*, которая, в ряде случаев, может быть относительно большой. Например, в Юниаструм Банке минимальная сумма по вкладу „Тимирязев“ составляет 100 000 руб., а во Внешторгбанке минимальная сумма по вкладу „Внешторг-Рантье (специальный)“ еще больше — 300 000 руб.

Среди характеристик вкладов, на которые следует обращать внимание при заключении договора, возможность делать *дополнительные взносы* и возможность *частичной выдачи* денег со вклада до окончания срока хранения. Например, вклад „Депозит Сбербанка России“ при любом сроке хранения не допускает дополнительных взносов, а вклад „Пополняемый депозит Сбербанка России“ дополнительные взносы допускает (отсюда и название этого вклада). Что касается частичной выдачи денег со вклада до окончания срока хранения, то для всех упомянутых в этом пункте вкладов она была разрешена в пределах начисленных процентов.

5.3. Прогрессивный сберегательный счет

Для привлечения свободных средств населения банки придумывают все новые виды депозитов. В качестве примера расскажем о новом банковском продукте — *прогрессивном сберегательном счете*, который появился летом 2006 г. в Ситибанке[13]. Мы выбрали именно этот пример, так как проценты по счету начисляются по редко используемой сегментной схеме.

Вклад „Прогрессивный сберегательный счет CitiOne“ (ПСС) предполагает размещение средств в рублях РФ или долларах США и имеет все характеристики обычного сберегательного депозита. Проценты по счету начисляются банком *ежедневно*, исходя из суммы остатка на счете. Сумма остатка делится на сегменты, согласно установленной таблице процентных ставок. Начисленные проценты перечисляются на счет в последний рабочий день месяца. Базой для начисления процентов является 365 дней в году для рублевых депозитов и 366 дней в году для долларовых депозитов. Приведем таблицу процентных ставок для рублевого ПСС.

Сегмент (руб.)	Ставка (годовых)
0 – 50 000	0.01%
50 000 – 300 000	2%
300 000 – 1 500 000	3%
Более 1 500 000	5%

По условиям банковского обслуживания ЗАО КБ „Ситибанк“, процентные ставки по ПСС могут быть изменены банком в любой момент. Однако в следующем примере мы будем предполагать, что в течение рассматриваемого периода процентные ставки не менялись.

Пример 5.4. *Клиент банка размещает на ПСС* 1 654 000 *рублей 1-го числа некоторого месяца. Вычислим, какая сумма будет на счете через месяц.*

Решение. Вычислим сначала проценты, начисляемые на начальную сумму за один день. Для этого сумму вклада разделим на сегменты и вычислим проценты, начисляемые за один день на эти сегменты:

[13] Информация о счете: http//www.citibank.ru/russia/citione/rus/saving.htm.

Сегмент (номер)	Сумма (руб.)	Ставка (годовых)	Проценты за день (руб.)
1	50 000	0.01%	$50\,000\times\frac{0.0001}{365}=0.01$
2	250 000	2%	$250\,000\times\frac{0.02}{365}=13.70$
3	1 200 000	3%	$1\,200\,000\times\frac{0.03}{365}=98.63$
4	154 000	5%	$154\,000\times\frac{0.05}{365}=21.10$

Общая сумма процентов, начисляемых за день, равна:

$$0.01+13.70+98.63+21.10=133.44 \text{ руб.}$$

По условиям счета, проценты будут причислены к основной сумме через месяц. Следовательно, через месяц (30 дней) на счете будет

$$1\,654\,000+133.44\times 30=1\,658\,003.15 \text{ руб.}$$ ■

5.4. Обезличенные металлические счета

Несколько лет назад в некоторых крупных банках РФ стали предлагать своим клиентам *обезличенные металлические счета* (ОМС). На такой счет можно положить некоторое количество золота, серебра, палладия или платины. Банк обычно устанавливает минимальную массу вклада. Например, в банке „Уралсиб“ минимальная масса вклада в золоте составляет 1 000 грамм. Пока инвесторы редко пользуются такими счетами, но, как показывает зарубежный опыт, со временем эта услуга может стать более востребованной.

В самом общем виде порядок открытия такого счета следующий. Клиент заключает с банком договор ОМС и покупает определенное количество драгоценного металла в обезличенной форме (на каждый вид металла открывается отдельный счет). Купленный металл зачисляется на ОМС. После этого клиент получает документ, подтверждающий открытие ОМС и количество зачисленного на него металла. Например, в Сбербанке России таким документом является сберегательная книжка. На ОМС можно также зачислить мерные слитки драгоценных металлов в физической форме. Клиент в любое время может продать весь или часть драгоценного металла со своего счета банку по текущему курсу.

Клиенты банка могут проводить и другие операции с драгоценными металлами: покупку и продажу мерных слитков, получение кредитов под залог этих металлов, помещение их в банк на хранение, покупку и продажу инвестиционных и памятных монет. Главный плюс ОМС по сравнению с другими операциями с ценными металлами — отсутствие налога на добавленную стоимость при покупке драгоценных металлов, благодаря чему обезличенный металл обойдется на 18% дешевле, чем в слитках. Расходы уменьшаются и за счет того, что не нужно тратить дополнительные средства на хранение металла и платить за совершаемые операции. Кроме того, клиент может в любое время пополнить свой счет, купив некоторое количество металла и зачислив его на ОМС, или продать драгоценный металл с ОМС банку.

Доход владельца текущего ОМС — это доход от роста курса на драгоценные металлы, а доход срочного ОМС складывается из двух составляющих: процентов, которые банк начисляет по этому счету, и дохода от роста курса на драгоценные металлы. Некоторые банки (например, Сбербанк России) имеют только текущие ОМС. Процент по срочным ОМС существенно ниже процентов по обычным депозитам. Например, в банке „Уралсиб“ ставка процента для ОМС составляет от 0.1% до 1.5% годовых в зависимости от срока хранения.

Хотя покупка золота многими считается самым надежным вложением денег, но она не застрахована от убытков. Иногда изменения цены бывают очень значительными и достигают десятков процентов за короткие промежутки времени. Поэтому ОМС, в отличие от обычного депозита, может принести своему владельцу как прибыль, так и убыток.

Доходы от роста курсовой стоимости золота налогами не облагаются. Налог по ставке 13% платят лишь владельцы срочных ОМС. При этом налогом облагаются только начисленные проценты.

Для оценки своего будущего дохода владельцу ОМС можно использовать ежедневную цену на золото, выставляемую Центробанком РФ. Эти цены, как правило, несколько отличаются от мировых цен на золото. Принято считать, что цена ЦБ РФ выше, но это не всегда так. Например, 7 сентября 2006 г. цена ЦБ РФ (за тройскую унцию) составляла \$ 616.70, а, так называемая, London Gold Fixing[14] была равна \$ 621.50. Но обе эти це-

[14] Информацию о том, как вычисляется этот показатель, и временной ряд его значений за последние годы можно найти на сайте: http://en.wikipedia.org.

ны могут служить лишь ориентирами, так как банки устанавливают свои внутренние курсы покупки и продажи золота. Комиссию за открытие и закрытие счета банки, как правило, не берут.

Приведем пример, показывающий, что инвестиции в золото могут принести как прибыль, так и убыток. Заметим, что он носит условный характер, так как в нем используются значения London Gold Fixing в качестве цен на золото.

Пример 5.5. *Вычислим доходность ОМС со сроками хранения 2, 3, 6 месяцев и один год, открытых 8 сентября 2005. Предполагается, что проценты по вкладам не начисляются (счет текущий). Цена тройской унции золота в дни открытия и закрытия вкладов приведена в следующей таблице:*

Дата	Цена золота
08.09.05	\$488.55
08.11.05	\$461.60
08.12.05	\$515.70
08.03.06	\$544.75
08.09.06	\$610.00

Решение. Результаты вычисления доходностей (годовых) ОМС оформлены в виде таблицы:

Срок хранения (месяцы)	Доходность (%)
2	$6\times\dfrac{461.60-488.55}{488.55}=-33.10\%$
3	$4\times\dfrac{515.70-488.55}{488.55}=22.23\%$
6	$2\times\dfrac{544.75-488.55}{488.55}=23.01\%$
12	$\dfrac{610.00-488.55}{488.55}=24.86\%$

Из таблицы видно, что ОМС со сроком хранения 2 месяца был убыточен, так как цена на золото за соответствующий период упала, а доходность при больших сроках хранения была больше 20% и повышалась с увеличением срока хранения, так как цена на золота росла. ■

5.5. Сберегательный сертификат

Существует еще один способ разместить деньги в банке под фиксированный процент — купить *сберегательный (депозитный) сертификат.* Сберегательному сертификату посвящена статья 844 Гражданского кодекса Российской Федерации (глава 44). В ней устанавливается, что сберегательный (депозитный) сертификат является ценной бумагой, удостоверяющей сумму вклада, внесенного в банк, и право вкладчика (держателя сертификата) на получение по истечении установленного срока суммы вклада и обусловленных в сертификате процентов в банке, выдавшем сертификат, или в любом филиале этого банка. Положительное отличие сберегательного сертификата от банковского вклада заключается в том, что, не дожидаясь конца установленного срока, сертификат можно подарить, продать или заложить.

Сертификаты бывают двух видов: *именные* и *на предъявителя.* На именном сертификате указываются имя и паспортные данные его владельца, а сертификат на предъявителя не содержит никаких отметок о его владельце. При передаче именного сертификата на обратной стороне бланка необходимо вписать имя и паспортные данные прежнего и нового владельцев сертификата и дату совершения операции передачи. Сертификат на предъявителя просто передается из рук в руки. Проценты по обоим видам сертификатов облагаются налогом по тем же правилам, что и проценты по банковским вкладам.

Доходность сертификата, как и любого банковского вклада, зависит от срока хранения и размера внесенной суммы. Например, Сбербанк России осенью 2006 г. предлагал клиентам сертификаты номиналом 1 000, 10 000 и 50 000 руб. на срок от 90 до 729 дней. Процентная ставка по ним составляла от 5.25% до 10.25%, что соответствовало доходности аналогичных срочных вкладов в этом же банке.

Владелец сертификата, не дожидаясь наступления срока платежа, может предъявить его в банк и получить номинал и доход, который в этом случае исчисляется, как правило, по ставке вклада до востребования. Комиссия за выдачу и оплату сертификата не взимается.

Заметим, что в России этот аналог банковского депозита не пользуется широким спросом у населения. По данным Центрального Банка РФ, на

1 августа 2006 г. банки выдали сберегательных сертификатов на сумму чуть более 11 млрд руб., а депозитов открыли на 3 трлн руб.

Считается, что для тех, кто приобретает сертификаты, важна возможность их передачи другому лицу. Сберегательный сертификат, как и любую другую ценную бумагу, можно просто передать, подарить или продать другому лицу. Кроме того, сертификат на предъявителя может являться предметом залога при получении кредита как в выпустившем его банке, так и в любом другом банке. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5.6. *Г-же Ивановой 17 декабря 2005 г. подарили сертификат Сбербанка России номиналом* 10 000 *рублей со сроком* 364 *дня. Процентная ставка по нему составляла* 9.75%. *Нуждаясь в деньгах, г-жа Иванова через полгода продала сертификат кредитной организации, которая предоставляет ссуды под* 15% *годовых. Сколько заплатила кредитная организация за сертификат, если комиссия за покупку сертификата не взималась?*

Решение. Вычислим сначала сумму S, которая будет получена при оплате сертификата:

$$S = 10\,000(1 + 0.0975) = 10\,975 \text{ руб.}$$

Для кредитной организации сумма S является возвратом ссуды, выданной 0.5 года назад под 15% годовых. Тогда сумма, которую кредитная организация заплатит за сертификат, должна быть равна величине этой ссуды. Следовательно, она заплатит за сертификат сумму P, равную

$$P = \frac{10\,975}{1 + 0.075} = 10\,209.30 \text{ руб.}$$ ■

5.6. Приведенная ценность денег

Имеется множество причин, почему сумма денег, которую мы имеем сегодня, представляет бóльшую ценность, чем та же сумма через год. Среди таковых можно упомянуть действие инфляции, снижающей покупательную способность денег, и различные риски, связанные с инвестициями: вариационный риск — отклонение фактической ставки доходности от ожидаемой и риск дефолта — случай, когда вложенные деньги просто не вернули или вернули неполную сумму.

Мы, однако, будем говорить в этой главе о совсем ином явлении, которое имеет фундаментальное значение для дисциплины „финансы“ и действует при нулевой инфляции и отсутствии каких-либо рисков. Речь идет о *приведенной ценности денег во времени.* Это понятие связано с базовой экономической идеей учета альтернативных возможностей. А именно, о возможности вложения денег под определенный процент в надежный банк или государственные ценные бумаги на соответствующий срок.

Следует отметить, что в русскоязычной литературе наряду с термином *приведенная ценность*, который мы будем использовать в этой книге, употребляются также термины *приведенная стоимость*, *текущая стоимость* и *современная ценность*. Все это переводы одного английского термина — *Present Value.*

Обычно понятие *приведенная ценность* применяется не к одной-единственной сумме денег, а к потоку денежных платежей, производимых в различные моменты времени. В простейшем случае весь поток состоит из единственной выплаты в момент времени, отличный от рассматриваемого момента (момента, к которому проводится приведение). В п. 2.8 мы уже решали задачу приведенной ценности денег при начислении простых процентов. Здесь мы рассмотрим решение этой задачи с учетом начисления сложных процентов на вложенные деньги.

Приведенная ценность суммы денег S, которая будет получена через t лет, равна сумме P, которая превратится через t лет в сумму S при начислении на нее сложных процентов по годовой ставке i. Следовательно, приведенная ценность $P = PV$ суммы S вычисляется по формуле:

$$PV = S(1+i)^{-t}. \tag{5.1}$$

Еще раз напомним, что обозначение PV происходит от английского термина *Present Value.*

Если начисление производится по ставке j_m, то приведенная ценность вычисляется по формуле:

$$PV = S\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-tm}.$$

В русскоязычной литературе приведенную ценность денег называют еще *дисконтированной ценностью.* Поэтому процентная ставка i (или j_m) называется *ставкой дисконтирования* или *дисконтной ставкой*, а расчет приведенной ценности — *дисконтированием.*

Наряду с финансами термин *дисконтирование* используется в розничной торговле, где он обозначает снижение цены на товар с целью увеличения объема продаж. Еще раз подчеркнем, что в финансах дисконтирование — это определение приведенной ценности денег по величине их суммы в определенный момент в будущем. В финансах расчет приведенной ценности обычно называют *анализом дисконтированных денежных потоков* (*discounted cash flow analysis*).

Пример 5.7. *Кредитор дает деньги в долг, получая вексель, по которому через два года будет выплачено* 100 000 *руб. Вычислим, какую сумму следует дать под этот вексель сегодня, если за взятые в долг деньги выплачиваются проценты по ставке* $j_4 = 20\%$.

Решение. По формуле (5.1) найдем современную ценность 100 000 руб. Подставив в нее $S = 100\,000$, $m = 4$, $j_m = 0.2$, $t = 2$, получим:

$$PV = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0.2}{4}\right)^{-8} = 67\,683.94 \text{ руб.}$$

Таким образом, под вексель следует дать 67 683.94 руб. ■

Если t лет тому назад сумма P была получена под $i\%$, то наращенное значение этой суммы или ее будущая ценность $S = FV$ вычисляется по формуле (3.2):

$$FV = P(1+i)^t.$$

Обозначение FV происходит от английского термина *Future Value*, который мы и перевели как *будущая ценность*.

Если начисление производится по ставке j_m, то будущая ценность вычисляется по формуле (3.5):

$$FV = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}.$$

Если на инвестированные деньги начисляются непрерывные проценты силой роста δ, то приведенная ценность суммы S, которая будет получена в будущем через t лет, вычисляется по формуле (3.9):

$$PV = Se^{-\delta t},$$

а будущая ценность суммы P, которая была получена в прошлом t лет назад, вычисляется по формуле (3.8):

$$FV = Pe^{\delta t}.$$

Пример 5.8. *В банк, выплачивающий $j_2 = 8\%$, вложены на 3 года 10 000 руб. Вычислим, какова будущая стоимость этой суммы денег.*

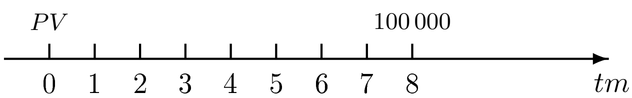
Решение. Будущую стоимость этой суммы (наращенную сумму) находим по формуле (3.5) при $P = 10\,000$, $j_2 = 0.08$, $m = 2$, $t = 3$:

$$FV = 10\,000\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2\times 3} = 10\,000\times 1.26532 = 12\,653.2\,. \qquad \blacksquare$$

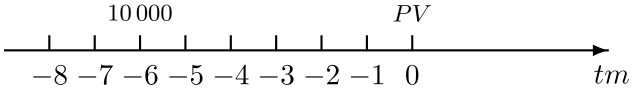
В финансовых вычислениях часто удобно рассматривать будущую стоимость некоторой суммы денег как приведенную ценность этой суммы, если вложение денег происходило в прошлом. Поэтому понятие приведенной ценности денег мы распространим и на деньги, инвестированные t лет назад. С математической точки зрения это означает, что формула (5.1) может применяться не только при $t > 0$ (дисконтирование денег, которые будут получены в будущем), но и при $t < 0$ (наращение денег, которые были инвестированы в прошлом).

Из такой трактовки формулы (5.1) следует, что приведенная ценность суммы денег, которая будет получена в будущем, меньше этой суммы, а приведенная ценность суммы денег, которая была инвестирована в прошлом, больше этой суммы. В первом случае приводимая сумма денег умножается на *дисконтный множитель* и операция нахождения ее приведенной ценности называется *дисконтированием*, а во втором случае приводимая сумма денег умножается на *наращивающий множитель*.

Ситуацию с определением приведенной ценности денег можно изобразить графически. Начертим ось времени, на которой время указано в периодах начисления процентов. Момент приведения обозначим нулем. Над осью будем указывать суммы, которые рассматриваются в соответствующие моменты времени. Приведем сначала графическое изображение ситуации в примере 5.7:



Далее приведено графическое изображение ситуации в примере 5.8:



В качестве *момента приведения* может быть выбран любой момент времени, совпадающий с концом какого-либо периода начисления процентов. Так, в примере 5.7 современная ценность суммы 100 000 руб. в момент $t = 4$ будет вычисляться по формуле:

$$PV = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0.2}{4}\right)^{-4} = 82\,270.25 \text{ руб.},$$

а в примере 5.8 современная ценность суммы в 10 000 руб. в момент $t = -3$ равна

$$PV = 10\,000 \times \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{3} = 11\,248.64 \text{ руб.}$$

Если в качестве момента приведения выбран момент времени $T \neq 0$, то для обозначения приведенной ценности суммы S удобно использовать обозначение $PV_T(S)$.

5.7. Балансовое равенство для приведенной ценности денег

Рассмотрим ситуацию, когда имеется счет в банке, который выплачивает на вложенные деньги сложный процент i за период. Пусть за рассматриваемый промежуток времени было сделано n вкладов сумм $S_1, \ldots, S_n$ и k изъятий сумм $R_1, \ldots, R_k$ в определенные моменты времени (являющиеся концами периодов начисления процентов). Тогда верно следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства[15]: *сумма всех вкладов, приведенных к произвольному моменту времени T, равна сумме всех изъятий и остатка W на счете, приведенных к тому же моменту времени T*:

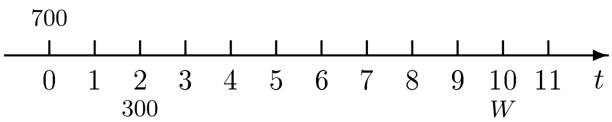
$$PV_T(S_1) + \ldots + PV_T(S_n) = PV_T(R_1) + \ldots + PV_T(R_k) + PV_T(W). \quad (5.2)$$

Используя формулу (5.2), можно решать различные задачи финансовых расчетов. Сначала рассмотрим пример, где требуется определить остаток на счете, с которым в определенные моменты времени проводились операции пополнения и изъятия.

[15] Доказательство этого утверждения можно выполнить методом математической индукции по двум переменным, n и k.

Пример 5.9. *Предприниматель вложил в банк, который выплачивает проценты по ставке $j_4 = 6\%$, сумму, равную* 700 000 *руб. Через* 6 *месяцев он снял со счета* 300 000 *руб., а через* 2 *года после этого закрыл счет. Вычислим, какую сумму предприниматель получил при закрытии счета.*

Решение. Изобразим ситуацию на оси времени. Суммы (в тысячах рублей), которые предприниматель снимал со счета, изобразим под осью времени, а сумму, которую он вложил, — над осью. Одно деление оси времени соответствует одному кварталу (период начисления процентов).



Обозначим сумму, полученную при закрытии счета, через W. По условию примера банк начисляет в квартал $i = 0.06/4 = 0.015 = 1.5\%$. Используем тот факт, что в любой момент времени суммарная приведенная ценность снятых со счета денег и остатка равна приведенной ценности вложенных денег. Поэтому, выбрав в качестве момента приведения $T = 10$ (время закрытия счета), имеем следующее уравнение:

$$700\,000\,(1+i)^{10} = 300\,000\,(1+i)^8 + W.$$

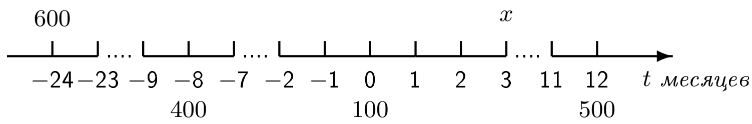
Подставляя в него $i = 0.015$, находим значение W:

$$W = 700\,000\,(1.015)^{10} - 300\,000\,(1.015)^8 = 474\,430.8 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

В следующем примере рассматривается ситуация, когда требуется определить, какую сумму необходимо вложить на счет в определенный момент времени, чтобы гарантировать наличие на счету фиксированной суммы в другой момент времени.

Пример 5.10. *Г-н Петров положил* 2 *года назад* 600 000 *руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_{12} = 5\%$. Восемь месяцев тому назад он снял со счета* 400 000 *руб., а сегодня снял еще* 100 000 *руб. Через* 3 *месяца он планирует вложить некоторую сумму так, чтобы через год от сегодняшнего момента закрыть счет, получив* 500 000 *руб. Вычислим, какую сумму он должен вложить.*

Решение. Ситуация, описанная в задаче, изображена на следующем рисунке (суммы указаны в тысячах рублей):



Как и в предыдущем примере, под осью изображены суммы, снимаемые со счета, а над осью — суммы, положенные на счет. Современная ценность тех и других (в любой момент времени) одинакова. Выберем в качестве момента приведения $T = 3$ — конец третьего периода начисления процентов, то есть момент, когда вносится искомая сумма, которую мы обозначим через x. Приравнивая в момент $T = 3$ ценности сумм, внесенных на счет, и сумм, снятых со счета, получаем уравнение:

$$600\,000\,(1+i)^{27} + x = 400\,000\,(1+i)^{11} + 100\,000\,(1+i)^{3} + 500\,000\,(1+i)^{-9}.$$

Подставляем в последнее уравнение $i = 0.05/12 = 0.00417$ и определяем значение x с точностью до целых рублей:

$$\begin{aligned} x &= 400\,000\times 1.00417^{11} + 100\,000\times 1.00417^{3} + 500\,000\times 1.00417^{-9} - \\ &\quad -600\,000\times 1.00417^{27} = \\ &= 400\,000\times 1.04684 + 100\,000\times 1.01256 + 500\,000\times 0.96324 - \\ &\quad -600\,000\times 1.11891 = 330\,266\,. \end{aligned}$$

Следовательно, через 3 месяца надо вложить 330 266 руб. ■

5.8. Используем Excel

В этом пункте мы разберем, как решить пример 5.4 из текущей главы с помощью Excel. Фрагмент с рабочего листа с решением этого примера приведен на рис. 15. Для удобства повторим условия примера.

Пример 5.4. *Клиент банка размещает на ПСС* 1 654 000 *рублей 1-го числа некоторого месяца. Вычислим, какая сумма будет на счете через месяц, если за это время никаких операций со счетом не производилось.*

Не представляет особого труда записать в виде формул Excel вычисления, которые мы ранее привели в пункте 5.3. Однако сделать эти вычисления корректными при любой сумме вклада (величина из ячейки B14) гораздо труднее.

	A	B	C	D
2	**Пример 5.4**			
3	*Дано:*			
4	Сегменты (верхняя граница):			
5	1	50000		
6	2	300000		
7	3	1500000		
8	4	> 1500000		
9	дней в году	365		
10	$j_{365}(1)$	0.01%		
11	$j_{365}(2)$	2%		
12	$j_{365}(3)$	3%		
13	$j_{365}(4)$	5%		
14	Сумма	1 654 000р.		
15	*Вычислить:*			
16	Наращенная сумму через месяц?			
17	*Решение:*			
18	r_1 =	0.00003%		
19	r_2 =	0.00548%		
20	r_3 =	0.00822%		
21	r_4 =	0.01370%		
22	s_1 =	50 000р.	=ЕСЛИ(B14<=B5;B14;B5)	
23	s_2 =	250 000р.	=ЕСЛИ(B14<=B5;0;ЕСЛИ(B14>B6;B6-B5;B14-B5))	
24	s_3 =	1 200 000р.	=ЕСЛИ(B14<=B6;0;ЕСЛИ(B14>B7;B7-B6;B14-B6))	
25	s_4 =	154 000р.	=ЕСЛИ(B14<=B7;0;B14-B7)	
26	Проценты за 1 день =		**133.44р.**	=B22*B18+B23*B19+B24*B20+B25*B21
27	Проценты за месяц =		**4 003.15р.**	
28	Наращенная сумма через месяц =		**1 658 003.15р.**	
29				
30				

Рис. 15. Пример на вычисление процентов по ПСС

Воспользуемся логической функцией ЕСЛИ(). Напомним, что эта функция выполняет проверку условия, задаваемого первым аргументом, и возвращает значение второго аргумента, если условие выполнено, и значение третьего аргумента, если условие не выполнено:

=ЕСЛИ(условие; значение_да; значение_нет).

Так как в качестве аргументов функций могут, в свою очередь, использоваться любые функции, то с помощью вложений функций ЕСЛИ() друг в друга можно проверять последовательную цепочку условий. Именно так были записаны формулы для определения сумм вклада, попадающих в каждый сегмент. Для всех сегментов, кроме первого, сначала проверяется, что сумма вклада большей нижней границы этого сегмента. В том случае, если это условие не выполняется, сумма процентов, начисленных в этом сегменте, равна 0. Если это условие выполняется, то сумма вклада сравнивается с верхней границей сегмента, чтобы вычислить сумму вклада, попадающую в рассматриваемый сегмент. Если сумма вклада больше верхней границы сегмента, то проценты начисляются на сумму, соответствующую этому сегменту. В противном случае проценты начисляются на остаток от суммы вклада после вычета сумм предыдущих сегментов. Например, для второго сегмента, нижняя граница которого записана в ячейке B5), а верхняя — в ячейке B6), получаем формулу:

=ЕСЛИ(B14<=B5;0;ЕСЛИ(B14>B6;B6-B5;B14-B5)).

Эта формула является универсальной в том смысле, что ее можно копировать для всех сегментов, кроме первого и последнего. Заметим, что в формуле необходимо указать *абсолютный* адрес ячейки B14, в которой записана величина вклада. Предлагаем читателю повторить решение примера в Excel и убедиться в корректности вычислений при различных суммах вклада.

Упражнения

1. При сумме вклада от 1 000 руб. до 100 000 руб. Сбербанк выплачивал по вкладу „Депозит Сбербанка России“ летом 2006 г. следующие годовые процентные ставки:

Срок хранения	Доходность (%)
2 года	9.75%
1 год и 1 месяц	9.25%
6 месяцев	7.75%
3 месяца и 1 день	5.25%

Имеется возможность неоднократной пролонгации вкладов. Причисление процентов производится по истечении каждого 3-месячного периода, определяемого с даты открытия вклада (с даты окончания предыдущего срока), а также по истечении основного (пролонгированного) срока. Предполагается, что в рассматриваемом периоде процентные ставки по вкладам меняться не будут. Какова реальная годовая доходность вкладов со сроками хранения 1 год и 1 месяц и 2 года?

2. В условиях упражнения 1 велика вероятность того, что деньги, размещаемые в банке, понадобятся через 18 месяцев. При досрочном изъятии вклада доход за неполный срок хранения в Сбербанке составляет 0.1%. Какой

срок хранения для вклада „Депозит Сбербанка России“ следует предпочесть: со сроком хранения 1 год и 1 месяц или шесть месяцев? Предполагается, что вкладчик будет использовать автоматическую пролонгацию выбранного вклада до момента изъятия денег.

3. В условиях упражнения 1, когда велика вероятность того, что деньги, размещаемые в банке, понадобятся через 18 месяцев, вычислить доходность следующего способа инвестирования: сначала деньги размещаются на вкладе „Депозит Сбербанка России“ со сроком хранения 1 год и 1 месяц, а затем на оставшийся срок размещаются на таком же вкладе со сроком хранения три месяца.

4. Какой была доходность ОМС, со сроками хранения 1, 3, 6 месяцев и один год, открытых 13 апреля 2004 г.? Предполагается, что проценты по вкладам не начисляются (счет текущий). Цена тройской унции золота в дни открытия и закрытия вкладов приведена в следующей таблице:

Дата	Цена золота
13.04.04	\$ 407.90
13.05.04	\$ 375.15
13.07.04	\$ 400.90
13.10.04	\$ 544.75
13.04.05	\$ 427.50

5. Какова приведенная ценность 10 000 руб., если:
а) эта сумма будет получена через 3 года 6 месяцев,
б) эта сумма была получена 2 года 9 месяцев тому назад,
в) эта сумма получена в настоящий момент времени?

Стоимость денег — 8% (то есть на инвестированные или взятые в долг деньги начисляются 8% годовых (сложных)).

6. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4 = 6\%$. Какова приведенная ценность суммы денег в 25 000 руб., которая:
а) была вложена в этот банк 5 лет 6 месяца тому назад,
б) будет вложена в банк через 1 год 9 месяцев?

7. Вкладчик положил в банк, выплачивающий проценты по годовой ставке $j_2 = 5\%$ (сложных), сумму 12 000 руб. Через 1 год 6 месяцев он снял со счета 4 500 руб., а еще через 2 года положил на свой счет 2 000 руб. После этого через 3 года 6 месяцев он закрыл счет. Какую сумму он получил при закрытии счета?

8. Решить предыдущее упражнение при условии, что банк выплачивает проценты по ставке $j_6 = 5\%$.

9. Вкладчик положил 3 года назад 5 000 руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_2 = 8\%$. Год назад он положил еще 2 000 руб., а через 3 года 6 месяцев после этого снял со счета 3 500 руб. Еще через 6 месяцев он желает положить на свой счет такую сумму, чтобы еще через год на счете было 10 000 руб. Какую сумму он должен положить на свой счет в последний раз?

10. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счет такую же сумму, а еще через 1 год 6 месяцев — снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счете было 25 000 руб. Какую сумму вносил в банк вкладчик каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по годовой ставке $j_4 = 5\%$(сложных)?

11. Решить предыдущее упражнение, если банк выплачивает проценты по ставке $j_{12} = 5\%$.

12. Решить упражнение 10, если банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta = 5\%$.

13. Фермер взял в банке кредит на сумму 5 млн. руб. под 8% годовых (сложных). Через год он вернул банку 3 млн. руб., а еще через год взял кредит в сумме 2 млн. руб. Через 2 года после этого фермер вернул полученные кредиты полностью. Какую сумму он при этом выплатил банку?

14. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4 = 10\%$, чтобы иметь возможность снять со счета 2 000 руб. через 1 год 6 месяцев и еще 3 000 руб. через 1 год 6 месяцев после этого?

15. Решите предыдущее упражнение, приведя все суммы к моменту последнего изъятия денег.

16. Фермер приобрел трактор, который стоит 250 000 руб., в кредит под 12% годовых (сложных). Через 1 год 6 месяцев он уплатил 150 000 руб., а еще через 6 месяцев полностью погасил долг. Какую сумму он при этом выплатил?

17. Предприниматель взял в банке кредит в 120 000 руб. под 15% годовых (сложных). Через 6 месяцев он вернул банку 45 000 руб., а еще через 6 месяцев — 25 000 руб. Спустя 6 месяцев после этого он взял еще ссуду в 30 000 руб., и через 2 года с момента получения этой ссуды полностью погасил долг. Какую сумму составляет последняя уплата?

18. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 800 тыс. руб., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Г-н Иванов приобрел коттедж. Он выплатил 200 000 руб. через 3 месяца после покупки, 300 000 руб. — еще через 6 месяцев, 100 000 руб. — в конце первого года с момента покупки и погасил весь долг через 1.5 года с момента покупки. Какую сумму составил последний платеж?

19. Г-н Петров приобрел коттедж у строительного комбината из предыдущего упражнения. Он выплатил в момент покупки 300 000 руб., через год — 200, 000 руб., еще через год — 200 000 руб. и остаток долга погасил через 2.5 года от момента покупки. Чему равен последний платеж?

20. Г-н Сидоров тоже приобрел коттедж у строительного комбината из упражнения 18, обязавшись выплатить долг в течение трех лет равными уплатами по полугодиям (первая уплата — через полгода от момента покупки). Чему равна каждая уплата?

21. Строительный комбинат из упражнения 18 учредил банк, аккумулирующий средства на строительство коттеджей и выплачивающий по вложенным в него деньгам также 12% годовых (сложных). Г-н Федоров внес в этот банк некоторую сумму за 2 года до приобретения коттеджа, такую же сумму — в момент приобретения коттеджа, еще 250 000 руб. — через год и 300, 000 руб. — через 2 года с момента приобретения коттеджа, погасив, тем самым, свой долг полностью. Какие суммы вносил г-н Федоров в банк до и в момент приобретения коттеджа?

22. Г-н Николаев внес в банк, описанный в предыдущем упражнении, 300 000 руб. за год до получения коттеджа и еще 300 000 руб. — через год после получения коттеджа. Еще через год он внес некоторую сумму, а еще через 2 года погасил долг, внеся 100 000 руб. Какую сумму он внес через 2 года после получения коттеджа?

23. Фермер должен вернуть банку 200 000 руб. 1 января 2007 г. Ссуда дана под 15% годовых (сложных). Какую сумму должен уплатить фермер, если он вернет долг: а) 1 июля 2006 г., б) 1 июля 2007 г., в) 1 января 2008 г.?

24. Г-н Лебедев 1 января 2006 г. купил сертификат Сбербанка России номиналом 50 000 рублей со сроком 270 дней. Процентная ставка по нему составляла 9.25%. Нуждаясь в деньгах, г-н Лебедев через 60 дней хочет продать сертификат кредитной организации, которая предоставляет ссуды под 16% годовых. Какова справедливая цена покупки?

6. Финансовые ренты

В финансах несколько следующих друг за другом платежей называют *потоком денежных платежей.* Часто в своей повседневной и профессиональной деятельности мы имеем дело с потоками денежных платежей, которые остаются неизменными в течение длительного периода времени. Причем неизменными остаются как сами платежи, так и промежутки времени, через которые они осуществляются. Такие потоки платежей называются *рентами* или *аннуитетами.* Термин „аннуитет" используется, прежде всего, при страховании жизни. В страховании *договором аннуитета* называется договор, который гарантирует покупателю этого договора (аннуитанту) выплаты в течение определенного периода времени.

Примерами рент являются купонные выплаты по облигациям, платежи по потребительскому кредиту и ипотеке, страховые платежи. В этой главе речь пойдет о финансовых рентах, их видах и характеристиках.

6.1. Основные определения

Финансовой рентой называется последовательность платежей, равных по величине и производящихся через равные промежутки времени.

Временной интервал между последовательными выплатами называется *периодом ренты.* Чаще всего встречаются ренты, период которых равен году, половине года, кварталу или месяцу. Срок от начала первого до конца последнего периода называется *сроком ренты.* Если последний период не указывается (срок ренты бесконечный), то рента называется *бессрочной.*

Ренты бывают условные и безусловные. *Безусловная рента* имеет фиксированный срок, а срок *условной ренты* зависит от наступления некоторого события. Платежи по ипотеке или потребительскому кредиту являются безусловной рентой, а пенсия — условной рентой. В этой главе мы рассматриваем только безусловные ренты.

Если выплаты производятся в конце периода, то рента называется *обычной* или *постнумерандо*, а если выплаты производятся в начале периода, то рента называется *авансированной* или *пренумерандо*.

6.2. Функция $s_{n;\,i}$

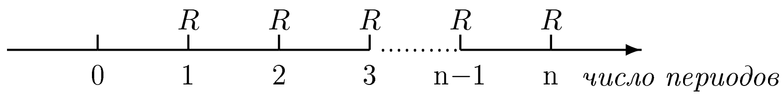
При выводе формул, связанных с финансовыми рентами, мы будем неоднократно применять формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Напомним, что *геометрической прогрессией* называется последовательность чисел $b_i\,(i \geq 1)$, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, которое называется *знаменателем прогрессии*:

$$b_{i+1} = q\,b_i,\ i\ =\ 1,\,2,\ldots\,.$$

Сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии, у которой $q \neq 1$, вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}\,. \tag{6.1}$$

Рассмотрим обычную ренту, состоящую из n платежей, например, вкладов в банк. Обозначим через R величину рентного платежа. Предположим, что в конце каждого периода на все сделанные до этого момента платежи начисляются сложные проценты по ставке i. Изобразим такую ренту на оси времени:



Выведем формулу вычисления наращенной суммы рентных платежей к концу периода n, которую будем обозначать через S.

Платеж, сделанный в момент n, входит в наращенную сумму S без изменения, то есть в размере R. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент $n-1$, равна $R(1+i)$. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент $n-2$, равна $R(1+i)^2$ и т. д. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент 2, равна $R(1+i)^{n-2}$. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент 1, равна $R(1+i)^{n-1}$. Следовательно, наращенная сумма всей ренты в момент n будет равна:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = R$, знаменатель $q = 1 + i$. По формуле (6.1) находим сумму первых n членов этой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{1 + i - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Для коэффициента, на который умножается R в получившейся формуле, принято использовать следующее обозначение:

$$s_{n;\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{6.2}$$

Тогда наращенная сумма финансовой ренты выражается формулой:

$$S = Rs_{n;\,i}. \tag{6.3}$$

Из формулы (6.3) видно, что значение функции $s_{n;\,i}$ — это наращенная за n периодов сумма финансовой ренты с платежами, равными 1. Ранее, когда компьютеры еще не были так распространены, для выполнения расчетов по формуле (6.3) использовались специальные таблицы значений функции $s_{n;\,i}$. Теперь для вычисления значений этой функции можно использовать финансовый калькулятор или программу Excel. Заметим, что функция $s_{n;\,i}$ не входит в число встроенных финансовых функций Excel. Но это легко исправить, так как нетрудно написать свою функцию, выполняющую вычисления по формуле (6.2), на VBA.

Рассмотрим два примера на вычисление формулы (6.3).

Пример 6.1. *Фирма создает фонд помощи ветеранам труда, вкладывая ежегодно* 250 000 *руб. в банк, выплачивающий* 8% *годовых (сложных). Какая сумма будет на счете фонда через* 5 *лет?*

Решение. Вклады в банк образуют простую ренту (далее просто ренту), для которой $R = 250\,000$ руб., $n = 5$, $i = 8\%$. Вычисляем наращенную сумму ренты по формуле (6.3), подставляя в нее $s_{5;\,8\%} = 5.8666$:

$$S = 250\,000 \times s_{5;\,8\%} = 250\,000 \times 5.8666 = 1\,466\,650.25 \text{ руб.}$$ ■

Пример 6.2. *Предприниматель вкладывает* 10 000 *руб. в конце каждого месяца в банк, выплачивающий проценты по ставке* $j_{12} = 9\%$. *Какую сумму он накопит за* 2 *года?*

Решение. Вклады в банк, которые делает предприниматель, образуют финансовую ренту, в которой $R = 10\,000$, $n = 24$ (2 года по 12 месяцев), $i = 0.09/12 = 0.0075$. Находим наращенную сумму ренты по формуле (6.3), подставляя в нее $s_{24;\,0.75\%} = 26.1885$:

$$S = 10\,000 s_{24;\,0.75\%} = 10\,000 \times 26.1885 = 261\,884.71 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Сделаем важное замечание, касающееся авансированных рент, когда платежи делаются в *начале* периода. Наращенная сумма авансированной ренты выражается формулой:

$$S = R\,(1 + i)\,s_{n;\,i}. \tag{6.4}$$

Действительно, вместе с авансированной рентой можно рассмотреть обычную ренту с тем же множеством платежей, которая начинается на один период раньше. Наращенные суммы этих рент в момент n должны совпадать, поэтому получаем формулу (6.4). Подобные несложные изменения потребуется выполнять и в остальных формулах, приведенных в этой главе, если применять их для авансированных рент.

6.3. Виды финансовых рент

До настоящего момента в этой главе рассматривались только обычные (или постнумерандо) ренты с начислением процентов один раз в конце периода. Однако на практике встречаются финансовые ренты с различными правилами выполнения платежей и начисления процентов. Рассмотрим некоторые из них и выведем для них формулы вычисления наращенной суммы S, аналогичные формуле (6.3).

6.3.1. Ренты с начислением процентов в конце года

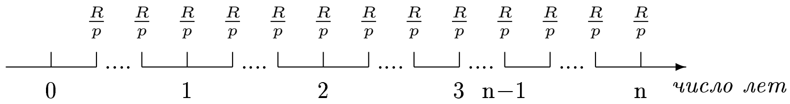
Годовая рента

Так называется рента, в которой платеж, равный R, выплачивается в конце каждого года, и в конце каждого года на накопленную сумму начисляются сложные проценты по ставке i. Наращенная за n лет сумма

S и величина платежа R рассчитываются по формулам (6.3) и (6.16), выведенным выше.

p-срочная рента

Так называется рента, при которой p раз в год через равные промежутки времени производятся платежи, равные R/p. На накопленную сумму в конце каждого года начисляются сложные проценты по годовой ставке i. Изобразим такую ренту на оси времени:



Всего за n лет сделано np платежей. Выведем формулу, выражающую наращенную к моменту n сумму этой ренты, в предположении, что проценты за любой период начисляются по формуле сложных процентов.

Последний платеж входит в наращенную сумму без изменения, то есть в размере R/p. На предпоследний платеж по годовой ставке i начисляются сложные проценты за период, равный $1/p$ части года, следовательно, в момент n наращенная на этот платеж сумма будет равна

$$\frac{R}{p}\,(1+i)^{\frac{1}{p}}.$$

Сумма, наращенная к моменту n на второй от конца платеж, будет равна

$$\frac{R}{p}\,(1+i)^{\frac{2}{p}}.$$

Сумма, наращенная к моменту n на первый платеж, будет равна

$$\frac{R}{p}\,(1+i)^{\frac{np-1}{p}},$$

так как на него начисляются сложные проценты $np-1$ раз по годовой ставке i каждый раз за период, равный $1/p$ части года. (Можно рассуждать и иначе: так как

$$\frac{np-1}{p} = n - \frac{1}{p}\,,$$

то на сделанный в момент 1 платеж к моменту n начисляются сложные проценты по годовой ставке i за период, равный $n-1/p$ годам.)

Наращенная за n лет сумма всей ренты равна:

$$S = \frac{R}{p} + \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}} + \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{2}{p}} + \ldots + \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{np-1}{p}}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = R/p$ и знаменателем $q = (1+i)^{\frac{1}{p}}$. Число членов этой прогрессии равно $k = np$. По формуле (6.1), суммы первых k членов геометрической прогрессии, находим S:

$$S = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{R}{p} \times \frac{\left((1+i)^{\frac{1}{p}}\right)^{np} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}\,.$$

Введем обозначение:

$$s^{(p)}_{n;\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}\,. \tag{6.5}$$

Тогда наращенная сумма p-срочной ренты равна:

$$S = Rs^{(p)}_{n;\,i}\,. \tag{6.6}$$

Коэффициент $s^{(p)}_{n;\,i}$ можно представить в виде произведения:

$$s^{(p)}_{n;\,i} = s_{n;\,i} \times K_{p;\,i}\,, \tag{6.7}$$

где

$$K_{p;\,i} = \frac{i}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}\,.$$

Когда-то для выполнения расчетов по формуле (6.6) использовались специальные таблицы значений функций $s_{n;\,i}$ и $K_{p;\,i}$. Теперь для вычисления значений этих функций можно использовать финансовый калькулятор или программу Excel. Однако самым удобным и полезным является создание своей функции на VBA. При этом нет смысла представлять функцию $s^{(p)}_{n;\,i}$ в виде произведения (как в формуле (6.7)), а следует реализовывать вычисления по формуле (6.5). Еще раз сообщим, что, как создать свою функцию, подробно объяснено в Приложении Б.

Рассмотрим пример на вычисление наращенной суммы ренты по формуле (6.6). Он отличается от примера 6.1 только тем, что годовой платеж разбивается на два равных платежа.

Пример 6.3. *Фирма для создания фонда помощи ветеранам труда вкладывает два раза в год по 125 000 руб. в банк, выплачивающий 8% годовых. Какая сумма будет на счете фонда через 5 лет?*

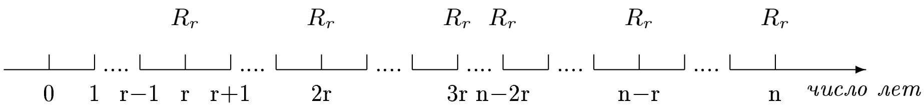
Решение. Вклады в банк образуют 2-срочную ренту, для которой $R = 250\,000$ руб., $n = 5$, $i = 8\%$. Вычисляем наращенную сумму ренты по формуле (6.6), подставляя в нее $s^{(2)}_{5;\,8\%} = 5.9817$:

$$S = 250\,000 \times s^{(2)}_{5;\,8\%} = 250\,000 \times 5.9817 = 1\,495\,418.91 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Сравнивая ответ, полученный в примере 6.3, с ответом примера 6.1, находим, что разбиение годовой суммы на два равных платежа привело к увеличению наращенной суммы ренты на 28 768.66 руб.

Рента с периодом больше года

Редко, но встречаются ренты, в которых платеж, равный R_r, выполняется один раз в r лет $(r > 1)$. Сложные проценты по годовой ставке i начисляются ежегодно. Изобразим эту ренту на оси времени:



Всего за n лет будет сделано n/r платежей[16]. Найдем наращенную к моменту n сумму S этой ренты. Последний платеж входит в наращенную сумму без изменения, то есть в размере R_r. Предпоследний платеж сделан за r лет до момента n, следовательно, в момент n наращенная на него сумма будет равна $R_r(1+i)^r$. Второй от конца платеж сделан за $2r$ лет от момента n, следовательно, наращенная на него сумма в момент n равна $R_r(1+i)^{2r}$. Последний платеж сделан за $n-r$ лет от момента n, следовательно, наращенная на него сумма в момент n равна $R_r(1+i)^{n-r}$. Наращенная за n лет сумма ренты равна:

$$S = R_r + R_r(1+i)^r + R_r(1+i)^{2r} + \ldots + R_r(1+i)^{n-r}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом b_1, равным R_r, знаменателем q, равным $(1+i)^r$, и числом

[16] Для простоты изложения, будем предполагать, что n/r — целое число.

членов, равным $k = n/r$. По формуле суммы первых k членов геометрической прогрессии находим:

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{R_r[((1+i)^r)^{\frac{n}{r}} - 1]}{(1+i)^r - 1} = R_r \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}\,.$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на i и применив формулу (6.2), получим формулы:

$$S = R_r \frac{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}}{\dfrac{(1+i)^r - 1}{i}}\,,$$

$$S = R_r \frac{s_{n;\,i}}{s_{r;\,i}}\,. \tag{6.8}$$

Рассмотрим пример на применение формулы (6.8).

Пример 6.4. *Предприятие образовало фонд развития, в который каждые 3 года отчисляет 40 млн руб., вкладывая их в банк, начисляющий на вложенные деньги 7% годовых. Какая сумма будет в фонде через 12 лет?*

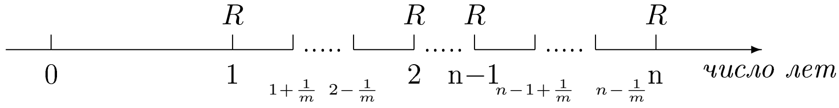
Решение. Взносы в фонд развития образуют ренту с периодом, равным 3 годам. Член ренты $R_r = 40$ млн руб., $r = 3$, $i = 0.07$, $n = 12$. Накопленную сумму вычисляем по формуле (6.8), подставляя в нее $s_{12;\,7\%} = 17.8885$, $s_{3;\,7\%} = 3.2149$:

$$S = 40\,000\,000 \times \frac{s_{12;\,7\%}}{s_{3;\,7\%}} = 40\,000\,000 \times \frac{17.8885}{3.2149} = 222\,569\,293.34 \text{ руб.} \quad \blacksquare$$

6.3.2. Ренты с начислением процентов m раз в год

Годовая рента

В этом случае платеж R выполняется в конце каждого года, а проценты начисляются m раз в год по ставке j_m, то есть каждый раз начисляется $j_m/m\%$. Изобразим такую ренту на оси времени:



Вычислим наращенную к моменту n сумму этой ренты.

Последний платеж входит в наращенную сумму без изменения. Предпоследний платеж делается за 1 год до момента n, и на него начисляются сложные проценты m раз по ставке j_m, то есть наращенная на этот платеж сумма в момент n будет равна

$$R\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m .$$

Третий от конца платеж делается за 2 года до момента n, и наращенная на этот платеж сумма в момент n будет равна

$$R\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{2m} .$$

Первый платеж делается за $n-1$ год до момента n, следовательно, в момент n наращенная на него сумма будет равна

$$R\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{(n-1)m} .$$

Для вычисления наращенной суммы платежей мы применяли формулу (3.5). Наращенная сумма ренты состоит из наращенных сумм платежей:

$$S=R+R\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m+R\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{2m}+\ldots+R\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{(n-1)m} .$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1=R$, знаменателем $q=(1+j_m/m)^m$ и числом членов $k=n$. Применим формулу (6.1) и получим:

$$S=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{R\left[\left(\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m\right)^n-1\right]}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m-1}=R\,\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m-1} .$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на j_m/m и применив обозначение из формулы (6.2), получим:

$$S=R\,\frac{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{j_m}{m}}}{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m-1}{\frac{j_m}{m}}}=R\,\frac{s_{mn;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{m;\,\frac{j_m}{m}}} . \tag{6.9}$$

Рассмотрим пример на вычисление наращенной суммы ренты по формуле (6.9). Он отличается от примера 6.1 только тем, что банк начисляет проценты 4 раза в год.

Пример 6.5. *Фирма для создания фонда помощи ветеранам труда вкладывает в конце каждого года по* 250 000 *руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке* $j_4 = 8\%$. *Какая сумма будет на счете фонда через* 5 *лет?*

Решение. Вклады в банк образуют ренту, для которой $R = 250\,000$ руб., $m = 4$, $nm = 5{\times}4 = 20$, $j_4/m = 8/4 = 2\,\%$. Вычисляем наращенную сумму ренты по формуле (6.9), подставляя в нее $s_{20;\,2\%} = 24.2974$, $s_{4;\,2\%} = 4.1216$:

$$S = 250\,000 \times \frac{s_{20;\,2\%}}{s_{4;\,2\%}} = 250\,000 \times \frac{24.2974}{4.1216} = 1\,473\,779.79 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Сравнивая ответ, полученный в примере 6.5, с ответом примера 6.1, находим, что начисление банком процентов 4 раза в год привело к увеличению наращенной суммы ренты на 7 129.54 руб.

p-срочная рента

В этом случае платежи производятся p раз каждый год через равные промежутки времени. Каждый платеж равен R/p. Проценты начисляются m раз в год по ставке j_m, то есть процент за один период равен $j_m/m\%$. На оси времени эту ренту можно изобразить так же, как в п. 6.3.1. Найдем наращенную сумму этой ренты в момент n.

На последний платеж проценты не начисляются, и он входит в наращенную сумму без изменения, то есть в размере R/p. На предпоследний платеж начисляются проценты по ставке j_m за период, равный $1/p$ части года, и наращенная к моменту n на этот платеж сумма по формуле (3.5) равна

$$\frac{R}{p}\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}} .$$

На второй с конца платеж начисляются проценты по ставке j_m за период, равный $2/p$ части года, и наращенная к моменту n на этот платеж сумма по формуле (3.5) равна

$$\frac{R}{p}\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{\frac{2m}{p}} .$$

Последний платеж делается за $n-\frac{1}{p}$ лет до момента n, то есть наращенная в момент n на этот платеж сумма, согласно формуле (3.5), равна:

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m(n-\frac{1}{p})}.$$

Вся наращенная на ренту сумма равна:

$$S=\frac{R}{p}+\frac{R}{p}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}+\frac{R}{p}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{2m}{p}}+\ldots+\frac{R}{p}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m\left(n-\frac{1}{p}\right)}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1=R/p$, знаменателем

$$q=\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

и числом членов $k=np$. Эта сумма равна:

$$S=\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}=\frac{R}{p}\times\frac{\left(\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\right)^{np}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}=$$

$$=\frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на j_m/m, получим формулы:

$$S=\frac{R}{p}\times\frac{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{j_m}{m}}}{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{\frac{j_m}{m}}}.$$

Заметим, что функция $s_{n;i}$ была определена при выводе формулы (6.2) только для целых значений n (n — число членов ренты). Так как значения m/p могут быть нецелыми, будем считать теперь, что эта функция определена при любых положительных значениях n. Теперь мы можем переписать последнее равенство в более компактном виде:

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{s_{mn;\, \frac{j_m}{m}}}{s_{\frac{m}{p};\, \frac{j_m}{m}}}\,. \tag{6.10}$$

Рассмотрим пример на вычисление наращенной суммы ренты по формуле (6.10). Он отличается от примера 6.5 только тем, что годовая сумма денег, которую фирма кладет на счет в банк, разбивается на два равных платежа.

Пример 6.6. *Фирма для создания фонда помощи ветеранам труда вкладывает два раза в год по* 125 000 *руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке* $j_4 = 8\%$. *Какая сумма будет на счете фонда через* 5 *лет?*

Решение. Вклады в банк образуют ренту, для которой $R = 250\,000$ руб., $m = 4$, $nm = 5 \times 4 = 20$, $m/p = 4/2 = 2$, $j_4/m = 8/4 = 2\,\%$. Вычисляем наращенную сумму ренты по формуле (6.10), подставляя в нее $s_{20;\,2\%} = 24.2974$, $s_{2;\,2\%} = 2.0200$:

$$S = 125\,000 \times \frac{s_{20;\,2\%}}{s_{2;\,2\%}} = 125\,000 \times \frac{24.2974}{2.0200} = 1\,503\,550.08 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Сравнивая ответ, полученный в примере 6.6, с ответом примера 6.5, находим, что разбиение годовой суммы на два равных платежа привело к увеличению наращенной суммы ренты на 29 770.29 руб.

p-срочная рента при $p = m$

Рассмотрим частный случай p-срочной ренты при $p = m$. Это означает, что количество, моменты платежей и начисления процентов совпадают. В этом случае формула (6.10) принимает вид:

$$S = \frac{R}{m} \times \frac{s_{mn;\, \frac{j_m}{m}}}{s_{1;\, \frac{j_m}{m}}}\,.$$

Последняя формула может быть упрощена за счет равенства:

$$s_{1;\, \frac{j_m}{m}} = \frac{(1 + \frac{j_m}{m})^1 - 1}{\frac{j_m}{m}} = 1.$$

Таким образом, получаем формулу:

$$S = \frac{R}{m} \times s_{mn;\, \frac{j_m}{m}}\,. \tag{6.11}$$

Рассмотрим пример на применение формулы (6.11).

Пример 6.7. *Чтобы накопить деньги на обучение дочери, отец решил ежегодно класть на счет в банке по 40 000 руб., делая равные взносы ежеквартально. Какая сумма будет на его счете через 3 года, если банк начисляет проценты на этот вклад по ставке $j_4 = 6\%$?*

Решение. Последовательность вкладов образует 4-срочную ренту, для которой $R = 40\,000$, $p = m = 4$, $j_4 = 0.06$, $mn = 12$. Любым из предложенных ранее способов можно вычислить, что $s_{12;\,6/4\%} = 13.0412$. Подставляем эти значения в формулу (6.11) и получаем ответ:

$$S = \frac{40\,000}{4} \times s_{12;\,1.5\%} = 10\,000 \times 13.0412 = 130\,412 \text{ руб.}$$ ■

Рента с периодом больше года

В этом случае платеж, равный R_r, осуществляется через каждые r лет ($r > 1$). Проценты начисляются по ставке j_m, то есть m раз в год через равные промежутки времени начисляются $j_m/m\%$. На оси времени эта рента изображается так же, как в п. 6.3.1. Найдем наращенную к моменту n сумму этой ренты.

Последний платеж входит в наращенную сумму без изменения, то есть в размере R_r. Предпоследний платеж сделан за r лет до момента n и каждый год на него начисляются сложные проценты m раз по $j_m/m\%$, то есть в момент n наращенная на этот платеж сумма будет, согласно формуле (3.5), равна

$$R_r \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mr}.$$

Второй от конца платеж сделан за $2r$ лет до момента n, то есть в момент n наращенная на этот платеж сумма равна

$$R_r \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{2mr}.$$

Первый платеж сделан за $n - r$ лет до момента n, то есть в момент n наращенная на этот платеж сумма равна

$$R_r \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m(n-r)}.$$

Вся наращенная сумма ренты равна:

$$S = R_r + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{2mr} + \ldots + R_r\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m(n-r)}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = R_r$, знаменателем

$$q = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}$$

и числом членов $k = n/r$. Находим эту сумму:

$$S = \frac{b_1(q^k-1)}{q-1} = \frac{R_r\left[\left(\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}\right)^{\frac{n}{r}} - 1\right]}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} - 1} = R_r\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} - 1}.$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на j_m/m и применив формулу (6.2), получим формулы:

$$S = R_r\,\frac{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{j_m}{m}}}{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr} - 1}{\frac{j_m}{m}}},$$

$$S = R_r\,\frac{s_{mn;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{mr;\,\frac{j_m}{m}}}. \tag{6.12}$$

Рассмотрим пример на применение формулы (6.12), который отличается от примера 6.4 только тем, что проценты начисляются по ставке j_4.

Пример 6.8. *Предприятие образовало фонд развития, в который каждые 3 года отчисляет 40 млн руб., вкладывая их в банк, начисляющий на вложенные деньги проценты по ставке $j_4 = 7\%$. Какая сумма будет в фонде через 12 лет?*

Решение. Взносы в фонд развития образуют ренту с периодом, равным 3 годам. Член ренты $R_r = 40$ млн руб., $r = 3$, $j_4 = 0.07$, $m = 4$, $mn = 48$,

$mr = 12$. Накопленную сумму вычисляем по формуле (6.12), подставляя в нее $s_{48;\,7/4\%} = 74.2628$, $s_{12;\,7/4\%} = 13.2251$:

$$S = 40\,000\,000 \times \frac{s_{48;\,7/4\%}}{s_{12;\,7/4\%}}. = 40\,000\,000 \times \frac{74.2628}{13.2251} = 224\,611\,588.25 \text{ руб.} \quad \blacksquare$$

Сравнивая ответ, полученный в примере 6.8, с ответом примера 6.4, находим, что начисление процентов по ставке j_4 привело к увеличению наращенной суммы ренты на 2 042 294.91 руб.

6.3.3. Ренты с непрерывным начислением процентов

Годовая рента

В этом случае сумма R выплачивается один раз в конце каждого года и на выплаченную сумму начисляются непрерывные проценты по ставке (силе роста) δ. Найдем наращенную в момент n сумму этой ренты. Графическое изображение этой ренты такое же, как в п. 6.2.

Последний платеж входит в наращенную в момент n сумму без изменения. Сумма, наращенная в момент n на предпоследний платеж, по формуле (3.8) равна Re^{δ}. Сумма, наращенная на второй от конца платеж, по формуле (3.8) равна $Re^{2\delta}$. Сумма, наращенная в момент n на первый платеж, по формуле (3.8) равна $Re^{(n-1)\delta}$. Наращенная сумма всей ренты равна:

$$S = R + Re^{\delta} + Re^{2\delta} + \ldots + Re^{(n-2)\delta} + Re^{(n-1)\delta}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = R$, знаменателем $q = e^{\delta}$ и числом членов $k = n$. По формуле суммы k первых членов геометрической прогрессии получаем:

$$S = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{R((e^{\delta})^n - 1)}{e^{\delta} - 1} = R\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1},$$

$$S = R\,\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}. \tag{6.13}$$

***p*-срочная рента**

В этой ренте p раз в год выплачивается сумма R/p и в конце года на все платежи начисляются непрерывные проценты по ставке δ.

Графическое изображение этой ренты такое же, как и в п. 6.3.1. Рассуждая так же, как там, после замены множителя $(1+i)^{1/p}$ на $e^{\delta/p}$ получим наращенную сумму ренты:

$$S = \frac{R}{p} + \frac{R}{p}\, e^{\frac{\delta}{p}} + \frac{R}{p}\, e^{2\frac{\delta}{p}} + \dots + \frac{R}{p}\, e^{\frac{(np-1)\delta}{p}}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = R/p$, знаменателем $q = e^{\delta/p}$ и числом членов $k = np$. По формуле суммы первых k членов геометрической прогрессии получаем формулы:

$$S = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{R}{p} \times \frac{\left(e^{\frac{\delta}{p}}\right)^{np} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1} = \frac{R}{p} \times \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1},$$

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}\,. \tag{6.14}$$

Рента с периодом больше года

В этой ренте сумма, равная R_r, выплачивается через каждые r лет ($r > 1$). Непрерывные проценты начисляются ежегодно по ставке δ. Изображение этой ренты на оси времени такое же, как в п. 6.3.1. Рассуждая так же, как там, после замены множителя $(1+i)^r$ на множитель $e^{\delta r}$ найдем наращенную сумму данной ренты к моменту n:

$$S = R_r + R_r e^{\delta r} + R_r e^{2\delta r} + \ldots + R_r e^{(n-r)\delta}.$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = R_r$, знаменателем $q = e^{\delta r}$ и числом членов $k = n/r$. Сумма членов этой прогрессии равна:

$$S = \frac{b_1(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{R_r\left((e^{\delta r})^{\frac{n}{r}} - 1\right)}{e^{\delta r} - 1} = R_r \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}\,,$$

$$S = R_r\, \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1}\,. \tag{6.15}$$

Приведем пример на вычисление наращенных сумм ренты при непрерывном начислении процентов.

Пример 6.9. *Для создания благотворительного фонда ежегодно выделяется по 120 тыс. руб., которые вкладываются в банк, начисляющий непрерывные проценты по годовой ставке* 10%. *Определим сумму, накопленную в фонде через 6 лет, если: а) взносы делаются в конце каждого года; б) равные взносы делаются ежемесячно.*

Решение. а) В этом случае взносы образуют годовую ренту с непрерывным начислением процентов с силой роста $\delta = 0.1$. Наращенную сумму вычисляем по формуле (6.13) при $\delta = 0.10$, $n = 6$:

$$S = R\,\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = 120\,000 \times \frac{e^{0.1\times 6} - 1}{e^{0.1} - 1} = 938\,037.41 \text{ руб.}$$

б) В этом случае взносы образуют 12-срочную ренту с непрерывным начислением процентов с силой роста $\delta = 0.1$. Наращенную сумму вычисляем по формуле (6.14) при $\delta = 0.1$, $n = 6$, $p = 12$:

$$S = R\,\frac{e^{\delta n} - 1}{p\left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1\right)} = 120\,000 \times \frac{e^{0.1\times 6} - 1}{12\left(e^{\frac{0.1}{12}} - 1\right)} = 982\,437.68 \text{ руб.}$$ ■

6.4. Вычисление платежей финансовой ренты

Из всех выведенных в этой главе формул для вычисления наращенных сумм ренты S легко получить формулы для определения рентных платежей R. Приведем пример.

Формула (6.3) устанавливает зависимость между четырьмя величинами: R, n, i, S. Следовательно, фиксировав значения трех из этих величин, получаем уравнение для определения четвертой. В том случае, если известны значения n, i и S, а требуется определить величину платежа R, то из формулы (6.3) получаем равенство:

$$R = \frac{S}{s_{n;\,i}}. \tag{6.16}$$

Рассмотрим пример на применение формулы (6.16).

Пример 6.10. *Сын хочет накопить за 5 лет* 50 000 *руб. к юбилею матери, делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по годовой ставке $i = 9.5\%$(сложных). Какую сумму ему придется вкладывать каждый год?*

Решение. По условию задачи имеем: $S = 50\,000$, $n = 5$, $i = 0.095$. Любым из предложенных ранее способов можно вычислить, что $s_{5;\,9.5\%} = 6.0446$. По формуле (6.16) получаем:

$$R = \frac{50\,000}{6.0446} = 8\,271.82 \text{ руб.}$$

Следовательно, в конце каждого года сын должен вкладывать в банк 8 271.82 руб. ■

Приведем пример на вычисление величины рентных платежей при непрерывном начислении процентов.

Пример 6.11. *Какую сумму надо выделять ежегодно для создания благотворительного фонда, чтобы за* 6 *лет накопить* 1 000 000 *руб. в каждом из случаев, описанных в примере 6.9?*

Решение. а) Из формулы (6.13) находим R при $S = 1\,000\,000$:

$$R = 1\,000\,000 \times \frac{e^{0.1} - 1}{e^{0.6} - 1} = 127\,926.67 \text{ руб.}$$

б) Из формулы (6.14) находим R при $S = 1\,000\,000$ и $p = 12$:

$$R = 1\,000\,000 \times 12 \times \frac{e^{0.1/12} - 1}{e^{0.6} - 1} = 122\,145.15 \text{ руб.}$$ ■

Следовательно, при непрерывном начислении процентов, если взносы делаются один раз в конце года, то, чтобы накопить 1 000 000 руб. за 6 лет, потребуется ежегодный взнос, равный 127 926.67 руб. При ежемесячных взносах общая сумма годового взноса будет меньше и составит 122 145.15 руб. В этом случае ежемесячный взнос составит

$$\frac{122\,145.15}{12} = 10\,178.76 \text{ руб.}$$ ■

6.5. Бессрочная рента

По количеству членов ренты делят на *конечные* или *ограниченные по срокам* и *бесконечные* или *бессрочные, вечные. Бессрочная рента* (далее мы будем использовать именно этот термин), или *перпетуитет* — это рента, выплаты которой не ограничены никаким сроком. Иначе говоря, число членов такой ренты бесконечно. Приведем пример бессрочной ренты. Некоторое благотворительное общество положило в банк определенную сумму денег и перечисляет ежегодно проценты, начисляемые на эту сумму, в пользу детского дома. Количество платежей, которые получит детский дом, ограничено только сроком существования банка, в котором размещены деньги. Следовательно, если пренебречь возможностью разорения банка, эти платежи образуют бессрочную ренту.

Обычно считается, что рента является бессрочной, когда количество платежей ее весьма велико и их прекращение не оговаривается конкретной датой. Как бессрочную ренту можно рассматривать выплату фиксированных купонных платежей по облигационным займам с большим сроком действия. Приведем примеры, демонстрирующие, что выпуск вечных, по существу, облигаций (или бондов) популярен и в наши дни у правительств разных стран. В феврале 2005 г. Франция разместила 50-летние облигации, спрос на которые в 3 раза превысил предложение. В этом же году Нидерланды разместили 30-летние облигации. А в феврале 2006 г. Минфин США выпустил 30-летние облигации на сумму \$14 млрд, спрос на них более чем в 2 раза превысил предложение.

Классификация бессрочных рент по способам начисления процентов и срокам выполнения платежей (обычные и авансированные) полностью совпадает с классификацией конечных рент. Для бессрочной ренты верны все приведенные в этой главе формулы, если применять эти формулы для определения наращенной суммы бессрочной ренты за n периодов. Не так будет обстоять дело при оценивании приведенной ценности ренты, которую мы будем рассматривать в следующей главе.

6.6. Погашение долгосрочной задолженности единовременным платежом

Рассмотрим следующую ситуацию. Должник взял ссуду, равную S руб., которую он должен вернуть через n лет одним платежом. Ежегодно до момента погашения ссуды он должен выплачивать кредитору проценты по ставке q. Одновременно с получением ссуды должник создает погасительный (амортизационный или страховой) фонд, в который делает в конце каждого года равные взносы с целью накопить к моменту возвращения долга сумму S. На деньги, находящиеся в фонде, должник получает $i\%$ в год. Требуется определить, так называемую, *срочную уплату* α, то есть суммарные ежегодные выплаты должника за использование ссуды.

Срочная уплата состоит из выплачиваемых на долг процентов, которые равны Sq, и взноса в страховой фонд, который мы обозначим через R. Взносы R образуют обычную годовую ренту, состоящую из n членов, наращенная сумма которой в момент n должна быть равна S. По формуле (6.16) $R = S/s_{n;i}$. Следовательно, срочная уплата равна:

$$\alpha = Sq + \frac{S}{s_{n;\,i}}\,. \tag{6.17}$$

Рассмотрим пример на применение формулы (6.17).

Пример 6.12. *Кредит в 1 млн руб. получен фирмой в банке под 13% годовых на 4 года. Одновременно с получением кредита для его погашения создан страховой фонд, в который делаются равные ежегодные взносы. На деньги, внесенные в фонд, выплачиваются 5% годовых. Найдем ежегодную срочную уплату по долгу.*

Решение. По формуле (6.17) при $S = 1\,000\,000$, $q = 0.13$, $n = 4$, $i = 0.05$ находим величину срочной уплаты, предварительно вычислив, что $s_{4;\,5\%} = 4.3101$:

$$\alpha = 1\,000\,000 \times 0.13 + \frac{1\,000\,000}{4.3101} = 362\,011.84 \text{ руб.}$$ ■

При других условиях начисления процентов страховым фондом будут возникать иные виды рент и потребуется использовать соотвествующие им формулы ((6.3) – (6.15)).

Погашение долгосрочной задолженности несколькими платежами будет рассмотрено в п. 7.4.

6.7. Инвестиции в предприятия, использующие невосполняемые ресурсы

Рассмотрим инвестиции в предприятия, использующие невосполняемые ресурсы, — таковыми, например, являются предприятия добывающей промышленности. Капиталовложения делаются с таким расчетом, чтобы получать в течение срока действия предприятия определенный ежегодный доход и накопить к моменту истощения ресурсов, используемых предприятием (запасов ископаемых, например), страховой фонд, равный сумме инвестиций. Рассмотрим пример.

Пример 6.13. *Предприниматель хочет купить золотой рудник, который по прогнозам будет давать в течение следующих* 10 *лет по* 20 *млн руб. дохода в год, после чего окажется полностью исчерпанным. Предприниматель хочет получать* 25% *ежегодного дохода на вложенную сумму. Одновременно он собирается установить страховой фонд, чтобы накопить к концу срока действия рудника вложенную сумму. Сколько предприниматель может заплатить за рудник, если по вложениям в страховой фонд он будет получать* 10% *в год?*

Решение. Обозначим максимальную цену покупки через S. Ежегодные вклады в страховой фонд, которые мы обозначим через R, образуют ренту, наращенная сумма которой равна S. По формуле (6.16) получаем равенство, которое связывает две эти (неизвестные) величины:

$$R = \frac{S}{s_{n;\,i}} = \frac{S}{s_{10;\,10\%}}\,.$$

Годовой доход от рудника, равный 20 000 000 руб., состоит из вклада в страховой фонд и дохода, составляющего 25% от вложенной суммы, то есть равного $0.25 \times S$ руб. Можно вычислить, что $s_{10;\,10\%} = 15.9374$. Следовательно, сумма S должна удовлетворять уравнению:

$$0.25S + \frac{S}{s_{10;\,10\%}} = 0.25S + \frac{S}{15.9374} = 20\,000\,000.$$

Решив последнее уравнение, находим максимальную цену покупки:

$$S = 63\,949\,783 \text{ руб.}$$ ■

6.8. Используем Excel

Как следует из материала, изложенного ранее в этой главе, количественный анализ рент сводится к вычислению следующих их характеристик:

— приведенная ценность потока платежей,
— будущая величина потока платежей,
— величина отдельного платежа,
— норма доходности (процентная ставка),
— количество периодов проведения платежей.

Все эти характеристики, за исключением приведенной ценности, связывает зависимость, выражающаяся в простейшем случае, когда платежи и начисления процентов выполняются один раз в конце каждого периода, формулами (6.2) и (6.3):

$$S = Rs_{n;\,i}, \quad s_{n;\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\,.$$

Ранее в этой главе на многочисленных примерах было показано, как, зная значения величин R, n и i, вычислить наращенную сумму ренты S, или, зная значения величин S, n и i, вычислить величину платежа R. Не представляет труда записать приведенные решения примеров на рабочих листах Excel. Еще раз отметим, что эти решения станут существенно компактней и наглядней, если создать на VBA две функции, которые мы назвали AnnCoeff и AnnPCoeff. Функция AnnCoeff реализует функцию $s_{n;\,i}$, а AnnPCoeff — функцию $s^{(p)}_{n;\,i}$:

$$s_{n;\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad s^{(p)}_{n;\,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}\,.$$

Приведем тексты этих функций (листинг 6.1). Для читателей, хоть немного знакомых с программированием на VBA, не составит труда включить их в свой модуль и использовать при решении примеров и упражнений из книги. Всех остальных отсылаем к приложению Б, в котором подробно объяснено, как это сделать.

Листинг 6.1

```
Function AnnCoeff(n As Single, i As Single) As Single
      AnnCoeff = ((1 + i) ^ n - 1) / i
End Function

Function AnnPCoeff(n As Single, i As Single, p As Integer) _
      As Single
      AnnPCoeff = ((1 + i) ^ n - 1) / p / ((1 + i) ^ (1 / p) - 1)
End Function
```

На рис. 16 приведен фрагмент рабочего листа с решением примера 6.5. В решении дважды используется функция AnnCoeff (ячейки C11 и C12).

	A	B	C
1	**Раздел: Финансовые ренты**		
2			
3	**Пример 6.5 (наращенная сумма ренты)**		
4	*Данные:*		
5	Ставка (j_4)	8%	
6	Количество периодов	5	
7	Платеж	250 000р.	
8	*Вопрос:*		
9	Наращенная сумма ренты?		
10	*Решение:*		
11	s(20;2%) =	24.2974	=AnnCoeff(20;0.02)
12	s(4;2%) =	4.1216	=AnnCoeff(4;B5/4)
13	Наращенная сумма ренты =	**1 473 779.79р.**	=B7*B11/B12
14			
15	Увеличение суммы на	**7 129.54р.**	
16			

Рис. 16. Пример на вычисление наращенной суммы ренты

Если известны значения величин R, S и n, а требуется вычислить, какая ставка процента i применялась, то прямую формулу для вычисления значения i написать невозможно, так как i является корнем уравнения степени n. Простейший выход в этом случае — использовать встроенную функция СТАВКА.

В том случае, если известны значения величин R, S и i, а требуется вычислить, сколько периодов n проводились платежи, можно вывести необходимую формулу. В простейшем случае, когда платежи и начисления процентов выполняются один раз в конце каждого периода, из формул (6.2) и (6.3) получим формулу:

$$n = \frac{\ln(1 + \dfrac{S}{R} i)}{\ln(1 + i)} \,.$$

Однако в этой ситуации имеется другая возможность для вычисления количества периодов n — воспользоваться имеющейся для этого в Excel встроенной финансовой функцией КПЕР. Но прежде чем привести пример с использованием этой функции, сообщим общую информацию о встроенных в Excel финансовых функциях, предназначенный для анализа потока платежей.

В Excel имеется девять встроенных функций для вычисления характеристик потока платежей. Эти функции, как и большинство финансовых функций в Excel, содержатся в Пакете анализа, поэтому перед выполнением примеров и упражнений из этого раздела проверьте, установлен ли этот пакет установлен на вашем компьютере[17].

В пакете Excel в связи с реализацией набора финансовых функций выделено небольшое количество базовых понятий, которым присвоены имена, по возможности отражающие их содержание. В принципе в локализованной версии MS Office (а мы предполагаем, что читатель работает в русской версии) должны работать как английские, так и локальные наименования. Однако по нашему опыту это не всегда выполнено строго, поэтому рекомендуем использовать русские имена, а также учесть, что, в отличие от весьма стабильных наименований в английской версии, имена в русификации постоянно меняются от одного поколения продукта к другому (напомним, что мы в этой книге ориентируемся на MS Office 2003). Например, функция, вычисляющая процентную ставку ренты, в MS Office 2000 называлась НОРМА, тогда как в MS Office 2003 она превратилась в функцию СТАВКА, оставаясь, по-прежнему, RATE в базовом англоязычном пакете. Начнем с перечисления названий аргументов финансовых функций в той терминологии, которая использована в справочной системе MS Office 2003. Для удобства читателя соберем эти термины в следующей таблице:

Аргумент	**Назначение**
ставка	процентная ставка
кол_пер	количество периодов проведения операции
период	порядковый номер периода (от 0 до кол_пер)
платеж	величина периодического платежа
нач_сум	начальная сумма
буд_ст	будущая стоимость
тип	тип начисления процентов (1 — начало, 0 — конец периода)

Приведем теперь таблицу, в которой содержатся имена функций (в русифицированной и англоязычной версиях) анализа регулярных потоков,

[17] Если Excel установлен в полном объеме, то Пакет анализа всегда доступен.

их аргументы и вычисляемые величины:

Функция	**Аргументы**	**Вычисляемая величина**
БС FV	(ставка;кол_пер;платеж [;нач_сум][;тип])	будущая величина потока
КПЕР NPER	(ставка;платеж;нач_сум [;буд_ст][;тип])	количество выплат
СТАВКА RATE	(кол_пер;платеж;нач_сум [;буд_ст][;тип][;прогноз])	процентная ставка
ПЛТ PMT	(кол_пер;платеж;нач_сум [;буд_ст][;тип])	величина периодического платежа
ПС PV	(ставка;кол_пер;платеж; [;буд_ст][;тип])	современная ценность потока платежей
ПЛПРОЦ IPMT	(ставка;период;кол_пер; нач_сум;буд_ст[;тип])	выплата по процентам в указанный период
ОСНПЛАТ PPMT	(ставка;период;кол_пер; нач_сум;буд_ст[;тип])	величина основного платежа в указанный период
ОБЩПЛАТ CUMIPT	(ставка;кол_пер;нач_сум; нач_пер;кон_пер;буд_ст;тип)	сумма накопленных процентов
ОБЩДОХОД CUMPRINC	(ставка;кол_пер;нач_сум; нач_пер;кон_пер;буд_ст;тип)	накопленная сумма погашенного долга

На рис. 17 приведен фрагмент рабочего листа с решением примера 6.1 с использованием встроенной функции БС и функции AnnCoeff. Как видно на рисунке, результаты вычислений совпадают.

Как было отмечено выше, с помощью встроенных функций можно выполнить вычисления в ситуациях, когда отсутствуют формулы для прямого счета. Примером такой ситуации является необходимость определения срока погашения долга, взятого на определенных условиях. Рассмотрим конкретный пример.

Пример 6.14. *Г-н Сидоров получил ссуду в размере* 100 000 *руб. под 8% годовых и согласен выплачивать ежемесячно по* 2 000 *руб. в счет его погашения. Сколько месяцев потребуется для выплаты всей суммы ссуды?*

Решение. В приведенной выше таблице находим функцию КПЕР, которая определяет необходимое для погашения ссуды количество выплат. Введем в любую ячейку формулу:

	A	B	C	D
1	**Глава: Финансовые ренты**			
2				
3	**Пример 6.1 (наращенная сумма ренты)**			
4	*Данные:*			
5	Ставка	8%		
6	Количество периодов	5		
7	Платеж	- 250 000р.		
8	*Вопрос:*			
9	Наращенная сумма ренты?			
10	*Решение:*			
11	Наращенная сумма ренты =	**1 466 650.24р.**	=БС(B5;B6;B7)	
12	*Проверка:*			
13	s(5,8%) =	5.8666	=AnnCoeff(B6;B5)	
14	Наращенная сумма ренты =	1 466 650.25р.	=-B7*B13	
15	БС(B5;B6;-1) =	5.8666	=БС(B5;B6;-1)	
16				

Рис. 17. Пример на вычисление наращенной стоимости ренты

=КПЕР(8%/12;-2000;100000)

и определим, что для выплаты ссуды потребуется 61 месяц. Для того чтобы иметь возможность решать этот пример с другими данными (например, может измениться процент, под который предоставляется ссуда), следует использовать в формуле в качестве параметров не числа, а относительные адреса. ∎

На рис. 18 приведен фрагмент рабочего листа с решением примера 6.14.

Сделаем некоторые замечания, касающиеся применения функции КПЕР. Аргумент платеж может оказаться слишком мал, чтобы можно было вернуть ссуду. В этом случае в ячейке с формулой появится сообщение об ошибке: # ЧИСЛО!. Для возврата ссуды необходимо, чтобы ежемесячные выплаты были больше соответствующей процентной ставки, умноженной на полную величину ссуды. В рассмотренном примере величина ежемесячных выплат должна быть больше 666 руб.

Обратим внимание читателя на важное правило, которое следует соблюдать при задании аргументов, являющихся суммами денег. Оно касается всех функций из таблицы.

Если некоторые суммы денег являются платежами (расходами), то соответствующие аргументы должны указываться со знаком минус. На-

	A	B	C
1	**Раздел: Финансовые ренты**		
2			
3	**Пример 6.14 (количество платежей)**		
4	*Данные:*		
5	Ставка	8%	
6	Платеж	2 000р.	
7	Сумма займа	100 000р.	
8	*Вопрос:*		
9	Количество платежей?		
10	*Решение:*		
11	Количество платежей =	**61**	=КПЕР(B5/12;-B6;B7)
12			

Рис. 18. Пример на определение количества платежей

пример, в формуле в ячейке B11 (рис. 18) знак минус поставлен перед аргументом из ячейки B6 (величина платежа). Знак минус можно указывать либо в ячейках с данными, либо в формуле перед соответствующими аргументами.

Если значением формулы является величина *платежа*, то это значение также выдается со знаком минус. На экране монитора в этом случае и число, и знак минус перед ним выделяются красным цветом.

Упражнения

1. Торговая фирма вкладывает 25 000 руб. в конце каждого года в банк, выплачивающий проценты по ставке 5% годовых (сложных). Какая сумма будет на счете фирмы: а) через 3 года, б) через 10 лет?

2. Решите упражнение 1 в предположении, что фирма вкладывает в конце каждого квартала четверть годовой суммы. Банк выплачивает проценты по ставке $j_4 = 5\%$.

3. Фермер хочет накопить за 6 лет 40 000 руб. для покупки трактора, делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $i = 10\%$ годовых (сложных). Какую сумму ежегодно должен фермер вкладывать в банк?

4. Решите упражнение 3 в предположении, что фермер делает ежемесячные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $j_{12} = 5\%$.

5. Акционерное общество по производству радиотехники образовало фонд для покупки техники, вкладывая в него ежегодно 300 000 руб. При этом

каждое полугодие оно делает равные вклады в банк, который выплачивает 5% годовых (сложных). Какая сумма будет на счете АО через 4 года?

6. Какую сумму должно вкладывать АО из предыдущего упражнения ежегодно, если ему необходимо накопить за 4 года 2 млн руб.?

7. Предприятие создает фонд для постройки нового здания, вкладывая в него каждые 4 года 15 млн руб. Деньги кладутся в банк, выплачивающий 5% годовых (сложных). Какая сумма будет в фонде через 16 лет?

8. Какую сумму должно вкладывать в банк предприятие в условиях предыдущего упражнения, чтобы через 20 лет накопить 120 млн руб., необходимых для постройки здания?

9. Судостроительная фирма кладет в конце каждого года 120 000 руб. в банк, который выплачивает сложные проценты по ставке $j_6 = 8\%$. Какую сумму накопит фирма за 10 лет?

10. Какую сумму должна класть в банк в конце каждого года фирма из предыдущего упражнения, чтобы за 10 лет накопить 2 млн руб.?

11. Фирма из упражнения 9 желает вносить в банк ежеквартально по 30 000 руб. Какую сумму она накопит за 10 лет?

12. Какую сумму должна вносить ежеквартально фирма из упражнения 9, чтобы за 15 лет накопить 3 млн руб.?

13. Банк выплачивает на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4 = 3\%$. Клиент вкладывает в этот банк ежегодно 800 руб., делая равные вклады в конце каждого квартала. Какая сумма будет на счете этого клиента через 5 лет?

14. Какую сумму должен вкладывать ежегодно клиент из предыдущего упражнения, чтобы за 6 лет накопить 6 000 руб.?

15. Банк на вложенные в него деньги начисляет непрерывные проценты по ставке (силе роста) $\delta = 8\%$. Клиент вкладывает в этот банк в конце каждого года 500 руб. Какая сумма будет на его счете через 7 лет 6 месяцев?

16. Клиент из предыдущего упражнения хочет вносить ту же годовую сумму поквартально равными взносами. Какую сумму он накопит за 7 лет 6 месяцев?

17. Владелец мастерской вкладывает каждые 2 года по 1.5 тыс. руб. в банк из упражнения 15, накапливая деньги для покупки оборудования. Какую сумму он накопит за 6 лет?

18. Какую сумму должен вкладывать владелец мастерской из упражнения 17, чтобы за 6 лет накопить 7 тыс. руб.?

19. Фермер взял в банке 5 тыс. руб. под 15% годовых на 5 лет. Для погашения долга он образовал страховой фонд, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги 10% годовых. Найдите ежегодную срочную уплату по долгу.

20. Решите предыдущее упражнение при условии, что на деньги, вкладываемые в страховой фонд, начисляются 8% годовых.

21. Решите упражнение 19 при условии, что в фонд делаются равные ежегодные взносы и на них начисляются проценты по ставке $j_4 = 10\%$.

22. Решите упражнение 19 при условии, что в фонд делаются равные ежеквартальные взносы и на них начисляются проценты по ставке 10% годовых.

23. Решите упражнение 19 при условии, что в фонд делаются равные ежеквартальные взносы, на которые начисляются проценты по ставке $j_6 = 10\%$ годовых.

24. Владелец магазина получил в банке ссуду 2 млн руб. сроком на 3 года. Банк за ссуженные деньги взимает 12% в год. Одновременно владелец магазина создал страховой фонд для погашения ссуды, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги проценты по ставке $j_4 = 8\%$. Какова ежегодная срочная уплата по долгу?

25. Какова ежегодная срочная уплата владельца магазина из упражнения 24, если на деньги, внесенные в фонд, начисляются непрерывные проценты с силой роста $\delta = 8\%$?

26. Нефтедобывающая компания покупает нефтеносный участок, который будет приносить в течение 20 лет доход 5 млн руб. ежегодно, после чего запасы нефти истощатся. Компания желает получать 12% ежегодного дохода на вложенную сумму. Одновременно она образует страховой фонд, чтобы к моменту истощения запасов нефти на участке накопить сумму, которую она заплатила за этот участок. На деньги, вложенные в фонд, она получает 8% в год. Какую сумму компания должна заплатить за участок?

27. Компания из упражнения 26 заплатила за участок 50 млн. руб. Какую сумму она должна ежегодно вносить в страховой фонд и каким будет ее ежегодный чистый доход? Сколько процентов от вложенной суммы составит чистый годовой доход?

28. Владелец автомастерской кладет в банк в конце каждых двух лет 100 тыс. руб. Какая сумма будет на счете владельца мастерской через 10 лет, если: а) на деньги начисляются сложные проценты по ставке $j_4 = 8\%$, б) банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta = 8\%$?

7. Приведенная ценность финансовой ренты

В главах 2 и 5 уже рассматривался вопрос о приведенной ценности денежного потока. Такая же задача может быть поставлена и относительно финансовой ренты. Например, желая создать фонд для выплаты именных стипендий, основатель фонда должен знать, какую сумму необходимо вложить в этот фонд при его создании. Эта сумма равна приведенной ценности финансовой ренты, которую составляют выплаты стипендий. *Приведенной ценностью ренты* будем называть приведенную ценность ее наращенной суммы.

7.1. Функция $a_{n;i}$

Рассмотрим ренту, состоящую из n платежей, каждый из которых равен R и делается в конце каждого периода начисления процентов. Если за каждый период начисляются сложные проценты по ставке i, то наращенная сумма S этой финансовой ренты, согласно формуле (6.2), вычисляется по формуле

$$S = Rs_{n;\,i}.$$

Приведенная ценность ренты равна приведенной ценности ее наращенной суммы, следовательно, приведенная ценность ренты, согласно формуле (3.6), равна:

$$PV = S(1+i)^{-n} = Rs_{n;\,i}(1+i)^{-n} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} = \\ = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Применяя обозначение PV для приведенной ценности денег в момент 0 (см. формулу (5.1)), будем обозначать приведенную ценность ренты, состоящей из n членов, равных R, через $PV(R,n)$, а если из контекста значения R и n ясны, то — PV.

В финансовых вычислениях для величины, на которую умножается R в последней формуле, принято использовать следующее обозначение:

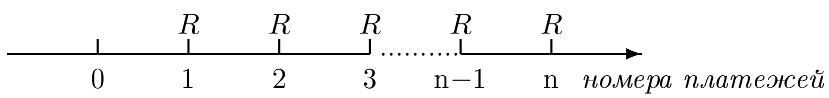
$$a_{n;\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,. \tag{7.1}$$

Тогда приведенная ценность ренты, состоящей из n периодических платежей, равных R каждый, на которые начисляются сложные проценты по ставке i за каждый период, выразится формулой:

$$PV(R,n) = PV = Ra_{n;\,i}. \tag{7.2}$$

Из формулы (7.2) видно, что значение функции $a_{n;\,i}$ — это приведенная ценность финансовой ренты, состоящей из n платежей, равных 1. Раньше для выполнения вычислений, использующих функцию $a_{n;\,i}$, применялись специальные таблицы этой функции для различных значений n и i. Как и в случае с функцией $s_{n;\,i}$, мы рекомендуем при решении примеров и упражнений, когда необходимо вычислить значение функции $a_{n;\,i}$, использовать финансовый калькулятор или программу Excel. Заметим, что функция $a_{n;\,i}$ не входит в число встроенных финансовых функций Excel. Но это легко исправить, так как нетрудно написать свою функцию, выполняющую вычисления по формуле (7.1), на VBA. Как это сделать, подробно объяснено в Приложении Б.

Покажем, что формулу (7.2) можно вывести, не используя формулу (6.3). Изобразим ренту, состоящую из n платежей, на оси времени:



По формуле (3.6) имеем: ценность первого платежа в момент 0 равна $R(1+i)^{-1}$; ценность второго платежа в момент 0 равна $R(1+i)^{-2}$ и т. д.; ценность n-го, последнего платежа, в момент 0 равна $R(1+i)^{-n}$. Суммарная ценность всех платежей в момент 0 (приведенная ценность ренты) равна:

$$PV(R,n) = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-n}.$$

Теперь применим формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = R(1+i)^{-1}$ и знаменателем $q = (1+i)^{-1}$. Выполнив приведенные ниже преобразования, получим формулу (7.2):

$$PV(R,n) = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{R(1+i)^{-1}[(1+i)^{-n} - 1]}{(1+i)^{-1} - 1} =$$

$$= \frac{R(1+i)^{-1}[(1+i)^{-n} - 1]}{\dfrac{1-(1+i)}{1+i}} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;\,i}.$$

7.2. Как обеспечить получение ренты в будущем

Покажем, что с помощью формулы (7.2) можно решать задачи следующего содержания: какую сумму надо вложить в определенный момент времени под $i\%$, чтобы иметь возможность получать сумму R в конце каждого из n следующих периодов начисления процентов?

Не умаляя общности, можно считать, что определяемая сумма S размещается на счете в момент 0. Запишем необходимые условия получения требуемых платежей. Чтобы получить в момент 1 сумму R, необходимо вложить в момент 0 сумму $R(1+i)^{-1}$. Чтобы получить в момент 2 сумму R, необходимо вложить в момент 0 сумму $R(1+i)^{-2}$ и т. д. Чтобы получить в момент n сумму R, необходимо вложить в момент 0 сумму $R(1+i)^{-n}$. Эти величины совпадают с полученными в п. 7.1. Следовательно, суммируя их, как и там, получим формулу (7.2). Но теперь эта формула выражает сумму, которую надо вложить в момент 0, чтобы получить в конце следующих периодов n платежей, равных R каждый.

Пример 7.1. *Фирма собирается оплатить получение высшего образования своему сотруднику. Продолжительность обучения* 5 *лет, стоимость* — 100 000 *руб. за один учебный год (деньги вносятся в начале учебного года). За год до начала учебы фирма открывает счет в банке, который будет начислять на этот счет проценты по ставке* 11% *годовых (сложных). Какую сумму необходимо положить на счет при открытии, чтобы имеющихся на счете денег хватило на оплату учебы в течение пяти лет?*

Решение. Необходимая сумма равна ценности в момент 0 ренты, состоящей из пяти платежей по 100 000 руб. каждый, при $i = 11\% = 0.11$. По формуле (7.2) имеем:

$$PV = Ra_{n;\,i}\,.$$

Любым из предложенных выше способов можно вычислить, что $a_{5;\,11\%} = 3.6959$. Подставив найденное значение в формулу, получаем ответ:

$$PV = 100\,000 \times 3.6959 = 369\,590 \text{ руб.}$$

Заметим, что найденная сумма является минимально необходимой для оплаты учебы. Если в начальный момент на счет будет положена именно такая сумма (369 589.71 руб.), то денег хватит на оплату обучения и на счете не останется денег после последней (пятой) уплаты. ■

7.3. Приведенная ценность различных рент

Рассмотрим теперь приведенную ценность имеющихся типов финансовых рент при различных способах начисления процентов: в конце года, m раз в год, непрерывном.

7.3.1. Ренты с начислением процентов в конце года

Годовая рента

Приведенная ценность этой ренты определяется по формуле (7.2), где n — число лет, i — годовая ставка сложных процентов.

***p*-срочная рента**

Используя формулы (3.6) и (6.6), находим современную ценность PV этой ренты:

$$PV = S(1+i)^{-n} = Rs_{n;\,i}^{(p)}(1+i)^{-n} =$$
$$= R\,\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}(1+i)^{-n} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}\,.$$

Введем обозначение:

$$a_{n;\,i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}\,.$$

Тогда формула для PV принимает вид:

$$PV = Ra_{n;\,i}^{(p)}\,. \tag{7.3}$$

Коэффициент $a_{n;\,i}^{(p)}$ можно представить в виде произведения:

$$a_{n;\,i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times \frac{i}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}\,,$$

то есть верна формула:

$$a_{n;\,i}^{(p)} = a_{n;\,i} K_{p;\,i}\,, \tag{7.4}$$

где $K_{p;\,i}$ — коэффициент, определяемый формулой (6.7).

Рента с периодом больше года

Используя формулы (3.6) и (6.8), найдем значение приведенной ценности этой ренты:

$$PV = S(1+i)^{-n} = R_r \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1}(1+i)^{-n} =$$

$$= R_r \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r-1} = R_r\,\frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}{\dfrac{(1+i)^r-1}{i}} = R_r\,\frac{a_{n;\,i}}{s_{r;\,i}}\,.$$

Таким образом, формула для приведенной ценности ренты с периодом больше года имеет вид:

$$PV = R_r\,\frac{a_{n;\,i}}{s_{r;\,i}}\,. \tag{7.5}$$

7.3.2. Ренты с начислением процентов m раз в год

Годовая рента

Используя формулы (3.7) и (6.9), находим значение приведенной ценности этой ренты:

$$PV = S\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm} = R\,\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm} =$$

$$= R\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1} = R\,\frac{\dfrac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j_m}{m}}}{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}-1}{\frac{j_m}{m}}} = R\,\frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{m;\,\frac{j_m}{m}}}\,.$$

Итак, приведенная ценность рассматриваемой ренты может быть вычислена по формуле:

$$PV = R\,\frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{m;\,\frac{j_m}{m}}}\,. \tag{7.6}$$

p-срочная рента

Применяя формулы (3.7) и (6.10), получаем:

$$PV = S\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm} = \frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm} =$$

$$= \frac{R}{p}\times\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{R}{p}\times\frac{\dfrac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j_m}{m}}}{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{\frac{j_m}{m}}} = \frac{R}{p}\times\frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{\frac{m}{p};\,\frac{j_m}{m}}}\,.$$

Итак, приведенная ценность ренты в данном случае равна:

$$PV = \frac{R}{p}\times\frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{\frac{m}{p};\,\frac{j_m}{m}}}\,. \tag{7.7}$$

p-срочная рента при $p = m$

В п. 6.3 было доказано, что $s_{1;\,j_m/m} = 1$, поэтому формула (7.7) в этом случае принимает вид:

$$PV = R\,\frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{m}\,. \tag{7.8}$$

Рента с периодом больше года

Применяя формулы (3.7) и (6.12), получаем:

$$PV = S\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm} = R_r\,\frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm} =$$

$$= R_r\,\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1} = R_r\,\frac{\dfrac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j_m}{m}}}{\dfrac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mr}-1}{\frac{j_m}{m}}} = R_r\,\frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{mr;\,\frac{j_m}{m}}}\,.$$

Итак, приведенная ценность ренты в данном случае равна:

$$PV = R_r \frac{a_{nm;\,\frac{jm}{m}}}{s_{mr;\,\frac{jm}{m}}}. \tag{7.9}$$

7.3.3. Рента с непрерывным начислением процентов

Годовая рента

Применяя формулы (3.9) и (6.13), получаем:

$$PV = Se^{-\delta n} = R\,\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}e^{-\delta n} = R\,\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}.$$

Итак, приведенная ценность ренты равна:

$$PV = R\,\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}. \tag{7.10}$$

***p*-срочная рента**

Применяя формулы (3.9) и (6.14), получаем:

$$PV = Se^{-\delta n} = \frac{R}{p}\times\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}\times e^{-\delta n} = \frac{R}{p}\times\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}.$$

Таким образом, приведенная ценность ренты равна:

$$PV = \frac{R}{p}\times\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}. \tag{7.11}$$

Рента с периодом больше года

Применяя формулы (3.9) и (6.15), получаем:

$$PV = Se^{-\delta n} = R_r\,\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta r}-1}e^{-\delta n} = R_r\,\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta r}-1}.$$

Приведенная ценность ренты равна:

$$PV = R_r\,\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta r}-1}. \tag{7.12}$$

Приведем теперь примеры, при решении которых используются выведенные выше формулы.

Пример 7.2. *Какую сумму необходимо положить в начальный момент в банк, чтобы иметь возможность в течение следующих 5 лет ежегодно снимать со счета 50 000 руб., исчерпав счет полностью к концу срока. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке: а) годовой $i = 8\%$, б) $j_4 = 8\%$, в) непрерывной $\delta = 8\%$?*

Решение. Во всех случаях требуется найти приведенную ценность годовой ренты. В случае а) проценты начисляются в конце года. Применяем формулу (7.2):

$$PV = Ra_{n;\,i} = 50\,000\,a_{5;\,8\%}.$$

Вычисляем, что $a_{5;\,8\%} = 3.9927$ и подставляем в формулу:

$$PV = 50\,000 \times 3.9927 = 199\,635 \text{ руб.}$$

б) В этом случае проценты начисляются 4 раза в год. Применяем формулу (7.6) при $n = 5$, $m = 4$, $j_m/m = 8\%/4 = 2\%$:

$$PV = R\,\frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{m;\,\frac{j_m}{m}}} = 50\,000\,\frac{a_{20;\,2\%}}{s_{4;\,2\%}}.$$

По формулам (7.1) и (6.2) находим значения:

$$a_{20;\,2\%} = \frac{1-(1+0.02)^{-20}}{0.02} = 16.3514, \quad s_{4;\,2\%} = \frac{(1+0.02)^4-1}{0.02} = 4.1216.$$

Подставляем вычисленные значения и получаем ответ:

$$PV = 50\,000 \times \frac{16.3514}{4.1216} = 198\,362.31 \text{ руб.}$$

в) В этом случае применяем формулу (7.10) при $n = 5$, $\delta = 0.08$:

$$PV = R\,\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1} = 50\,000\,\frac{1-e^{-0.08\times 5}}{e^{0.08}-1} = 197\,917.85 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Пример 7.3. *Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение следующих 5 лет ежегодно получать 300 000 руб., полностью исчерпав счет к концу этого срока. Деньги будут сниматься каждые 2 месяца равными частями. Банк начисляет на находящиеся на счету деньги проценты по ставке: а) годовой $i = 8\%$, б) годовой $j_4 = 8\%$, в) непрерывной годовой $\delta = 8\%$.*

Решение. Во всех случаях требуется найти современную ценность p-срочной ренты при $p = 6$.

а) В этом случае проценты начисляются только в конце года. Применяем формулу (7.3) при $n = 5$, $i = 8\%$, $p = 6$:

$$PV = Ra_{n;\,i}^{(p)} = 300\,000 \times a_{5;\,8\%}^{(6)}.$$

Вычисляем значение $a_{5;\,8\%}^{(6)} = 4.1238$, подставляем его и получаем ответ:

$$PV = 300\,000 \times 4.1238 = 1\,237\,140 \text{ руб.}$$

б) В этом случае проценты начисляются 4 раза в год. Применяем формулу (7.7) при $n = 5$, $m = 4$, $j_m = 8\%$, $p = 6$:

$$PV = \frac{R}{p} \times \frac{a_{mn;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{\frac{m}{p};\,\frac{j_m}{m}}} = \frac{300\,000}{6} \times \frac{a_{20;\,2\%}}{s_{\frac{2}{3};\,2\%}}.$$

По формулам (6.2) и (7.1) вычисляем:

$$s_{\frac{2}{3};\,2\%} = 0.6645, \quad a_{20;\,2\%} = 16.3514.$$

Находим современную ценность ренты:

$$PV = 300\,000 \times \frac{16.3514}{6 \times 0.6645} = 1\,230\,422.78 \text{ руб.}$$

в) В этом случае проценты начисляются непрерывно. Применяем формулу (7.11) при $n = 5$, $p = 6$, $\delta = 0.08$:

$$PV = \frac{R}{p} \times \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1} = \frac{300\,000}{6} \times \frac{1 - e^{-0.08 \times 5}}{e^{\frac{0.08}{6}} - 1} = 1\,228\,076.14 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

7.3.4. Бессрочная рента

В предыдущей главе мы уже говорили о бессрочной ренте и приводили примеры таких рент (п. 6.5). Очевидно, что наращенная сумма бессрочной ренты, каждый член которой равен положительному числу R, бесконечно велика, и говорить об ее величине не имеет смысла. Иначе обстоит дело с современной ценностью бессрочной ренты.

Приведенной ценностью PV_∞ бессрочной ренты является сумма, которую надо вложить в начальный момент под сложные проценты по данной ставке, чтобы в дальнейшем каждый год (или каждый период начисления процентов) можно было получать с этого вклада сумму R. Приведенную ценность бессрочной ренты можно определить как предел приведенной ценности конечной ренты при неограниченном увеличении числа членов ренты. Ниже при нахождении пределов всюду используется тот факт, что $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$ при любом $a > 1$. Рассмотрим различные виды бессрочной ренты.

Годовая рента с начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной i

Приведенная ценность конечной ренты этого вида определяется формулой (7.2). Найдем предел данного в этой формуле выражения при неограниченном увеличении n:

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} Ra_{n;\,i} = R \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

Следовательно, приведенная ценность бессрочной ренты в данном случае равна:

$$PV_\infty = \frac{R}{i}\,. \tag{7.13}$$

p-срочная рента с начислением процентов в конце года по ставке сложных процентов, равной i

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения в формуле (7.3):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} Ra^{(p)}_{n;\,i} = R \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]} = \frac{R}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}\,.$$

Из формулы (6.6) следует:

$$p((1+i)^{1/p}-1) = \frac{i}{K_{p;\,i}}\,,$$

следовательно, полученное для PV_∞ выражение можно переписать так:

$$PV_\infty = R\,\frac{K_{p;\,i}}{i}. \tag{7.14}$$

Бессрочная рента с периодом больше года и начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной i

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения в формуле (7.5):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} R_r \frac{a_{n;\,i}}{s_{r;\,i}} =$$

$$= R_r \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1} = \frac{R_r}{(1+i)^r - 1}.$$

Используя формулу (6.2), последнее равенство можно переписать и получить формулу:

$$PV_\infty = \frac{R_r}{i \times s_{r;\,i}}\,. \tag{7.15}$$

Годовая рента с начислением процентов m раз в год по ставке j_m

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения в формуле (7.6):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} R \frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{m;\,\frac{j_m}{m}}} =$$

$$= R \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m - 1} = \frac{R}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m - 1}\,.$$

Используя формулу (6.2), последнее равенство можно переписать и получить формулу:

$$PV_\infty = \frac{R}{\frac{j_m}{m} \times s_{m;\,\frac{j_m}{m}}}\,. \tag{7.16}$$

p-срочная рента с начислением процентов m раз в год по ставке j_m

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения из формулы (7.7):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{p} \times \frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{\frac{m}{p};\,\frac{j_m}{m}}} = \frac{R}{p} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} =$$

$$= \frac{R}{p} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Используя формулу (6.2), последнее равенство можно переписать и получить формулу:

$$PV_\infty = \frac{R}{p \times \frac{j_m}{m} \times s_{\frac{m}{p};\,\frac{j_m}{m}}}. \tag{7.17}$$

В частном случае этой ренты, когда $m = p$, имеет место равенство:

$$s_{1;\,j_m/m} = 1.$$

С учетом последнего равенства формула (7.17) принимает вид:

$$PV_\infty = \frac{R}{m \times \frac{j_m}{m}} = \frac{R}{j_m}. \tag{7.18}$$

Бессрочная рента с периодом больше года с начислением процентов m раз в год по ставке j_m

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения из формулы (7.9):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} R_r \frac{a_{nm;\,\frac{j_m}{m}}}{s_{mr;\,\frac{j_m}{m}}} =$$

$$= R_r \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-nm}}{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mr} - 1} = R_r \frac{1}{(1 + \frac{j_m}{m})^{mr} - 1}.$$

Используя формулу (6.2), последнее равенство можно переписать и получить формулу:

$$PV_\infty = \frac{R_r}{\frac{j_m}{m} \times s_{mr;\,\frac{j_m}{m}}}. \tag{7.19}$$

Годовая рента с непрерывным начислением процентов по ставке δ

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения в формуле (7.10):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} R\,\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1} = R\,\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1} = \frac{R}{e^{\delta}-1}\,.$$

Следовательно, имеем формулу:

$$PV_\infty = \frac{R}{e^{\delta}-1}\,. \tag{7.20}$$

p-срочная рента с непрерывным начислением процентов по ставке δ

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения в формуле (7.11):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} R\,\frac{1-e^{-\delta n}}{p\left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)} = \frac{R}{p\left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)}\,.$$

Следовательно, получили формулу:

$$PV_\infty = \frac{R}{p\left(e^{\frac{\delta}{p}}-1\right)}\,. \tag{7.21}$$

Бессрочная рента с периодом больше года с непрерывным начислением процентов по ставке δ

Приведенная ценность бессрочной ренты в этом случае равна пределу выражения в формуле (7.12):

$$PV_\infty = \lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} R_r\,\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta r}-1} = \frac{R_r}{e^{\delta r}-1}\,.$$

Следовательно, получаем формулу:

$$PV_\infty = \frac{R_r}{e^{\delta r}-1}\,. \tag{7.22}$$

Приведем пример на использование формул для вычисления приведенной ценности бессрочной ренты.

Пример 7.4. *Фирма планирует организовать специальный фонд для выплаты* 1 000 000 *руб. в конце года направленным на учебу работникам. Какую сумму потребуется положить в банк, чтобы обеспечить получение указанной суммы неограниченно долго, если: а) банк выплачивает* 8% *годовых (сложных), б) банк выплачивает проценты по ставке* $j_4 = 8\%$, *в) банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста* $\delta = 8\%$?

Решение. а) Последовательность получаемых сумм является бессрочной рентой с начислением процентов в конце года. Применяем формулу (7.13) при $R = 1\,000\,000$, $i = 0.08$:

$$PV_\infty = \frac{R}{i} = \frac{1\,000\,000}{0.08} = 12\,500\,000 \text{ руб.}$$

б) Последовательность получаемых сумм является бессрочной рентой с начислением процентов m раз в год по годовой ставке j_m. Применяем формулу (7.16) при $m = 4$, $j_m = 8\%$, $j_m/m = 8\%/4 = 2\%$:

$$PV_\infty = \frac{R}{\frac{j_m}{m} \times s_{m;\,\frac{j_m}{m}}} = \frac{1\,000\,000}{0.03 \times s_{4;\,2\%}} = \frac{1\,000\,000}{0.02 \times 4.1216} = 12\,131\,188.28 \text{ руб.}$$

в) Последовательность получаемых сумм образует бессрочную ренту с непрерывным начислением процентов по годовой ставке δ. Применяем формулу (7.20) при $R = 1\,000\,000$, $\delta = 8\% = 0.08$:

$$PV_\infty = \frac{R}{e^\delta - 1} = \frac{1\,000\,000}{e^{0.08} - 1} = 12\,006\,665.96 \text{ руб.}$$ ■

7.4. Погашение долгосрочной задолженности несколькими платежами

Вернемся к задаче погашения долгосрочной задолженности, которую мы уже рассматривали в главе 6.6. Рассмотрим случай, когда задолженность погашается не единовременным платежом, а несколькими равными платежами, которые делаются через равные промежутки времени. Такая форма погашения задолженности часто используется при амортизации долга, потребительском кредите и ипотеке. Опишем соответствующую задачу.

Заемщик получил ссуду, равную S, и обязался вернуть долг, сделав n равных срочных уплат R через равные промежутки времени. Требуется определить величину срочной уплаты R при условии, что на долг начисляются сложные проценты по ставке i за каждый промежуток времени.

Последовательность срочных уплат является рентой, имеющей n членов, приведенная ценность которой равна S. Следовательно, по формуле (7.2) $S = R \times a_{n;\,i}$, откуда определяем:

$$R = \frac{S}{a_{n;\,i}}\,. \tag{7.23}$$

При таком способе погашения долга каждая следующая уплата включает бóльшую сумму долга, чем предыдущая, и меньшую сумму выплачиваемых процентов. Поясним это. Сумма выплачиваемых в периоде t процентов равна $S_t\, i$, где S_t — остаток долга на начало периода t и $S_1 = S$. Сумму части долга, которая погашается в периоде t, обозначим через R_t. Для нее верна формула:

$$R_t = R - S_t\, i.$$

Остаток долга на начало периода t вычисляется по формуле:

$$S_t = S_{t-1} - R_{t-1}\,,$$

где $t = 2, \ldots, n$. Рассмотрим пример.

Пример 7.5. *Долг в 300 тыс. руб. надо погасить за 5 лет, делая равные платежи в конце каждого года. На долг начисляются проценты по годовой ставке $i = 5\%$. Составим план погашения долга.*

Решение. Используем формулу (7.23). По условию задачи $n = 5$, $S = S_1 = 300\,000$, $i = 0.05$. Подставляем эти значения в формулу и вычисляем срочную уплату:

$$R = \frac{S}{a_{5;\,5\%}} = \frac{300\,000}{4.3295} = 69\,292.44 \text{ руб.}$$

Запишем план погашения долга в виде таблицы, в которой суммы денег округлены до целых рублей:

Номер года (t)	Остаток долга на начало года t (руб.) $S_t = S_{t-1} - R_{t-1}$	Срочная уплата (R)	Сумма выплаченных в году t процентов (руб.) $S_t \times 0.05$	Сумма погашения долга в году t $R_t = R - S_t \times 0.05$
1	300 000	69 292	15 000	54 292
2	245 708	69 292	12 285	57 007
3	188 701	69 292	9 435	59 857
4	128 844	69 292	6 442	62 850
5	65 994	69 292	3 300	65 994

Итого: 300 000 руб. ■

7.5. Определение срока погашения долгосрочной задолженности

Иногда в условиях погашения долга S оговаривается только величина срочной уплаты R. Тогда срок погашения долга n определяют из формулы (7.23):

$$S = \frac{R\,(1-(1+i)^{-n})}{i}\,.$$

Преобразуем эту формулу следующим образом:

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Si}{R}\,.$$

Прологарифмируем обе части последнего равенства и вычислим n:

$$-n\ln(1+i) = \ln\left(1-\frac{Si}{R}\right),$$

$$n = -\frac{\ln\left(1-\dfrac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{7.24}$$

Отметим, что вычисленное по формуле (7.24) значение n обычно получается нецелым. Поэтому при составлении плана погашения долга уплата в последнем, неполном году должна быть уменьшена так, чтобы был выплачен остаток долга и соответствующие этому остатку проценты. Рассмотрим пример.

Пример 7.6. *В условиях предыдущего примера предположим, что должник и кредитор договорились не о том, что долг должен быть возвращен в течение пяти лет, а о том, что годовая уплата будет равна* 70 000 *руб. Составим план погашения долга.*

Решение. Определим по формуле (7.24) срок погашения долга:

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{300\,000 \times 0.05}{70\,000}\right)}{\ln(1+0.05)} = 4.94\,.$$

Полученный результат означает, что долг будет возвращаться 4.94 года. Это означает, что первые 4 года будет выплачиваться по 70 000 руб., а в последнем году срочная уплата будет меньше, так как год неполный. Заключительная уплата в пятом году должна быть равна сумме остатка долга на начало пятого периода и начисленных на этот остаток процентов в пятом году:

$$R = 62\,943 + 3147 = 66\,090 \text{ руб.}$$

Запишем план погашения долга в виде таблицы:

Номер года (t)	Остаток долга на начало года t (руб.) $S_t = S_{t-1} - R_{t-1}$	Срочная уплата (R)	Сумма выплаченных в году t процентов (руб.) $S_t \times 0.05$	Сумма погашения долга в году t $R_t = R - S_t \times 0.05$
1	300 000	70 000	15 000	55 000
2	245 000	70 000	12 250	57 750
3	187 250	70 000	9 362	60 638
4	126 612	70 000	6 331	63 669
5	62 943	66 090	3 147	62 943

Итого: 300 000 руб. ■

7.6. Процентная ставка финансовой ренты

При финансовых вычислениях может возникнуть необходимость по известному коэффициенту наращения $s_{n;\,i}$ или по известному коэффициенту приведения $a_{n;\,i}$ найти значение процентной ставки i при фиксированном числе членов ренты n. Опишем одну из возможных ситуаций, в которой возникает такая необходимость. Фирме требуется накопить сумму S к определенному сроку, делая через равные промежутки времени n равных вкладов, размером R каждый. Какой минимальный процент на вложенные деньги надо получать для этого в банке? В этом случае, зная значения S, R, n, можно найти значение $s_{n;\,i}$, пользуясь формулой (6.3), а затем по этому значению вычислить процентную ставку i.

Возможна другая ситуация. Вкладчик желает положить сумму S на счет в банке, чтобы после этого иметь возможность n раз снять со своего счета через равные промежутки времени сумму, равную R. Вкладчику интересно узнать, сколько процентов при этом должен платить банк на вложенные деньги. В этом случае по известным значениям S, R и n можно найти значение $a_{n;\,i}$ по формуле (7.2), а затем по этому значению вычислить ставку i.

В описанных ситуациях надо решить относительно i уравнение n-й степени при заданных значениях q, n, $s_{n;\,i}$ или $a_{n;\,i}$:

$$s_{n;\,i} = q \text{ или } a_{n;\,i} = q. \tag{7.25}$$

Уравнения (7.25) можно решать интерполяционными методами, позволяющими найти приближенные значения их корней с любой степенью точности. Например, при $n = 5$ уравнение $s_{n;\,i} = q$ имеет вид ($i > 0$):

$$\frac{(1+i)^5 - 1}{i} = q, \text{ или } (1+i)^5 - qi - 1 = 0, \text{ или}$$

$$i^4 + 5i^3 + 10i^2 + 10i + 5 - q = 0.$$

Для решения таких уравнений существуют методы нахождения приближенных значений корней с любой степенью точности. Опишем один из этих методов: *метод линейной интерполяции.*

Этот метод использует тот факт, что если непрерывная функция $f(x)$ является на промежутке $[x_1; x_2]$ монотонной (возрастающей или убывающей) и принимает на концах этого промежутка разные знаки, то в некоторой внутренней точке этого промежутка функция $f(x)$ равна нулю, и эта точка (корень функции) единственная на данном промежутке. Приближенное значение корня функции на этом промежутке вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{x} = x_1 - \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}\,. \tag{7.26}$$

Мы применим этот метод при решении следующего примера. Необходимые вычисления могут быть легко проведены с помощью финансового калькулятора или в Excel. В п. 7.6 будет рассказано, как решать подобные задачи с помощью специальных средств Excel.

Пример 7.7. *Для возвращения долга необходимо накопить за* 10 *лет* 2 *млн руб. Ежегодно должник может вносить в банк для этой цели* 150 *тыс. руб. Под какую ставку сложных процентов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?*

Решение. По условию примера необходимо за 10 лет получить наращенную сумму $S = 2$ млн руб. Применяя формулу (6.3), находим коэффициент наращения:

$$s_{10;\,i} = \frac{S}{R} = \frac{2\,000\,000}{150\,000} = 13.(3).$$

Следовательно, надо решить относительно i уравнение (7.25). Оно имеет вид:

$$\frac{(1+i)^{10} - 1}{i} = 13.(3).$$

Это уравнение десятой степени. Запишем это уравнение в виде

$$f(i) = \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} - 13.(3) = 0.$$

Подбором находим два значения i, при которых функция $f(i)$ имеет разные знаки: $i = 5\%$ и $i = 10\%$. Действительно, при этих значениях i мы имеем:

$$s_{10;\,5\%} = 12.5779, \quad f(0.05) = 12.5779 - 13.(3) = -0.7554,$$

$$s_{10;\,10\%} = 15.9374, \quad f(0.10) = 15.9374 - 13.(3) = 2.6041.$$

На промежутке $[\,0.05;\, 0.10]$ функция $f(i)$ меняет знак и монотонно возрастает. Находим приближенное значение i по формуле (7.26), заменив переменную x переменной i. В нашем примере имеем в качестве начальных данных:

$$x_1 = 0.05, \quad x_2 = 0.1, \quad f(x_1) = -0.7554, \quad f(x_2) = 2.6041.$$

Приближенное значение корня уравнения $\tilde{i}$, согласно формуле (7.26), равно:

$$\tilde{i} = 0.05 - \frac{-0.7554(0.1 - 0.05)}{2.6041 + 0.7554} = 0.0612 = 6.12\%.$$

Вычислим значение $f(0.0612)$:

$$f(0.0612) = \frac{(1 + 0.0612)^{10} - 1}{0.0612} - 13.(3) = -0.0780.$$

Это значение близко к 0, поэтому приближенное значение корня уравнения $i = 6.12\%$ можно принять в качестве решения поставленной задачи.

Если точность найденного значения i будет признана недостаточной, то следует вновь применить формулу (7.26) на промежутке $[\,6.12\%;\ 10\%\,]$, так как функция на концах этого промежутка имеет разные знаки:

$$f(6.12\%) = -0.0780, \quad f(10\%) = 2.6041.$$

Повторяя эту процедуру, можно найти значение i с любой степенью точности. ■

7.7. Используем Excel

Ранее в этой главе на примерах было показано, как, зная значения величин R, n и i, вычислить приведенную ценность ренты PV, или, зная значения величин PV, n и i, вычислить величину платежа R. Не представляет труда записать приведенные решения примеров на рабочих листах Excel. Эти решения станут существенно компактней и наглядней, если создать на VBA две функции, которые мы назвали PVCoeff и PVPCoeff. Функция PVCoeff реализует функцию $a_{n;\,i}$, а PVPCoeff — $a_{n;\,i}^{(p)}$:

$$a_{n;\,i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\,, \quad a_{n;\,i}^{(p)} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p[(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1]}\,.$$

Приведем текст этих функций (листинг 7.1). Для читателей, хоть немного знакомых с программированием на VBA, не составит труда включить их в свой модуль и использовать при решении примеров и упражнений из книги. Всех остальных отсылаем к приложению Б, в котором подробно объяснено, как это сделать.

Листинг 7.1

```
Function PVCoeff(n As Single, i As Single) As Single
  PVCoeff = (1 - (1 + i) ^ (-n)) / i
End Function

Function PVPCoeff(n As Single, i As Single, p As Integer) _
  As Single
  PVPCoeff = (1 - (1 + i) ^ (-n)) / p / ((1 + i) ^ (1 / p) - 1)
End Function
```

В главе 6 (п. 6.8) была приведена таблица функций, имеющихся в Excel, которые используются при анализе финансовой ренты. Там же были разобраны примеры использования некоторых из них для определения наращенной суммы потока платежей, величины периодического платежа и количества платежей, необходимых для возврата долга. Теперь мы приведем примеры и замечания, касающиеся использования функций ПС и СТАВКА.

В простейшем случае с помощью функции ПС определяется объем вклада, необходимого для обеспечения фиксированного количества выплат заданной величины. На рис. 19 приведен фрагмент рабочего листа, содержащий решение примера 7.1 двумя способами: с использованием функции PVCoeff и с использованием функции ПС. Как видно на рисунке, результаты вычислений совпадают.

В п. 7.6 для определения процентной ставки финансовой ренты использовался метод линейной интерполяции. Однако более простой способ в этом случае — использовать встроенную функцию СТАВКА. Решение примера 7.7 с использованием этой функции приведено на рис. 20.

Финансовая функция СТАВКА вычисляет процентную ставку, которая в зависимости от ситуации может быть либо нормой прибыли, либо процентом кредита. Особенностью применения этой функции является возможность использования необязательного параметра прогноз — предполагаемого значения функции. По умолчанию он полагается равным 10%. В Excel для определения значения функции СТАВКА используется метод последовательных приближений. Если решение с заданной точностью не

	A	B	C	D
1	**Глава: Приведенная ценность финансовой ренты**			
2				
3	**Пример 7.1 (начальный вклад для получения ренты)**			
4	*Данные:*			
5	Ставка	11%		
6	Количество периодов	5		
7	Платеж	100 000р.		
8	*Вопрос:*			
9	Начальный вклад?			
10	*Решение 1:*			
11	a(n;i) =	3.6959	=PVCoeff(B6;B5)	
12	Начальный вклад =	**369 589.71р.**	=B7*B11	
13	*Решение 2:*			
14	Начальный вклад =	**-369 589.70р.**	=ПС(B5;B6;B7)	
15				
16				

Рис. 19. Пример на вычисление объема необходимого вклада

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Глава: Приведенная ценность финансовой ренты**						
2							
3	**Пример 7.7 (процентная ставка для ренты)**						
4	*Данные:*						
5	Сумма	2 000 000р.					
6	Количество периодов	10					
7	Платеж	150 000р.					
8	*Вопрос:*						
9	Процентная ставка ?						
10	*Решение 1:*						
11	s(10;i) =	13.3333	=B5/B7				
12	Ставка =	0.10					
13	Уравнение:	2.6041	=(1+B12)^B6-1-B12*B11				
14							
15		x1	f(x1)	x2	f(x2)		
16		0.05	-0.7554	0.10	2.6041		
17							
18	i =	**6.12%**	=B16-C16*(D16-B16)/(E16-C16)				
19	f(i) =	-0.0780					
20							
21	*Решение 2 (используем встроенную функцию):*						
22	i =	**6.24%**	=СТАВКА(-B6;B7;B5)				
23							

Рис. 20. Пример на применение функции СТАВКА

найдено за 20 итераций, то выдается сообщение об ошибке: #ЧИСЛО. Именно в такой ситуации может помочь задание необязательного параметра прогноз перед повторным вычислением функции.

Обращаем внимание читателя на то, что в Excel 2003 финансовая функция СТАВКА выдает *неверный результат*. Какая именно ошибка была допущена при ее реализации нам неизвестно, но результат будет верный, если *перед числом периодов поставить знак минус*. Поэтому мы приводим два решения примера 7.7 на рис. 20. Первое решение выполнено с помощью команды Подбор параметра. Чтобы эта команда выполнилась успешно, предварительно определен интервал, которому принадлежит искомое значение: $[0.05; 0.10]$. Второе решение использует финансовую функцию СТАВКА. Еще раз обращаем внимание читателя на то, что перед первым параметром этой функции необходимо поставить знак минус (ячейка B22). Некоторое несовпадение полученный ответов (6.12% и 6.24%) объясняется тем, что при решении соответствующих уравнений использовались различные алгоритмы. Однако решение $i = 6.24\%$ более точное.

Упражнения

1. Какую сумму надо вложить в банк, выплачивающий 7% годовых, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого года 100 000 руб., исчерпав весь вклад к концу десятого года?

2. Решить предыдущее упражнение, если банк выплачивает проценты по ставке $j_{12} = 7\%$.

3. Решить упражнение 1, если банк выплачивает непрерывные проценты по ставке $\delta = 7\%$.

4. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 5 лет получать ежегодно по 60 000 руб., снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет на вложенные в него деньги 8% годовых?

5. Решить предыдущее упражнение, если банк начисляет проценты по ставке $j_4 = 8\%$.

6. Решить упражнение 4, если банк начисляет непрерывные проценты с силой роста $\delta = 8\%$.

7. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 6 лет иметь возможность снимать со счета каждые два года по 100 000 руб., исчерпав весь вклад к концу этого срока, если банк начисляет 5% годовых?

8. Решить упражнение 7, если банк начисляет проценты по ставке $j_2 = 5\%$.

9. Решить упражнение 7, если банк начисляет непрерывные проценты с силой роста $\delta = 5\%$.

10. Перед выходом на пенсию г-н Федоров хочет обеспечить себе бессрочную ренту с выплатами по 120 000 руб. в конце каждого года. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 5% годовых?

11. Решить предыдущее упражнение, если г-н Федоров будет снимать ежеквартально четверть годового дохода (по 30 000 руб.).

12. Решить упражнение 10, если банк выплачивает проценты по ставке $j_4 = 5\%$.

13. Решить упражнение 10, если г-н Федоров будет снимать со счета ежеквартально четверть годового дохода и банк выплачивает проценты по ставке $j_4 = 5\%$.

14. Решить упражнение 10, если г-н Федоров будет снимать деньги раз в 2 года (по 240 000 руб.) и банк выплачивает проценты по ставке $j_6 = 5\%$.

15. Решить упражнение 10, если банк начисляет на деньги непрерывные проценты с силой роста $\delta = 5\%$.

16. Решить упражнение 10, если г-н Федоров желает снимать со счета ежеквартально четверть годового дохода и банк начисляет на деньги непрерывные проценты с силой роста $\delta = 5\%$.

17. Фермер приобрел в кредит трактор, цена которого равна 270 000 руб. За кредит он должен платить 20% годовых и выплатить весь долг за 4 года равными платежами. Найти размер ежегодной срочной уплаты и составить план погашения долга.

18. Составьте план погашения долга, описанного в предыдущем упражнении, если срочная годовая уплата установлена в размере 65 000 руб.

19. Г-н Иванов купил в кредит автомобиль, который стоит 450 000 руб., без первоначального взноса. Он обязался вернуть долг в течение года, делая равные ежемесячные срочные уплаты. Найти величину срочной уплаты и составить план погашения долга, если на долг магазин начисляет 24% годовых.

20. Составьте план погашения долга, описанного в предыдущем упражнении, если г-н Иванов договорился с магазином, что он будет делать ежемесячные срочные уплаты, равные 30 000 руб.

21. Владелец дома планирует провести через 10 лет капитальный ремонт, на который ему потребуется 10 млн руб. Он может ежегодно вкладывать для этой цели в банк 600 тыс. руб. Под какой процент он должен вложить эти деньги, чтобы накопить необходимую сумму?

22. Отец планирует положить в банк на счет своего сына 250 000 руб., чтобы тот в течение 5 лет учебы в университете мог снимать в конце каждого года со счета 60 тыс. руб., исчерпав весь вклад к концу учебы. Какой процент для этого должен платить банк?

8. Операции с финансовыми контрактами

В реальной жизни по тем или иным причинам приходится менять условия финансовых контрактов. В этой главе мы рассмотрим только случаи, когда изменяются суммы платежей и время их выполнения. Ценность денег предполагается фиксированной для исходного и нового контрактов на время их действия (i сложных процентов за один период). Мы предполагаем, что при изменении условий контракта должен соблюдаться *принцип эквивалентности*, который состоит в том, что приведенные к некоторому моменту суммы платежей по исходному и новому контрактам должны совпадать.

8.1. Эквивалентность контрактов

Рассмотрим сначала ситуацию, когда изменяются только сроки платежей. При этом возникает законный вопрос, как должны измениться суммы платежей. В данной ситуации это выражается с помощью двух простых формул.

Если срок платежа суммы S переносится на t периодов вперед, то новая сумма платежа S_1 вычисляется по формуле:

$$S_1 = S(1+i)^t, \tag{8.1}$$

если срок платежа сокращается на t периодов, то новая сумма платежа S_1 вычисляется по формуле:

$$S_1 = S\,(1+i)^{-t}. \tag{8.2}$$

Последние две формулы можно объединить в одну, если заметить, что степень, в которую возводится множитель наращения $1+i$, равна разности между новым и старым моментами платежа. Обозначим через T старый момент платежа, T_1 — новый момент платежа. Новая сумма платежа S_1 получается из старой S по формуле:

$$S_1 = S(1+i)^{T_1-T}. \tag{8.3}$$

Рассмотрим пример, при решении которого применяется эта формула.

Пример 8.1. *Предприниматель по договору должен выплатить банку 1 июля 2007 г. 120 000 руб. Банк дает ссуды под 18% годовых (сложных). В договоре оговорена возможность как досрочного возврата ссуды, так и продления срока ссуды без изменения процента. Вычислим, какую сумму должен предприниматель вернуть в банк, если он решил вернуть долг: а) 1 января 2006 г.; б) 1 января 2008 г.*

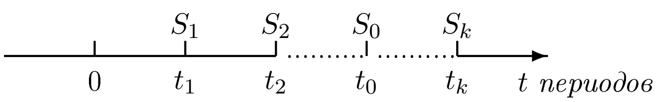
Решение. а) Так как платеж делается на 1.5 года раньше срока, то предприниматель должен внести в банк меньшую сумму:

$$S_1 = 120\,000 \times (1+0.18)^{-1.5} = 93\,681.46 \text{ руб.}$$

б) В этом случае платеж делается на 0.5 года позже срока, поэтому в банк придется внести сумму, бóльшую, чем 120 000 руб.:

$$S_1 = 120\,000 \times (1+0.18)^{0.5} = 130\,442.06 \text{ руб.}$$ ■

Рассмотрим теперь ситуацию объединения (консолидации) платежей: *требуется заменить несколько платежей S_1, …, S_k со сроками выплат t_1, …, t_k, соответственно, одним платежом S_0.* При этом могут возникнуть две задачи: определить величину объединенного платежа S_0, если он должен быть сделан в момент времени t_0; определить срок t_0 платежа S_0. Изобразим рассматриваемую ситуацию на оси времени:



Для эквивалентности замены платежей необходимо, чтобы в момент 0 приведенная ценность платежа S_0 была равна сумме приведенных ценностей всех платежей $S_1, \dots S_k$, то есть должно выполняться равенство:

$$S_0(1+i)^{-t_0} = \sum_{l=1}^{k} S_l(1+i)^{-t_l}. \tag{8.4}$$

Если требуется определить величину единого платежа S_0, то из последнего равенства получаем формулу:

$$S_0 = (1+i)^{t_0} \sum_{l=1}^{k} S_l (1+i)^{-t_l}. \tag{8.5}$$

Чтобы определить срок t_0 платежа S_0, решим уравнение (8.4) относительно t_0. Прологарифмируем обе части этого уравнения и, выполнив необходимые преобразования, получим формулу для t_0:

$$\ln S_0 (1+i)^{-t_0} = \ln \sum_{l=1}^{k} S_l (1+i)^{-t_l};$$

$$\ln S_0 - t_0 \ln(1+i) = \ln \sum_{l=1}^{k} S_l (1+i)^{-t_l};$$

$$t_0 = \frac{\ln S_0 - \ln \sum\limits_{l=1}^{k} S_l (1+i)^{-t_l}}{\ln(1+i)}. \tag{8.6}$$

Важно понимать, что на результат вычислений по формулам (8.5) и (8.6) не может повлиять то, в каких единицах выражены суммы платежей: в рублях, тысячах или миллионах рублей. Необходимо только соблюдать следующее правило: *все платежи должны быть выражены в одних и тех же единицах.*

Пример 8.2. *По контракту предприниматель должен выплатить поставщику сырья через полгода после поставки* 800 000 *руб., еще через полгода —* 1 500 000 *руб. и еще через полгода —* 1 300 000 *руб. Эти платежи решено объединить в один платеж и выплатить весь долг через год после поставки сырья. Вычислим, какую сумму надо выплатить, если на долг начисляется* 16% *годовых (сложных).*

Решение. Чтобы применить формулу (8.5), требуется сначала вычислить моменты платежей (единицей измерения является год): $t_1 = 0.5$, $t_2 = t_1 + 0.5 = 1$, $t_3 = t_2 + 0.5 = 1.5$. Приводя все платежи к моменту времени 0, получаем по этой формуле:

$$S_0 = (1+0.16)^1 \times \big[\, 800\,000(1+0.16)^{-0.5} +$$

$$+1\,500\,000(1+0.16)^{-1} + 1\,300\,000(1+0.16)^{-1.5} \,\big] =$$

$$= 3\,568\,646.07 \text{ руб.}$$

Если все платежи выразить в тыс. руб, то результат вычислений будет таким же. ■

Пример 8.3. *Предприниматель из предыдущего примера планирует выплатить долг одним платежом, равным* 3 600 000 *руб. Определим, в какой момент он должен сделать такой платеж.*

Решение. Как было отмечено выше, результат вычислений не зависит от того, в каких единицах выражены суммы платежей. Воспользуемся этим свойством и выразим платежи из условия примера в миллионах рублей. По формуле (8.6) находим значение t_0:

$$t_0 = \frac{\ln 3.6 - \ln\left(0.8\times1.16^{-0.5} + 1.5\times1.16^{-1} + 1.3\times1.16^{-1.5}\right)}{\ln 1.16} =$$

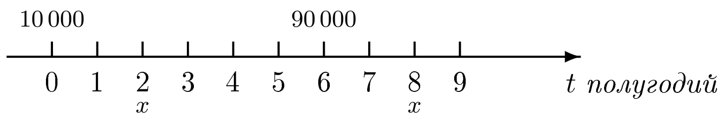
$$= 1.06 \text{ года} = 1 \text{ год } 22 \text{ дня}.$$

Следовательно, суммы 3.6 млн руб. хватит, чтобы погасить долг не позднее чем через 1 год 22 дня после поставки сырья. ■

Заметим, что при решении предыдущих задач мы использовали уравнения эквивалентности. Приведем примеры более сложных изменений условий контрактов, для расчета которых также применяются уравнения эквивалентности.

Пример 8.4. *По контракту г-н Астров обязан выплатить г-ну Белову* 10 000 *руб. сегодня и* 90 000 *руб. через* 3 *года. Г-н Астров хочет изменить контракт и вернуть долг двумя равными платежами: сделав первый платеж через год и второй — через* 4 *года, считая от сегодняшнего дня. Вычислим, какой величины должен быть каждый из этих платежей, если деньги приносят кредитору проценты по ставке* $j_2 = 16\%$*?*

Решение. Изобразим условия задачи на оси времени, помещая над осью платежи по первоначальному контракту, а под осью — по новому контракту. Буквой x обозначена искомая величина новых платежей:



Так как оба контракта должны быть равноценны для кредитора, то приведенные к моменту 0 (как и к любому другому моменту) ценности сумм, стоящих над осью, и сумм, стоящих под осью, должны быть равны. Приравнивая приведенные ценности старого и нового контрактов, получаем уравнение:

$$10\,000 + 90\,000\,(1+i)^{-6} = x\,(1+i)^{-2} + x\,(1+i)^{-8}.$$

Подставим в него $i = 0.16/2 = 0.08$ и найдем значение x:

$$x\,(1.08^{-2} + 1.08^{-8}) = 10\,000 + 90\,000 \times 1.08^{-6};$$

$$x = 47\,735.33\,.$$

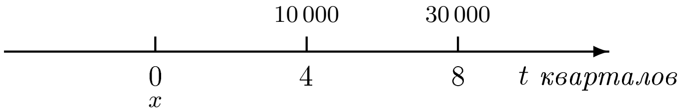
Таким образом, г-н Астров должен сделать два платежа по 47 735.33 руб. Полученный результат не зависит от выбора момента приведения. ∎

8.2. Продажа контрактов

В практике финансовых операций распространена сделка, которая называется *продажей контракта.* Она заключается в следующем. Некоторый субъект (или организация) имеет на руках контракт, по которому он должен получить с другого субъекта определенные суммы денег в определенные сроки. Владелец контракта желает получить деньги немедленно и для этого продает его банку (или другому лицу), который будет получать деньги по контракту в будущем. Сколько следует заплатить за этот контракт? Из принципа эквивалентности получаем, что за контракт следует заплатить его приведенную ценность в момент покупки. Рассмотрим пример.

Пример 8.5. *Фермер купил у колхоза сарай, заключив контракт, по которому обязуется заплатить* 10 000 *руб. через год и еще через год —* 30 000 *руб. Колхоз, нуждаясь в деньгах, хочет продать этот контракт финансовой организации, которая согласна его купить при условии начисления на свои деньги процентов по ставке* $j_4 = 16\%$. *Сколько должна заплатить компания колхозу за этот контракт?*

Решение. Так как по условию примера проценты начисляются по ставке j_4, то процентный период равен кварталу. Изобразим условия контракта на оси времени: в году содержится 4 периода, а в 2 годах — 8 периодов. Ценность контракта в момент 0 обозначена через x:



Организации следует заплатить за контракт его ценность в момент 0, следовательно, должно выполняться равенство:

$$x = \frac{10\,000}{(1+i)^4} + \frac{30\,000}{(1+i)^8}.$$

Подставим в него $i = 0.16/4 = 0.04$ и найдем значение x:

$$x = \frac{10\,000}{(1+0.04)^4} + \frac{30\,000}{(1+0.04)^8} = 30\,468.75 \text{ руб.}$$ ■

Рассмотрим примеры продажи и изменения условий контрактов, связанных с финансовыми рентами.

Пример 8.6. *Строительная фирма продала коттедж, заключив контракт, по которому покупатель обязался выплачивать ежеквартально по* 100 000 *руб. в течение* 5 *лет. Хозяин фирмы, нуждаясь в деньгах, продает этот контракт банку, который получает на ссуженные деньги проценты по ставке* $j_4 = 20\%$. *Какую сумму заплатит банк хозяину фирмы за данный контракт?*

Решение. Платежи по контракту можно рассматривать как ренту, состоящую из 20 платежей по 100 000 руб. каждый. За эту ренту банк должен заплатить ее приведенную ценность. Эту ценность можно вычислить по формуле (7.2) при $R = 100\,000$, $n = 20$, $i = j_4/4 = 20\%/4 = 5\%$:

$$PV = Ra_{n;\,i} = 100\,000\,a_{20;\,5\%}.$$

Подставляя в последнюю формулу $a_{20;\,5\%} = 12.4622$, получаем:

$$PV = 100\,000 \times 12.4622 = 1\,246\,220 \text{ руб.}$$

Таким образом, хозяин фирмы, продавая контракт, теряет сумму, равную

$$2\,000\,000 - 1\,246\,220 = 753\,780 \text{ руб.},$$

но при этом он получает деньги немедленно. Банк, покупая контракт, получит доход, равный той же сумме. ■

Заметим, что в последнем примере ренту можно рассматривать как 4-срочную ренту с начислением процентов 4 раза в год при $R = 400\,000$ (где R — величина платежа в год). Применяя формулу (7.8) при $p = 4$, получим тот же результат.

Пример 8.7. *Рокер купил в кредит мотоцикл за* 200 000 *руб., обязавшись погасить его ежемесячными платежами в течение года, выплачивая при этом проценты за долг по ставке* $j_{12} = 24\%$. *Хозяин магазина продает этот контракт финансовой компании, которую не удовлетворяют условия контракта: она желает получать доход по ставке* $j_{12} = 30\%$. *Сколько должна заплатить компания за этот контракт?*

Решение. Найдем величину каждого из 12 платежей, которые должен сделать по заключенному контракту рокер. Эти платежи образуют ренту, состоящую из 12 платежей, приведенная ценность которой 200 000 руб. Процент, начисляемый на каждый платеж, равен $i = j_{12}/12 = 24\%/12 = 2\%$. Величину платежа найдем из формулы (7.23), подставляя в нее значение $a_{12;\,2\%} = 10.5753$:

$$R = \frac{PV}{a_{12;\,2\%}} = \frac{200\,000}{10.5753} = 18\,911.99 \text{ руб.}$$

Таким образом, финансовая компания готова купить контракт, предполагающий 12 платежей по 18 911.99 руб. каждый, получая доход по ставке $j_{12} = 30\%$. Приведенная ценность такого контракта может быть найдена по формуле (7.2) при $i = 30\%/12 = 2.5\%$. Подставляя в нее значение $a_{12;\,2.5\%} = 10.2578$, получаем:

$$PV = Ra_{n;\,i} = 18\,911.99 \times 10.2578 = 193\,995.41 \text{ руб.}$$

Таким образом, рокер приобрел мотоцикл, за который он выплатит

$$18\,911.99 \times 12 = 226\,943.88 \text{ руб.}$$

Хозяин магазина, продав контракт, теряет сумму, равную

$$226\,943.88 - 193\,995.41 = 32\,948.47 \text{ руб.},$$

а финансовая компания получает в течение года прибыль, равную этой же сумме.

8.3. Выбор контракта, наиболее выгодного для покупателя

При покупке некоторого товара покупатель может заключить с продавцом контракт, включающий различные условия авансовой оплаты, получения кредита и сроков поставки товара. Чтобы выбрать наиболее выгодный для себя контракт, покупатель должен сравнить приведенные ценности возможных контрактов и найти контракт с наименьшей приведенной ценностью. Чтобы определить приведенную ценность платежей, необходимо принять какую-либо ставку сравнения, то есть ставку сложных процентов i, по которой будет производиться дисконтирование этих платежей. В теории корпоративных финансов рассматриваются различные подходы к выбору этой ставки — это может быть и уровень ссудного процента, и уровень доходности по государственным облигациям или кредитным обязательствам и т. д. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки нашей книги.

При покупке товара покупатель делает платежи двух видов. Во-первых, это авансовые платежи P_t, которые он выплачивает за купленный товар в моменты времени t (считая от момента заключения контракта) до поставки товара. Приведенная ценность этих платежей на момент заключения контракта вычисляется по формуле:

$$PV' = \sum_t P_t(1+i)^{-t}.$$

Во-вторых, это платежи по погашению кредита, равного разности между ценой товара C и суммой авансовых платежей:

$$C - \sum_t P_t.$$

Приведенная ценность этих платежей зависит от условий погашения кредита. Пусть по контракту за кредит продавец получает $g\%$ годовых. Срок кредита, который обычно отсчитывается от момента окончания поставки товара, равен N. Рассмотрим два наиболее часто встречающихся случая:

а) *Кредит погашается разовым платежом в конце срока.* Тогда сумма, выплачиваемая в конце срока кредита, вычисляется по формуле:

$$\left(C - \sum_t P_t\right)(1+g)^N.$$

Приведенная ценность этой суммы на момент заключения контракта вычисляется по формуле:

$$PV'' = (C - \sum_t P_t)\,(1+g)^N\,(1+i)^{-(T+N)}\,,$$

где T — срок поставки товара.

Приведенная ценность PV всех платежей по контракту на момент его заключения вычисляется по формуле:

$$PV = \sum_t P_t(1+i)^{-t} + (C - \sum_t P_t)(1+g)^N\,(1+i)^{-(T+N)}\,. \qquad (8.7)$$

б) *Кредит погашается равными срочными уплатами.* Годовая срочная уплата R по выплате кредита, согласно формуле (7.23), вычисляется по формуле:

$$R = \frac{C - \sum_t P_t}{a_{N;\,g}}\,.$$

Последовательность срочных уплат представляет собой ренту, состоящую из N платежей, равных R каждый. Приведенная ценность этой ренты в момент T по формуле (7.2) равна $R\,a_{N;\,i}$. Приведенная ценность этой суммы в момент заключения контракта равна $R\,a_{N;\,i}\,(1+i)^{-T}$. Следовательно, приведенная ценность всех платежей по контракту на момент его заключения вычисляется по формуле:

$$PV = \sum_t P_t(1+i)^{-t} + (C - \sum_t P_t)\,\frac{a_{N;\,i}}{a_{N;\,g}}\,(1+i)^{-T}\,. \qquad (8.8)$$

Рассмотрим пример на сравнение контрактов.

Пример 8.8. *Сравним следующие два контракта при ставке сравнения* $i = 10\%$.

1-й контракт: Цена товара равна 20 *млн руб. Делается три авансовых платежа по* 3 *млн руб. каждый: первый — в момент заключения контракта, второй — через год, третий — еще через год. Поставка товара производится сразу после авансовых платежей. Кредит предоставляется на* 3 *года, считая от момента поставки товара, под* 15% *годовых и погашается разовым платежом в конце срока кредита.*

2-й контракт: Цена товара равна 18 *млн руб. В момент заключения контракта делается один авансовый платеж, равный* 5 *млн руб. Поставка производится в момент заключения контракта. Кредит выдается на* 5 *лет под* 15% *годовых с погашением равными ежегодными уплатами.*

Решение. Сравним приведенные ценности этих контрактов при $i = 10\%$. Для 1-го контракта PV_1 вычисляем по формуле (8.7) при $C = 20$ млн руб., $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $T = 2$, $N = 3$, $g = 15\%$, $P_1 = P_2 = P_3 = 3$ млн руб.:

$$\begin{aligned} PV_1 &= 3(1+i)^0 + 3(1+i)^{-1} + 3(1+i)^{-2} + \\ &\quad +(20-9)(1+0.15)^3(1+0.1)^{-(2+3)} = \\ &= 3 + 3\times 1.1^{-1} + 3\times 1.1^{-2} + 11\times 1.15^3\times 1.1^{-5} = 18.594 \text{ млн руб.} \end{aligned}$$

Приведенную ценность 2-го контракта PV_2 вычисляем по формуле (8.8) при $C = 18$ млн руб., $t_1 = 0$, $P_1 = 5$, $T = 0$, $N = 5$, $g = 15\%$:

$$PV_2 = 5(1+i)^0 + (18-5)\,\frac{a_{5;\,10\%}}{a_{5;\,15\%}}\,(1+i)^0 = 19.701 \text{ млн. руб.}$$

Первый контракт более выгоден покупателю, чем второй, но он может предпочесть второй, так как поставка товара по нему производится немедленно, а по первому контракту — с отсрочкой на два года. ■

8.4. Доходность контракта для кредитора

В предыдущем пункте мы рассказали, как определяется выгодность контракта с точки зрения покупателя. Теперь рассмотрим способы измерения доходности финансово-кредитной операции для другого участника контракта — кредитора.

Доход от выдачи кредита кредитор получает в виде процентов от выданной ссуды, комиссионных, дисконта при учете векселей и т. п. Доходность операции обычно измеряется годовой ставкой сложных (реже — простых) процентов, когда все вложения и доходы рассматриваются как эквивалентная им ссудная операция. (Иногда применяются и другие показатели доходности.) Эту ставку, как мы видели в п. 3.6, называют эффективной процентной ставкой. Будем обозначать ее i_e. Рассмотрим, как определяется доходность некоторых финансовых операций.

1. Ссуда выдана под простые проценты по ставке i_s или под сложные проценты по ставке j_m, или осуществляется учет финансовых документов (векселей) по простой d_s или по сложной d_c. Во всех этих случаях доходность операции определяется эквивалентной ставкой i_c сложных процентов по формулам, выведенным в п. 3.5.

2. Ссуда в размере P выдана под ставку процентов j_m сроком на n лет с удержанием комиссионных в размере $G\%$ от суммы ссуды. Это означает, что заемщик получает на руки $(P-PG)$ и должен вернуть через n лет, согласно формуле (3.5), сумму, равную $P(1+j_m/m)^{mn}$. Кредитор вычисляет доходность операции, исходя из условия: наращенная сумма (на реально выданную сумму) при эффективной ставке процентов $(P-PG)(1+i_e)^n$ равна возвращаемой заемщиком через n лет сумме $P(1+j_m/m)^{mn}$. Доходность операции i_e определяется из уравнения:

$$(P-PG)(1+i_e)^n = P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{nm}.$$

Сократив на P и разделив обе части уравнения на $1-G$, получим уравнение:

$$(1+i_e)^n = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{nm}}{1-G},$$

откуда получаем формулу для вычисления i_e:

$$i_e = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}}{\sqrt[n]{1-G}} - 1. \tag{8.9}$$

Рассмотрим пример на применение формулы (8.9).

Пример 8.9. *Ссуда выдается на 5 лет под проценты по ставке $j_4 = 12\%$. Определить доходность этой операции при следующих условиях: а) комиссионные не взимаются; б) удерживаются комиссионные в размере 1% от суммы ссуды; в) удерживаются комиссионные в размере 1% от суммы ссуды и срок ссуды увеличен до 6 лет.*

Решение. а) Доходность операции определяем по формуле (3.20):

$$i_e = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4} - 1 = 0.1255 = 12.55\%.$$

б) Доходность операции определяем по формуле (8.9):

$$i_e = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}}{\sqrt[n]{1-G}} - 1 = \frac{(1+0.03)^4}{\sqrt[5]{1-0.01}} - 1 = 0.1278 = 12.78\%.$$

в) Доходность операции определяем по формуле (8.9):

$$i_e = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m}{\sqrt[n]{1-G}} - 1 = \frac{(1+0.03)^4}{\sqrt[6]{1-0.01}} - 1 = 0.01274 = 12.74\%. \qquad ■$$

Отметим, что взимание комиссионных увеличивает эффективность сделки для кредитора, а увеличение срока ссуды уменьшает ее эффективность.

3. Банк учитывает вексель на сумму S за n лет до срока его оплаты по простой учетной ставке d_s, удерживая при этом $G\%$ комиссионных от выплачиваемой за вексель суммы $P = S(1-nd_s)$ (см. формулу (2.5)). Это означает, что фактически банк выплачивает сумму, равную $(P - PG)$. Через n лет банк получает по векселю сумму $S = P/(1-nd_s)$. Эта сумма должна быть равна сумме

$$(P - PG)(1+i_e)^n,$$

которая является суммой, наращенной на реальную плату за вексель, если на эту сумму начисляется $i_e\%$ годовых. Приравнивая эти суммы, получаем уравнение для определения эффективности сделки i_e:

$$(P - PG)(1+i_e)^n = \frac{P}{1-nd_s}\,.$$

Решив это уравнение относительно i_e, получаем формулу:

$$i_e = \frac{1}{\sqrt[n]{(1-nd_s)(1-G)}} - 1\,. \qquad (8.10)$$

Пример 8.10. *Банк учитывает вексель за 3 месяца до срока его оплаты по простой учетной ставке $d_s = 15\%$. Определить доходность этой операции при следующих условиях: а) комиссионные не взимаются; б) удерживаются комиссионные в размере 1% от суммы, выплачиваемой за вексель; в) удерживаются комиссионные в размере 1% от суммы, выплачиваемой за вексель, и период времени до оплаты векселя — 6 месяцев.*

Решение. а) Доходность операции определяем по формуле (3.24):

$$i_e = \frac{1}{\sqrt[n]{1-nd_s}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[0.25]{1-0.25\times 0.15}} - 1 = 0.1652 = 16.52\%.$$

б) Доходность операции определяем по формуле (8.10):

$$
\begin{aligned}
i_e &= \frac{1}{\sqrt[n]{(1-nd_s)(1-G)}} - 1 = \\
&= \frac{1}{\sqrt[0.25]{(1-0.25\times 0.15)(1-0.01)}} - 1 = 0.2130 = 21.30\%
\end{aligned}
$$

в) Доходность операции определяем по формуле (8.10):

$$
i_e = \frac{1}{\sqrt[0.5]{(1-0.5\times 0.15)(1-0.01)}} - 1 = 0.1925 = 19.25\%. \qquad \blacksquare
$$

Мы видим, что взимание комиссионных повышает доходность операции учета для банка, а увеличение срока до момента оплаты векселя ее уменьшает.

4. Продавец получил в уплату за товар несколько векселей (портфель векселей), каждый из которых на сумму V. Сроки оплаты векселей наступают через равные промежутки времени p раз в год в течение n лет. Следовательно, количество векселей равно np. Продавец учитывает в банке все эти векселя сразу после их получения по простой учетной ставке d_s. Покажем, как рассчитать доходность этой операции i_e для банка.

Найдем сначала по формуле (2.5) сумму Q, которую выплатит банк, учитывая эти np векселей:

- за вексель, погашаемый первым (через $1/p$ часть года), банк выплачивает сумму Q_1:
$$
Q_1 = V\left(1 - \frac{1}{p}\times d_s\right);
$$
- за вексель, погашаемый вторым (через $2/p$ часть года), банк выплачивает сумму Q_2:
$$
Q_2 = V\left(1 - \frac{2}{p}\times d_s\right).
$$

Продолжая аналогичным образом, получаем на последнем шаге:

- за вексель, погашаемый последним (через $np/p = n$ лет), банк выплачивает сумму Q_{np}:
$$
Q_{np} = V\left(1 - \frac{np}{p}\times d_s\right).
$$

За весь портфель векселей банк выплатит сумму Q:

$$Q = \sum_{i=1}^{np} Q_i = V \sum_{i=1}^{np} \left(1 - \frac{i \times d_s}{p}\right) = V \left(np - \frac{d_s}{p} \sum_{i=1}^{np} i\right) =$$

$$= V \left(np - \frac{d_s}{p} \times \frac{1+np}{2} np\right).$$

Окончательно получаем формулу:

$$Q = Vnp \left(1 - \frac{d_s}{p} \times \frac{1+np}{2}\right). \tag{8.11}$$

Погашая эти векселя, банк получает p-срочную ренту, состоящую из p платежей, равных V, ежегодно в течение n лет. Приведенная ценность PV этой ренты, согласно формуле (7.3), равна:

$$PV = Vp\, a_{n;\, i_e}^{(p)}.$$

Эффективная ставка сложных процентов i_e определяется из условия равенства приведенной ценности суммы, полученной банком, и суммы Q, выплаченной банком за портфель векселей:

$$Q = Vp\, a_{n;\, i_e}^{(p)}.$$

Следовательно, для нахождения i_e требуется решить уравнение:

$$a_{n;\, i_e}^{(p)} = \frac{Q}{Vp}. \tag{8.12}$$

Методы решения подобных уравнений обсуждались в главе 7.6.

Пример 8.11. *Банк учитывает портфель, состоящий из* 12 *векселей по* 100 *тыс. руб. каждый, погашаемых ежеквартально. Простая учетная ставка банка равна* 16%. *Определить доходность этой операции для банка.*

Решение. По формуле (8.11) вычислим сначала сумму Q, которую банк заплатил за портфель векселей, при $p = 4$, $n = 3$, $V = 100$, $d_s = 16\%$:

$$Q = 100 \times 3 \times 4 \left(1 - \frac{1 + 3 \times 4}{2 \times 4} 0.16\right) = 888 \text{ тыс. руб.}$$

Для нахождения i_e требуется решить уравнение (8.12), которое с учетом данных примера и подсчитанного значения Q принимает вид:

$$a_{3;\, i_e}^{(4)} = \frac{888}{100 \times 4} = 2.2200.$$

Решив это уравнение, получаем $i_e = 21.37\%$. ■

8.5. Доходность потребительского кредита для продавца

Характерной чертой товарного рынка последних лет является рост потребительского кредита. В кредит можно купить квартиру, машину, мебель, бытовую технику, компьютеры и т. д. Так как, как правило, выплаты производятся p раз в году равными суммами R, то эти суммы являются членами p-срочной ренты. Приведенная ценность этой ренты при условии, что она выплачивается под i_e процентов, согласно формуле (7.3), равна $R\, a^{(p)}_{n;\, i_e}$.

Для покупателя основной характеристикой кредита является процент i_e, под который он предоставляется. Однако, в ряде случаев, продающая организация не указывает этот процент, а сообщает только величину ежемесячного платежа R, их количество n и сумму первоначального взноса, если таковой имеется.

Естественно искать доходность кредита для продавца (эффективная ставка сложных процентов i_e) из условия равенства приведенной ценности ренты, которую получит продавец, и величины долга покупателя Q. Следовательно, имеем равенство:

$$R\, a^{(p)}_{n;\, i_e} = Q.$$

Разделив обе части этого равенства на R, получаем уравнение для определения значения i_e:

$$a^{(p)}_{n;\, i_e} = \frac{Q}{R}\,. \tag{8.13}$$

Пример, который рассматривается далее, выбран как типичный пример предоставления кредита без указания процента.

Пример 8.12. *Летом 2003 г. пассажиры метро в Санкт-Петербурге могли ознакомиться с рекламой фирмы «Кей», которая предлагала купить в кредит компьютер на следующих условиях: первоначальный взнос равен* 1 800 *руб. и составляет* 20% *стоимости компьютера, а далее необходимо платить по* 770 *руб. в течение* 12 *месяцев. Вычислим процент, под который предоставлялся кредит на покупку компьютера.*

Решение. Используя приведенные в рекламе данные вычисляем, что полная стоимость компьютера составляет 9 000 руб. (= 1 800/0.2). Следовательно, покупатель в течение года должен погасить долг Q, равный 7 200 руб. (= 9 000 − 1 800).

Можно не решать уравнение (8.13), а воспользоваться в Excel встроенной финансовой функцией СТАВКА. Напомним, что эта функция имеет три обязательных аргумента: количество платежей, величина платежа и сумма долга. Фрагмент рабочего листа, на котором выполнены необходимые вычисления, приведен на рис. 21.

	A	B	C	D
1	**Глава: Операции с финансовыми контрактами**			
2				
3	**Пример 8.12**			
4	*Данные:*			
5	n	12		
6	R	770р.		
7	C	1 800р.		
8	Процент C	20%		
9	*Вопрос:*			
10	i_e = ?			
11	*Решение:*			
12	P =	9 000р.		
13	Q =	7 200р.		
14	i_e =	**48.76%**	=СТАВКА(B5;-B6;B13)*B5	
15	*Q/R* =	9.3506		
16	f =	9.3505	=(1-(1+B17)^(-B5))/B17	
17	Подбор параметра: j_e =	**4.06%**		
18	i_e =	**48.76%**		
19				

Рис. 21. Пример на вычисление процента по кредиту

Обращаем внимание читателя на два следующих момента при использовании этой функции. Во-первых, перед вторым аргументом (величина платежа, ячейка B6) стоит знак минус (отток денежных средств). Во-вторых, значением функции СТАВКА является *процент, начисляемый за период*, что в рассматриваемой ситуации соответствует проценту за месяц. Поэтому для получения эквивалентного годового процента i_e полученный результат умножается на 12. Таким образом, мы вычислили, что кредит на покупку компьютера предоставлялся под 48.76% (годовых).

Чтобы решить, стоит ли воспользоваться кредитом под такой процент, следует проанализировать другие варианты получения кредита или займа в размере 7 200 руб. Для информации сообщим только, что Северо-Западный банк Сбербанка РФ тогда предоставлял кредит (в рублях) на покупку потребительских товаров под 19% годовых[18]. Заметим, что такая

[18]Информация была получена 22 августа 2003 г. на сайте http://www.nwsbrf.ru

разница в процентах частично объясняется простотой получения кредита в магазине. ■

При потребительском кредите погашение долга обычно выполняется равными платежами. Следовательно, каждый следующий платеж (по сравнению с предыдущим) включает большую сумму погашения долга и меньшую сумму выплачиваемых процентов. Последнее объясняется тем, что, так как сумма долга уменьшается, то уменьшается и сумма выплачиваемых процентов. А так как сумма ежемесячного платежа не изменяется, то сумма погашаемого долга увеличивается.

Покажем, как изменяются суммы выплачиваемых процентов и долга в примере 8.12. На рис. 22 приведен фрагмент рабочего листа, содержащий план погашения долга за купленный компьютер. По этой таблице мы можем, например, определить, что через 6 месяцев величина долга будет равна 4 028 руб.

	D	E	F	G	H	I	J
2		период	платеж	проценты	погашенный долг	долг на конец периода	
3		0				7 200р.	
4		1	770р.	293р.	477р.	6 723р.	
5		2	770р.	273р.	497р.	6 226р.	
6		3	770р.	253р.	517р.	5 709р.	
7		4	770р.	232р.	538р.	5 171р.	
8		5	770р.	210р.	560р.	4 611р.	
9		6	770р.	187р.	583р.	4 028р.	
10		7	770р.	164р.	606р.	3 422р.	
11		8	770р.	139р.	631р.	2 791р.	
12		9	770р.	113р.	657р.	2 134р.	
13		10	770р.	87р.	683р.	1 451р.	
14		11	770р.	59р.	711р.	740р.	
15		12	770р.	30р.	740р.	0р.	
16							
17							

Рис. 22. План погашения кредита из примера 8.12

Даже если организация, предоставляющая кредит, явно указывает процент, под который он предоставляется, нельзя сразу сказать, является ли этот процент реальным. Это связано с тем, что существуют различные методы определения платежей по кредиту. Остановим только на одном из них — *методе равномерной выплаты процентов.*

При методе равномерной выплаты процентов проценты начисляются сразу на всю сумму долга за весь срок кредита. Размер выплаты по кредиту вычисляется как результат деления суммы величины кредита и процентов на количество выплат. При таком подходе (выгодном для кредитора) не учитывается, что величина долга уменьшается после каждого платежа, поэтому реальный процент, под который предоставляется кредит, будет существенно выше. Вернемся к примеру с покупкой компьютера и вычислим, каким будет процент i, если величина платежа рассчитывалась методом равномерной выплаты процентов:

$$i = \frac{770 \times 12 - 7\,200}{7\,200} = 0.2833 = 28.33\%.$$

Это означает, что за год в качестве процентов выплачивается сумма, равная 2 040 руб. (= 7 200 × 0.2833). При этом из каждой выплаты 170 руб. составляют проценты, а 600 руб. идет на погашение долга.

8.6. Доходность по облигациям

Для финансирования своих инвестиций корпорации используют заемные, или долговые, средства. Наряду с банковским кредитованием распространенным способом получения заемных средств на открытом рынке являются *облигации*. Кроме корпораций эмитентами облигаций являются правительства государств (государственные облигации, government bonds) и муниципальные власти (муниципальные облигации, municipal bonds).

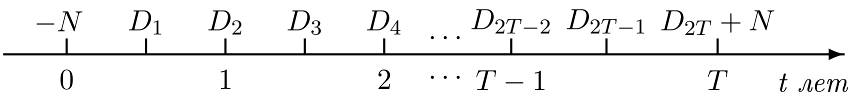
Облигация (bond) — долговое обязательство, выпускаемое заемщиком (эмитентом), которое гарантирует кредитору (инвестору) выплату указанной суммы N через T лет и, чаще всего, периодическую выплату определенных процентов от этой суммы. Эти выплаты называются *купонными платежами (coupon)*.

Денежная сумма N, указанная на облигации, которую заемщик (эмитент) берет взаймы и обязуется выплатить по истечении определенного срока, называется ее *номинальной стоимостью (face value)*. Дата, на которую держатель облигации может получить номинальную стоимость облигации и после которой уже не осуществляется никаких платежей, называется *датой погашения (maturity date)*. На практике выплата эмитентом номинальной стоимости облигации может выполняться в несколько этапов. Например, выплата номинальной стоимости $N = 1\,000$ руб. трехгодичных муниципальных облигаций Ярославской области, выпущенных в июне 2008 г., будет происходить по следующей схеме: 15% от номинальной стоимости будут выплачены с 4-ым купоном, по 10% — с 8-м и 9-м купонами, 65% — с последним, 12-м купоном[19].

В рамках нашей книги мы ограничимся рассмотрением классических типов облигаций, относящихся к инструментам с *фиксированным доходом*[20].

В зависимости от того, в какой форме инвестору выплачивается доход, облигации делятся на купонные и бескупонные (последние также называются *облигациями с нулевым купоном (zero-coupon bond)*). *Купонная облигация (coupon bond)*, как правило, продается в момент выпуска по номинальной цене N. В определенные сроки (p раз в год, $p = 1,\ 2$ или 4) эмитент выплачивает инвестору доход в виде процентов от номинальной цены облигации (купонные платежи). Этот процент называется *купонным доходом (coupon rate)*. По окончании срока T инвестору выплачивается доход по последнему купону и номинальная цена облигации.

Обозначим через D_i величину i-го купонного платежа ($i = 1, \ldots, pT$). Поток платежей по купонной облигации с выплатой купонного дохода два раза в год можно изобразить на оси времени следующим образом:



Если ставка процента по купону равна r, то купонный доход рассчитывается по формуле: $D_i = \dfrac{r}{p} N$. Еще раз обращаем внимание читателя на тот факт, что в финансах принято указывать *годовые* ставки процента, поэтому в двух предыдущих формулах годовая ставка процента делится на количество выплат в году (p).

Бескупонная облигация продается в момент выпуска со скидкой от номинальной стоимости (с дисконтом), а выкупается в момент T по номинальной стоимости. Бескупонными облигациями являются, например, государственные краткосрочные облигации (ГКО), которые размещаются путем продажи на аукционах по цене ниже номинальной стоимости. Доходность (к погашению) r бескупонной облигации, приобретенной по

[19]Эта и много другой полезной информации о российских облигациях имеется на сайтах www.rusbonds.ru и www.cbonds.info.

[20]В российской практике применяются более сложные для анализа виды корпоративных облигаций. А именно, номинальная стоимость возвращается несколькими выплатами. Купонные выплаты не являются постоянными, а определяются на аукционах в соответствии с проспектом эмиссии.

цене C, в том случае, если срок от даты покупки до даты погашения составляет d дней, вычисляется по формуле:

$$r = \frac{N - C}{C} \times \frac{365}{d}. \tag{8.14}$$

Здесь мы привели доходность за период существования облигации к годовой ставки процента с помощью простых процентов. Такого рада процедура корректна, так как чисто дисконтные облигации, как правило, бывают краткосрочными (до года), а тогда достаточно корректны и формула простых процентов и отсутствие каких-либо процедур дисконтирования (суммы N и C относятся к различным моментам времени).

Облигация с момента эмиссии до момента погашения обращается на рынке ценных бумаг, где имеет рыночную цену — *котировку*. Эта цена меняется в зависимости от срока, прошедшего с момента эмиссии, и от общей конъюнктуры рынка. Обычно она указывается в процентах от номинальной стоимости облигации.

Рассмотрим, как определяется доходность облигаций. Пусть имеется купонная облигация с номинальной стоимостью N, которая будет погашена через T лет и по которой ежегодно $p\,(\geq 0)$ раз в год выплачиваются купонные процентные платежи от номинальной стоимости облигации по постоянной ставке $j\%$ годовых.

Предположим, что инвестор приобрел купонную облигацию по цене Q в тот момент, когда до даты погашения осталось n лет ($n \leq T$). Доходность приобретения облигации характеризуется так называемой *доходностью к погашению* (YTM — Yield to Maturity), i_e. Это ставка сложных процентов, при которой приведенная ценность всех доходов, полученных покупателем облигации, рассчитанная по ставке i_e, равна цене покупки облигации Q. Составим уравнение для определения i_e.

Приведенная ценность номинальной стоимости облигации N, которая будет получена через n лет, равна $N(1 + i_e)^{-n}$. Ежегодно покупатель получает по купонам сумму Nj. Приведенная ценность этой ренты равна $Nja^{(p)}_{n;\,i_e}$, если купонные платежи выплачиваются равными долями p раз в год (p-срочная рента), или $Nja_{n;\,i_e}$, если купонные платежи выплачиваются один раз в год. Следовательно, значение i_e является корнем соответствующего уравнения:

$$N(1 + i_e)^{-n} + Nja_{n;\,i_e} = Q \quad \text{или} \quad N(1 + i_e)^{-n} + Nja^{(p)}_{n;\,i_e} = Q.$$

Разделив все члены этих уравнений на N, получим их окончательный вид:

$$(1+i_e)^{-n} + ja_{n;\,i_e} = \frac{Q}{N}\,, \tag{8.15}$$

$$(1+i_e)^{-n} + ja^{(p)}_{n;\,i_e} = \frac{Q}{N}\,. \tag{8.16}$$

Пример 8.13. *Облигация куплена по курсу 95% и будет погашена через 10 лет после покупки. Купонные платежи выплачиваются один раз в год в конце года, по ставке 5% годовых от номинальной стоимости облигации. Определить доходность приобретения этой облигации.*

Решение. Купонные платежи образуют годовую ренту, поэтому значение i_e ищем, решая уравнение (8.15), которое в данном примере имеет вид:

$$(1+i_e)^{-10} + 0.05\frac{1-(1+i_e)^{-10}}{i_e} = 0.95.$$

Решив это уравнение, получаем: $i_e = 5.67\%$. ■

8.7. Стоимость привлечения кредита

Государство (или фирма), выпуская облигации, кроме расходов на выплату процентов и выкуп облигации несет еще некоторые расходы N_r по ее выпуску (выплата сборов, налогов, комиссионных, оплата типографских услуг и т. п.). *Стоимостью привлечения средств (стоимостью кредита)* называют такую ставку сложных процентов i, при которой приведенная ценность всех расходов организации, выпускающей заем (в расчете на одну облигацию), равна продажной цене облигации. Если выплата процентов производится один раз в год в конце года, то значение i определяется из уравнения:

$$N(1+i)^{-n} + Nja_{n;\,i} + N_r = Q.$$

Если выплата купонных платежей производится p раз в году, то значение i_k определяется из уравнения:

$$N(1+i)^{-n} + Nja^{(p)}_{n;\,i} + N_r = Q.$$

Все обозначения в этих уравнениях те же, что и в п. 8.6.

Разделив все члены этих уравнений на N, получим:

$$(1+i)^{-n} + ja_{n;\,i} = \frac{Q - N_r}{N}\,, \tag{8.17}$$

$$(1+i)^{-n} + ja^{(p)}_{n;\,i} = \frac{Q - N_r}{N}\,. \tag{8.18}$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (8.15) и (8.16) только правыми частями. При $N_r = 0$ стоимость привлечения средств i равна ставке доходности к погашению i_e.

8.8. Доходность портфеля облигаций

Покупатель может составить *портфель*, состоящий из облигаций, различных по номинальной стоимости, срокам погашения и условиям выплаты процентов. Причина формирования портфеля из различных финансовых инструментов лежит в идее *диверсификации риска*. Здесь под риском мы понимаем отклонение доходности финансового инструмента от среднего значения доходности. Концепция управления портфелем фондовых активов (ценных бумаг) лежит в основе современной теории финансов. Мы не касаемся этого сложного вопроса в нашей книге — ему посвящена специальная литература. Однако расчет доходности портфеля (в отличие от расчета риска) вполне элементарен, этим мы сейчас и займемся.

Доходность портфеля облигаций для владельца портфеля измеряется ставкой сложных процентов i_e, при которой приведенная ценность всех выплат, полученных по облигациям портфеля, равна сумме затрат на приобретение облигаций, составляющих портфель. То есть величина i_e определяется из уравнения:

$$\sum_t R_t(1+i_e)^{-t} = \sum_l n_l Q_l, \tag{8.19}$$

где

t — сроки получения выплат по облигациям,
R_t — величина выплаты в момент t,
n_l — число облигаций l-го вида в портфеле,
Q_l — цена, по которой была куплена облигация l-го вида.

Пример 8.14. *Приобретен портфель облигаций трех видов:* А, Б *и* В. *Определить доходность этого портфеля для его владельца. В следующей* *таблице приведены данные об облигациях, входящих в портфель (N_l — номинальная стоимость, t_l — срок до погашения, j_l — купонный доход (%), k_l — число выплат в год):*

Вид	n_l	N_l	t_l	j_l	k_l	Q_l
А	*20*	*2000*	*5*	*10*	*2*	*1800*
Б	*30*	*1000*	*6*	*6*	*1*	*900*
В	*10*	*1000*	*3*	*8*	*1*	*1000*

Решение. Стоимость приобретения этого портфеля равна:

$$\sum_l n_l Q_l = 1800\times 20 + 900\times 30 + 1000\times 10 = 73\,000 \text{ руб.}$$

Опишем сначала поток выплат, которые получит держатель данного портфеля облигаций.

По облигациям вида А владелец портфеля будет получать каждые полгода, начиная с $t = 0.5$ до $t = 4.5$, по $10\%/2 = 5\%$ от номинальной стоимости каждой облигации. Таким образом, получаемая в эти моменты сумма равна: $20\times 2000\times 0.05 = 2\,000$ руб. В момент $t = 5$, кроме процентов, он дополнительно получит номинальную стоимость облигаций. Таким образом, вся сумма, полученная в момент $t = 5$ по облигациям вида А, равна: $2\,000\times 20 + 2\,000 = 42\,000$ руб.

По облигациям вида Б владелец портфеля получит в моменты $t = 1, 2, 3, 4, 5$ по 6% от номинальной стоимости каждой облигации. Таким образом, получаемая в эти моменты сумма равна: $30\times 1000\times 0.06 = 1\,800$ руб. В момент $t = 6$, кроме процентов, он получит номинальную стоимость облигаций. Таким образом, вся сумма, полученная в момент $t = 6$ по облигациям вида Б, равна: $30\times 1\,000 + 1\,800 = 31\,800$ руб.

По облигациям вида В владелец портфеля получит в моменты $t = 1$ и $t = 2$ по 8% от номинальной стоимости облигации. Таким образом, получаемая в эти моменты сумма равна: $10\times 1\,000\times 0.08 = 800$ руб. В момент $t = 3$, кроме процентов, он получит номинальную стоимость облигаций. Таким образом, вся сумма, полученная в момент $t = 3$ по облигациям вида В, равна: $10\times 1\,000 + 80 = 10\,800$ руб.

Для проведения вычислений по формуле (8.19) удобно использовать следующую таблицу:

Число лет t	Выплаты по облигациям (руб.)			Общие выплаты R_t	$R_t(1+i)^{-t}$		
	А	Б	В		$i =$ 10%	$i =$ 11%	$i =$ 10.6%
1	2	3	4	5	6	7	8
0.5	2 000	–	–	2 000	1 906.00	1 898.00	1 902.00
1.0	2 000	1 800	800	4 600	4 181.40	4 144.60	4 158.40
1.5	2 000	–	–	2 000	1 734.00	1 710.00	1 720.00
2.0	2 000	1 800	800	4 600	3 799.60	3 735.02	3 762.80
2.5	2 000	–	–	2 000	1 576.00	1 540.00	1 554.00
3.0	2 000	1 800	10 800	14 600	10 964.60	10 672.60	10 789.40
3.5	2 000	–	–	2 000	1 432.00	1 388.00	1 406.00
4.0	2 000	1 800	–	3 800	2 595.40	2 504.20	2 538.40
4.5	2 000	–	–	2 000	1 302.00	1 250.00	1 270.00
5.0	42 000	1 800	–	43 800	27 199.80	25 973.40	26 455.20
6.0	–	31 800	–	31 800	17 935.20	17 013.00	17 362.80

Суммы R_t (столбец 5) образуют поток выплат. Введем обозначения:

$$\sum_t R_t(1+i_e)^{-t} = f(i_e), \quad \sum_l n_l Q_l = Q.$$

В этих обозначениях уравнение (8.19) примет вид:

$$f(i_e) = Q\,, \text{ или } \quad f(i_e) = 73\,000.$$

Вычислим значение $f(i_e)$ при $i_e = 10\%$ и $i_e = 11\%$:

$$f(10\%) = 74\,626\,, \quad f(11\%) = 71\,829.$$

Из монотонности функции $f(i_e)$ следует, что решение находится между этими значениями. Применим любой из описанных ранее методов для нахождения корня уравнения и получим: $f(10.58\%) = 73\,000.00$. ∎

8.9. Используем Excel

Вернемся к примеру 8.12 и вычислим процент по кредиту другим, более универсальным способом. Для решения задач, сводящихся к нахождению корня уравнения, в Excel имеется команда Подбор параметра (меню Сервис). С ее помощью выполняется подбор значения параметра (в рассматриваемом случае это процент i_e), при котором значение некоторого выражения (левая часть формулы (8.13)) равно заданному числу ($Q/R = 9.3506$).

Активация команды Подбор параметра (щелчок левой клавишей мыши или нажатие клавиши Ввод) приводит к появлению диалогового окна этой команды (рис. 23). Окно имеет три поля, которые необходимо заполнить: адрес ячейки, в которой записана формула, вычисляющая значение исследуемого выражения (B16); значение, которое должно быть получено (9.3506); адрес ячейки с изменяемым значением параметра (B17). Так как формула выражения (ячейка B16) содержит деление на параметр i_e, то перед выполнением команды в ячейку B17 следует записать любое значение, отличное от нуля (например, 6%).

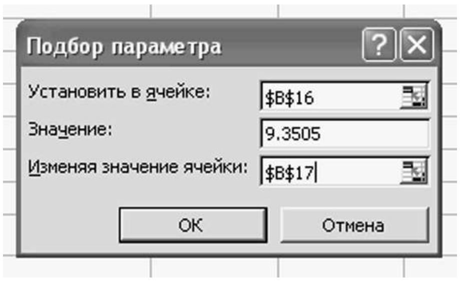


Рис. 23. Окно команды Подбор параметра

Результаты выполнения команды Подбор параметра сообщаются программой Excel в информационном окне Результат подбора параметра. Это окно содержит найденное значение (если команда успешно завершилась) и значение выражения при найденном значении параметра. Фрагмент рабочего листа после успешного завершения команды Подбор параметра приведен на рис. 21. Полученное значение процента совпало с тем, которое было вычислено с помощью встроенной функции СТАВКА.

Обращаем внимание читателя на то, что команда Подбор параметра не всегда может найти значение параметра, удовлетворяющее заданному условию (корень уравнения). В таком случае в окне Результат подбора параметра появится сообщение о невозможности подбора параметра. Иногда это связано с тем, что такого значения, действительно, не существует. Если же вы уверены, что такое значение параметра существует, то следует заменить начальное значение параметра в изменяемой ячейке (на более близкое к решению) и повторно выполнить команду.

Следует помнить, что Excel выполняет вычисления с вещественными числами с некоторой точностью. Задать точность вычислений (или узнать, с какой точностью они были выполнены) можно на вкладке Вычисления (меню Сервис, подменю Параметры). Для увеличения точности вычислений следует уменьшить значение в поле Относительная погрешность.

Еще одно замечание по поводу команды Подбор параметра. Если существует несколько значений параметра, при которых выражение принимает заданное значение, то будет найдено то значение параметра, которое находится ближе к его начальному значению. Однако подобная ситуация, скорее всего, не встретится при решении примеров и упражнений из этой книги.

Следует помнить, что команда Подбор параметра может подобрать значение только *одного* параметра, при котором выражение принимает заданное значение. Например, с её помощью невозможно определить допустимый вариант срока кредита и процента по нему при заданных размерах долга и платежа. Для решения подобных задач в Excel имеется другое средство — Поиск решения, которое чаще называют даже не командой, а надстройкой, учитывая широкий класс его возможностей.

Упражнения

1. Торговая фирма обязалась уплатить фермеру за купленное у него зерно 54 000 руб. через 3 месяца после покупки, 27 000 руб. — еще через 3 месяца и 54 000 руб. — еще через 3 месяца. Стороны договорились объединить эти платежи в один и выплатить его через 6 месяцев после покупки. Чему равен этот платеж, если на деньги начисляется 12% годовых?

2. Торговая фирма из предыдущего упражнения желает выплатить весь долг одним платежом, равным 140 000 руб. В какой срок, считая с момента покупки, она должна это сделать?

3. Торговая фирма из упражнения 1 желает выплатить долг двумя равными уплатами через 3 и через 6 месяцев после покупки. Какова должна быть величина каждой из этих уплат?

4. Жилищный кооператив должен выплатить ремонтной организации три раза по 250 000 руб. в конце года, считая от настоящего момента. Кооператив предложил заплатить 300 000 руб. через год, а остальное — еще через 2 года. Какую сумму он должен уплатить в последний раз, если деньги стоят 13% годовых?

5. Покупатель приобрел у фирмы автомобиль, подписав контракт, в соответствии с которым обязался уплатить 150 000 руб. через 6 месяцев после момента покупки и 200 000 руб. еще через 18 месяцев после момента покупки. Фирма желает продать этот контракт банку, получающему 16% годовых (сложных) на свои деньги. Какую сумму заплатит банк за этот контракт, если купит его в момент заключения?

6. В условиях предыдущего упражнения, какую сумму должен заплатить банк за контракт, покупая его через три месяца после заключения?

7. Фирма продала 5 т удобрений фермеру за 300 000 руб., заключив контракт, по которому фермер обязался выплатить ей эту сумму 6 равными ежеквартальными выплатами по 50 000 руб. Желая получить деньги немедленно, фирма продала этот контракт банку, получающему на ссужаемые деньги проценты по ставке $j_{12} = 20\%$. Какую сумму заплатил банк фирме за контракт?

8. Акционерное общество приобрело у строительной компании дом за 50 млн руб., обязавшись оплатить его равными ежегодными платежами в течение 5 лет, выплачивая за долг 15% годовых. Компания желает получить деньги немедленно и продает этот контракт банку, который получает на ссуженные деньги 20% годовых. Сколько должен заплатить банк за этот контракт?

9. Компания может купить оборудование на одном из двух заводов. Первый завод продает это оборудование за 15 млн руб. и требует 2 авансовых платежа по 2 млн руб. каждый: первый — в момент заключения контракта на покупку, второй — через год после этого. Поставка оборудования будет выполнена после второго авансового платежа. Кредит дается на 4 года, считая с момента поставки, под 10% годовых и погашается единовременным платежом в конце срока кредита. Второй завод продает оборудование за 18 млн руб., требует один авансовый платеж в 3 млн руб. в момент заключения контракта, поставку выполнит после авансового платежа. Покупателю предоставляется кредит на 5 лет, начиная с момента покупки, под 9% годовых, который погашается единовременным платежом в конце срока кредита. Какой контракт выгоднее для покупателя? Используйте ставку сравнения $i = 15\%$.

10. На сколько лет должен изменить срок кредита второй завод (из предыдущего упражнения), чтобы приведенные ценности оборудования у обоих заводов совпали?

11. Фирма планирует построить новое здание под офис. Она получила предложение от двух строительных организаций. По первому предложению здание стоит 20 млн руб., строители требуют два авансовых платежа по 5 млн руб.: первый — в момент заключения контракта, второй — через 2 года после этого. Готовое здание сдается после второго авансового платежа и на оставшуюся сумму предоставляется кредит на 3 года под 6% годовых, который должен погашаться равными ежегодными платежами. По второму предложению здание стоит 22 млн руб. Строители желают получить три авансовых платежа по 2 млн руб.: первый — в момент заключения контракта, второй — через год и третий — еще через год. Готовое здание сдается после третьего авансового платежа. На оставшуюся сумму строители предоставляют фирме кредит на 5 лет под 4% годовых, который должен погашаться равными ежегодными платежами. Какой контракт выгоднее для фирмы? Ставка сравнения $i = 10\%$.

12. Первая строительная организация из описанных в предыдущем упражнении, желая победить в конкурсе со второй организацией, увеличивает срок кредита до 5 лет. Станет ли при этом ее предложение более выгодным?

13. Первая из двух организаций, описанных в упражнении 11, изменяет контракт, требуя только один авансовый платеж в 10 млн руб. через два года после заключения контракта в момент сдачи готового здания. Станет ли при этом контракт с первой организацией выгоднее для фирмы-заказчика, чем со второй?

14. Решите предыдущее упражнение, если первая организация требует только один авансовый платеж в 10 млн руб. через год после заключения контракта.

15. Хозяин рыболовецкой организации ищет судостроительную фирму, которая может построить для нее судно. Поступили предложения от двух фирм. Обе берутся построить нужное судно за 2 года. Цена судна первой фирмы — 8 млн руб., фирма требует четыре авансовых платежа по 1 млн руб.: первый — в момент заключения контракта, второй — через полгода, третий — еще через полгода и четвертый — еще через полгода. На остальную сумму в момент сдачи судна фирма открывает кредит на 2 года под 6% годовых, который должен погашаться равными срочными уплатами через каждые полгода. Вторая фирма требует за судно 10 млн руб. и довольствуется одним авансовым платежом в 5 млн руб. в момент сдачи судна. На оставшуюся сумму фирма предоставляет рыболовам кредит на 4 года под 8% годовых, который должен быть выплачен равными ежегодными срочными уплатами. Какой контракт выгоднее для рыбаков? Ставка сравнения — 10%.

16. Станет ли контракт со второй фирмой из предыдущего упражнения выгоднее, чем с первой, если в контракт со второй фирмой внести одно из следующих изменений:

а) срок кредита увеличивается до 6 лет;
б) проценты за кредит уменьшаются до 6% годовых;
в) цена судна уменьшается до 9 млн. руб.;
г) одновременно цена судна уменьшается до 9 млн. руб., а срок кредита увеличивается до 6 лет?

17. Банк выдал ссуду фермеру на 5 лет под 20% (сложных). Какова доходность для банка этой операции, если:

    а) комиссионные не взимаются,
    б) удерживаются комиссионные в размере 1.5% от суммы ссуды,
    в) при условии б) срок ссуды 8 лет?

18. Банк выдал ссуду торговой организации на 2 года под сложные проценты по ставке $j_4 = 12\%$. Какова доходность для банка этой операции, если:

    а) комиссионные не взимаются,
    б) удерживаются комиссионные в размере 0.5% от суммы ссуды,
    в) при условии пункта б) срок ссуды 3 года?

19. Банк учитывает вексель за 6 месяцев до срока его оплаты по простой учетной ставке $d_s = 5\%$. Определить доходность этой операции для банка, если:

    а) комиссионные не удерживаются,
    б) удерживаются комиссионные в размере 0.5% от суммы, выплачиваемой за вексель,
    в) удерживаются комиссионные в размере 0.5% от суммы, выплачиваемой за вексель, и период времени до оплаты векселя — 9 месяцев?

20. Банк учитывает портфель, состоящий из 8 векселей по 500 руб. каждый, погашаемых один за другим с интервалом в один месяц. Первый вексель будет погашен через месяц после покупки. Учетная ставка банка — 4% годовых (простых). Какую сумму выплатит банк за этот портфель?

21. Решите предыдущее упражнение, если учетная ставка банка равна 7% годовых (простых).

22. Какова доходность для банка операции, описанной в упражнении 20?

23. Какова доходность для банка операции, описанной в упражнении 21?

24. Облигация куплена по курсу 90% и будет погашена через 8 лет после покупки. Купонные платежи выплачиваются один раз в год по ставке 5.25% годовых. Определите доходность этой покупки.

25. Решите упражнение 24, если купонные платежи выплачиваются четыре раза в год равными долями (при той же годовой ставке 5.25%).

26. Решите упражнение 24, если купонные платежи выплачиваются ежемесячно равными долями (при той же годовой ставке 5.25%).

27. Казначейство выпустило облигации. Номинальная цена каждой из них — 1 000 руб. и срок — 15 лет. Ежегодно по облигациям выплачивается 5% купонных платежей (от номинальной цены облигации). Курс продажи облигаций равен 95%. Дополнительные расходы по выпуску облигации равны 3% от ее номинальной стоимости. Определите стоимость привлечения средств (цену кредита).

28. Решите упражнение 27, если дополнительные расходы составляют 5% номинальной стоимости облигации. Покажите, как изменяется цена привлечения средств (цена кредита) с увеличением дополнительных расходов по выпуску облигаций?

29. Определите доходность портфеля, состоящего из облигаций четырех видов: А, Б, В, Г. В следующей таблице приведены данные об облигациях, составляющих портфель, и об условиях их приобретения:

Вид облигации	Количество облигаций, n_l	Номинальная стоимость, N_l	Срок погашения, t_l (лет)	Купонный доход, j_l (%)	Число выплат в год	Цена приобретения, Q_l
А	10	500	10	6	2	400
Б	20	300	8	12	4	300
В	15	1000	5	15	2	1200
Г	30	200	6	8	1	180

30. Можно купить в кредит музыкальный центр, цена которого равна 3 399 руб., на следующих условиях: первоначальный взнос отсутствует; срок кредита равен 2 годам; ежемесячный платеж составляет 219 руб. Вычислите процент, под который предоставляется кредит, и составьте план погашения кредита.

31. Можно купить в кредит стиральную машину, цена которой равна 11 999 руб., на следующих условиях: первоначальный взнос отсутствует; срок кредита равен 2 годам; ежемесячный платеж составляет 769 руб. Вычислите процент, под который предоставляется кредит, и составьте план погашения кредита.

9. Принцип отсутствия арбитражных возможностей

В этой главе речь пойдет о принципе отсутствия арбитражных возможностей, который постулирует, что на конкурентном рынке цены на одни и те же или эквивалентные товары стемятся к равенству. Этот принцип называют еще *законом единой цены.*

9.1. Финансовый арбитраж

Финансовым *арбитражем* называется особый вид коммерческой деятельности, направленный на извлечение прибыли из разницы цен одинаковых (или родственных) биржевых активов при нарушении между их ценами паритетных отношений. Людей, которые профессионально занимаются арбитражными операциями, называют *арбитражерами.* Начнем с простейших примеров.

Пример 9.1. *В рассматриваемый день акция компании A стоила на бирже в городе N 225.75 руб., а в городе M — 231.72 руб. Арбитражер купил 1 000 акций компании A в городе N и продал их в городе M. Вычислим доход арбитражера, если биржа в городе N удерживает 0.1% от суммы сделки, а в городе M — 0.2%.*

Решение. Арбитражер потратил на покупку акций с учетом комиссии

$$225.75\times1000\times(1+0.001)=225\,975.75 \text{ руб.}$$

и получил при продаже с учетом комиссии

$$231.72\times1000\times(1-0.002)=231\,256.56 \text{ руб.}$$

Следовательно, доход арбитражера равен

$$231\,256.56-225\,975.75=5\,280.81 \text{ руб.},$$

что в процентах от затраченной суммы составляет 2.34%. ■

Выше приведен пример простейшего арбитража. Более сложный, но и более актуальный пример мы получим при перекрестном валютном арбитраже.

Пример 9.2. *В рассматриваемый момент времени на валютной бирже в городе N доллар стоил* 26.95 *руб., а евро —* 33.75 *руб. В тот же момент на бирже в городе M за один евро давали 1.27 доллара. Брокер из города N имеет возможность совершать сделки на обеих площадках. Сделку в городе N можно произвести без удержания комиссионных, а при сделке в городе M перевод валюты в город N стоит* 0.1% *от суммы сделки. Проанализируем арбитражные возможности брокера.*

Решение. Покажем, что брокер может получить доход, проведя следующую операцию: купить евро в N за рубли; продать евро и получить доллары в M; перевести полученные доллары в N и продать их, получив рубли. Для определенности предполагаем, что на первом шаге (в городе N) была куплена 1 000 евро. На покупку евро брокер потратил сумму, равную 33 750 руб. Далее эти евро будут потрачены на покупку долларов в M. Учтем, что при переводе удерживается 0.1% от суммы:

$$1\,000 \times 1.27 \times (1 - 0.001) = 1\,268.73 \text{ долл.}$$

Далее, продав полученные 1 269 долл. в N, брокер получит сумму, равную

$$1\,268.73 \times 26.95 = 34\,192.27 \text{ руб.}$$

Следовательно, доход брокера равен

$$34\,192.27 - 33\,750.00 = 442.27 \text{ руб.}$$

Выразим величину дохода в процентах:

$$\frac{442.27}{33\,750} = 0.0131 = 1.31\%.$$ ■

Арбитражные возможности, типа описанных в примере 9.2, быстро исчезают в результате активности трейдеров.

Другой пример арбитража мы получим при анализе процентно-валютного паритета.

Пример 9.3. *Предположим, что в первой стране (А) годовая ставка процента по безрисковым ценным бумагам равна* 8%, *а во второй (В) —* 6%. *Обменный курс равен* 1.8 *единиц валюты страны В за* 1 *единицу валюты страны А. Предполагается, что к концу года этот курс составит* 1.5. *Проанализируем арбитражные возможности при покупке безрисковых ценных бумаг.*

Решение. Для удобства будем писать после сумм в валютах стран А и В символы A и B соответственно. Если купить безрисковые ценные бумаги в стране В, то, вложив $1B$ в начале года, мы получим $1.06B$ в конце года. Если перевести $1B$ в валюту А, то мы получим $1/1.8 = 0.56A$, вложив которые в ценные бумаги страны А мы получим:

$$0.56\times(1 + 0.08) = 0.60A$$

Переводя эту сумму в валюту В в конце года, получаем сумму $0.60\times1.5 = 0.9B$, что меньше, чем $1.06B$. Это связано с тем, что более высокая ставка в стране А была перевешена ожидаемым спадом обменного курса ее валюты. В данном случае арбитражеры будут покупать ценные бумаги страны В. Легко вычислить, что паритету, после которого арбитражеры начнут переводить валюту В в валюту А и вкладывать в ценные бумаги с более высокой ставкой доходности, соответствует обменный курс ex валюты А на валюту В, удовлетворяющий уравнению:

$$0.60\times ex = 1.06, \quad \text{откуда} \quad ex = 1.77.$$

Следовательно, арбитражеры начнут переводить валюту В в валюту А и покупать ценные бумаги страны А, если обменный курс будет не менее $1.77B$ за $1A$. ∎

Важно отметить, что арбитражные возможности рассмотренных типов не могут быть долговременными. Цены одинаковых объектов на разных биржах в результате арбитражных операций выравниваются, поэтому цены активов в будущем рассчитываются так, чтобы арбитражная операция была невозможна. Модели финансовых операций с ценными бумагами и другими инструментами строятся на принципе отсутствия арбитража. Более того,*принцип отсутствия арбитража* является основным принципом ценообразования на финансовые активы.

Пример 9.1 относился к простейшему виду арбитража — пространственному арбитражу. В примере 9.3 уже присутствовали неопределенность и время. Следующий пример развивает тему межвременного арбитража. Напомним, что один и тот же актив, рассматриваемый в разные моменты времени, является родственным себе, но не идентичным себе активом — его ценность и цена могут измениться.

Пример 9.4. *Субъекты А и Б заключили договор, по которому А обязан продать Б через два месяца* 1 *акцию за* 41 *руб. Цена такой акции в момент заключения договора равна* 40 *руб. Безрисковый процент помещения капитала равен* 10%. *Опишем арбитражную операцию, которую может осуществить субъект А.*

Решение. Субъект А занимает 40 руб. под 10% на два месяца и покупает акцию за 40 руб. Через два месяца он продает эту акцию Б за 41 руб. и отдает долг, равный $40(1+0.1)^{1/6} = 40.64$ руб. При этом А получает доход, равный $41 - 40.64 = 0.36$ руб. ∎

Далее в этой главе мы рассмотрим применения принципа отсутствия арбитражных возможностей к ценообразованию на срочные контракты.

9.2. Форвардные контракты

Существует три основных вида срочных контрактов: *форвард*, *фьючерс*, *опцион*. О форвардах мы подробно поговорим ниже. Фьючерс отличается от форварда тем, что он представляет собой стандартизованный биржевой инструмент, правила использования которого диктуются биржей. Основные условия фьючерсного контракта фиксируются в специальном документе, утвержденном биржей, который называется *спецификации фьючерса*. Форварды и фьючерсы являются договорами, выполнение которых обязательно. Опцион, напротив, предоставляет право его владельцу отказаться от выполнения договора, если на момент исполнения его условия окажутся невыгодными. Это такое благо, за которое при покупке опциона покупатель выплачивает продавцу так называемую опционную *премию* — цену опциона. Анализ опционных договоров требует использования теории вероятностей и выходит за рамки этой книги. Здесь мы будем рассматривать только форвардные контракты.

Форвардный контракт есть соглашение, заключенное в определенный момент времени между субъектом А и субъектом Б, согласно которому субъект А (продавец) обязуется поставить субъекту Б (покупателю) в фиксированный срок T оговоренное количество некоторого актива, а покупатель Б обязуется уплатить продавцу А за этот актив в момент T

сумму K, называемую *ценой поставки*. Цена поставки является одновременно и *форвардной ценой*, то есть ценой форвардного контракта.

Форвардный контракт является *срочным контрактом*, так как это договор на срок — в нем зафиксирована цена на будущий момент времени. Поставка и оплата будут выполнены именно в этот будущий момент T. Плюсом для обеих сторон является то, что цена зафиксирована сегодня, что позволяет им оценить будущие доходы и затраты (предполагая, что контракт, в самом деле, будет исполнен). С другой стороны, форвардный контракт является *производной ценной бумагой*, так как его цена зависит от цены некоторого базисного актива, которая неопределенным образом меняется во времени.

В качестве базисного актива могут выступать ценные бумаги, валюта, биржевые товары (нефть, алюминий, пшеница и т. п.). Рынок базисного актива принято в данном контексте называть *спот-рынком*, а складывающуюся на нем цену — *спот-ценой* (*spot price*). В связи с этим термином, будем обозначать цену базисного актива через S. Принято говорить, что продавец А *занимает короткую позицию* (*take a short position*), а покупатель Б *занимает длинную позицию* (*take a long position*).

Рассмотрим, как происходит процесс поставки в момент T. Мы предполагаем, что поставка происходит через биржу, торгующую базисным активом, то есть через спот-рынок с его спот-ценой. Действия А и Б на бирже выглядят следующим образом:

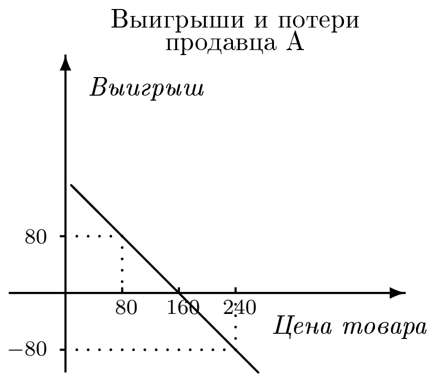
- если цена актива на бирже S ниже K, то продавец А покупает его на бирже по цене S и продает Б по цене K, получая доход в виде разницы цен $(K - S)$ с каждой единицы актива;
- если цена актива на бирже S выше K, то покупатель Б, уплатив за актив, согласно форвардному контракту, цену K, тут же продает его на бирже по цене S, получая доход в виде разницы цен $(S - K)$ с каждой единицы актива.

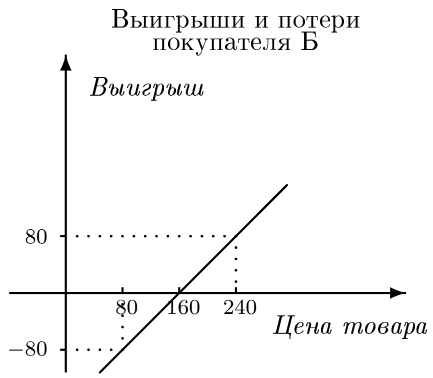
В первом случае потери несет Б, а во втором — А. В этой противоречивости интересов и слабость форвардных договоров, которая решается с помощью развития клиринга при фьючерсных контрактах. Если опустить подробности клиринга, то наш анализ цены форвардных контрактов применим и к фьючерсам. Рассмотрим пример.

Пример 9.5. *Субъект А заключил 31 января с субъектом Б форвардный контракт, по которому продавец А обязуется поставить 1 мая одну акцию корпорации ABC, а покупатель Б обязуется уплатить за нее в этот* *момент продавцу* 160 *руб. Рассмотрим возможные ситуации, которые могут возникнуть 1 мая.*

Решение. Если 1 мая рыночная цена акции будет 80 руб., то продавец А купит эту акцию за 80 руб. и продаст ее покупателю Б за 160 руб., получив доход 80 руб. Покупатель Б теряет при этом 80 руб., так как он мог бы купить акцию за 80 руб. Если 1 мая рыночная цена акции будет 240 руб., то покупатель покупает эту акцию у продавца А за 160 руб. и продает ее за 240 руб., получая доход 80 руб. Продавец при этом теряет 80 руб., так как он продает акцию на 80 руб. дешевле, чем мог бы продать на рынке.

Графически зависимость сумм выигрышей и потерь от цены акции 1 мая можно изобразить следующим образом:





На горизонтальной оси указана возможная цена товара на рынке в момент исполнения форвардного контракта. На вертикальной оси выигрыши обозначаются положительными числами, а потери — отрицательными. ■

9.3. Цена поставки

Установим теперь строгое соотношение между *ценой поставки* K, указанной в форвардном контракте, и спот-ценой базисного актива. Для этого мы воспользуемся принципом отсутствия арбитражных возможностей.

Для того чтобы исключить возможность арбитражных операций, надо установить такую цену поставки, при которой покупатель контракта получал бы одинаковую выгоду от заключения форвардного контракта и от непосредственной покупки этого актива в момент заключения контракта. Это будет обеспечено, если приведенная ценность цены поставки в момент заключения договора будет равна цене этого актива на рынке в этот момент. Рассмотрим два случая.

1-й случай. Форвардный контракт заключен на актив, по которому в течение времени действия контракта доходы не выплачиваются. Это могут быть, например, облигации с нулевым купоном (бескупонные), акции, по которым выплата дивидендов в течение этого времени не предусматривается.

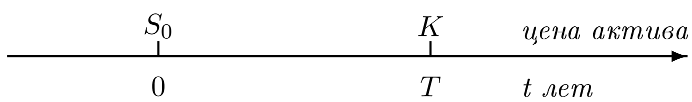
Пусть в момент заключения договора рыночная цена товара равна S_0, а безрисковая ставка процента (годовая) равна r. Так как цена поставки K выплачивается через промежуток времени, равный T (время считается в долях года), то сумма K должна иметь в момент заключения договора приведенную ценность S_0, то есть K определяется из равенства:

$$K\frac{1}{(1+r)^T} = S_0.$$

Из этого равенства находим значение K, при котором исключена возможность получения арбитражного дохода:

$$K = S_0(1+r)^T. \tag{9.1}$$

Этот контракт можно изобразить на оси времени так:



Покажем, что если $K \neq S_0(1+r)^T$, то появляется возможность получить доход в результате арбитражной операции:

а) Если $K > S_0(1+r)^T$, то продавец А занимает в момент 0 сумму S_0 под $100r\%$ годовых и покупает актив. Одновременно он заключает форвардный контракт с покупателем Б на поставку этого актива по цене K через T лет. В момент T продавец А продает покупателю актив по цене K и отдает долг, равный в этот момент $S_0(1+r)^T$. В результате продавец А получает доход, равный

$$K - S_0(1+r)^T.$$

б) Если $K < S_0(1+r)^T$, то покупатель Б в момент 0 занимает у брокера актив и продает его по цене S_0. Далее он инвестирует полученную сумму S_0 под $100r\%$ годовых и заключает такой же форвардный контракт, как в случае а). В момент T покупатель получает от инвестиций сумму $S_0(1+r)^T$ и покупает у А актив по цене поставки K. Отдав этот актив брокеру, покупатель получает доход, равный

$$S_0(1+r)^T - K.$$

Чтобы упростить изложение, мы предположили, что покупатель занимает актив у брокера без процентов. Реальным вариантом такой операции может быть так называемая *короткая продажа* — продажа актива, которого у вас нет в наличии (это вполне допустимая финансовая операция, ограниченная, однако, законодательными рамками).

Пример 9.6. *Заключен форвардный контракт на поставку акции M через 3 месяца. В момент заключения договора цена акции M равна 103 руб. Безрисковый процент $r = 10\%$ годовых. Найдем цену поставки K, исключающую возможность арбитражный операций.*

Решение. Используем формулу (9.1) и получаем ответ:

$$K = S_0(1+r)^T = 103(1+0.1)^{0.25} = 105.48 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Пример 9.7. *Покажем, что если в условиях примера 9.6 цена поставки акции M равна 106 руб., то арбитражную операцию может провести продавец А.*

Решение. Продавец А занимает 103 руб. под безрисковый процент $r = 10\%$ и покупает акцию M за 103 руб. Через 3 месяца он продает акцию покупателю за 106 руб. и возвращает долг, равный в этот момент

$$103(1+0.1)^{0.25} = 105.48 \text{ руб.}$$

В результате продавец А получает доход, равный

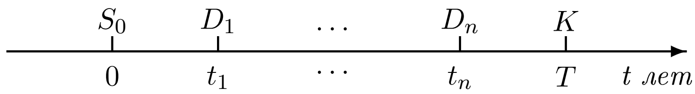
$$106 - 105.48 = 0.52 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

2-й случай. Форвардный контракт заключается на актив, по которому в течение времени действия контракта выплачивается доход. Это могут быть акции, по которым выплачиваются дивиденды, или облигации с выплатой купонного дохода. Подпадают под эту категорию и валютные форварды, так как на валюту, и иностранную и отечественную, можно альтернативным образом получать доход по безрисковой ставке соответствующей страны в течение всего времени существования форвардного контракта.

Пусть рыночная цена актива, на который заключается форвардный контракт в момент его заключения, равна S_0. В течение действия контракта по данному активу выплачивается доход в суммах $D_1, \ldots, D_n$ в моменты

$$t_1, \ \ldots, \ t_n \quad (0 < t_1 < \cdots < t_n < T),$$

где T — срок действия контракта. Все значения моментов времени указаны в годах и отсчитываются от момента заключения контракта, который считается равным нулю. Изобразим этот контракт на оси времени:



Допустим, что в течение всего времени действия контракта безрисковая процентная ставка дохода равна $r\%$. Чтобы возможность арбитражных операций была исключена, цена поставки K должна быть такой, чтобы в момент 0 приведенная ценность ее и всех доходов, полученных в течение времени $[0; T]$, была равна S_0:

$$S_0 = D_1 \frac{1}{(1+r)^{t_1}} + \cdots + D_n \frac{1}{(1+r)^{t_n}} + K \frac{1}{(1+r)^{T}} \, .$$

Откуда находим:

$$K = (S_0 - D_1(1+r)^{-t_1} - \cdots - D_n(1+r)^{-t_n})(1+r)^{T}. \tag{9.2}$$

На практике безрисковые ставки процентов на сроки

$$[0; t_1], \ [0; t_2], \ \ldots, \ [0; t_n], \ [0; T]$$

обычно бывают различны. Обозначим их $r_1, \ r_2, \ \ldots, \ r_n, \ r_{n+1}$ соответственно. Тогда цена поставки определяется формулой:

$$K = (S_0 - D_1(1+r_1)^{-t_1} - \cdots - D_n(1+r_n)^{-t_n})(1+r_{n+1})^{T}. \tag{9.3}$$

Пример 9.8. *Заключен форвардный контракт на поставку через 6 месяцев акции, которая в момент заключения договора стоит 100 руб. Известно, что через 3 и 6 месяцев на эту акцию будут выплачены дивиденды по 15 руб. Безрисковая ставка процента в течение всего срока действия контракта равна 6% годовых. Найдем цену поставки.*

Решение. Применяем формулу (9.2) при $n = 2$, $t_1 = 0.25$, $t_2 = 0.5$, $T = 0.5$, $S_0 = 100$ руб., $D_1 = D_2 = 15$ руб., $r = 6\% = 0.06$:

$$K = (100 - 15\times(1+0.06)^{-0.25} - 15\times(1+0.06)^{-0.5})(1+0.06)^{0.5} =$$

$$= (100 - 14.78 - 14.57)\times 1.03 = 72.77 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Если цена поставки отличается от цены, вычисленной по формулам (9.2) и (9.3), то можно провести арбитражную операцию. Приведем пример.

Пример 9.9. *Покажем, что если в условиях примера 9.8 цена поставки установлена ниже 72.77 руб., например 72 руб., то покупатель Б может совершить арбитражную операцию.*

Решение. Покупатель Б занимает у брокера акцию, обязуясь выплатить брокеру дивиденды, которые выплачиваются по этой акции, и вернуть акцию через 6 месяцев. Затем Б продает акцию за 100 руб. и заключает форвардный контракт, обязуясь купить акцию через 6 месяцев за 72 руб. Из полученных 100 руб. Б инвестирует 14.78 руб. на три месяца под безрисковый процент, равный 6%, чтобы выплатить брокеру первый дивиденд, равный 15 руб. За инвестированные 14.78 руб. через три месяца Б получит сумму, равную

$$14.78\times(1+0.06)^{0.25} = 15 \text{ руб.}$$

Остальную часть занятых денег, равную

$$100 - 14.78 = 85.22 \text{ руб.},$$

покупатель Б инвестирует на 6 месяцев под 6% годовых. В конце срока действия контракта покупатель Б получает от инвестиций сумму, равную

$$85.22\times(1+0.06)^{0.5} = 87.74 \text{ руб.}$$

Из этих денег он покупает акцию за 72 руб., отдает ее брокеру и выплачивает брокеру второй дивиденд, равный 15 руб. В результате он получит доход, равный

$$87.74 - 15 - 72 = 0.74 \text{ руб.}$$

■

Аналогичные арбитражные операции можно производить и в условиях, когда безрисковая ставка изменяется в течение действия контракта.

Пример 9.10. *Пусть в условиях примера 9.8 цена поставки больше 73.72 руб., например 75 руб. Безрисковая ставка процента равна 7% за 3 месяца и 9% за 6 месяцев. Покажем, что продавец А может провести арбитражную операцию.*

Решение. Продавец А заключает форвардный контракт на поставку акции через 6 месяцев за 75 руб. Одновременно он занимает 100 руб. и покупает такую акцию. Из 100 руб. он занимает 14.75 руб. на три месяца под 7%. Эта часть долга через 3 месяца станет равна

$$14.75 \times (1 + 0.07)^{0.25} = 15 \text{ руб.},$$

и А отдаст эту часть долга, получив первый дивиденд. Остальной долг, равный $100 - 14.75 = 85.25$ руб., он занимает на 6 месяцев под 9% годовых. Через 6 месяцев эта часть долга станет равна

$$85.25 \times (1 + 0.09)^{0.5} = 89.00 \text{ руб.}$$

В этот момент продавец А получает 15 руб. дивидендов, продает акцию за 75 руб. и отдает долг, равный 89.00 руб. При этом продавец А получает доход, равный

$$15.00 + 75.00 - 89.00 = 1.00 \text{ руб.}$$

■

9.4. Форвардная цена и ценность форвардного контракта

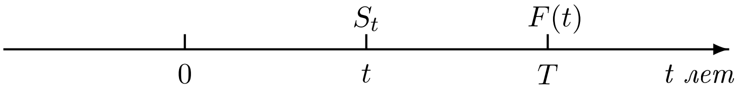
Если нет вторичного рынка форвардных контрактов, то есть каждый контракт доживает у сторон до своего исполнения, то мы в предыдущем пункте решили все возникающие задачи. Однако форвардный контракт является финансовым инструментом. В момент своего заключения форвардный контракт не имел никакой ценности, так как стороны обоюдно согласились с ценой поставки. Однако с изменением спот-цены контракт начинает обретать меновую ценность для продавца или для покупателя в зависимости от направления движения цены. Это вызывает к жизни вторичный рынок форвардных контрактов (в случае фьючерсов такой рынок предполагается по самой технологии контракта). Рассмотрим вопрос о том, как меняется ценность форварда с изменением спот-цены. Подчеркнем, что речь идет не о цене, а о *ценности* форварда как финансового контракта, существующего отдельно от базисного актива. Цена форварда по определению равна цене поставки на конкретный срок в данный торговый день. Эта цена — общая как для вновь заключенных контрактов, так и для контрактов, заключенных ранее на других условиях, — важна только дата исполнения.

Ценность, в отличие от цены, может быть любого знака и зависит уже не только от даты исполнения, но и от того, по какой цене контракт был заключен его нынешним владельцем. Напомним, что при нашем упрощенном изложении владелец контракта никому ничего не платил и никому ничего не поставлял — он только занимает позицию, связанную с выполнением соответствующих операций в будущем. Положительная ценность соответствует тому, что сторонний агент хочет купить такого рода контракт (открыть позицию). Отрицательная ценность соответствует тому, что данный агент хочет продать такой контракт (закрыть занимаемую позицию). Цена поставки по уже заключенному контракту не может измениться, но цена контракта будет меняться ежедневно согласно логике вторичного рынка форвардов.

Будем считать первым контрактом форвардный контракт, описанный в п. 9.2. Пусть в момент t $(0 \leq t \leq T)$ заключается новый форвардный контракт на поставку в тот же момент T того же актива, что и в первом контракте. Цену поставки, указанную в новом контракте, называют текущей *форвардной ценой*. Будем обозначать ее $F(t)$.

Естественно считать, что $F(0) = K$ — цене поставки в первом контракте, то есть отождествлять новый контракт, заключенный в момент 0, с первым контрактом. Форвардная цена $F(t)$ может отличаться от K, так как меняется конъюнктура рынка данного актива. Арбитражные операции с новым контрактом в момент t будут исключены, если приведенная ценность форвардной цены $F(t)$ в момент t будет равна текущей рыночной цене товара S_t. Каждый раз, когда речь идет о приведенной ценности какой-либо суммы, предполагается, что известна безрисковая ставка процента (r).

Ограничим наше рассмотрение случаем, когда форвардный контракт заключен на актив, не приносящий в течение времени действия контракта доход. Изобразим рассматриваемую ситуацию на оси времени.



Форвардная цена должна удовлетворять равенству:

$$F(t)\frac{1}{(1+r)^{T-t}} = S_t.$$

Из этого равенства находим значение $F(t)$:

$$F(t) = S_t\,(1+r)^{T-t}. \tag{9.4}$$

Приведем пример, когда $F(t)$ определяется по формуле (9.4).

Пример 9.11. *Первый форвардный контракт является контрактом из примера 9.6. Через* 2 *месяца после его заключения заключается новый форвардный контракт на поставку той же акции M в тот же срок. Цена акции M в момент заключения нового контракта на рынке равна* 105 *руб. Определим форвардную цену акции M в новом контракте, исключающую возможность арбитража. Безрисковая ставка процента не изменилась* ($r =$ 10%).

Решение. Применяя формулу (9.4) при $t = 2$ месяцам $= 1/6$ года, $S_t =$ 105 руб., получаем:

$$F(t) = 105\times(1+0.1)^{1/4-1/6} = 105.84 \text{ руб.} \qquad \blacksquare$$

Теперь рассмотрим ситуацию покупки форвардного контракта в момент t $(0 < t < T)$ новым покупателем B, который хочет купить этот же актив. У него есть две возможности: купить актив сейчас за рыночную цену S_t или купить форвардный контракт, заключенный в момент 0, по которому он получит актив в момент T за цену K. Сколько B должен заплатить за этот контракт?

Арбитражная операция будет невозможна, если B заплатит за контракт такую цену C_t, что в момент t приведенная ценность его затрат (цены контракта C_t и цены поставки K) будет равна рыночной цене актива:

$$C_t + K\frac{1}{(1+r)^{T-t}} = S_t.$$

Из этого уравнения и уравнения (9.4) находим значение ценности контракта (на покупку):

$$C_t = S_t - K\,(1+r)^{t-T}. \tag{9.5}$$

Заметим, что ценность контракта на продажу равна той же величине, но с противоположным знаком.

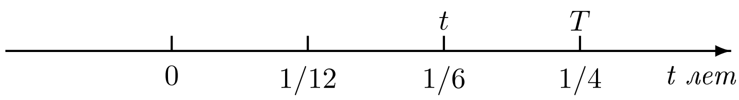
Значение C_t, определяемое формулой (9.5), называется *ценностью форвардного контракта в момент* t.

Пример 9.12. *Вернемся к форвардному контракту из примера 9.6. Вычислим его ценность через* 2 *месяца после заключения, если рыночная цена акции* M *в этот момент равна* 107 *руб.*

Решение. Из условия примера 9.6 имеем: $r = 0.1$, $T = 0.25$ года, $t = 1/6$ года, $S_t = 107$ руб. При решении примера 9.6 мы нашли цену поставки $K = 105.48$ руб. Применяем формулу(9.5) и получаем ответ:

$$C_t = 107 - 105.48 \times (1+0.1)^{1/6-1/4} = 2.35 \text{ руб.}$$

Изобразим ситуацию, описанную в примере 9.12, на оси времени:



Заплатив за контракт 2.35 руб., покупатель B приобретет в момент $T = 1/4$ года акцию M за 105.48 руб. Приведенная ценность его затрат в момент T будет равна:

$$105.48 + 2.35 \times (1+0.1)^{1/4-1/6} = 107.85 \text{ руб.}$$

Приведенная ценность в момент T рыночной цены этой акции, которую она имела в момент $t = 2$ месяца $= 1/6$ года, равна:

$$107 \times (1+0.1)^{1/4-1/6} = 107.85 \text{ руб.}$$

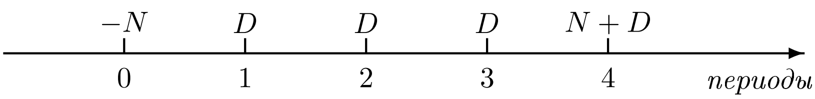
Таким образом, покупателю B в момент t безразлично, купить ли акцию M за рыночную цену или купить форвардный контракт за цену, вычисленную по формуле (9.5). Он не может провести арбитражную операцию, выбрав один из этих вариантов. ∎

9.5. Операции с облигациями

Облигация с купонным доходом может быть представлена как несколько бескупонных облигаций, которые принесут те же доходы и в те же сроки, что и купонная облигация. Покажем на примере, как это можно сделать.

Пример 9.13. *Облигация с купонным доходом имеет номинальную цену N и погашается через 4 периода времени, в каждый из которых по купону выплачивается доход, равный D. Определим пакет бескупонных облигаций, которые принесут инвестору тот же доход в те же сроки, что данная бескупонная облигация.*

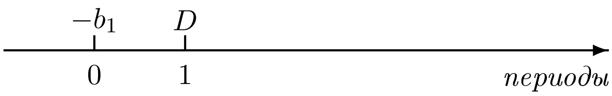
Решение. Изобразим денежный поток, соответствующий данной купонной облигации, на оси времени:

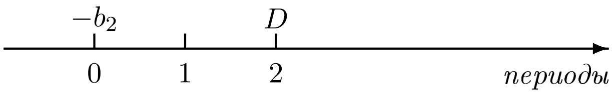


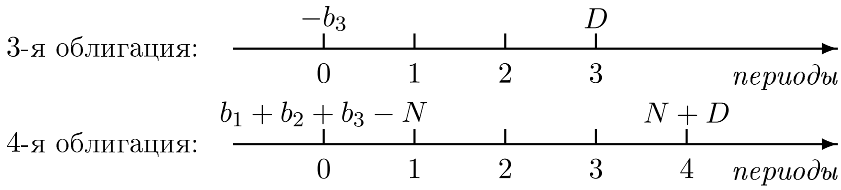
Пусть b_1, b_2, b_3 — положительные числа, каждое из которых меньше D, и $b_1+b_2+b_3 < N$. Составим следующий пакет бескупонных облигаций:

1-я облигация: номинальная цена — D, цена приобретения — b_1 (дисконт равен $D - b_1$), срок погашения — первый период;
2-я облигация: номинальная цена — D, цена приобретения — b_2 (дисконт равен $D - b_2$), срок погашения — второй период;
3-я облигация: номинальная цена — D, цена приобретения — b_3 (дисконт равен $D - b_3$), срок погашения — третий период;
4-я облигация: номинальная цена — $(N + D)$, цена приобретения — $(N - b_1 - b_2 - b_3)$ (дисконт равен $D + b_1 + b_2 + b_3$), срок погашения — четвертый период.

Изобразим потоки платежей по этим четырем бескупонным облигациям:

1-я облигация: 

2-я облигация: 



В момент 0 инвестор тратит на покупку этого пакета из четырех бескупонных облигаций сумму N. В моменты 1, 2 и 3 он получает доход, равный D, а в момент 4 он получает сумму $N + D$.

Таким образом, инвестор получает от составленного пакета бескупонных облигаций тот же доход и в те же сроки, что и от одной купонной облигации. ■

Будем говорить, что купонная облигация и пакет бескупонных облигаций являются *равноценными*, если по ним инвестор получает одинаковый доход в одни и те же сроки. Из приведенного примера ясно, что для данной купонной облигации существует бесконечно много равноценных пакетов бескупонных облигаций, так как в качестве цен приобретения облигаций подходят любые положительные числа b_1, b_2, b_3, удовлетворяющие неравенству $b_1 + b_2 + b_3 \ < \ N$.

Арбитражная операция будет невозможна, если доходность купонной облигации и равноценного пакета бескупонных облигаций будут равны. Если в какой-либо момент доходность купонной облигации не равна доходности равноценного пакета бескупонных облигаций, то возникает возможность арбитражной операции.

Из определения доходности следует, что рыночная цена облигации или другой ценной бумаги обратно пропорциональна ее доходности.

Если доходность купонной облигации выше доходности равноценного пакета бескупонных облигаций, то арбитражер покупает купонную облигацию и продает равноценный пакет бескупонных облигаций. Арбитражер получит прибыль, так как проданный им пакет бескупонных облигаций имеет большую рыночную цену, чем купонная облигация.

Если доходность купонной облигации, которую имеет арбитражер, ниже доходности равноценного пакета бескупонных облигаций, то он продаст купонную облигацию и купит равноценный пакет бескупонных облигаций. Он получит прибыль, так как на рынке купонная облигация в этом случае дороже равноценного пакета.

Введем следующие важные понятия.

Рыночной (спот) процентной ставкой r_t для периода в t лет назовем доходность бескупонной облигации, до погашения которой осталось t лет.

Форвардной процентной ставкой называется ставка доходности бескупонной облигации в будущем периоде времени, рассчитанная по ставкам предыдущих периодов. Покажем, как рассчитать форвардную ставку, при которой арбитражная операция с облигациями будет невозможна.

Пример 9.14. *Рыночная ставка* r_1 *(на один год) равна* 10%, *рыночная ставка* r_2 *(на два года) равна* 12%. *Какова должна быть форвардная ставка* r *на три года, чтобы арбитражная операция с купонной облигацией, номинальной стоимости* 100 *руб. и до погашения которой осталось* 3 *года, была невозможна? Купонный доход равен* 6% *в год, рыночная цена облигации —* 92 *руб.*

Решение. Арбитражная операция невозможна, если доходность купонной облигации и равноценного пакета бескупонных облигаций одинаковы. Это будет выполнено, если приведенная к настоящему моменту ценность пакета облигаций равна цене купонной облигации, то есть 92 руб.

Опишем равноценный пакет из трех бескупонных облигаций: номинальная цена первой и второй облигаций — 6 руб., третьей — 106 руб. Рыночная ставка $r_1 = 10\%$, поэтому рыночная цена первой бескупонной облигации в момент 0 равна:

$$\frac{6}{1+r_1} = \frac{6}{1+0.1} = 5.4545 \text{ руб.}$$

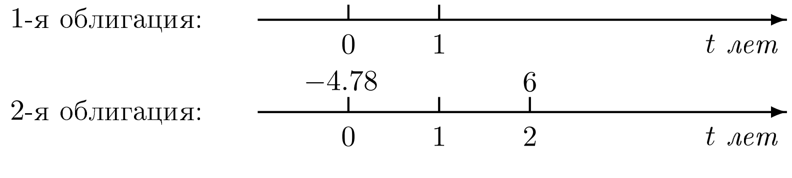
Рыночная ставка $r_2 = 12\%$, поэтому рыночная цена второй бескупонной облигации в момент 0 равна:

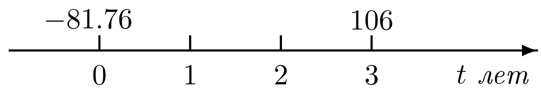
$$\frac{6}{(1+r_2)^2} = \frac{6}{(1+0.12)^2} = 4.7832 \text{ руб.}$$

Теперь мы можем определить рыночную цену третьей бескупонной облигации в момент 0:

$$92 - (5.4545 + 4.7832) = 81.7623 \text{ руб.}$$

Изобразим потоки платежей, связанные с пакетом бескупонных облигаций:



3-я облигация: 

Этот пакет бескупонных облигаций равноценен купонной облигации: за него заплачено 92 руб., в каждый из трех лет получен доход 6% (6 руб.), а в конце третьего года возвращена и номинальная цена облигации — 100 руб. Приведенная ценность пакета в момент 0 равна сумме:

$$\frac{6}{1+0.1}+\frac{6}{(1+0.12)^2}+\frac{106}{(1+r)^3} = 5.4545+4.7832+\frac{106}{(1+r)^3}\,.$$

Форвардная ставка r является корнем уравнения:

$$5.4545+4.7832+\frac{106}{(1+r)^3}=92.$$

Решая это уравнение, находим значение форвардной ставки r на три года:

$$r=0.0904\approx 9\%.$$ ■

Выведем теперь в общем виде уравнение, определяющее форвардную ставку, исключающую возможность арбитражной операции с купонной облигацией и равноценным пакетом бескупонных облигаций.

Пусть до погашения купонной облигации с номиналом N осталось t периодов, в каждый из которых происходит выплата купонов: $D_1, \ldots, D_t$. Известны рыночные ставки процента для бескупонных облигаций r_1, r_2, …, r_{t-1}, когда срок до погашения облигации равен 1, 2, …, $t-1$ год соответственно. Цена купонной облигации (в настоящий момент 0) равна P. Приведенная ценность равноценного пакета бескупонных облигаций равна сумме:

$$\frac{D_1}{1+r_1}+\frac{D_2}{(1+r_2)^2}+\cdots+\frac{D_{t-1}}{(1+r_{t-1})^{t-1}}+\frac{N+D_t}{(1+r)^t}\,.$$

Значение форвардной процентной ставки r является корнем уравнения:

$$\frac{D_1}{1+r_1}+\frac{D_2}{(1+r_2)^2}+\cdots+\frac{D_{t-1}}{(1+r_{t-1})^{t-1}}+\frac{N+D_t}{(1+r)^t} = P\,. \tag{9.6}$$

Рассмотрим частный случай этого уравнения. Пусть в настоящий момент рыночная ставка процентов для бескупонной облигации на 1 год равна r_1, на 2 года — r_2. Какова должна быть форвардная ставка r на 1 год в начале второго года, чтобы арбитражная операция была невозможна?

Если инвестор покупает бескупонную облигацию, номинальная стоимость которой равна N и которая выпущена на два года, то в начале двухлетнего периода он должен заплатить за нее сумму:

$$N_0 = N\frac{1}{(1+r_2)^2}\,.$$

Инвестор может поступить иначе: купить в настоящий момент бескупонную облигацию со сроком 1 год; погасить ее через год; на полученные деньги купить в начале второго года новую облигацию. Какова должна быть форвардная ставка r на один год для новой облигации, исключающая возможность арбитражной операции?

Во втором случае доход инвестора через два года будет равен N, если r удовлетворяет уравнению:

$$N = N_0(1+r_1)(1+r).$$

Подставив выражение для N_0 в последнее уравнение, получим равенство:

$$N = N\frac{1}{(1+r_2)^2}\,(1+r_1)(1+r),$$

из которого получаем формулу для r:

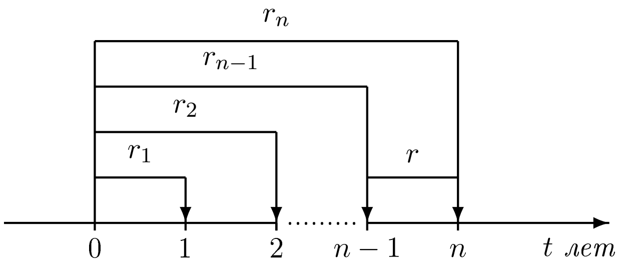
$$r = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1. \tag{9.7}$$

Пример 9.15. *Рыночные ставки процента для бескупонных облигаций составляют: $r_1 = 8\%$, $r_2 = 12\%$. Определим форвардную ставку r на 1 год в начале второго года, исключающую арбитражную операцию.*

Решение. Форвардную ставку r определяем по формуле (9.7):

$$r = \frac{(1+0.12)^2}{1+0.08} - 1, \text{ откуда } r = 0.1615 \approx 16.2\%. \qquad \blacksquare$$

Рассмотрим теперь общую ситуацию. В момент 0 рыночные ставки процента для бескупонной облигации со сроком выкупа t лет равны r_t $(t = 1, \ldots, n)$. Определим, какова должна быть форвардная ставка r для бескупонной облигации, эмитированной в момент $n-1$ сроком на 1 год. Изобразим эту ситуацию на рисунке:



Форвардная ставка r определяется равенством доходов инвестора за n лет от вложения денег в момент 0 на n лет (нулевая стратегия) и какой-либо другой стратегии.

Нулевая стратегия. Чтобы получить в момент n сумму N, инвестор вкладывает в момент 0 сумму N_0, которая определяется по формуле:

$$N_0 = \frac{N}{(1+r_n)^n}\,.$$

При равноценной стратегии вложения денег инвестор получит в момент n сумму N, вложив в момент 0 сумму N_0. Рассмотрим две возможные стратегии.

Первая стратегия. Инвестор вкладывает в момент 0 сумму N_0 на срок $n-1$ год и в конце $n-1$-го года получает сумму:

$$N_0(1+r_{n-1})^{n-1}.$$

Эту сумму он вкладывает в момент $n-1$ на 1 год под форвардную ставку r. В момент n будет получена сумма:

$$N_0(1+r_{n-1})^{n-1}(1+r).$$

Из равноценности стратегий следует, что эта сумма должна быть равна сумме, полученной при реализации нулевой стратегии (N), то есть форвардная ставка r определяется из уравнения:

$$N = N_0(1+r_{n-1})^{n-1}(1+r).$$

Подставив формулу для N_0 из нулевой стратегии, получим равенство:

$$N = \frac{N}{(1+r_n)^n}(1+r_{n-1})^{n-1}(1+r),$$

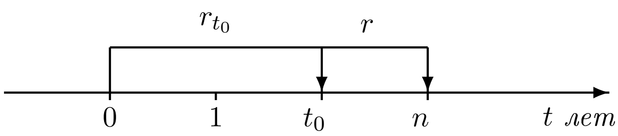
откуда получаем формулу для значения r:

$$r = \frac{(1+r_n)^n}{(1+r_{n-1})^{n-1}} - 1. \tag{9.8}$$

Вторая стратегия. В момент 0 инвестор вкладывает сумму N_0 сроком на t_0 лет ($t_0 < n$). В момент t_0 он получает сумму

$$N_0(1+r_{t_0})^{t_0}.$$

Эту сумму он вкладывает на оставшиеся $n - t_0$ лет под форвардную ставку r, которая имеет место в момент t_0 для бескупонной облигации, до погашения которой остается $n - t_0$ лет. Изобразим эту ситуацию на оси времени:



В момент n инвестор получит сумму, равную

$$N_0(1+r_{t_0})^{t_0}(1+r)^{n-t_0}.$$

Из равноценности стратегий следует, что эта сумма должна быть равна N, то есть форвардная ставка r определяется уравнением:

$$N = N_0(1+r_{t_0})^{t_0}(1+r)^{n-t_0},$$

откуда получаем формулу для значения r:

$$r = \sqrt[n-t_0]{\frac{(1+r_n)^n}{(1+r_{t_0})^{t_0}}} - 1. \tag{9.9}$$

Заметим, что формула (9.7) является частным случаем формулы (9.9) при $t_0 = n - 1$.

Пример 9.16. *Рыночные ставки процента для бескупонной облигации составляют:* $r_1 = 10\%$, $r_2 = 11\%$, $r_3 = 12\%$, $r_4 = 14\%$. *Найдем форвардную ставку в двух случаях:*

а) инвестор вкладывает деньги в начале первого года на 3 года и полученную сумму в начале четвертого года на 1 год; какова должна быть *форвардная ставка в начале четвертого года для бескупонных облигаций со сроком выкупа 1 год?*

б) инвестор вкладывает деньги в начале первого года на 2 года и полученную сумму в начале третьего года на 2 года; какова должна быть форвардная ставка в начале третьего года для бескупонных облигаций со сроком выкупа 2 года?

Решение. а) В этом случае $n = 4$, $r_3 = 12\%$, $r_4 = 14\%$. Находим r по формуле (9.8):

$$r = \frac{(1+0.14)^4}{(1+0.12)^3} - 1 = \frac{1.68896}{1.10493} - 1 = 0.20217 = 20.22\%.$$

б) В этом случае $n = 4$, $t_0 = 2$, $r_4 = 14\%$, $r_{t_0} = 11\%$. По формуле (9.9) находим r:

$$r = \sqrt[4-2]{\frac{(1+0.14)^4}{(1+0.11)^2}} - 1 = \frac{1.2996}{1.11} - 1 = 0.1708 = 17.08\%. \qquad \blacksquare$$

9.6. Используем Excel

В Excel имеется много функций для выполнения расчетов и решения задач, связанных с анализом ценных бумаг. Большинство из них имеют аргументы, описание которых дано ниже в таблице.

Аргумент	**Назначение**
базис	способ вычисления дня: 0 (или опущен) — US 30/360 1 — фактический/фактический 2 — фактический/360 3 — фактический/365 4 — европейский 30/360
купон	годовая процентная ставка для купонов
частота	количество выплат по купонам в год: 1 — раз в год 2 — раз в полгода 4 — раз в квартал
сумма	объем инвестиции в ценные бумаги
дата_вып	дата выпуска ценной бумаги
дата_первой_выпл	дата первой выплаты процентов по ценной бумаге
дата_вступл	дата погашения ценной бумаги (окончания действия) или выкупа ее у инвестора
дата_согл	дата соглашения по ценным бумагам (выплата их стоимости при покупке)
номинал	номинальная стоимость (по умолчанию 100 руб.)
цена	цена ценной бумаги за 100 руб. нарицательной стоимости на момент покупки
ставка	годовая ставка на момент выпуска ценных бумаг
погашение	цена ценной бумаги за 100 руб. нарицательной стоимости на момент погашения
доход	годовой доход по ценным бумагам

При задании аргументов-дат надо придерживаться следующего правила: все даты должны быть заданы в числовом формате[21]. Например, дату 22 августа 2006 г. надо ввести как целое число 38951, а не в виде 22.08.06. Но не пугайтесь, так придется поступать только, если вы вводите дату в явном виде (как аргумент-константу). Поэтому внесите эту дату в любом допустимом для дат формате (например, 22/08/06) в свободную ячейку, а в качестве аргумента укажите адрес этой ячейки. Excel автоматически преобразует дату в числовой формат. Напомним, что есть несколько способов узнать числовой эквивалент даты — например, ввести дату в ячейку, имеющую числовой формат.

В связи с тем, что в ряде стран курсы ценных бумаг (и ряд других финансовых показателей) записываются как смешанные числа, дробная часть которых правильная дробь[22], а в других странах дробная часть этих же величин записывается как десятичная дробь, имеется две функции для преобразования одной формы записи в другую.

Функция РУБЛЬ.ДЕС преобразует цену, выраженную в виде обыкновенной дроби, в цену в виде десятичной дроби. Например, если цена равна $5\,\frac{11}{16}$, чтобы перевести ее в десятичную дробь, надо написать формулу:

=РУБЛЬ.ДЕС(5.11;16)

Получим результат, равный 5.6875. Обратное преобразование выполнит функция РУБЛЬ.ДРОБЬ(5.6875;16).

Обратите внимание, что при задании числителя и знаменателя арифметической дроби должно указываться одинаковое число цифр. Например, если цена равна $5\,\frac{1}{16}$, то в формуле следует написать:

=РУБЛЬ.ДЕС(5.01;16)

Запись =РУБЛЬ.ДЕС(5.1;16) будет воспринята как $5\,\frac{10}{16}$, и результат будет равен 5.6250 (вместо 5.0625).

Далее приведена таблица, в которой, как и ранее, указаны имя функции (в русифицированной и англоязычной версиях), ее аргументы и вычисляемая величина. В этой таблице приведены не все функции, имеющиеся в Excel и связанные с расчетами и анализом ценных бумаг, а только те, которые имеют непосредственное отношение к материалу, изложенному в этой главе.

---

[21] Подробнее об этом можно прочесть в приложении А.

[22] В этом случае знаменатель дроби является степенью числа 2 и не превосходит 32.

Функция	**Аргументы**	**Значение**
РУБЛЬ.ДЕС DOLLARDE	(дробь;знаменатель)	цена в виде десятичной дроби
РУБЛЬ.ДРОБЬ DOLLARFR	(десятичн_числ; знаменатель)	цена в виде обычной дроби
ЦЕНА PRICE	(дата_согл;дата_вступл; ставка;доход;погашение; частота;базис)	цена за 100 рублей нарицательной стоимости ценной бумаги
ДОХОД YIELD	(дата_согл;дата_вступл; ставка;цена;погашение; частота;базис)	годовая ставка дохода по ценной бумаге
НАКОПДОХОД ACCRINT	(дата_вып; дата_первой_выпл; дата_согл;купон;номинал; период;базис)	накопленный доход по ценной бумаге
НАКОПДОХОДПОГАШ ACCRINTM	(дата_вып;дата_вступл; купон;номинал;базис)	накопленный доход по ценной бумаге к дате вступления
СКИДКА DISC	(дата_согл;дата_вступл; цена;погашение;базис)	норма скидки
ДОХОДСКИДКА YIELDDISC	(дата_согл;дата_вступл; цена;погашение;базис	годовая ставка дохода по ценной бумаге
ЦЕНАСКИДКА PRICEDISC	(дата_согл;дата_вступл; скидка;погашение;базис)	цена за 100 рублей нарицательной стоимости ценной бумаги

Рассмотрим теперь группу функций, которые предназначены для расчетов по ценным бумагам с купонами и погашением в конце срока действия ценной бумаги по нарицательной стоимости (номиналу) или иной выкупной цене.

Купонные облигации имеют три вида доходности: купонную (объявляется при выпуске облигации), текущую (на момент покупки), полную (на момент погашения).

Функция ЦЕНА определяет стоимость облигации (точнее, 100 руб. ее нарицательной стоимости) на момент ее покупки, исходя из ее ожидаемой на момент покупки доходности (аргумент доход).

Функция ДОХОД вычисляет ставку годового дохода от операции с ценной бумагой. Доход состоит из купонных платежей и разницы курсов покупки и погашения ценной бумаги.

Функции НАКОПДОХОД и НАКОПДОХОДПОГАШ вычисляют *купонный доход*, накопленный к моменту покупки ценной бумаги (дате соглашения) и дате вступления (дате погашения) соответственно. Дата соглашения должна быть меньше даты первой выплаты, в противном случае выдается сообщение об ошибке.

При наборе обращения к функции НАКОПДОХОДПОГАШ с помощью Мастер функций обратите внимание на то, что в качестве второго аргумента следует использовать *дату вступления*, а не дату соглашения, как ошибочно указано в диалоговом окне.

	A	B	C	D
1	**Глава: Принцип отсутствия**			
2	**арбитражных возможностей**			
3	**Пример 9.17 (ценные бумаги с купонами)**			
4	*Данные:*			
5	Дата выпуска	01.10.2005		
6	Дата оплаты 1-ого купона	01.04.2006		
7	Дата соглашения	12.01.2006		
8	Дата вступления	01.10.2006		
9	Ставка (по купонам)	9%		
10	Ожидаемая доходность	12%		
11	Номинал	1 000р.		
12	Погашение (за 100 руб. номинала)	100р.		
13	Цена	950р.		
14	Количество выплат в год	2		
15	База расчетов	1		
16	*Вопрос:*			
17	Цена на момент соглашения?			
18	Накопленный доход к дате соглашения (НДДС)?			
19	Накопленный доход к дате погашения (НДДП)?			
20	Ставка дохода по облигации?			
21	*Решение:*			
22	Цена на момент соглашения =	**979.64р.**		
23	=10*ЦЕНА(B7;B8;B9;B10;B12;B14;B15)			
24	НДДС	**25.47р.**		
25	=НАКОПДОХОД(B5;B6;B7;B9;B11;B14;B15)			
26	НДДП	**90.00р.**		
27	=НАКОПДОХОДПОГАШ(B5;B8;B9;B11;B15)			
28	Ставка дохода по облигации =	**16.61%**		
29	=ДОХОД(B7;B8;B9;B13/10;B12;B14;B15)			

Рис. 24. Пример на ценные бумаги с купонами

Пример 9.17. *Облигация номиналом 1000 руб. с купонной ставкой 9% была выпущена 01.10.05. Выплаты по купонам производятся раз в пол-*

года. Базис расчетов — 1. Дата первой выплаты по купонам — 01.04.06. Погашение предполагается производить по номиналу 01.10.06.

Какой должна быть цена облигации на момент ее приобретения — 12.01.06, если ожидаемая доходность составляет 12%? Каков будет накопленный купонный доход на момент приобретения и на момент погашения? Какова доходность облигации, если она была приобретена за 950 руб.?

Решение. Рабочий лист с решением этого примера приведен на рис. 24. Для определения цены и накопленного дохода на момент соглашения и на момент погашения используем функции: ЦЕНА, НАКОПДОХОД, НАКОПДОХОДПОГАШ. Требуется только аккуратно указать все их многочисленные аргументы. Чтобы упростить набор этих аргументов, мы использовали команду Функция.

Цена облигации на момент соглашения вычислена в ячейке B22 — 979.64р. В ячейке B24 записано значение накопленного дохода на момент соглашения: 25.47р. Ячейка B26 содержит значение накопленного дохода на момент погашения: 90.00р.

Годовую ставку дохода от операции с облигацией получили, использовав функцию ДОХОД. Обратим внимание читателя на одну важную деталь: значение аргументов цена и погашение указывается для 100 руб. номинальной стоимости (95 руб. и 100 руб., соответственно). Значение ставки дохода записано в ячейке B28 — 16.61%. ∎

Обратимся теперь к функциям, предназначенным для определения характеристик бескупонных облигаций. Доход по таким облигациям образуется из разности между ценой покупки и ценой погашения.

Функция СКИДКА определяет величину ставки дисконта (учетной ставки), соответствующую цене покупки облигации.

Функция ДОХОДСКИДКА вычисляет ставку годового дохода от операции с ценной бумагой, на которую при покупке делается скидка. Доход состоит из разницы курсов покупки и погашения ценной бумаги.

Функция ЦЕНАСКИДКА определяет цену покупки облигации за 100 руб. нарицательной стоимости. Обращаем внимание читателя на тот факт, что аргумент погашение у этой и предыдущей функций может отличаться от 100.

Упражнения

1. В рассматриваемый день акция компании А стоила на бирже в городе N 500 руб., а в городе M — 515 руб. Арбитражер купил 1 000 акций компании

А в городе N и продал их в городе M. Какой доход он получил, если биржа в городе N удерживает 1% от суммы сделки, а в городе M — 0.5%?

2. Продавец заключил с покупателем договор о продаже через 3 месяца пакета из 100 акций за 5 000 руб. В настоящий момент одна такая акция стоит на рынке 48 руб. Какую арбитражную операцию может провести продавец и какой доход он получит, если кредит в настоящее время стоит 8% годовых?

3. Какую арбитражную операцию может осуществить покупатель из упражнения 2, если такая акция стоит в настоящее время на рынке 52 руб. Какой доход он получит в результате этой операции?

4. Продавец А заключил с покупателем Б форвардный контракт о продаже через 2 месяца акции компании С за 1 000 руб. Кто из субъектов А или Б будет в выигрыше, если акция в момент продажи будет стоить: а) 1300 руб., б) 700 руб? Изобразите эти ситуации на графике.

5. 30 апреля был заключен форвардный контракт на поставку 30 июля (того же года) акции компании С, которая в момент заключения договора стоит на рынке 1500 руб. Найдите цену поставки, исключающую арбитражные возможности. Безрисковая ставка процента равна 10%.

6. Опишите арбитражную операцию, которую может выполнить продавец акции из упражнения 5, если цена поставки будет равна 1550 руб. Какой доход получит продавец в результате этой операции?

7. Опишите арбитражную операцию, которую может выполнить покупатель акции из упражнения 5, если цена поставки будет равна 1480 руб. Какой доход получит покупатель в результате этой операции?

8. Заключен форвардный контракт на поставку через 12 месяцев облигации, номинальная цена которой 1000 руб. Облигация выпущена сроком на два года, и на нее 4 раза в год выплачивается 5% купонного дохода. Безрисковая ставка процента равна 10%. Найдите цену поставки облигации, исключающую арбитражные возможности.

9. В условиях упражнения 8 безрисковая ставка на срок до 0.5 года равна 10% и на срок от 0.5 до 1 года равна 12%. Найдите цену поставки облигации, исключающую арбитражные возможности.

10. Какую арбитражную операцию может провести продавец из упражнения 8, если цена поставки равна 900 руб.? Вычислите доход продавца от этой операции.

11. Какую арбитражную операцию может провести покупатель из упражнения 8, если цена поставки равна 880 руб.? Вычислите доход покупателя от этой операции.

12. Какую арбитражную операцию может провести продавец форвардного контракта из упражнения 9, если цена поставки равна 920 руб.? Вычислите доход продавца от этой операции.

13. Какую арбитражную операцию может провести покупатель форвардного контракта из упражнения 9, если цена поставки равна 900 руб.? Вычислите доход покупателя от этой операции.

14. Первым форвардным контрактом является контракт, описанный в упражнении 5. Через один месяц после первого заключается новый форвардный контракт на поставку такой же акции. Цена акции в момент заключения нового контракта — 1650 руб. Определите форвардную цену акции в новом контракте, исключающую возможность арбитражной операции. Безрисковая ставка процента составляет 8%.

15. Найдите цену форвардного контракта из упражнения 5 через один месяц после его заключения, если рыночная цена акции в этот момент равна 1650 руб. Безрисковая ставка — 8%.

16. Проверьте, что для покупателя форвардного контракта из упражнения 5 через один месяц после его заключения равнодоходны следующие операции: 1) купить форвардный контракт за 140.35 руб. и через месяц купить по нему акцию за 1519.36 руб.; 2) купить через один месяц после заключения форвардного контракта акцию за 1650 руб.

17. Какую арбитражную операцию может провести продавец форвардного контракта из упражнения 5, если в момент $t = 1/12$ рыночная цена акции равна 1650 руб. и данный форвардный контракт стоит 140 руб.? Найдите доход продавца от этой операции.

18. Какую арбитражную операцию может провести покупатель форвардного контракта из упражнения 5, если в момент $t = 1/12$ рыночная цена акции равна 1650 руб. и данный форвардный контракт стоит 141 руб.? Найдите доход покупателя от этой операции.

19. Найдите цену форвардного контракта, описанного в упражнении 8, в момент $t = 4$ месяца $= 1/3$ года, если рыночная цена облигации в этот момент равна 1050 руб. Безрисковая ставка равна 10%.

20. Для упражнения 19 укажите, при какой рыночной цене облигации продажа форвардного контракта в момент $t = 4$ не имеет смысла.

21. Какую арбитражную операцию с форвардным контрактом из упражнений 8 и 19 может провести продавец контракта, если цена форвардного контракта на рынке в момент $t = 4$ равна 60 руб.? Вычислите доход продавца от этой операции.

22. Какую арбитражную операцию с форвардным контрактом из упражнений 8 и 19 может провести покупатель контракта, если цена этого форвардного контракта на рынке в момент $t = 4$ месяца равна 80 руб.? Найдите доход покупателя от этой операции.

23. Купонная облигация с номинальной ценой 200 руб. выпущена сроком на 3 года с выплатой два раза в год купонного дохода по ставке 8%. Вычислите доход инвестора, купившего эту облигацию. Какова доходность облигации?

24. Бескупонная облигация, номинальная цена которой 200 руб., выпущена сроком на 3 года с дисконтом 20%. Каков доход инвестора, купившего эту облигацию? Какова доходность этой облигации?

25. Вычислите, каким должен быть дисконт бескупонной облигации из упражнения 24, чтобы доход от нее был равен доходу инвестора, купившего одну облигацию, описанную в упражнении 23.

26. Номинальная цена купонной облигации 1 000 руб., срок погашения три года. По облигации выплачивается купонный доход два раза в год в размере 5% номинальной цены. Постройте два различных пакета бескупонных облигаций, равноценных данной купонной облигации.

27. Вычислите доходность купонной облигации и пакетов бескупонных облигаций из упражнения 26, если они приобретены в момент эмиссии по номинальной цене.

28. Известны рыночные процентные ставки доходности бескупонных облигаций: $r_1 = 9\%$, $r_2 = 11\%$. Какова должна быть форвардная ставка на три года, чтобы арбитражная операция с купонной облигацией, номинальная цена которой равна 200 руб., купонный доход равен 8% в год, и до погашения осталось 3 года, была невозможна? Рыночная цена этой облигации в настоящий момент: а) 180 руб., б) 220 руб.

29. Известны рыночные процентные ставки доходности бескупонных облигаций: $r_1 = 10\%$, $r_2 = 13\%$. Найдите форвардную ставку r на один год в начале второго года, исключающую возможность арбитража.

30. Известны рыночные процентные ставки доходности бескупонной облигации в настоящее время: $r_1 = 8\%$, $r_2 = 10\%$, $r_3 = 11\%$, $r_4 = 12\%$, $r_5 = 14\%$. Определите форвардные ставки для следующих случаев: а) Инвестор вложил деньги в облигацию, имеющую срок погашения 4 года. По истечении 4-х лет он вкладывает полученную от данной облигации сумму в одногодичную облигацию. Какова должна быть форвардная ставка на этот год? б) Инвестор вложил деньги в бескупонную облигацию со сроком погашения 3 года. Полученную через 3 года сумму он вкладывает в двухгодичную облигацию. Найдите форвардную ставку на бескупонную облигацию, выпущенную в начале 4-го года сроком на два года.

10. Анализ инвестиционных проектов

В этой главе мы рассмотрим методы анализа инвестиционных проектов, которые используются фирмами при принятии инвестиционных решений.

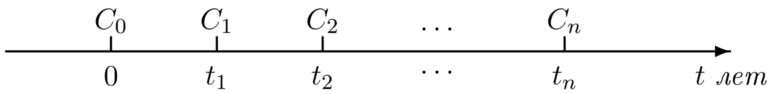
10.1. Инвестиционные проекты

Инвестиционный проект — это долгосрочный календарный план вложения средств фирмы в такие активы, как оборудование, здания, земля, технологии и т. п., и получения доходов от этих вложений.

Предполагается, что фирма имеет одну или несколько возможностей инвестиций, которые заслуживают внимания. Предполагается также, что уже проведен необходимый анализ, который позволяет указать *точные* суммы затрат и доходов на каждом интервале времени в будущем для этих проектов. Это означает, что мы ограничиваемся рассмотрением инвестиционных проектов в условиях полной определенности. При анализе инвестиций — это основной, базисный случай. Учет неопределенности на практике необычайно важен — он ужесточает требования к доходности проекта. Но этот материал не может быть освящен в нашем элементарном пособии.

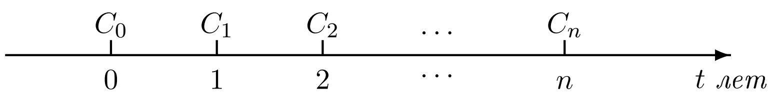
В каждом периоде времени инвестиционный проект предполагает как доходы, так и затраты. Доходы состоят из выручки от реализации продукции и услуг, связанных с данным проектом. Затраты можно разделить на капиталовложения — инвестиции (покупка оборудования, патентов и т. п.) и текущие затраты (стоимость полуфабрикатов, сырья и комплектующих, оплата труда, рентные платежи и т. п.). Часто доходы называют *притоком* денежных средств, а затраты — *оттоком*. Мы далее также будем использовать эти термины.

Инвестиционный проект порождает *поток денежных средств*, каждый элемент которого равен разности между притоком и оттоком денежных средств. Эти суммы принято называть *платежами*. На оси времени инвестиционный проект можно изобразить так:



Здесь C_0, C_1, C_2, ..., C_n числа, равные величине потока денежных средств в соответствующие интервалы времени. Числа C_t могут быть любого знака. Если речь идет о проекте типа строительства нового предприятия, то несколько первых лет инвестиции будут превосходить доходы от производства (которые обычно возникают не с первого года). В этом случае $C_t < 0$. При выходе производства на регулярный график величина C_t равна чистой прибыли за период, поэтому в плане она, как правило, положительна: $C_t > 0$. Тот факт, что в реальном производстве бывают провалы и случается, что прибыль за период (квартал, год) отрицательна, не может быть элементом планирования. Такого рода эффекты оцениваются с помощью анализа проектов в условиях неопределенности, что, как мы уже говорили, выходит за рамки нашей книги.

В практике финансовой деятельности инвестиционные расчеты, как правило, выполняются за промежуток времени, равный году. Поэтому моменты времени t_1, t_2, ..., t_n в дальнейшем примем равными 1, 2, ..., n годам соответственно, а поток платежей, порожденный инвестиционным проектом, будем изображать так:



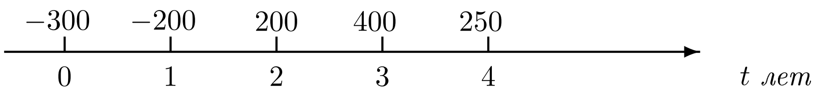
Инвестиционный проект будем называть *регулярным*, если в последовательности чисел C_t происходит не более одной смены знака. Это означает, что знаки чисел C_t образуют последовательности типа:

$$- \ - \ - \ + \ + \ + \quad \text{или} \quad + \ + \ + \ - \ - \ -$$

Приведем пример регулярного инвестиционного проекта.

Пример 10.1. *Фирма анализирует проект производства нового вида продукции. В начальный момент времени потребуется* 300 *тыс. руб. на анализ рынка и закупку необходимого оборудования. В первый год на запуск производства и рекламную кампанию потребуется* 200 *тыс. руб. Во второй, третий и четвертые годы реализация новой продукции принесет* *доход в размере* 200 *тыс. руб.,* 400 *тыс. руб. и* 250 *тыс. руб. соответственно. Предполагается, что в пятом году данный вид продукции устареет и ее дальнейший выпуск станет нецелесообразным. Изобразим этот проект на оси времени и на диаграмме.*

Решение. На оси времени данный проект может быть изображен так (числа над осью обозначают тысячи рублей):



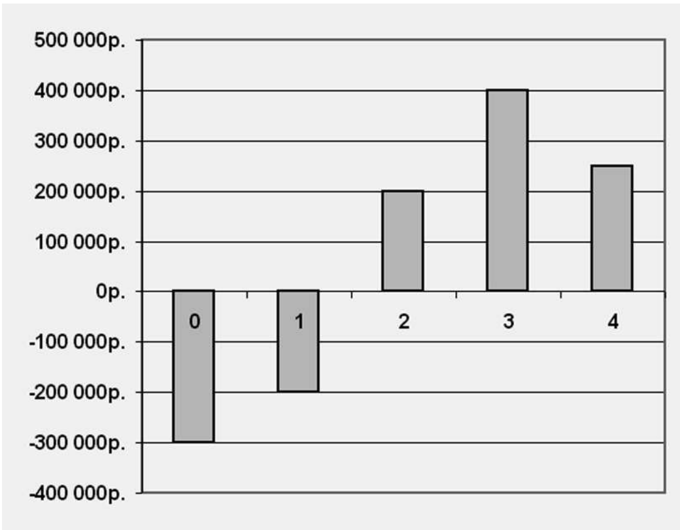


Рис. 25. Диаграмма (гистограмма) для проекта из примера 10.1

Диаграмма этого же проекта приведена на рис. 25. Как построить эту диаграмму в Excel, будет объяснено в п. 10.9.2. ■

Бывают и нерегулярные инвестиционные проекты, когда после нескольких притоков денежных средств снова производятся инвестиции, то есть происходят оттоки денежных средств. Таким может быть, например, проект производства новой модели автомобиля: сначала закупается и начинает работать первая линия сборки; от нее начинают поступать доходы; затем закупается более мощная, вторая линия сборки, поэтому в этот период отток денежных средств превышает их приток; далее, когда начинают в полную силу работать обе линии сборки, приток денежных средств существенно увеличивается.

Если с некоторого момента инвестиции в проект постоянно превосходят доходы ($C_t < 0$), то такой проект, как правило, не может быть принят. Реализацию таких проектов может позволить себе только государство в целях развития науки, обороны, социального обеспечения и тому подобного.

Для оценки инвестиционных проектов применяются разные критерии. Каждый из них дает определенную информацию к размышлению, позволяет выбрать тот или иной из альтернативных проектов. Далее мы рассмотрим различные критерии оценки инвестиционных проектов.

10.2. Средняя норма прибыли на инвестиции

Средней нормой прибыли на инвестиции называется отношение среднегодовой прибыли к величине инвестиций в проект, выраженное в процентах.

Пример 10.2. *Рассчитаем среднюю норму прибыли на инвестиции в проекте, описанном в примере 10.1.*

Решение. Среднегодовая балансовая прибыль за четыре года равна: $(200+400+250)/4 = 212.5$ тыс. руб. Инвестиции в данный проект составляют $300 + 200 = 500$ тыс. руб. Средняя норма прибыли на инвестиции равна:

$$\frac{212.5}{500} = 0.425 = 42.5\%. \qquad \blacksquare$$

При оценке проекта средняя норма прибыли на инвестиции сравнивается со средней нормой прибыли аналогичных проектов в отрасли. Если первая не меньше последних, то проект оценивается положительно. Если сравниваются несколько альтернативных проектов, то предпочтение отдается тому, у которого средняя норма прибыли на инвестиции больше.

Главный недостаток этого метода состоит в том, что он не зависит от фактора времени, о необходимости учета которого мы говорили во всех главах этой книги. Поэтому, например, средняя норма прибыли на инвестиции не изменится, если в проекте из примера 10.1 вся прибыль (850 тыс. руб.) будет получена в четвертом году. Большинство инвесторов предпочтут первый вариант проекта, который обеспечивает доход уже во втором году.

10.3. Срок окупаемости инвестиционного проекта

Метод окупаемости инвестиций заключается в вычислении интервала времени, в течение которого доходы компенсируют инвестиции. *Срок окупаемости инвестиционного проекта* — это число лет, необходимых для возмещения инвестиционных расходов.

В простейшем случае, если годовой приток денежных средств (доходы) одинаков и равен Q, а инвестиции выполняются только в момент 0 и равны P, то срок окупаемости равен P/Q. Например, если инвестируется 100 000 руб., а ежегодный доход равен 25 000 руб., то срок окупаемости равен 4 годам ($=100\,000/25\,000$).

Если годовые доходы не одинаковы, то срок окупаемости рассчитать сложнее. Рассмотрим пример.

Пример 10.3. *Вычислим срок окупаемости проекта из примера 10.1.*

Решение. Инвестиции в проект равны 500 тыс. руб. К концу второго года окупится 200 тыс. руб. и останется 300 тыс. руб., которые окупятся за часть третьего года, равную $300/400 = 0.75$ года. Срок окупаемости инвестиционного проекта равен $2 + 0.75 = 2.75$ года. ∎

Если ожидаемый срок окупаемости больше максимально допустимого для фирмы, то проект отвергается, в противном случае он может быть исследован по другим критериям.

Главный недостаток метода срока окупаемости состоит в том, что не учитываются элементы денежного потока после срока окупаемости. Другой недостаток этого показателя — на него, как и на среднюю норму прибыли, не влияет распределение денежного потока во времени, даже в пределах срока окупаемости. Методы анализа проектов, рассмотренные в двух следующих пунктах, в полной мере учитывают распределение инвестиций и доходов во времени.

10.4. Метод чистой приведенной ценности

Инвестиционный проект ассоциируется с потоком платежей:

$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \ \ldots\ , \quad C_n$$

в годы $t = 0, 1, \ \ldots, \ n$. При этом знак C_t может быть как положительным, так и отрицательным.

В простейшем случае можно отождествлять C_0 с начальным капиталовложением I, то есть $C_0 = -I < 0$, а C_t при $t \geq 1$ считать чистым доходом, связанным с этим проектом.

Каждый член потока платежей, порожденного инвестиционным проектом, имеет свою приведенную ценность в момент 0. Учитывая взаимосвязь этих платежей, важной характеристикой проекта является сумма приведенных ценностей в момент 0 всех членов денежного потока, начиная с C_1, которую называют *приведенной ценностью инвестиционного проекта*[23]:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} C_t \frac{1}{(1+r)^t} \ , \tag{10.1}$$

где r — ставка дисконтирования (*discount rate*).

В том случае, когда учитывают и вложения C_0 в момент 0, говорят о *чистой приведенной ценности инвестиционного проекта*:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} C_t \frac{1}{(1+r)^t} \ . \tag{10.2}$$

Чистую приведенную ценность принято обозначать аббревиатурой *NPV* (от английского *Net Present Value*).

В качестве ставки дисконтирования r может быть принята безрисковая ставка процента или ставка прибыли для проектов той же степени риска, или средняя отраслевая норма доходности. Иногда за ставку дисконтирования принимается необходимая с точки зрения фирмы норма прибыли.

Если *NPV* проекта отрицательна, то принимать такой проект не имеет смысла. Из нескольких альтернативных проектов следует принять тот, который имеет более высокую *NPV* при одной и той же ставке дисконтирования.

Пример 10.4. *Найдем NPV инвестиционного проекта из примера 10.1, если ставка дисконтирования $r = 10\%$.*

Решение. По формуле (10.2) получаем (округляя до тыс. руб.):

$$NPV = -300 - \frac{200}{1+0.1} + \frac{200}{(1+0.1)^2} + \frac{400}{(1+0.1)^3} + \frac{250}{(1+0.1)^4} = 155 \text{ тыс. руб.}$$

■

[23] Для обозначения этой величины в литературе используются также термины: *приведенная величина*, *современная стоимость*, *капитализированная стоимость*.

Величина чистой приведенной ценности проекта зависит от ставки дисконтирования, то есть NPV есть функция r. Следующий пример иллюстрирует зависимость NPV от r.

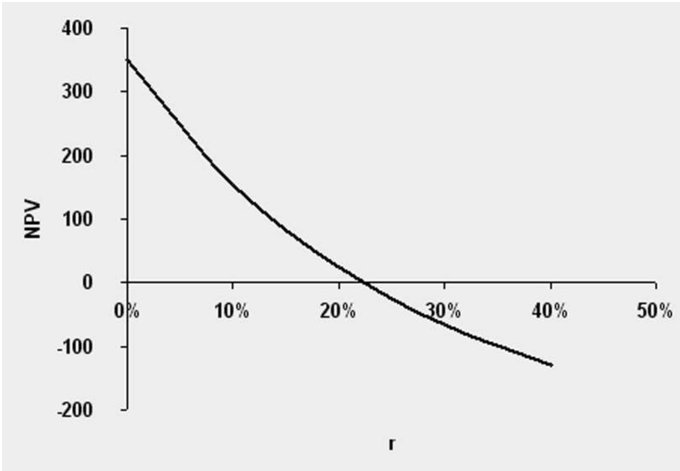


Рис. 26. График функции $NPV(r)$ проекта из примера 10.1

Пример 10.5. *Построим график функции $NPV(r)$ инвестиционного проекта, описанного в примере 10.1.*

Решение. Вычислим по формуле (10.2) значения функции $NPV(r)$, округляя до тыс. руб., при $r = 0\%$, 20%, 30%, 40%. Результаты вычислений запишем в таблицу:

$r\%$	0	10	20	30	40
$NPV(r)$	350	155	24	-66	-130

График функции $NPV(r)$, построенный в Excel по найденным точкам, приведен на рис. 26. ■

Легко показать, что функция $NPV(r)$ инвестиционного проекта, у которого $C_0 < 0$, $C_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, T)$, является убывающей функцией. Действительно, если ставка дисконтирования r увеличивается, то множитель $1/(1 + r)$ уменьшается.

В примере 10.5 при ставке дисконтирования $r = 20\%$ проект имеет положительную NPV и его можно принять, а при ставке дисконтирования $r = 25\%$ — $NPV = -25$ и проект следует отклонить. Подобная зависимость рекомендации от незначительного изменения ставки дисконтирования, *правильное* значение которой никто не знает, снижает практические достоинства метода NPV. Чтобы применение этого метода было оправдано, надо очень тщательно выбирать ставку дисконтирования.

Необходимо понимать, что при сравнении двух (и более) проектов по критерию NPV можно прийти к разным выводам при различных ставках дисконтирования. Рассмотрим пример.

Пример 10.6. *Наряду с проектом, описанным в примере 10.1 (будем называть его проект А), компания рассматривает проект Б выпуска другого вида продукции. Первоначальные вложения по обоим проектам совпадают (*300 *тыс. руб.). Проект Б требует больших инвестиций в первом году —* 300 *тыс. руб. Ожидаемые доходы по проекту Б составят:* 100 *тыс. руб. во второй год,* 600 *тыс. руб. в третий год и* 300 *тыс. руб. в четвертом году.*

Построим график функции $NPV(r)$ этих проектов и сравним их по критерию NPV при различных значениях ставки дисконтирования r.

Решение. По формуле (10.2) вычислим значения функции $NPV(r)$ обоих проектов при различных значениях r. Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

$r\%$	$NPV_{\text{А}}(r)$	$NPV_{\text{Б}}(r)$
0	350	400
10	155	166
20	24	11
30	−66	−93
40	−130	−167

Графики функций $NPV(r)$ обоих проектов, построенные по найденным точкам, приведены на рис. 27. Эти графики пересекаются в точке с абсциссой, приблизительно равной 14%.

Таким образом, если NPV этих проектов вычислены при ставке дисконтирования, меньшей 14%, например при $r = 10\%$, то следует предпочесть проект Б, так как NPV проекта Б при этой ставке дисконтирования

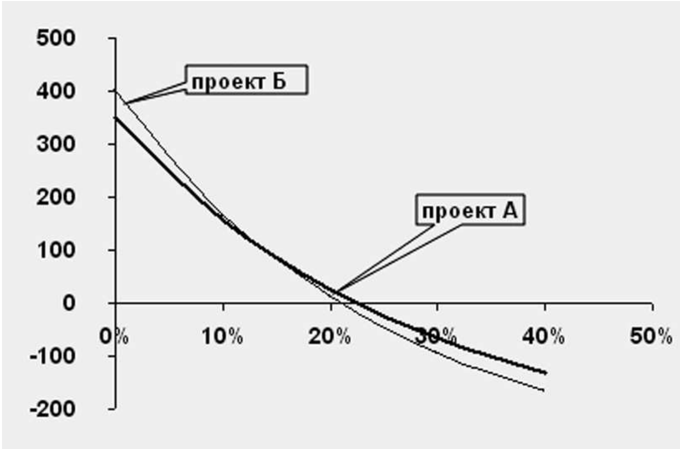


Рис. 27. Графики функции $NPV(r)$ проектов из примера 10.6

больше, чем NPV проекта А:

$$NPV_{\text{Б}}(10\%) = 166 > 155 = NPV_{\text{А}}(10\%)\,.$$

Если же NPV этих проектов вычислены при ставке дисконтирования, большей 14%, например при $r = 20\%$, то следует предпочесть проект А, так как NPV проекта А при этой ставке дисконтирования больше, чем у проекта Б:

$$NPV_{\text{А}}(20\%) = 24 > 11 = NPV_{\text{Б}}(20\%)\,. \qquad \blacksquare$$

Если инвестиционный проект не является регулярным, то функция $NPV(r)$ может быть произвольного вида. Приведем пример.

Пример 10.7. *В момент* 0 *инвестор берет кредит в банке в размере* 100 000 *руб. Используя эти деньги в биржевых операциях, в течение первого года он зарабатывает* 350 000 *руб, которые инвестирует в проект. К концу второго года инвестор получит* 430 000 *руб. дохода, а в третьем году понесет* 175 000 *руб. убытка. Построим график функции* $NPV(r)$ *этого проекта.*

Решение. Изобразим проект на оси времени:

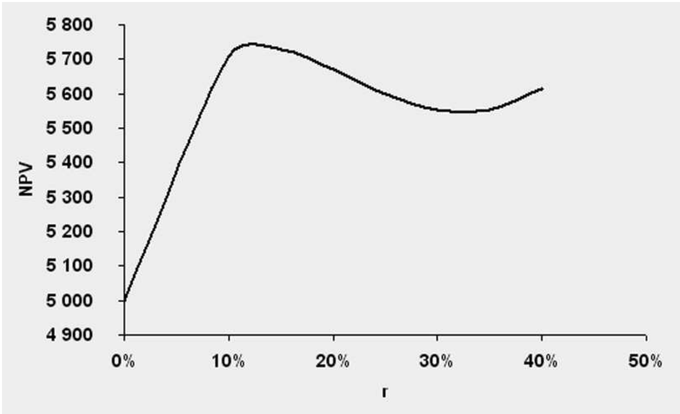


Рис. 28. График функции $NPV(r)$ проекта из примера 10.7

$$\begin{array}{ccccc} 100\,000 & -350\,000 & 430\,000 & -175\,000 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & t \text{ лет} \end{array}$$

Функция $NPV(r)$ рассматриваемого проекта имеет вид:

$$NPV(r) = 100\,000 - \frac{350\,000}{1+r} + \frac{430\,0}{(1+r)^2} - \frac{175\,000}{(1+r)^3}\,.$$

Найдем несколько значений функции $NPV(r)$ и построим график (рис. 28):

$r\%$	0	10	20	30	40
$NPV(r)$	5 000	5 710	5 671	5 553	5 612

■

10.5. Метод внутренней нормы доходности

Внутренняя норма доходности проекта — это процентная ставка, при дисконтировании по которой чистая приведенная ценность проекта равна нулю. Внутреннюю норму доходности обычно обозначают аббревиатурой *IRR* (от английского *Internal Rate of Return*).

Если инвестиционный проект состоит из потока платежей:

$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \ \ldots \ , \quad C_n,$$

и платеж C_t происходит в год t $(t = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, то внутренняя норма доходности r является корнем уравнения:

$$\sum_{t=0}^{n} C_t \frac{1}{(1+r)^t} = 0. \tag{10.3}$$

Если вспомнить, что платежи C_t равны разности между доходами и инвестициями в год t, то внутренняя норма доходности инвестиционного проекта есть ставка дисконтирования, при которой в момент 0 уравниваются приведенные ценности планируемых инвестиций и ожидаемых доходов.

Каков экономический смысл внутренней нормы доходности проекта? Если $NPV(r) = 0$, то это значение r (оно и есть внутренняя норма доходности, то есть IRR) интуитивно равно истинной норме доходности на инвестиции данного проекта, вычисленной с учетом времени поступления платежей. Это легко показать на примере проекта, состоящего из одной инвестиции C_0 $(C_0 < 0)$ и одного платежа C_1 $(C_1 > 0)$. В этом случае IRR является корнем уравнения:

$$C_0 + \frac{C_1}{1 + IRR} = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$IRR = \frac{C_1 + C_0}{-C_0} = \frac{C_1 - |C_0|}{|C_0|}\,.$$

Величина $C_1 - |C_0|$ является чистым доходом от реализации проекта, $|C_0|$ — размер инвестиций, следовательно, дробь

$$IRR = \frac{C_1 - |C_0|}{|C_0|}$$

равна норме доходности на инвестиции.

Для оценки проекта по критерию IRR сравнивают внутреннюю норму доходности проекта с требуемой (инвестором) нормой прибыли, которую называют *ставкой отсечения* или *пороговой ставкой*. Ставка отсечения устанавливается фирмой в зависимости от целей, которые она ставит перед собой. Например, в качестве ставки отсечения может быть принята средняя норма прибыли для проектов той же степени риска, что и данный проект или более высокая ставка. Если внутренняя норма доходности проекта ниже, чем ставка отсечения, то проект отвергается, в противном случае — принимается.

Пример 10.8. *Вычислим внутреннюю норму доходности проекта, описанного в примере 10.1.*

Решение. Внутренняя норма доходности r данного проекта является корнем уравнения:

$$-300\,000 - \frac{200}{1+r} + \frac{200\,000}{(1+r)^2} + \frac{400\,000}{(1+r)^3} + \frac{250\,000}{(1+r)^4} = 0.$$

Для решения этого уравнения можно применить метод линейной интерполяции, с которым мы познакомились в главе 6, но гораздо проще воспользоваться командой Подбор параметра в Excel. Как это сделать, будет подробно объяснено в п. 10.9.2.

При решении примера 10.5 мы вычислили:

$$NPV(20\%) = NPV(0.2) = 24\,000;$$

$$NPV(30\%) = NPV(0.3) = -66\,000.$$

Следовательно, в качестве начального приближения к корню уравнения можно использовать

$$r = \frac{0.2 + 0.3}{2} = 0.25.$$

Выполнив команду Подбор параметра, получим, что корнем уравнения является $r = 22.36\%$.

По критерию IRR описанный проект не будет принят, если внутренняя ставка доходности 22.36% будет ниже ставки отсечения, например, если ставка отсечения равна 25%. Если ставка отсечения меньше 22.36%, то данный проект может быть принят. ∎

Если проект не является регулярным, то применение критерия внутренней нормы доходности затруднено. Если функция $NPV(r)$ является возрастающей, то критерий IRR следует изменить: проект отвергается, если его IRR больше ставки отсечения, и не отвергается в противном случае. Если функция $NPV(r)$ имеет несколько корней, то применение критерия IRR становится невозможным.

Сравнение критериев *NPV* и *IRR*

Сначала отметим сильные и слабые стороны критерия *NPV*. Этот критерий имеет то несомненное достоинство, что он дает оценку инвестиционного проекта непосредственно в денежных единицах и потому нагляден. Кроме того, вычисление величины *NPV* проекта выполняется по простой формуле. Очень дискредитирует этот метод жесткая зависимость *NPV* от ставки дисконтирования. Как выбрать эту ставку, чтобы *NPV* проекта соответствовала реальным возможностям проекта? Мы видели, что необоснованное увеличение ставки дисконтирования приводит к снижению *NPV* проекта, вплоть до отрицательных значений. При этом может быть отвергнут хороший проект. Но и чрезмерное уменьшение ставки дисконтирования не приведет ни к чему хорошему: *NPV* проекта будет завышена, и надежды на большой доход от такого проекта не оправдаются при его реализации. Где золотая середина? Ответ на этот непростой вопрос дается в продвинутых курсах финансового менеджмента и корпоративных финансов.

Теперь охарактеризуем критерий *IRR* в целом, отметив его положительные и отрицательные качества. Несомненным достоинством критерия *IRR* является то, что он не связан с какой-либо ставкой дисконтирования или с другой, внешней для проекта информацией. Этот критерий, действительно, является внутренней характеристикой инвестиционного проекта. Но вычисленная для проекта ставка *IRR* сравнивается со ставкой отсечения, выбор которой зависит от квалификации экономиста, который оценивает этот проект.

К недостаткам критерия *IRR* следует отнести и то, что он применим только к регулярным инвестиционным проектам. Кроме того, этот критерий, в отличие от *NPV*, не учитывает масштаб проекта.

Для инвестиционного проекта с убывающей функцией *NPV* решение о его принятии по критерию *NPV* и по критерию *IRR* совпадают, если выполнено одно из двух неравенств: $r_c \le r \le IRR$ (по обоим критериям проект рекомендуется к принятию) или $IRR \le r_c \le r$ (по обоим критериям проект отвергается), где r_c — ставка отсечения по критерию *IRR*, r — ставка дисконтирования. Рассмотрим пример.

Пример 10.9. *Обратимся опять к примеру 10.1. Будем считать, что* $r = r_c = 10\%$. *Сравним оценки этого проекта по критериям NPV и IRR.*

Решение. Как мы видели при решении примера 10.4, для данного проекта $NPV(10\%) = 155\,000 > 0$, следовательно, он должен быть принят по критерию NPV. При решении примера 10.8 была вычислено, что $IRR = 22.36\% > r_c = 10\%$. Следовательно, он должен быть принят и по критерию IRR. ■

При сравнении двух альтернативных проектов выбор проекта по критерию NPV может не совпадать с выбором по критерию IRR. Вернемся к примеру 10.6 и продолжим вычисления.

Пример 10.10. *Вычислим внутренние нормы доходности проектов А и Б из примера 10.6. Сравним эти проекты по критерию NPV при разных значениях r.*

Решение. Внутренняя норма доходности (IRR) проекта А была вычислена в примере 10.8: $IRR_{\text{А}} = 22.36\%$.

Внутренняя норма доходности (IRR) проекта Б является корнем уравнения:

$$-300\,000 - \frac{300\,000}{1+r} + \frac{100\,000}{(1+r)^2} + \frac{600\,000}{(1+r)^3} + \frac{300\,000}{(1+r)^4} = 0.$$

Применяя любой из предложенных ранее способов, находим, что IRR проекта Б равна 20.92%.

Запишем полученные результаты и результаты решения примера 10.6 в виде таблицы:

	Проект А	Проект Б
$NPV(10\%)$	155 000	166 000
$NPV(20\%)$	24 000	11 000
IRR	22.36%	20.92%

Из приведенной таблицы видно, что по критерию NPV при ставке дисконтирования 10% следует предпочесть проект Б, а по критерию IRR — проект А. Сравнение проектов дает один и тот же результат по обоим критериям, если ставка дисконтирования при вычислении NPV равна 20% — следует предпочесть проект А. ■

10.7. Влияние инфляции на инвестиционный проект

Денежный поток, инициированный проектом, составляется в *номинальных* денежных единицах. Как повлияет ожидаемая инфляция на критерии принятия инвестиционных решений?

Предположим, что инфляция постоянна и составляет $i\%$ в год. Тогда цены ресурсов, используемых при реализации проекта в году t, и цены, по которым реализуется произведенная в этом году продукция проекта, умножаются на множитель $(1+i)^t$. Поэтому все члены потока платежей, порожденного инвестиционным проектом, должны быть умножены на этот множитель. Тогда измененный поток платежей примет вид:

$$\begin{array}{cccccc} C_0 & C_1(1+i) & C_2(1+i)^2 & \ldots & C_n(1+i)^n & \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots & n & t \text{ лет} \end{array}$$

Доходы в регулярном проекте происходят позднее инвестиций, и, следовательно, для доходов множитель $(1+i)^t$ больше, чем для инвестиций. Таким образом, средняя норма прибыли регулярного проекта при инфляции увеличивается. По той же причине срок окупаемости проекта уменьшается. Рассмотрим пример.

Пример 10.11. *Найдем среднюю норму прибыли на инвестиции проекта из примера 10.1, если инфляция составляет* 10% *в год.*

Решение. Вычислим поток платежей проекта из примера 10.1 с учетом инфляции:

$$C_0 = -300\,000; \quad C_1 = -200\,000 \times (1+0.1) = -220\,000;$$

$$C_2 = 200\,000 \times (1+0.1)^2 = 242\,000; \quad C_3 = 400\,000 \times (1+0.1)^3 = 532\,400;$$

$$C_4 = 250\,000 \times (1+0.1)^4 = 366\,025.$$

Среднегодовая балансовая прибыль за четырехлетний период реализации данного проекта равна:

$$\frac{242+532+366}{4} = 285 \text{ тыс. руб.}$$

Инвестиции в данный проект равны: $300+220=520$ тыс. руб. Средняя норма прибыли на инвестиции равна:

$$\frac{285}{520} = 0.5481 = 54.81\%.$$

Таким образом, средняя норма прибыли на инвестиции увеличилась (см. пример 10.2) на 12.31%. ∎

Покажем, что, при простейшей постановке, инфляция не влияет на величину чистой приведенной стоимости (NPV) проектов.

Если на сумму P начисляется $r\%$ сложных в год, то наращенная за t лет сумма C_t вычисляется по формуле $C_t = P(1+r)^t$. Если имеет место инфляция, равная $i\%$ в год, то первоначальная сумма P через t лет станет равна $P(1+i)^t$. Следовательно, наращенная сумма при учете инфляции должна вычисляться по формуле $C_t = P(1+i)^t(1+r)^t$. Откуда получаем формулу для приведенной ценности P суммы C_t в момент 0 при учете инфляции:

$$P = \frac{C_t}{(1+i)^t(1+r)^t}\,.$$

Следовательно, приведенная ценность потока платежей, порожденного инвестиционным проектом, не меняется при учете инфляции:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{C_t(1+i)^t}{(1+r)^t(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}\,.$$

В общем случае $C_t = R_t - Z_t$, где R_t — доходы, а Z_t — затраты в году t. Вообще говоря, при инфляции R_t, Z_t и ставка процента могут увеличиваться непропорционально, что делает на практике рассматриваемую задачу более сложной.

10.8. Инвестиции в дополнительное образование

Проект, о котором речь пойдет в этом разделе, описывает довольно типичную жизненную ситуацию, когда требуется принять решение о целесообразности вложения денег в дополнительное образование. Мы оставляем за рамками нашего обсуждения все аргументы за и против принятия такого решения, кроме величины NPV и IRR соответствующего денежного потока.

Рассматривается следующая ситуация. Студент-математик в начале второго курса должен принять решение, заняться или нет изучением финансов. У него имеется информация, что средняя зарплата (в месяц) выпускника, дополнительно изучавшего финансы, первые два года после окончания университета больше, в среднем, на \$50. При изучении финансов потребуются дополнительные средства на покупку специальной литературы и программного обеспечения[24]: на 2-м курсе — \$50, на 3-м курсе — \$100, на 4-м курсе — \$50, на 5-м курсе — \$50. Далее будем называть этот проект M&F.

10.8.1. Оценка потока денежных средств

Как следует из описания проекта M&F, его длительность составляет 6 лет (четыре года учебы плюс первые два года после ее окончания). Мы будем рассматривать проект M&F без учета фактора неопределенности, т. е. мы предполагаем, что величина денежного потока в течение 6 лет полностью определяется приведенными выше данными.

Проект M&F является регулярным, так как в нем отрицательные платежи (затраты) предшествуют положительным платежам (поступлениям).

Одним из важных моментов при оценке инвестиционного проекта является выбор временной величины, соответствующей одному этапу проекта. В большинстве случаев в качестве длины этапа выбирается один год. И хотя прибавка к зарплате (\$50) указана за месяц, в качестве этапа для проекта M&F также следует выбрать год. Решив оценивать дополнительные расходы на изучение финансов средней цифрой за год, хотя, скорее всего, это будут не единовременные расходы в начале года, мы должны оценить прибавку к зарплате таким же способом. Это означает, что величина денежного потока в 5-й и 6-й год проекта будет равна \$600 (= \$50×12).

На рис. 29 приведен фрагмент рабочего листа, содержащий диаграмму денежного потока проекта M&F. Для ее построения использовалась команда Диаграмма (меню Вставка, тип диаграммы — Гистограмма).

10.8.2. Оценка проекта по критерию *NPV*

Оценим по критерию NPV (чистая приведенная ценность), какое решение должно быть принято. Напомним, что чистая приведенная ценность вычисляется по формуле:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}\,.$$

[24]К счастью для студента, на его факультете имеется возможность слушать специальные курсы по финансам бесплатно.

	A	B	C	D
1	**Прогнозируемые денежные потоки проекта M&F**			
2				
3	Длительность проекта (лет)			6
4	Ставка дисконтирования			20%
5	Прибавка в зарплате			$50
6				
7	год	величина потока		
8	0	-$50		
9	1	-$100		
10	2	-$50		
11	3	-$50		
12	4	$600		
13	5	$600		

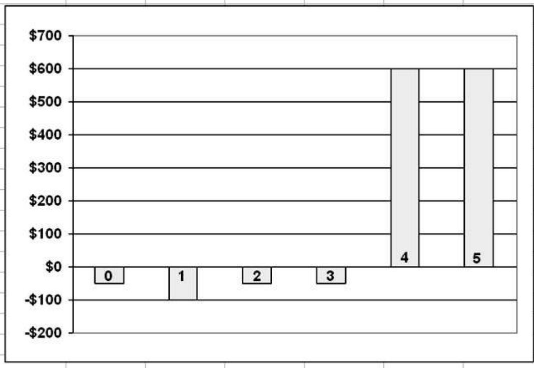


Рис. 29. Диаграмма денежного потока проекта M&F

В этой формуле n — длительность проекта (чаще всего в годах, но может быть и в других временных единицах, например месяцах), r — ставка дисконтирования, C_t — величина связанного с проектом денежного потока на этапе t.

Для того чтобы воспользоваться критерием NPV, необходимо выбрать ставку r, по которой будут дисконтироваться элементы потока денежных средств. Выбор правильной ставки дисконтирования является важной и трудной проблемой, обсуждение которой выходит за рамки нашей книги. Примем, что ставка дисконтирования $r = 0.2$.

На рис. 30 приведен фрагмент рабочего листа, на котором NPV проекта M&F ($333) вычислена двумя способами: с помощью встроенной функции ЧПС[25] (в ячейке B15) и по формуле (в ячейке B17). Как и следовало ожидать, оба значения совпали. Так как значение NPV положительно, то проект M&F следует принять.

[25]Напоминаем, что названия встроенных функций в русскоязычных версиях довольно часто меняются от версии к версии. В частности, функция ЧПС (в Excel XP) ранее называлась НПЗ. Следует иметь в виду, что при открытии xls-файла в формулах происходит автоматическая замена старых имен функций на новые имена.

	A	B	C	D
1	**Вычисление NPV и IRR проекта M&F**			
2				
3	Длительность проекта (лет)			6
4	Ставка дисконтирования			20%
5	Прибавка в зарплате			$50
6				
7	год	величина потока		
8	0	-$50		
9	1	-$100		
10	2	-$50		
11	3	-$50		
12	4	$600	=D5*12	
13	5	$600	=D5*12	
14				
15	NPV =	**$333**	=B8+ЧПС(D4;B9:B13)	
16	*Проверка:*			
17	NPV =	**$333**	=B8+B9/(1+D4)+B10/(1+D4)^A10+B11/(1+D4)^A11+B12/(1+D4)^A12+B13/(1+D4)^A13	
18				
19	r	NPV		
20	0%	$950		
21	10%	$563		
22	20%	$333		
23	30%	$192		
24	40%	$103		
25	50%	$44		
26	60%	$5		
27	70%	-$22		
28				
29				
30	IRR =	**61%**		
31		=ВСД(B8:B13;A26)		
32				
33				
34				

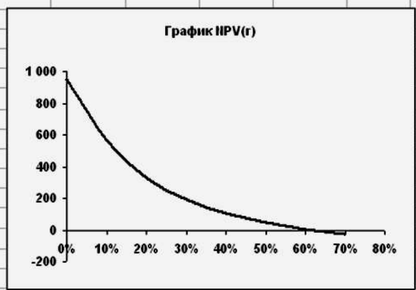


Рис. 30. Вычисление *NPV* и *IRR* проекта M&F

10.8.3. Анализ проекта: изменение ставки дисконтирования

Маловероятно, что в процессе выполнения проекта все его параметры будут равны именно тем значениям, которые использовались при вычислении *NPV*. Поэтому необходимо выполнить анализ чувствительности проекта к изменению основных параметров. Анализ чувствительности проекта означает установление диапазонов изменения основных параметров проекта, при которых проект следует принять.

Имеется единственный параметр — ставка дисконтирования, для анализа которого в Excel имеется встроенная функция. При анализе всех остальных параметров, практически каждый раз, приходится выводить новую формулу и(или) использовать встроенное средство Подбор параметра (меню Сервис).

Построим сначала график зависимости *NPV* проекта от ставки дисконтирования (см. рис. 30). На этом графике видно, что проект M&F перестает быть привлекательным при ставке дисконтирования, значение которой между 60% и 70%. Напомним, что значение ставки дисконтирования, при которой значение *NPV* проекта становится равным нулю, называется внутренней нормой доходности (*IRR*). Для вычисления *IRR* (с заданной точностью) в Excel имеется встроенная функция ВСД. В ячейке B30 с помощью этой функции вычислено значение *IRR*: 61%. Это число означает следующее: *если ставка дисконтирования меньше, чем* 61%, *то значение NPV проекта* M&F *положительно.*

10.8.4. Анализ проекта: изменение заработной платы

Продолжим анализ проекта и определим, при каком *минимальном* ежемесячном увеличении средней зарплаты (за первые два года после окончания университета) следует принять решение о вложении средств в изучение финансов. Для проведения этого анализа можно применить несколько способов. Ниже мы подробно опишем некоторые из их, так как они являются универсальными и могут быть использованы при анализе большинства параметров инвестиционных проектов.

Подбираем параметр методом деления отрезка пополам. Скопируем на новый рабочий лист (рис. 31) фрагмент с вычислениями *NPV* с листа, который приведен на рис. 30. При этом необходимо проверить, что значения в ячейках B12 и B13 вычисляются как произведение прибавки к зарплате на 12 (число месяцев в году). Тогда при изменении значения прибавки к зарплате (ячейка D5) автоматически получаем соответствующие значения *NPV* в ячейке B15.

Поиск минимальной прибавки к зарплате, при которой проект M&F следует принять, организуем методом, который математики называют *методом деления отрезка пополам.* Суть его заключается в том, что на очередном шаге вычисляется значение функции, корень которой ищется (в нашем примере это функция *NPV*) в точке, являющейся серединой интервала поиска. Такая стратегия поиска гарантирует[26], что на каждом шаге интервал поиска уменьшается в 2 раза. Поиск продолжается до тех пор, пока длина интервала, которому принадлежит искомое значение, не станет достаточно малой.

В рамках данного примера будем проводить все вычисления с точностью до целого числа долларов. В частности, если серединой отрезка

[26]По крайней мере, если функция монотонная и интервал содержит не более одного корня.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Анализ проекта M&F: подбор значения минимальной прибавки к зарплате**						
2							
3	Длительность проекта (лет)			6			
4	Ставка дисконтирования			20%			
5	Прибавка в зарплате			$21			
6							
7	год	величина потока			прибавка	NPV	
8	0	-$50			$50	$333	
9	1	-$100			$25	$68	
10	2	-$50			$12	-$70	
11	3	-$50			**$18**	-$6	
12	4	$252	=D5*12				
13	5	$252	=D5*12				
14							
15	NPV =	$26	=B8+ЧПС(D4;B9:B13)				
16							
17							

Рис. 31. Вычисление минимальной прибавки к зарплате подбором

является нецелое значение, будем округлять его вниз до ближайшего целого.

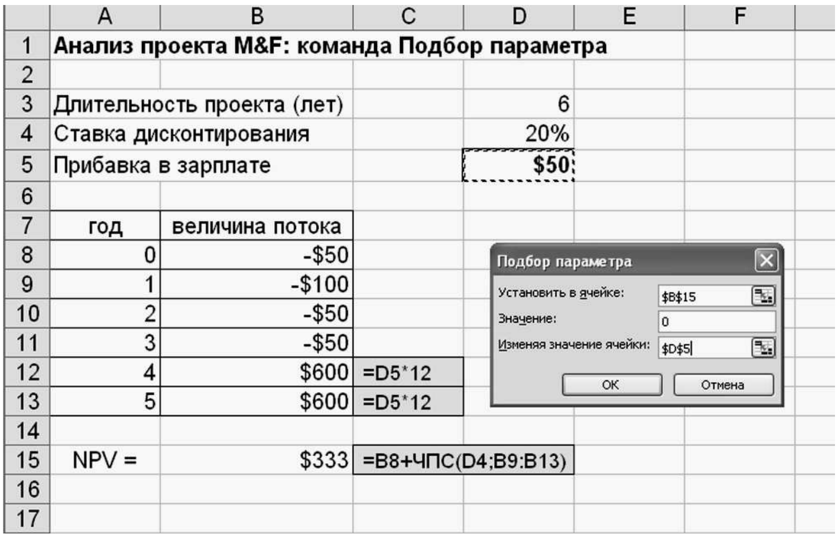
В рассматриваемом примере в силу уже проделанных вычислений поиск величины прибавки можно ограничить интервалом $[\$0, \$50]$. При прибавке \$25 (середина начального интервала поиска) значение *NPV* равно \$68. Следовательно, на первом шаге интервал поиска сужается до $[\$0, \$25]$. Далее вычисляя *NPV* при прибавке к зарплате \$12, получаем $-\$70$. Интервал поиска сужается до $[\$12, \$25]$. Значение *NPV* при прибавке \$18 оказывается равным $-\$6$, поэтому точное значение критической прибавки к зарплате принадлежит интервалу $[\$18, \$25]$. На каждом шагу применения метода деления отрезка пополам мы можем решить вопрос о том, достигнута ли требуемая точность решения. В данном случае длина интервала равна \$7, и \$21 является „серединой“ соответствующего отрезка. Если точность „плюс-минус“ \$4 нас устраивает, то принимаем за минимальное значение прибавки к зарплате, при которой за два года проект M&F окупается, величину \$21.

Для наглядности результаты вычислений объединены в таблицу (область E8:F11 на рис. 31). Если формировать второй столбец этой таблицы с помощью операции копирования (а не непосредственно набирать эти значения как числа), то из ячейки B15 в таблицу следует копировать *только значение*. Для этого можно использовать команду Специальная вставка из меню Правка.

Для определения минимального значения прибавки к зарплате, при которой проект M&F следует принять, потребовалось вычислить значения *NPV* при трех значениях прибавки: \$25, \$12, \$18. Это связано с тем, что длина исходного интервала поиска больше длины конечного интервала в 5 раз[27]. В том случае, если длина исходного интервала поиска превосходит длину конечного интервала во много раз, рекомендуем воспользоваться другим средством: командой Подбор параметра (меню Сервис).

Используем команду Подбор параметра. Как и в предыдущем методе начнем с того, что скопируем на новый рабочий лист фрагмент с вычислениями *NPV* с листа, который приведен на рис. 30. Еще раз напомним, что значения в ячейках B12 и B13 должны быть вычислены как произведение прибавки к зарплате на 12 (число месяцев в году).

Далее активируем команду Подбор параметра. На экране открывается диалоговое окно этой команды (рис. 32). Заполним параметры этого диалогового окна следующим образом: в поле Установить в ячейке указываем B15, в поле Значение указываем 0 и в поле Изменяя значение в ячейке указываем D5.



	A	B	C	D	E	F
1	**Анализ проекта M&F: команда Подбор параметра**					
2						
3	Длительность проекта (лет)			6		
4	Ставка дисконтирования			20%		
5	Прибавка в зарплате			**\$50**		
6						
7	год	величина потока				
8	0	-\$50				
9	1	-\$100				
10	2	-\$50				
11	3	-\$50				
12	4	\$600	=D5*12			
13	5	\$600	=D5*12			
14						
15	NPV =	\$333	=B8+ЧПС(D4;B9:B13)			
16						
17						

Рис. 32. Диалоговое окно команды Подбор параметра

[27] Если длина исходного интервала больше длины конечного интервала в k раз, то количество значений, в которых потребуется вычислить значение функции, можно определить с помощью формулы =ОКРУГЛВВЕРХ(LOG(k;2);0).

После нажатия кнопки OK мгновенно появляется окно Результат подбора параметра (рис. 33). В этом окне сообщается подбираемое и текущее значения. В нашем примере они совпадают: их значения равны 0. Подобранное значение помещается в ячейку B15. В ячейке D5 появляется значение \$19 прибавки к зарплате, при которой *NPV* проекта M&F равно 0. Оно незначительно отличается от того, которое было вычислено ранее (\$21).

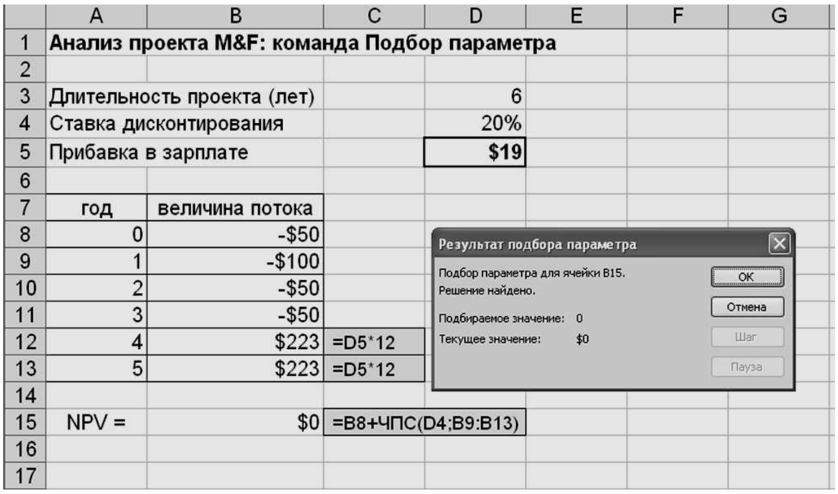


Рис. 33. Результат выполнения команды Подбор параметра

Если предполагается неоднократно анализировать однотипные проекты, для тех, кто любит программировать, можно предложить еще один способ вычисления критического значения прибавки к зарплате — написать пользовательскую функцию на VBA. Видимо, изучать любой язык программирования лучше всего, разбирая написанные на нем программы. Поэтому следующий пункт следует рассматривать как элемент такого обучения. Базовые сведения о программировании на VBA имеются в приложении Б.

Создаем функцию на VBA. Текст функции MinAdd, которая вычисляет минимальную прибавку к зарплате, при которой *NPV* проекта M&F равна 0, приведен в листинге 10.1. Заметим, что функция MinAdd может вычислить эту величину для более широкого класса проектов, что будет объяснено ниже.

Обращаем внимание читателя на тот факт, что строки листингов в этой книге имеют номера. Это сделано для удобства ссылок на конкретные строки при их комментировании. Реальный текст функций (его можно увидеть в окне Code редактора VBA) не имеет таких номеров.

Листинг 10.1

```
 0: Option Explicit 'требует явного описания переменных
 1: Function MinAdd(r As Single, n As Byte, _
 2:                ParamArray inv() As Variant) As Single
 3: 'вычисляет величину минимальной прибавки к зарплате,
 4: 'при которой NPV>0
 5: 'r - ставка дисконтирования
 6: 'n - количество периодов после инвестиций
 7: 'inv - массив инвестиций
 8:
 9:  Dim i As Byte, m As Byte
10:  Dim npv_inv As Single 'NPV инвестиций
11:  Dim npv_add1 As Single 'NPV $1 прибавки в месяц ($12 в год)
12:
13:  m = UBound(inv) 'количество периодов инвестиций
14:  npv_inv = 0
15:  For i = 0 To m
16:      npv_inv = npv_inv + inv(i)/(1 + r)^i
17:  Next i
18:
19:  npv_add1 = 0
20:  For i = m + 1 To m + n
21:      npv_add1 = npv_add1 + 12/(1 + r)^i
22:  Next i
23:
24:  MinAdd = -npv_inv/npv_add1
25: End Function
```

Прокомментируем теперь текст функции MinAdd (листинг 10.1). Каждая VBA-функция начинается с ключевого слова Function, за которым следует имя функции — MinAdd. За именем функции в круглых скобках (строки 1–2) перечисляются ее аргументы (или параметры). Функция MinAdd имеет три аргумента: r — ставка дисконтирования, n — количество учитываемых лет с прибавкой к зарплате, inv — массив объемов инвестиций. При описании типа аргумента inv указано, что он является массивом с *неопределенным числом элементов*[28]. Этот прием позволит использовать функцию MinAdd для оценивания проектов с различным количеством периодов инвестирования. Заканчивается описание функции указанием типа значения, которое вырабатывает функция (Single — вещественный).

Строки 3–7 содержат комментарии, которые в данном случае поясняют, что делает функция и смысл ее аргументов. Каждый комментарий начинается с символа апостроф ('). Комментарием является часть строки от апострофа до конца строки. При работе в редакторе VBA комментарии выделяются зеленым цветом.

Строки 8, 12, 18 и 23 — это *пустые строки*. Они разделяют логические фрагменты программы. Пустые строки добавляют в текст, чтобы сделать его более читабельным.

В строках 9–11 содержатся описания локальных переменных функции с указанием их типа. Назначение переменных объяснены в комментариях. Такое описание переменных называется *явным*. Язык VBA допускает и неявное описание переменной — первым вхождением. Все переменные, описанные неявно, получают тип Variant. Преимущества явного описания обсуждаются в учебниках по программированию. В строке 0 содержится опция Option Explicit, которая указывает компилятору, что все переменные модуля должны быть описаны явно. Советуем всегда использовать эту опцию.

В строке 13 записан оператор присваивания. Переменной m присваивается количество интервалов инвестирования (используется встроенная функция UBound, которая вырабатывает значение верхней границы индекса массива-аргумента).

В строках 14–17 вычисляется значение NPV инвестиций (переменная npv_inv), которые записаны в массиве inv. Предполагается, что величина инвестиции в периоде i равна inv(i) (i = 0, 1, ..., m). Для вычисления используется оператор цикла типа For ... Next с возрастающим счетчиком (переменная i). Предполагается, что инвестиции происходят в начале года.

В строках 19–22 вычисляется значение NPV от прибавки к зарплате $12 в год (переменная npv_add1). Для вычисления также используется оператор цикла типа For ... Next с возрастающим счетчиком. Предполагается, что прибавка выплачивается в конце года.

В строке 24 вычисляется значение функции MinAdd, равное величине минимальной прибавки в месяц, при которой NPV проекта равно 0. Имеет место равенство npv_inv + MinAdd x npv_add1 = 0, из которого и находится

[28]Такой параметр обязательно должен быть последним в списке параметров.

значение MinAdd.

Функция всегда завершается оператором End Function (строка 25).

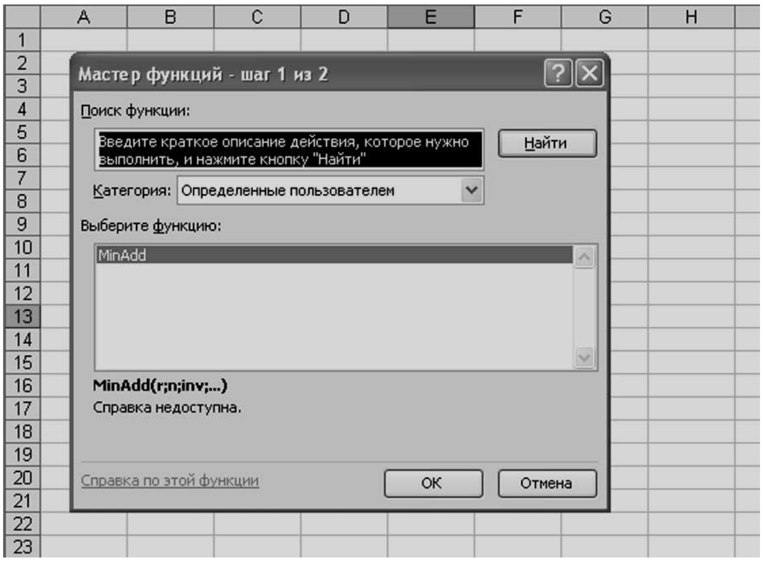


Рис. 34. Функция MinAdd в категории Определенные пользователем

После успешной трансляции написанные пользователем функции автоматически попадают в категорию Определенные пользователем (рис. 34). Использование функций из этой категории ничем не отличается от использования функций из других категорий.

На рис. 35 приведен фрагмент рабочего листа с примерами, демонстрирующими применение функции MinAdd для выполнения дополнительного анализа проекта M&F. Значения параметров проекта, которые отличаются от исходных значений, выделены жирным шрифтом. Имея функцию MinAdd, мы определили, что:

- проект остается привлекательным, если учитывать прибавку к зарплате только за один год (ячейка E5);
- проект остается привлекательным, если увеличить инвестиции в 3-м году до $100 (ячейка E11);
- проект останется привлекательным, если увеличить инвестиции до $100 каждый год (ячейка E13);
- проект перестает быть привлекательным, если увеличить инвестиции до $100 каждый год и учитывать прибавку к зарплате только

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Примеры использования функции MinAdd**										
2											
3		MinAdd(0.2;2;-50;-100;-50;-50) =			19	- исходный проект (результат совпал)					
4											
5		MinAdd(0.2;**1**;-50;-100;-50;-50) =			34	- учитываем прибавку к зарплате только за первый год					
6											
7		MinAdd(0.2;**3**;-50;-100;-50;-50) =			13	- учитываем прибавку к зарплате за 3 года					
8											
9		MinAdd(**0.18**;2;-50;-100;-50;-50) =			18	- меняем ставку дисконтирования					
10											
11		MinAdd(0.2;2;-50;-100;-50;**-100**) =			21	- увеличиваем инвестиции в 3-ем году					
12											
13		MinAdd(0.2;2;**-100**;**-100**;**-100**;**-100**) =			29	- увеличиваем инвестиции					
14											
15		MinAdd(0.2;**1**;**-100**;**-100**;**-100**;**-100**) =			54	- увеличиваем инвестиции и учитываем					
16						прибавку к зарплате только за первый год					
17											
18											
19											
20											

Рис. 35. Примеры использования функции MinAdd

за один год (ячейка E15). Однако, чтобы проект стал привлекательным при этих условиях, минимальная добавка к зарплате за месяц должна быть всего на \$4 больше той, которая имеет место в среднем (\$50).

10.8.5. Подводим итоги

В этом разделе мы провели анализ проекта M&F, который предполагает на начальных этапах вкладывание денег в дополнительное образование, а на последующих этапах получение отдачи от этих вложений в виде дополнительного заработка.

Для оценивания проекта были использованы критерии *NPV* и *IRR*. Было показано, как выполнить анализ на чувствительность проекта к изменению данных, используя различные встроенные средства Excel.

Так как для выполнения разностороннего анализа проектов не всегда хватает встроенных средств Excel, было показано, как на VBA написать пользовательскую функцию MinAdd и потом использовать ее.

10.9. Используем Excel

В Excel имеется группа из трех функций для вычисления значений основных характеристик инвестиционных проектов. Приведем, как и раньше, сначала таблицу, в которой перечислены имена аргументов, используемых этими функциями, и их назначение.

Аргумент	**Назначение**
норма	Процентная ставка (норма прибыли или цена капитала)
платежи	Поток платежей (произвольной величины)
ставка	Ставка реинвестирования полученных средств

Приведем теперь таблицу, в которой для каждой функции указаны ее имя (в русифицированной версии и в англоязычной), формат обращения и вычисляемая величина.

Функция	**Формат обращения**	**Значение**
ЧПС (NPV)	ЧПС(норма;платежи)	Приведенная стоимость потока
ВСД (IRR)	ВСД(платежи[;прогноз])	Внутренняя норма доходности
МВСД (MIRR)	МВСД (платежи;норма;ставка)	Модифицированная ВСД

Сделаем ряд важных замечаний, касающихся применения этих функций. Эти функции применяются, когда поток образован платежами произвольной величины, осуществляемыми через *равные* промежутки времени.

Функция ЧПС вычисляет значение NPV потока платежей. Для того чтобы вычислить значение *чистой приведенной стоимости* потока, следует также воспользоваться этой функцией. При этом необходимо сделать две вещи: не включать первоначальные инвестиции (сделанные в момент 0) в поток платежей и вычесть величину первоначальных инвестиций из полученного значения функции ЧПС. Имеется также функция ЧИСТНЗ, которая вычисляет NPV потока платежей, осуществляемых в указанные даты.

Функции ВСД и МВСД имеют необязательный аргумент *прогноз*, который может использоваться для указания предполагаемого значения вычисляемой процентной ставки. По умолчанию значение этого аргумента полагается равным 10%. Вычисление значений этих функций осуществляется методом последовательных приближений. Если после 20 итераций не достигнута требуемая точность результата, то в ячейке появляется сообщение об ошибке: # ЧИСЛО!. В этом случае стоит попытаться найти решение при другом значении аргумента *прогноз*.

Чтобы расширить знания читателя об Excel, в этом пункте будет рассказано о двух новых средствах, которые можно использовать при решении задач из этой и предыдущих глав: диаграммы, команда Подбор параметра.

10.9.1. Строим диаграммы

В программе Excel имеется мощный механизм под названием Диаграммы (Chart) (меню Вставка), который позволяет представлять данные с рабочих листов в графическом виде.

Диаграммы могут строиться как на рабочих листах с данными (*внедренные диаграммы*), так и на отдельных листах (*листы диаграмм*). В этом подразделе мы разберем примеры получения только внедренных диаграмм.

В Excel почти весь процесс построения диаграммы автоматизирован. Однако необходимо потратить определенное время и проявить терпение, чтобы ваши диаграммы стали выглядеть именно так, как вы задумали.

Вернемся к решению примера 10.5 и объясним, как был получен график функции $NPV(r)$ на рис. 26. Перед построением диаграммы выделим интервал ячеек, в котором расположены данные для диаграммы (категория и хотя бы один ряд данных с их названиями), A13:B18. Запустим Мастер диаграмм, нажав одноименную кнопку на панели инструментов или выполнив следующие действия:

1. Выбираем меню Вставка.
2. Выбираем подменю Диаграмма...
3. Нажимаем кнопку OK.

После этого на экране появляется диалоговое окно первого шага Мастер диаграмм. Процесс создания диаграммы состоит из четырех шагов. После каждого шага можно перейти к следующему (кнопка Далее>) или вернуться к предыдущему шагу (кнопка <Назад). Кнопка Готово позволяет пропустить оставшиеся шаги, а кнопка Отмена — отказаться от построения диаграммы.

На первом шаге Мастер диаграмм предлагает выбрать *тип диаграммы*. В случае построения графика функции надо выбрать тип Точечная. Именно этот тип обеспечивает построение графиков функций в традиционном математическом понимании. На этом же шаге дополнительно требуется указать *вид* графика.

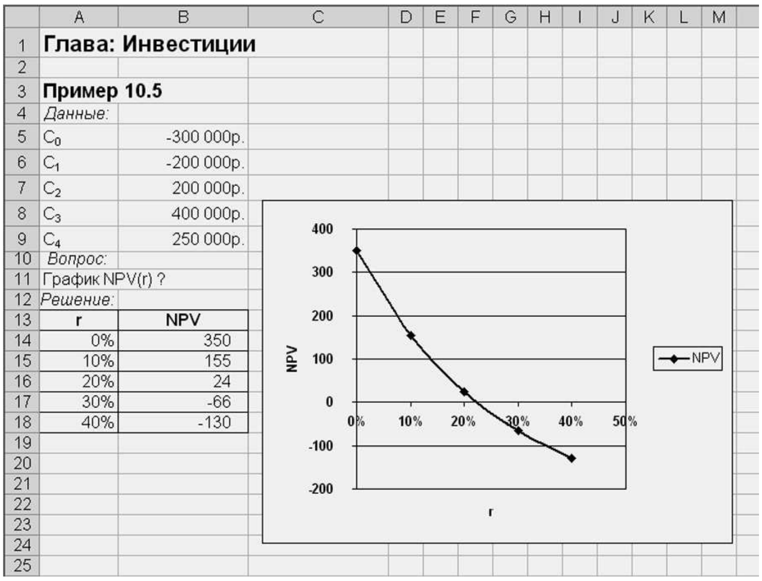


Рис. 36. Построение диаграммы для проекта из примера 10.1

На втором шаге устанавливается *источник данных*. Так как мы заранее выделили область с данными (советуем всегда так делать) и данные расположены в столбцах, то в рассматриваемом примере нужно просто нажать кнопку Далее>. Выделенная область с данными содержит две ячейки с текстом (названия столбцов), которые используются для оформления диаграммы. Название, связанное со значением функции, считается именем этого ряда данных и по умолчанию используется в *легенде* диаграммы.

Третий шаг служит для задания *параметров диаграммы*. Диалоговое окно этого шага имеет несколько вкладок. С их помощью мы задали заголовки осей (r, NPV).

В рассматриваемом примере четвертый шаг (Размещение диаграммы) можно пропустить, так как по умолчанию размещение происходит на имеющемся листе. Диаграмма для проекта из примера 10.1 построена (рис. 36).

После выполнения четвертого шага на экране появляется диаграмма, размеры и место размещения которой определяются программой. Однако вы можете разместить ее, где хотите, даже поверх данных или другой диаграммы. Для этого поместите на контур диаграммы указатель мыши, нажмите левую кнопку и перетащите диаграмму в нужное место. Чтобы изменить размеры диаграммы, сначала выделите ее, а затем перетащите один из размещенных по ее периметру маркеров в нужное место.

Начиная со второго шага, в диалоговом окне показано, как будет выглядеть ваша диаграмма при выбранных параметрах. Если вас что-то не устраивает, всегда есть возможность вернуться назад (кнопка <Назад) и поменять параметры. Можно также заняться редактированием диаграммы после того, как она построена.

Построение диаграмм для примеров 10.6 и 10.7 (рис. 27 и 28) выполнено по той же схеме. Так как на первой из них изображены два графика (ряда данных), мы добавили поясняющие надписи. Для этого были использованы *автофигуры*.

10.9.2. Объясняем команду Подбор параметра

В меню Сервис имеется команда Подбор параметра, с помощью которой можно находить корни, вообще говоря, сколь угодно сложных уравнений. Существенным ограничением при применении этой команды является то, что необходимо знать приближенное значение корня, который требуется найти.

Эта команда предназначена для получения заданного значения в целевой ячейке путем подбора значения в ячейке-параметре. Таким образом, надо указать целевую ячейку, ее желаемое значение и изменяемую ячейку-параметр, влияющую на содержимое целевой ячейки. При этом ячейка-параметр должна содержать значение, а не формулу.

Вернемся к решению примера 10.8 и подробно опишем, как было получено значение IRR для проекта из примера 10.1.

Сначала выполним подготовительные действия. Во-первых, в ячейку B13 запишем значение, являющееся приближением к значению IRR. Если посмотреть на рис. 36, то видно, что искомое значение параметра удовлетворяет неравенству $20\% < r < 30\%$. В ячейку B13 можно было бы записать число 25%, но мы оставили эту ячейку пустой (значение ячейки равно 0).

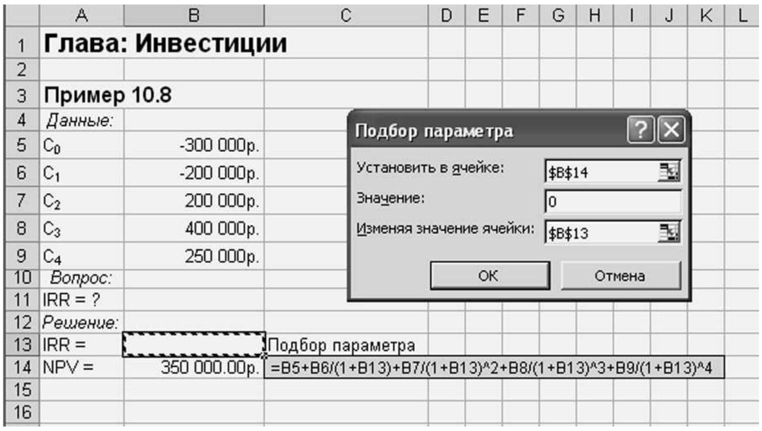


Рис. 37. Использование команды Подбор параметра

Во-вторых, в ячейку B14 записываем формулу вычисления NPV:

```
=B5+B6/(1+B13)+B7/(1+B13)^2+B8/(1+B13)^3+B9/(1+B13)^4
```

После ввода этой формулы в ячейке B14 появится число 350 000.00р. Подготовка к основным вычислениям закончена. Далее выполняем следующую последовательность действий (рис. 37):

1. Выбираем меню Сервис.
2. Выбираем команду Подбор параметра...
3. В диалоговом окне Подбор параметра заполняем поля:
   Установить в ячейке: B14
   Значение: 0
   Изменяя значение в ячейке: B13
4. Нажимаем кнопку OK.

После этого откроется диалоговое окно Результат подбора параметра, а в ячейке B13 появится найденное значение параметра: 22.36% (рис. 38).

Сделаем некоторые пояснения к команде Подбор параметра. Подбор параметра осуществляется методом последовательных приближений. Рассмотренная задача о проценте решается быстро, но для некоторых задач решение не будет найдено. По умолчанию вычисления прекращаются, если относительная погрешность найденного решения не более чем 0.001 или

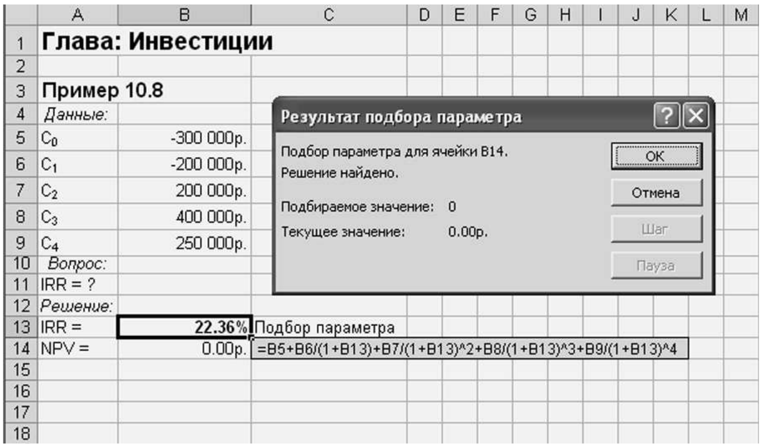


Рис. 38. Результат использование команды Подбор параметра

выполнено уже 100 итераций. Оба этих параметра могут быть изменены. Пусть, например, мы хотим, чтобы выполнялось не более 200 итераций и достигалась точность 0.0001. Тогда нужно выполнить следующую последовательность действий:

1. Выбираем меню Сервис.
2. Выбираем команду Параметры...
3. Выбираем вкладку Вычисления...
4. В диалоговом окне Вычисления заполняем поля:
   Предельное число итераций: 200
   Относительная погрешность: 0.0001
5. Нажимаем кнопку OK.

Следует также иметь в виду, что при подборе параметра может быть найдено только одно решение, даже если их имеется несколько. Какое именно из решений будет найдено, определяется заданным приближенным значением параметра. Например, используем команду Подбор параметра для решения уравнения $x^2 = 9$. Это уравнение имеет два решения: 3 и –3. Если задать в качестве приближенного значения для решения 1, то получим в качестве решения значение $+3$, а если –1, то получим в качестве решения значение –3.

Если решение не найдено или вас не устраивает найденное решение, то для восстановления исходного значения ячейки с начальным значением параметра нужно нажать кнопку Отмена.

Упражнения

1. Фирма решила построить новый цех. Проект предполагает вложение в начальный момент 600 000 руб. в постройку здания цеха. В начале второго года необходимо вложить еще 300 000 руб. для закупки и установки оборудования, а в начале третьего года придется потратить 60 000 руб. на рекламу новой продукции. В третьем, четвертом, пятом и шестом годах реализация новой продукции принесет прибыль соответственно равную 500 000 руб., 600 000 руб., 700 000 руб. и 400 000 руб. Изобразите этот инвестиционный проект на оси времени и постройте его диаграмму.

2. Владелец магазина собирается закупить в первый год товар на сумму 200 000 руб. и продать этот товар к концу первого года за 280 000 руб. В течение второго года он планирует закупить товар на сумму 300 000 руб. и продать его за 400 000 руб. В этом же году владелец магазина хочет построить новый склад, вложив в строительство 150 000 руб. В течение третьего и четвертого годов владелец магазина планирует закупать товар на сумму 300 000 руб. в год и реализовывать его за 420 000 руб. В пятом году он думает закупить товар на 350 000 руб. и продать его за 500 000 руб. Изобразите этот инвестиционный проект на оси времени и постройте его диаграмму.

3. Вычислите среднюю норму прибыли на инвестиции проекта из упражнения 1.

4. Найдите срок окупаемости проекта из упражнения 1.

5. Вычислите чистую приведенную ценность (NPV) инвестиционного проекта из упражнения 1 при ставке дисконтирования $r = 10\%$ (в момент 0).

6. Вычислите чистую приведенную ценность (NPV) проекта из упражнения 1 при следующих ставках дисконтирования: а) 0%, б) 20%, в) 30%, г) 40%, д) 50%. Постройте график функции $NPV(r)$.

7. Внедрение нового оборудования даст возможность инвестору получать годовой доход в размере 1 000 тыс. руб. Инвестор планирует продать это оборудование после 5 лет работы за 500 тыс. руб. Определите максимальную цену, которую инвестору следует заплатить за это оборудование по критерию NPV, если требуемая доходность равна 9%.

8. Фирма рассматривает возможность принятия одного из трех инвестиционных проектов:

Проект	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
A	-1000	100	100	100	1200
B	-1000	200	100	0	1200
C	-1000	0	0	300	1400

Какой из проектов следует предпочесть по критерию NPV при $r = 13\%$?

9. Для каждого из этих проектов в упражнении 8: а) постройте график функции NPV; б) вычислите IRR.

10. Вычислите NPV проекта, первоначальные вложения по которому составляют 10 млн руб., ожидаемый годовой доход — 3 млн руб., длительность проекта — 5 лет. Доходность, требуемая инвестором на подобные проекты, равна 15%.

11. Золотодобывающая компания рассматривает проект освоения нового прииска: предполагается вложить в производство 1 600 тыс. руб.; получить в течение первого года 10 000 тыс. руб. дохода; исчерпав запасы прииска, в течение второго года рекультивировать территорию прииска, вложив в это 10 000 тыс. руб. Изобразите поток платежей, порожденных этим проектом, на оси времени и постройте график функции $NPV(r)$ этого проекта.

12. Вычислите внутреннюю норму доходности (IRR) проекта, описанного в упражнении 1. Будет ли принят инвестиционный проект из упражнения 1 по критерию (IRR), если ставка отсечения равна: а) 20%; б) 30%?

13. Два взаимоисключающих проекта имеют следующие денежные потоки:

Проект	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
A	-2000	500	500	500	1000
B	-2000	0	0	500	2000

Какой из проектов следует выбрать по критерию IRR?

14. Для проекта из упражнения 10 вычислите IRR. При каких значениях ставки дисконтирования r проект будет принят по критерию NPV, при каких отвергнут? Совпадают ли эти решения с решениями по критерию IRR?

15. Вычислите внутренние нормы доходности (IRR) инвестиционных проектов A и B из упражнения 8 и сравните эти проекты по критериям IRR и NPV.

16. Опишите поток платежей для инвестиционного проекта из упражнения 1, если имеет место инфляция, равная 5% в год.

17. Вычислите среднюю норму прибыли на инвестиции для проекта из упражнения 16. Сравните ее со средней нормой прибыли на инвестиции этого проекта без учета инфляции (см. упражнение 3).

18. Найдите срок окупаемости инвестиционного проекта из упражнения 1, если имеет место инфляция, равная 5% в год. Сравните его с периодом окупаемости этого проекта без учета инфляции (см. упражнение 4).

19. Родители решают, когда надо начать дополнительно готовить ребенка к вступительным экзаменам в вуз. Они рассматривают два варианта: начинать подготовку за год (12 месяцев) до окончания школы (проект 1г) или посвятить этому только два последних месяца перед экзаменами (проект 2м). Если выбирается проект 1г, то дополнительные занятия будут стоить 6 500 руб. в месяц. Если выбирается проект 2м, то заниматься необходимо 20 дней в месяц по 2 часа. Час индивидуальных занятий стоит 1 000 руб. Какой проект следует выбрать без учета фактора времени (по бухгалтерской сумме затрат)?

20. В условиях упражнения 19 какой проект следует выбрать по критерию NPV? Ставка дисконтирования предполагается равной 20%.

21. В условиях упражнения 19 при какой ставке дисконтирования NPV проектов 1г и 2м будут равны?

22. В условиях упражнения 19 при какой плате в месяц (проект 1г) NPV проектов 1г и 2м будут равны? Ставка дисконтирования предполагается равной 20%.

23. В условиях упражнения 19 какова максимальная плата за час (проект 2м), при которой этот проект будет не хуже проекта 1г по критерию NPV? Ставка дисконтирования предполагается равной 20%.

Ответы и указания к упражнениям

Глава 1

1. \$151.55.
2. \$128.15.
3. 18%
4. 18.33%.
5. На 33.33%.
6. На 25%.
7. 57.14%.
8. На 32.80%.
9. На 10.30%.
10. На 21.67%.
11. На 17.81%.
12. 9.38%.
13. На 64%.
14. На 80.95%.
15. На 425%.
16. 50 облигаций.
17. Доходность портфеля будет уменьшаться, приближаясь как угодно близко к 9%. Указание. Найдите предел при $x \to \infty$ дроби, которая равна доходности портфеля, если количество облигаций второго вида равно $(70 + x)$ штук.
18. Доходность портфеля будет увеличиваться, приближаясь как угодно близко к 12%.
19. 198 220 долл.
20. 4 740 долл.
21. 9 484 долл.
22. 23 156 долл.
23. В России этот товар дороже на 19.54%.
24. В России стол дороже на 19.82%, стул — на 15.01%.

25. В России этот товар дороже на 7.41%.
26. В России этот товар дороже на 39.85%.
27. В России этот товар дороже на 13.56%.
28. 88.5%.
29. 77.07%.
30. 105.37%.

Глава 2

1. а) 3 052.5 руб.; б) 3 210 руб.; в) 3 717.5 руб.
2. а) 4 934.21 руб.; б) 4 807.69 руб.; в) 4 504.515 руб.
3. 8%.
4. Через 1.5 года.
5. 16.67%.
6. Приведенная ценность выплат по первому контракту равна $107 348 руб., а по второму — $111 624 руб. Следовательно, первый контракт выгоднее.
7. 8.7%.
8. 68 400 руб.
9. 118 421.05 руб.
10. 111 600 руб. Сравнивая этот результат с результатом упражнения 9, замечаем, что брать ссуду под простые проценты выгоднее, чем под простой дисконт.
11. 14 649.04 руб.; 13 599.04 руб.
12. 2 087.67 руб.
13. 9%.
14. Приведенная ценность выплат по первому контракту равна $16 893.28 руб., а по второму — $17 028.99 руб. Следовательно, первый контракт выгоднее.
15. 9 837.15 руб.
16. 22 187.92 руб.

    Указание. В качестве момента приведения можно принять момент четвертого платежа, то есть конец первого года.
17. 12 325.61 руб. Без учета стоимости денег во времени по первому контракту должник выплатит за 3 года $3\,000 \times 12 = 36\,000$ руб., а по новому контракту — $12\,325.61 \times 3 = 36\,976.83$ руб. Увеличение суммы объясняется увеличением сроков выплаты долга.
18. Приведенная ценность выплат по первому контракту равна 103 777.90 руб., а по второму — 73 269.23 руб. Следовательно, второй контракт выгоднее.
19. 23.6%.
20. 4%.
21. В 1.5 раза; $200.
22. 18%.
23. 0.6.
24. 33.3%.

Глава 3

1. а) 515 994; б) 532 500 руб.; в) 603 975 руб.; г) 752 909 руб.
2. а) 516 382 руб.; б) 533 301 руб.; в) 606 704 руб.; г) 760 299 руб.
3. 14 489.31 руб.
4. 5.77%.
5. Около 145 лет.
6. а) 1 050 руб.; б) 1 051.05 руб.; в) 1 051.16 руб.;
   г) 1 051.27 руб.; д) 1 051.27 руб.
7. 1 491.82 руб.
8. 2 482.93 руб.
9. 44 531.99 руб.
10. а) 10.78%; б) 10.97%; в) 11.02%; г) 11.07%.
11. 9.67% (простых годовых).
12. 5.45%.
13. а) 10.25%; б) 10.43%; в) 10.47%; г) 10.52%.
14. а) 7.85%; б) 7.75%; в) 7.72%; г) 7.70%.
15. 5.96%.
16. 5.85%.

    Указание. Сложная учетная ставка редко используется, поэтому мы не выводили формулу эквивалентности для d_s и d_c: $d_c = 1 - \sqrt[t]{1 - td_s}$.
17. 15.93%.

    Указание. Сложная учетная ставка редко используется, поэтому мы не выводили формулу эквивалентности для d_s и d_c: $d_s = \dfrac{1 - (1 - d_c)^t}{t}$.
18. 8.24%.
19. а) 6.09%; б) 6.14%; в) 6.17%; г) 6.18%.
20. 8.70%.
21. 8.42%.
22. 84 966 руб.; 714 руб.
23. 168 515.90 руб.; 1 416.10 руб.
24. $t = \dfrac{110}{r} + 0.55$.
25. $t = \dfrac{116}{r}$.
26. —
27. —

Глава 4

1.

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	450 000
1	90 000	360 000
2	90 000	270 000
3	90 000	180 000
4	90 000	90 000
5	90 000	0

2.

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	450 000
1	78 000	372 000
2	78 000	294 000
3	78 000	216 000
4	78 000	138 000
5	78 000	60 000

3.

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0		450 000
1	150 000	300 000
2	120 000	180 000
3	90 000	90 000
4	60 000	30 000
5	30 000	0

4.

Год службы	Амортизационные отчисления (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	450 000
1	130 000	320 000
2	104 000	216 000
3	78 000	138 000
4	52 000	86 000
5	26 000	60 000

5. Указание. Фиксированный процент вычисляется по формуле:

$$1 - \sqrt[5]{\frac{60\,000}{450\,000}} = 0.3317 = 33.17\%$$

Год службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	450 000
1	149 400	300 600
2	99 799	200 801
3	66 666	134 135
4	44 533	89 602
5	29 602	60 000

Чтобы остаточная стоимость была равна 60 000 руб., следует уменьшить амортизационные отчисления в пятом году на 146 руб.

6.

Год службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	450 000
1	180 000	270 000
2	108 000	162 000
3	64 800	97 200
4	37 200	60 000
5	0	60 000

Замечание. Приведено решение с использованием встроенной функции ДДОБ.

7.

Год службы	Валовая выручка (руб.)	Амортизационные отчисления (руб.)	Налогооблагаемый доход (руб.)	Ставка налога (%)	Величина налога (руб.)
1	350 000	90 000	260 000	30	78 000
2	350 000	90 000	260 000	30	78 000
3	350 000	90 000	260 000	30	78 000
4	350 000	90 000	260 000	30	78 000
5	350 000	90 000	260 000	30	78 000

Итого: 390 000 руб.

8.

Год службы	Валовая выручка (руб.)	Амортизационные отчисления (руб.)	Налогооблагаемый доход (руб.)	Ставка налога (%)	Величина налога (руб.)
1	350 000	150 000	200 000	30	60 000
2	350 000	120 000	230 000	30	69 000
3	350 000	90 000	260 000	30	78 000
4	350 000	60 000	290 000	30	87 000
5	350 000	30 000	320 000	30	96 000

Итого: 390 000 руб.

9. Первый год меньше на 16.67%, второй — на 33.33%, третий — на 50.00%, четвертый — на 66.67%.
10. 295 681 руб.
11. 289 203 руб.
12. На 2.19%.
13.

Год службы	Валовая выручка (руб.)	Амортизационные отчисления (руб.)	Налогооблагаемый доход (руб.)	Ставка налога (%)	Величина налога (руб.)
1	350 000	149 400	200 600	30	60 180
2	350 000	99 799	250 201	30	75 060
3	350 000	66 666	283 334	30	85 000
4	350 000	44 533	305 467	30	91 640
5	350 000	29 748	320 252	30	96 076

Итого: 407 956 руб.

14. Первый год меньше на 19.19%, второй — на 31.70%, третий — на 37.90%, четвертый — на 35.07%.
15. Суммы налогов равны.
16. 302 851 руб.
17. На 2.09%.
18.

Год службы	Валовая выручка (руб.)	Амортизационные отчисления (руб.)	Налогооблагаемый доход (руб.)	Ставка налога (%)	Величина налога (руб.)
1	350 000	180 000	170 000	15	25 500
2	350 000	108 000	242 000	30	72 600
3	350 000	64 800	285 200	30	85 560
4	350 000	38 880	311 120	30	93 336
5	350 000	23 328	326 672	30	98 002

Итого: 374 998 руб.

19. 276 755 руб.
20. По приведенной ценности суммарной величины налога методы амортизации располагаются по выгодности для фирмы в следующем порядке: 1) метод двойного процента; 2) метод фиксированного процента; 3)правило суммы лет; 4) равномерная амортизация.
21. —
22. —

Глава 5

1. 9.62%; 10.11%.
2. Доходность вклад со сроком хранения 6 месяцев выше на 1.16%.
3. 7.92%.
4. −96.35%; −6.86%; 67.10%; 4.81%.
5. а) 7 638.65 руб.; б) 12 357.06 руб.; в) 10 000 руб.
6. а) 22 525.67 руб.; б) 34 689.09 руб.
7. 13 428.67 руб.
8. 13 467.26 руб.
9. 2 143.26 руб.
10. 6 757.65 руб.
11. 4 376.07 руб.
12. 6 748.71 руб.
13. 5 356 108.89 руб.
14. Указание. Решаем упражнение, приравнивая приведенные ценности вкладов и изъятий в момент первого вклада:

$$x = 2\times(1.025)^{-1.5\times4} + 3\times(1.025)^{-3\times4} = 3\,955.26 \text{ руб.}$$

15. Приравнивая суммы вкладов и изъятий, приведенные к моменту последнего изъятия денег, получаем уравнение:

$$x\times1.025^{3\times4} = 2\times1.025^{1.5\times4} + 3, \text{ откуда } x = 3\,955.26 \text{ руб.}$$

Сравнивая результат решения этого упражнения и упражнения 14, видим, что результат не зависит от того, к какому моменту приведены все суммы.

16. 154 854.92 руб.
17. 131 494.85 руб.
18. 285 356.07 руб.
19. 215 046.67 руб.
20. 161 822.43 руб.
21. 149 763.82 руб.
22. 166 322.21 руб.
23. а) 186 500.96 руб.; б) 214 476.11 руб.; в) 230 000.00 руб.
24. 48 918.09 руб.

Глава 6

1. а) 78 812.50 руб.; б) 314 447.31 руб.
2. б) 80 377.26 руб.; б) 321 509.03 руб.
3. 5 184.30 руб.
4. 5 730.37 руб.
5. 1 309 003.32 руб.
6. 458 364.00 руб.
7. 82 332 272.41 руб.
8. 15 641 918.32 руб.
9. 1 760 957.67 руб.
10. 136 289.48 руб.
11. 1 814 674.80 руб.
12. 26 243.39 руб.
13. 4 298.24 руб.
14. 916.43 руб.
15. 4 935.45 руб.
16. 5 087.03 руб.
17. 5 325.96 руб.
18. 1 971.48 руб.
19. 1 568.99 руб.
20. 1 602.28 руб.
21. 1 562.80 руб.
22. 1 539.95 руб.
23. 1 532.12 руб.
24. 854 610.84 руб.
25. 854 100.12 руб.
26. 35 247 952.91 руб.
27. Ежегодный взнос в страховой фонд — 1 092 610.47 руб.
    Ежегодный чистый доход — 3 907 389.53 руб.
    Чистый годовой доход от вложенной суммы составит — 7.81%.
28. а) 703 742.30 руб.; б) 706 319.39 руб.

Глава 7

1. 702 358.15 руб.
2. 694 982.89 руб.
3. 694 286.75 руб.
4. 244 261.69 руб.
5. 242 843.06 руб.
6. 242 347.73 руб.
7. 247 594.75 руб.
8. 247 025.33 руб.
9. 246 438.64 руб.
10. 2 400 000 руб.
11. 2 444 542.61 руб.
12. 2 355 465.88 руб.
13. 2 400 000 руб.
14. 2 291 977.57 руб.
15. 2 340 499.98 руб.
16. 2 385 031.25 руб.
17. Срочная уплата равна 104 298.06 руб. План погашения долга:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года (руб.) $S_t =$ $= S_{t-1} - d_{t-1}$	Срочная уплата R (руб.)	Сумма выплаченных в t-ом году процентов (руб.) $S_t \times 0.2$	Сумма погашения долга в t-ом году $d_t = R-$ $-S_t \times 0.2$ (руб.)
1	270 000.00	104 298.06	54 000.00	50 298.06
2	219 701.94	104 298.06	43 940.39	60 357.67
3	159 344.27	104 298.06	31 868.85	72 429.21
4	86 915.06	104 298.06	17 383.01	86 915.05

Итого: 270 000 руб.

18. Так как срочная уплата равна 65 000 руб., то срок погашения долга увеличился до 10 лет. План погашения долга:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года (руб.) $S_t = S_{t-1} - d_{t-1}$	Срочная уплата R (руб.)	Сумма выплаченных в t-ом году процентов (руб.) $S_t \times 0.2$	Сумма погашения долга в t-ом году $d_t = R - S_t \times 0.2$ (руб.)
1	270 000.00	65 000.00	54 000.00	11 000.00
2	259 000.00	65 000.00	51 800.00	13 200.00
3	245 800.00	65 000.00	49 160.00	15 840.00
4	229 960.00	65 000.00	45 992.00	19 008.00
5	210 952.00	65 000.00	42 190.40	22 809.60
6	188 142.40	65 000.00	37 628.48	27 371.52
7	160 770.88	65 000.00	32 154.18	32 845.82
8	127 925.06	65 000.00	25 585.01	39 414.99
9	88 510.07	65 000.00	17 702.01	47 297.99
10	41 212.08	49 454.50	8 242.42	41 212.08

Итого: 270 000 руб.

19. Срочная уплата равна 42 551.82 руб.План погашения долга:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года (руб.) $S_t = S_{t-1} - d_{t-1}$	Срочная уплата R (руб.)	Сумма выплаченных в t-м году процентов (руб.) $S_t \times 0.02$	Сумма погашения долга в t-м году $d_t = R - S_t \times 0.02$ (руб.)
1	450 000.00	42 551.82	9 000.00	33 551.82
2	416 448.18	42 551.82	8 328.96	34 222.85
3	382 225.33	42 551.82	7 644.51	34 907.31
4	347 318.01	42 551.82	6 946.36	35 605.46
5	311 712.56	42 551.82	6 234.25	36 317.57
6	275 394.99	42 551.82	5 507.90	37 043.92
7	238 351.07	42 551.82	4 767.02	37 784.80
8	200 566.27	42 551.82	4 011.33	38 540.49
9	162 025.78	42 551.82	3 240.52	39 311.30
10	122 714.48	42 551.82	2 454.29	40 097.53
11	82 616.95	42 551.82	1 652.34	40 899.48
12	41 717.47	42 551.82	834.35	41 717.47

Итого: 450 000 руб.

20. Так как срочная уплата равна 30 000 руб., то срок погашения долга увеличился до 19 месяцев. План погашения долга:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года (руб.) $S_t = S_{t-1} - d_{t-1}$	Срочная уплата R (руб.)	Сумма выплаченных в t-м году процентов (руб.) $S_t \times 0.02$	Сумма погашения долга в t-м году $d_t = R - S_t \times 0.02$ (руб.)
1	450 000.00	30 000.00	9 000.00	21 000.00
2	429 000.00	30 000.00	8 580.00	21 420.00
3	407 580.00	30 000.00	8 151.60	21 848.40
4	385 731.60	30 000.00	7 714.63	22 285.37
5	363 446.23	30 000.00	7 268.92	22 731.08
6	340 715.16	30 000.00	6 814.30	23 185.70
7	317 529.46	30 000.00	6 350.59	23 649.41
8	293 880.05	30 000.00	5 877.60	24 122.40
9	269 757.65	30 000.00	5 395.15	24 604.85
10	245 152.80	30 000.00	4 903.06	25 096.94
11	220 055.86	30 000.00	4 401.12	25 598.88
12	194 456.98	30 000.00	3 889.14	26 110.86
13	168 346.12	30 000.00	3 366.92	26 633.08
14	141 713.04	30 000.00	2 834.26	27 165.74
15	114 547.30	30 000.00	2 290.95	27 709.05
16	86 838.24	30 000.00	1 736.76	28 263.24
17	58 575.01	30 000.00	1 171.50	28 828.50
18	29 746.51	30 000.00	594.93	29 405.07
19	341.44	348.27	6.83	341.44

Итого: 450 000 руб.

21. 10.93%.

22. 6.40%.

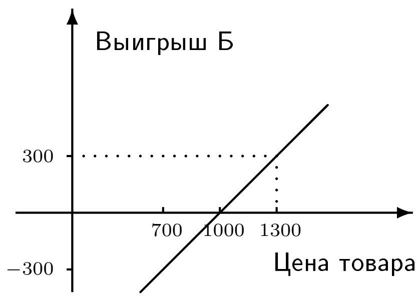
Глава 8

1. 135 043.35 руб.
2. 25 дней.
3. 66 565.22 руб.
4. 468 655.00 руб.
5. 299 353.69 руб.
6. 310 669.86 руб.
7. 253 105.93 руб.
8. 44 607 305.70 руб.
9. Приведенная ценность контракта с первым заводом — 11 746 211.47 руб., со вторым заводом — 14 474 520.52 руб. Следовательно, контракт с первым заводом более выгодный, но покупатель может предпочесть второй, так как поставка товара по нему производится немедленно.
10. Чтобы приведенные стоимости оборудования сравнялись, второй завод должен изменить срок кредита на 5.07 года (5 и 26 дней).
11. Приведенная ценность контракта с первой строительной организацией равна 16 821 121.37 руб., со второй — 16 730 756.94 руб. Следовательно, контракт со второй строительной организацией выгоднее.
12. Да. Так как приведенная ценность контракта с первой организацией теперь равна 16 569 579.68 руб., что меньше приведенной ценности контракта со второй организацией: 16 730 756.94 руб.
13. Да. Так как приведенная ценность контракта с первой организацией теперь равна 15 953 352.78 руб., что меньше приведенной ценности контракта со второй организацией: 16 730 756.94 руб.
14. Нет. Так как приведенная ценность контракта с первой организацией теперь равна 17 548 688.06 руб., что больше приведенной ценности контракта со второй организацией: 16 730 756.94 руб.
15. Приведенная ценность контракта с первой фирмой равна 6 882 913.02 руб., со второй — 8 086 976.41 руб. Следовательно, контракт со первой фирмой выгоднее.
16. Во всех случаях контракт со второй фирмой не станет выгоднее, так как приведенная ценность контракта со второй фирмой в случае а) равна 8 025 247.79 руб., в случае б) равна 7 912 380.99 руб., в случае в) равна 7 296 027.41 руб. и в случае г) равна 7 246 644.51 руб. Эти числа больше приведенной ценности контракта с первой фирмой: 6 882 913.02 руб.
17. а) 20%; б) 20.36 %; в) 20.23%.
18. а) 12.55 %; б) 12.83 %; в) 12.74 %.
19. а) 5.19 %; б) 6.25 %; в) 5.93 %.
20. 3 940.00 руб.
21. 3 895.00 руб.
22. 14.12%.

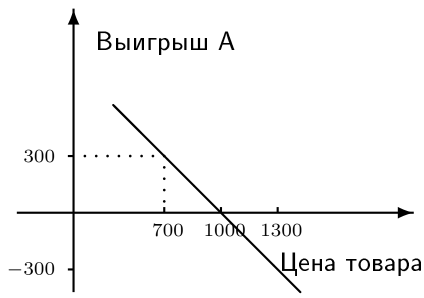
23. 7.38%.
24. 6.92%.
25. 7.07%.
26. 7.10%.
27. 5.81%.
28. Стоимость привлечения средств равна 6.03%. С увеличением дополнительных расходов стоимость привлечения средств увеличивается.
29. 10.51%.
30. 45.92%.
31. 45.31%.

Глава 9

1. 7 425 руб.
2. 106.75 руб. Продавец занимает 4 800 руб. под 8% годовых и покупает в настоящий момент 100 акций за 4 800 руб. Через 3 месяца продавец продает покупателю эти акции за 5 000 руб. Он отдаст долг, равный 4 893.25 руб. и получит доход, равный 106.75 руб.
3. Пусть у покупателя есть свои 100 акций (либо он получил их от другого лица, которое дало акции без процентов). Покупатель продает эти акции за 5 200 руб. и вкладывает полученные деньги в банк под 8% годовых. Через 3 месяца он получит 5 301.02 руб., затем, покупает у продавца 100 акций (если брал взаймы, то отдает их). Доход составит 301.02 руб.
4. а) в выигрыше Б, поскольку он купит акцию на 300 руб. дешевле; б) в выигрыше А, поскольку он продаст акцию на 300 руб. дороже:



а)



б)

5. 1 536.17 руб.
6. Продавец занимает 1 500 руб. под 10% годовых и покупает в настоящий момент акцию за 1 500 руб. Через 3 месяца он продает покупателю эту акцию за 1 550 руб. Продавец отдаст долг, равный 1 536.17 руб., и получит доход, равный 13.83 руб.
7. Пусть у покупателя есть своя акция (либо он получил ее без процентов от другого лица). Покупатель продает акцию за 1 500 руб. и вкладывает полученные под 10% годовых. Через 3 месяца он получит 1 536.17 руб., купит акцию (если брал взаймы, то отдаст ее). Доход составит 56.17 руб.
8. 892.65 руб.
9. 910.49 руб.
10. Продавец заключает форвардный контракт, обязуясь продать облигацию через 12 мес. Он занимает 1 000 руб. и покупает эту облигацию. Долг отдает частями через каждые 3 мес. Первый платеж составил 48.82 руб., второй — 47.67 руб., третий — 46.55 руб. Эти платежи продавец выплачивает из купонных денег (каждая купонная выплата составляет 50 руб). Четвертый платеж равен 856.95 руб., через год он будет равен 942.65 руб. Продавец получит от продажи облигации 900 руб. и 50 руб. купонных денег. Таким образом, он выплатит четвертый платеж и получит доход 7.35 руб.

11. Покупатель занимает облигацию, обязуясь вернуть ее через год и отдавать купонный доход. Покупатель продает облигацию за 1 000 руб. и заключает форвардный контракт, обязуясь купить облигацию за 880 руб. через 12 мес.; 1 000 руб. он вкладывает частями под 10 % годовых. Ему необходимо, чтобы первые 3 части составляли купонный доход, равный 50 руб. Первая сумма составит 48.82 руб., вторая — 47.67 руб., третья — 46.55 руб., четвертая — 856.95 руб. В течение 9 мес. покупатель возвращает купонные доходы, а в конце года четвертая сумма составит 942.65 руб. Покупатель выплатит 50 руб. купонного дохода, купит облигацию за 880 руб. и отдаст ее. Доход покупателя составит 12.65 руб.
12. Продавец заключает форвардный контракт, обязуясь продать облигацию через 12 мес. Он занимает 1 000 руб. и покупает эту облигацию. Долг отдает частями через каждые 3 мес. Первый платеж составит 48.82 руб., второй — 47.67 руб., третий — 45.93 руб. Эти платежи продавец выплачивает из купонных денег (каждая купонная выплата составляет 50 руб). Четвертый платеж равен 857.58 руб., через год он будет равен 960.49 руб. Продавец получит от продажи облигации 920 руб. и 50 руб. купонных денег. Таким образом, он выплатит четвертый платеж и получит доход, равный 9.51 руб.
13. Покупатель занимает облигацию, обязуясь вернуть ее через год и выплачивать по ней купонный доход. Покупатель продает облигацию за 1 000 руб. и заключает форвардный контракт, обязуясь купить облигацию за 900 руб. через 12 мес.; 1 000 руб. он вкладывает частями под 10% годовых на 6 мес., затем, еще на 6 мес. — под 12% годовых. Ему необходимо, чтобы первые 3 части составляли купонный доход, равный 50 руб. Первая сумма составила 48.82 руб., вторая — 47.67 руб., третья — 45.93 руб., четвертая — 857.58 руб. В течение 9 мес. покупатель возвращает купонные доходы, а в конце года четвертая сумма составит 960.49 руб. Покупатель выплатит 50 руб. купонного дохода, купит облигацию за 900 руб. и отдаст ее. Доход покупателя составит 10.49 руб.
14. 1 660.62 руб.
15. 140.35 руб.
16. Выгоднее первая операция — покупка форвардного контракта.
17. Продавец через месяц после заключения контракта покупает форвардный контракт за 140 руб. и продает акцию за 1 650 руб., вкладывает оставшиеся 1 510 руб. под 10% годовых. Получает через 3 мес. сумму, равную 1 534.18 руб. Получает акцию за цену поставки, равную 1 536.17 руб. и передает ее покупателю. Доход равен -1.99 руб. Таким образом, продавец остался в убытке — проведение арбитражной операции невозможно.
18. Покупатель продает форвардный контракт за 141 руб. и покупает акцию за 1 650 руб. Оставшиеся 1 509 руб. через 3 месяца будут иметь приведенную ценность, равную 1 533.16 руб. Цена поставки равна 1 536.17 руб. Доход покупателя составит 3.01 руб.
19. 68.12 руб.
20. Продажа не выгодна при рыночной цене облигации, меньшей или равной 981.88 руб.
21. Продавец покупает новый контракт за 60 руб. и продает через 4 мес. облигацию за 1 050 руб. Он владеет суммой 990 руб. Через год эта сумма будет равна 1 054.95

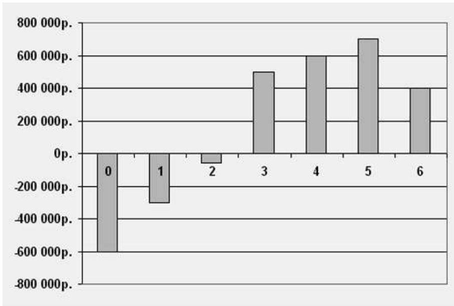
руб. Цена поставки облигации равна 892.65 руб. Продавец отдает покупателю облигацию, стоимостью 1 046.30 руб. Доход продавца составит 8.65 руб.

22. Покупатель, через 4 мес. после заключения, продает контракт за 80 руб. Покупает облигацию за 1 050 руб. Для этого он взял в долг под 10 % годовых сумму, равную 970 руб.Через год, после заключения контракта, он должен выплатить 1 033.63 руб. Покупатель получает купонные платежи каждые 3 мес. в течение года, равные 50 руб., их приведенная ценность в конце года равна 153.65 руб. Цена поставки облигации равна 892.65 руб. Доход покупателя равен 12.66 руб.
23. Доход инвестора равен 96 руб., доходность облигации равна 48%.
24. Доход инвестора равен 40 руб., доходность облигации равна 20%.
25. 48%.
26. Первый пакет состоит из 6 облигаций. Пять из них имеют номинальную цену 50 руб. и продаются в момент 0 с дисконтом 20% (за 40 руб.) и выкупаются в моменты $t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ года, соответственно. Шестая облигация имеет номинальную цену 1 050 руб, продается в момент 0 за 800 руб. (дисконт — 23.81%) и выкупается через 3 года.

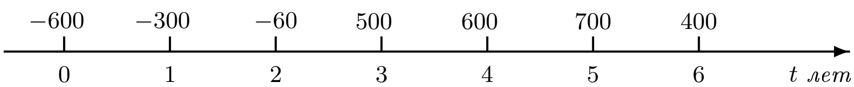
    Второй пакет состоит из 6 облигаций. Пять из них имеют номинальную цену 50 руб. и продаются в момент 0 с дисконтом 50% (за 25 руб.) и выкупаются в моменты $t = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ года, соответственно. Шестая облигация имеет номинальную цену 1 050 руб, продается в момент 0 за 875 руб. (дисконт — 16.67%) и выкупается через 3 года.
27. 30%. Доходность купонной облигации и пакетов бескупонных облигаций равны.
28. а) 12.34%; б) 3.94%.
29. 16.08%.
30. а) 22.36%; б) 18.65%.

Глава 10

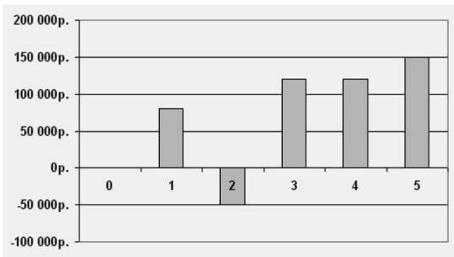
1. Диаграмма потока платежей имеет вид:



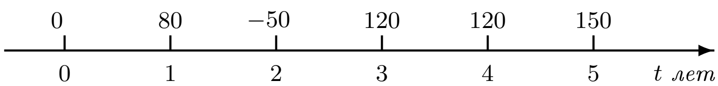
На оси времени поток платежей этого проекта будет изображен так:



2. Диаграмма потока платежей имеет вид:



На оси времени поток платежей этого проекта будет изображен так:

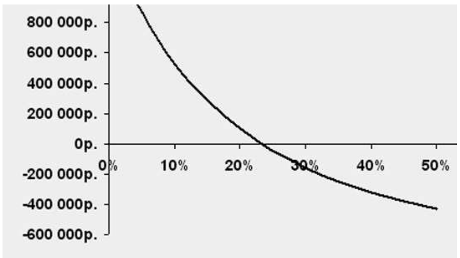


3. 38.19%.
4. 3.77 года.
5. 523 585.92 руб.

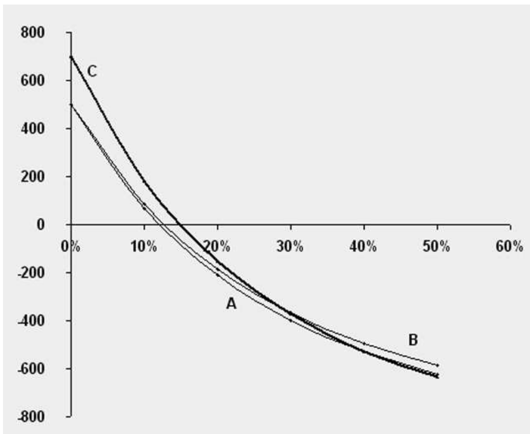
6. Значения $NPV(r)$ (округленные до целых) приведены в таблице:

r	0	10%	20%	30%	40%	50%
$NPV(r)$	1 240 000	523 586	102 311	-157 212	-323 219	432 702

График функции $NPV(r)$ имеет вид:



7. 4 214 616.96 руб.
8. Следует предпочесть проект C ($NPV_C(13\%) = 67$ руб.).
9. Графики функции $NPV(r)$ проектов имеют вид:



$IRR_A = 12.09\%$, $IRR_B = 11.94\%$, $IRR_C = 14.93\%$.

10. 56 465 руб.
11. На оси времени поток платежей этого проекта имеет вид:

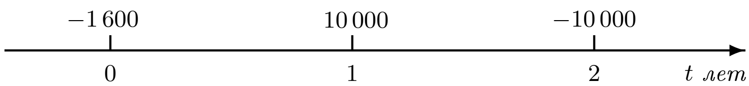
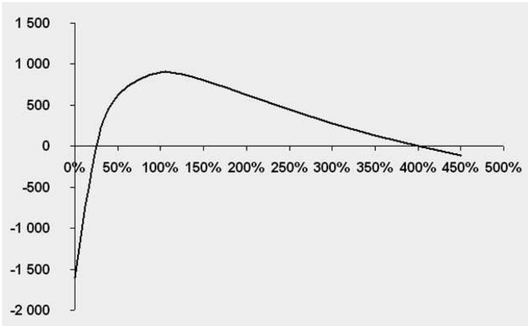


График функции $NPV(r)$ приведен ниже:



12. $IRR = 23.41\%$. Проект будет принят по критерию IRR в случае а) и отвергнут в случае б).
13. $IRR_A = 8.47\%$, $IRR_B = 6.06\%$ — следует предпочесть проект А.
14. $IRR = 15.24\%$. При $r \leq 15.24\%$ проект будет принят по критерию NPV и по критерию IRR. При $r > 15.24\%$ проект будет отвергнут по обоим этим критериям.
15. $IRR_A = 12.09\%$, $IRR_B = 12.70\%$.

    При $r < 12.09\%$ оба проекта можно принять по обоим критериям. По критерию IRR проект В предпочтительней проекта А. При $12.09\% \geq r \geq 12.70\%$ по критерию NPV и IRR следует отвергнуть проект А и можно принять проект В. При $r > 12.70\%$ оба проекта следует отвергнуть.
16. Измененный проект изображен на числовой оси:

-600	-315	-66.15	768.81	729.30	893.40	536.04	
0	1	2	3	4	5	6	t *лет*

17. 46.50%. По сравнению со средней нормой прибыли без учета инфляции (38.19%), произошло увеличение на 8.31%.
18. 3.55 года. По сравнению с периодом окупаемости без учета инфляции (3.77 года), произошло уменьшение на 0.21 года.
19. Бухгалтерская сумма затрат проекта 1г равна 78 000 руб., а проекта 2м — 80 000 руб. Следовательно, по этому критерию следует предпочесть проект 1г.
20. NPV проекта 1г равна 71 325 руб., а проекта 2м — 67 233 руб. Следовательно, по этому критерию следует предпочесть проект 2м.
21. NPV проектов 1г и 2м будут равны при ставке дисконтирования, равной 6%.
22. NPV проектов будут равны, если расходы по проекту 1г будут равна 6 127 руб. в месяц.
23. NPV проектов 1г и 2м будут равны, если оплата репетитора будет равна 1 061 руб. в час.

Приложение A
Финансовые вычисления в Excel

A.1. Основные сведения о Microsoft Excel

В наше время для выполнения финансовых вычислений широко используются персональные компьютеры, оснащенные специальным программным обеспечением. Наиболее широкое распространение в этой области получили так называемые *электронные таблицы*. Свое название электронные таблицы получили из-за того, что данные в них представляются в виде прямоугольных таблиц. В ячейках таблицы могут содержаться числа, строки, а также формулы, задающие зависимость значения, записанного в этой ячейке, от значений, записанных в других ячейках. Всюду далее вместо словосочетания „значение, записанное в ячейке“ мы будем кратко писать „значение ячейки“.

Работа с таблицей обычно идет в интерактивном режиме. Пользователь может просматривать, задавать и изменять значения ячеек. Изменение ячейки приводит к изменению зависящих от нее ячеек, что немедленно отражается на экране монитора. Электронные таблицы позволяют задавать различные форматы представления данных, осуществлять их поиск, сортировку и много других полезных операций обработки данных.

Наиболее широкое распространение в мире получила электронная таблица Excel, входящая в комплекс программ Microsoft Office фирмы Microsoft.

Первая версия Excel появилась в 1985 г. и довольно быстро завоевала большую популярность во всем мире (как и многие другие программные продукты фирмы Microsoft). В настоящее время в основном используются версии Excel 2003 и Excel 2007. Заметим, что все вычисления, приведенные в качестве примеров в этой книге, были выполнены в Excel 2003, но, как правило, должны корректно выполняться и в Excel 2007.

Помимо типовых операций по обработке таблиц, о которых упоминалось выше, Excel предоставляет пользователю свыше 800 встроенных и дополнительных функций, автоматизирующих организацию наиболее часто встречающихся вычислений в различных областях человеческой деятельности. Поэтому никто не может сказать, что знает абсолютно все возможности этой программы.

В этом приложении приведены только базовые сведения, необходимые, чтобы начать работать в Excel. Для тех, кто хочет подробнее освоить использование Excel при решении финансовых и бизнес-проблем, мы можем посоветовать литературу из списка, приведенного во введении.

В нашей книге обсуждается довольно много возможностей и функций Excel, но основное внимание уделено *финансовым функциям.* Финансовые функции входят в Пакет анализа (Analysis ToolPack). Эти функции по типу задач, решаемых с их помощью, можно условно разбить на следующие пять групп: расчет амортизационных платежей, анализ потока платежей, анализ эффективности инвестиционного проекта, анализ купонных облигаций, анализ краткосрочных ценных бумаг. Каждая из этих групп функций обсуждается в разделе, посвященном соответствующему типу задач.

Если на используемом читателем компьютере Excel установили в полном объеме, то Пакет анализа всегда доступен. Проверить это можно, открыв меню Сервис. В открывшемся списке должна присутствовать команда Анализ данных. В противном случае требуется установить пакет, запустив программу Microsoft Excel Setup.

У читателя не возникнет проблем с повторением решений примеров из этой книги, если использовать персональный компьютер, на котором установлен Excel 2003. Эта версия программы Excel является предпочтительной еще и потому, что обеспечивает в большей мере, чем предыдущие версии, защиту данных и их восстановление после сбоя в работе этой программы. Если на компьютере установлен Excel 2000, то некоторые разночтения возникнут только с названиями команд и встроенных функций. При использовании более ранних версий несоответствия будут даже в списке встроенных функций.

Мы рекомендуем следующий порядок закрепления навыков решения практических задач. Сначала повторите на своем компьютере имеющиеся в главе решения примеров и убедитесь, что получившиеся таблицы *полностью* совпадают с приведенными в книге. И только после этого приступайте к решению упражнений, имеющихся в конце каждого раздела.

А.2. Как вводить вещественные числа

Используемый всеми программами Microsoft Office (а следовательно, и программой Excel) разделитель между целой и дробной частью вещественного числа (а также и другие разделители, например разделитель элементов списка) задается на Панели управления (Control Panel) системы Windows в разделе Языки и стандарты (International) (вкладка Числа).

Для русской версии Windows десятичным разделителем по умолчанию является запятая, а в оригинальной версии — точка. И хотя в этой книге мы ориентируемся на русскую версию системы Windows, всюду в тексте книги *в качестве десятичного разделителя мы всегда используем точку*. Приведем два главных аргумента в пользу такого решения.

Во-первых, точка используется как десятичный разделитель во *всех* языках программирования, в частности в Visual Basic for Applications (VBA). VBA — это язык программирования, который может быть использован для расширения функциональных возможностей любого из приложений, входящих в состав Microsoft Office. Например, можно добавить собственную функцию к встроенным функциям Excel. О том, как это сделать, можно прочесть в приложении Б. В этом приложении кратко изложены сведения о языке программирования VBA и приемах программирования на нем.

Во-вторых, точка используется как десятичный разделитель в формате CSV (в этом формате запятая используется как разделитель между числами). Формат CSV (Comma Separated Values) является основным форматом, который используется при записи больших массивов однородной информации. Например, именно в таком виде доступна большая часть информации, распространяемой Организацией Экономического Сотрудничества и Развития (ОЭСР). Полезно также знать, что формат CSV является совместимым с Excel. Это означает, что информация из Excel может быть сохранена как CSV-файл и, наоборот, информация из CSV-файла может быть скопирована на рабочий лист.

Сразу успокоим тех читателей этой книги, которые не захотят или не смогут, по ряду причин, установить на своем компьютере в качестве десятичного разделителя точку. У них не возникнет никаких проблем с использованием файлов, в которых в качестве разделителя используется запятая. При загрузке таких файлов на компьютер читателя десятичный разделитель автоматически устанавливается таким, как на этом компьютере. Читателю необходимо только твердо знать, какой разделитель установлен на *его* компьютере, и именно этот разделитель использовать при вводе информации. Использование неправильного разделителя является ошибкой.

А.3. Ввод данных

Запустим программу Excel, и на экране появится окно Microsoft Excel с первым листом новой пустой *рабочей книги*. Эта рабочая книга, названная системой Книга1 (Book1), обычно содержит несколько пустых листов. Вставка в книгу дополнительных листов выполняется командой Лист (Sheet) из меню Вставка (Insert). Листы бывают пяти типов, но мы будем использовать пока только *рабочие листы*.

Рабочий лист

Рабочий лист имеет вид таблицы, в которой 256 столбцов и 65536 строк. У этой таблицы есть рамка для обозначения столбцов буквами, а строк — цифрами. В нижней части листа расположен ряд элементов управления, используя которые можно листать рабочую книгу.

Рабочий лист состоит из ячеек. Ячейка имеет *адрес*, который получается из имени столбца и номера строки, соответствующих этой ячейке[1]. И хотя Excel поддерживает еще одну форму адресов (для совместимости с другими электронными таблицами), мы даже не сообщим ее читателю, так как будем использовать только адреса типа *имя столбца — номер строки*. Например, адрес ячейки, в которой записан курс доллара на 1 декабря 2005 г., обозначается как C8[2].

Из прямоугольной группы соседних ячеек можно образовать единый объект, который в Excel называется *интервал*. Чтобы задать интервал, надо указать адреса его верхней левой и нижней правой ячеек, разделив их символом <:>. Например, запись A6:D11 задает интервал, в котором записана таблица с курсами пяти валют.

Значения, которые мы видим в ячейках таблицы на экране, называются *видимыми значениями*, а те значения, которые хранятся в ячейках и которые мы видим в строке формул, называются *фактическими значениями*. В вычислениях используются фактические значения. Важно понимать, что, *изменяя формат ячейки, мы изменяем видимое значение,*

---

[1]Для тех, кто любит программировать, сообщим, что ячейкам можно присваивать *имена* и использовать их для ссылки на ячейки.

[2]Все обсуждаемые в этом разделе примеры относятся к рабочему листу, изображенному на рис. 39.

	A	B	C	D	E
1	**Приложение А:**				
2	**Финансовые вычисления в Excel**				
3					
4	**Курсы валют ЦБ РФ**				
5					
6	**Валюта**	**01.09.2005**	**01.12.2005**	**Изменение**	
7	1 английский фунт	51.33	49.81	-2.96%	=(C7-B7)/B7
8	1 доллар США	28.46	28.81	1.23%	
9	1 евро	35.11	33.94	-3.33%	
10	1 швейц. Франк	22.69	21.92	-3.39%	
11	100 японских иен	25.68	24.03	-6.43%	
12					
13					
14	Временной интервал	91	=C6-B6		
15					
16	Текущая дата	27.02.2006	=СЕГОДНЯ()		
17	Дата через 100 дней	07.06.2006	=B16+100		
18					
19					

Рис. 39. Фрагмент рабочего листа с данными

но не изменяем фактическое значение ячейки. Например, изображение вещественного числа 0.15 поменяется на 15%, если задать в ячейке процентный формат. Само же хранимое в ячейке значение при этом не изменится.

Количество видимых цифр в ячейке зависит от ширины столбца. Если ширины столбца не хватает для изображения числа, то в зависимости от используемого формата произойдет либо округление числа до меньшего числа знаков, либо ячейка заполнится строкой из нескольких знаков <#> (*решетка*). В последнем случае, чтобы увидеть число, надо увеличить ширину столбца, что легко сделать, например, с помощью мыши.

Ввод констант

Первое, что следует освоить в Excel, — техника ввода данных. Обсуждению этого вопроса посвящено немало страниц в рекомендованной нами литературе. Прочтя там соответствующие разделы, вы узнаете, что существует много средств и приемов, которые позволяют по-разному организовать процесс ввода данных и сделать его удобным и быстрым. В нашей книге мы ограничимся описанием только простейших приемов, достаточных для решения задач, которые мы рассматриваем.

Ввод информации в ячейки рабочего листа выполняется следующим образом. Помещаем курсор мыши (жирный крест) в ячейку, отведенную под вводимую информацию, и делаем ее активной нажатием левой клавиши мыши. Теперь можно вводить данные прямо в эту ячейку (курсор находится в активной ячейке). Такой режим ввода называется *редактирование в ячейке.* Его удобно использовать, когда в ячейку вводится новая информация. Если до начала ввода дважды нажать левую клавишу мыши (или клавишу F2), то курсор переместится в *строку формул.* Этот режим ввода называется *редактирование в строке формул*, и его обычно используют, когда информация в ячейке корректируется.

После окончания ввода информации в ячейку программа пытается отнести ее к одному из трех типов: *текст*, *число* или *формула.* Вы сразу можете определить, что она восприняла введенную строку как текст, потому что текстовые данные автоматически выравниваются по левому краю ячейки. Если текст не помещается в ячейке, то он занимает место в соседних справа ячейках строки при условии, что соседняя ячейка пустая. Например, изображение текста из ячейки A4 (Курсы валют ЦБ РФ) занимает ячейки B4 и C4, так как они пустые.

Существует много форматов для записи чисел, но все они автоматически выравнивают изображение числа по правому краю ячейки[3]. В некоторых случаях формат введенного числа определяется автоматически по какому-нибудь признаку. Перечислим три таких признака, которые актуальны при вводе финансовой информации. Если после числа вводится буква <р>, то ячейке автоматически присваивается *денежный* формат (рубли). Если перед числом вводится знак <$>, то ячейка получает *долларовый* формат. Если введенное число заканчивается знаком <%>, то ячейка получает процентный формат. Например, ячейка B7 имеет числовой формат, а ячейки D7:D11 имеют процентный формат.

Если вы не знаете представления какого-либо числа в виде десятичной дроби, можно ввести его как простую дробь. Например, можно ввести 1 9/12 (пробел между 1 и 9!). В строке формул появится его изображение: 1.075. А что появится в самой ячейке, зависит от того, какой числовой формат в ней задан. Не забывайте при вводе простых дробей всегда указывать целую часть. Например, 0 3/5. Это связано с тем, что запись 3/5 будет воспринята как дата: 5 мая текущего года (числитель — номер дня,

[3] Если вы еще плохо знакомы с числовыми форматами, обязательно прочтите о них в литературе.

знаменатель — номер месяца).

При вводе процентов есть две возможности: указать десятичный эквивалент или ввести число со знаком <%>. В первом случае будет изображена десятичная дробь, во втором — использован *процентный формат* числа.

Будьте аккуратны с использованием знака *пробел*. Если случайно вставить его в строку, которая без пробела была бы числом, программа распознает эту строку как текст. Если сразу не заметите этого, то неверными будут результаты всех вычислений, в которых используется это „число“. Поэтому обращайте внимание на то, по какому краю ячейки происходит выравнивание: если по левому, то введен текст.

Текст и числа по существу являются константами, так как их значения могут быть изменены только в результате редактирования ячеек, в которых они записаны.

Формулы

Для записи вычисления значений, которые прямо или косвенно зависят от констант, служат *формулы*. Если программа устанавливает, что введенная строка является формулой, эта формула тут же вычисляется, а результат заносится в ячейку вместо формулы. Например, ячейка D7 содержит формулу: =(C7-B7)/B7, а выделенная серым фоном ячейка E7 — текст: =(C7-B7)/B7. Отличие содержимого этих ячеек только в пробеле, с которого начинается содержимое ячейки E7.

Формулу, которую содержит ячейка, вы можете всегда увидеть в *строке формул*, если сделаете соответствующую ей ячейку активной. Формула автоматически пересчитывается, как только меняется значение хотя бы одного из ее элементов.

Первым символом *формулы* должен быть знак <=>. В формуле можно использовать числа, адреса ячеек, интервалы, знаки операций и функции. Например, чтобы вычислить процент изменения курса евро с 1 сентября по 1 декабря 2005 г., в ячейку D9 введем формулу:

=(C9-B9)/B9

Сразу после введения этой формулы в ячейке, скорее всего, появится число -0.033324. Зададим в ячейке D9 процентный формат с двумя знаками после запятой, тогда появится другое, более привычное для процентов изображение: -3.33%.

В ряде случаев программа отказывается выполнять вычисления, заданные формулой. Вы сразу узнаете об этом, так как в ячейке появится странная строка из прописных букв, начинающаяся со знака <#>. В такой строке закодирован тип ошибки, которую вы сделали в формуле.

Копирование формул

Для ускорения ввода данных в ячейки используют операцию копирования. При копировании сначала необходимо выделить копируемый диапазон. Само копирование может выполняться с помощью команд Копировать и Вставка (из меню Правка) или посредством нажатия комбинаций клавиш, соответствующих этим командам: Ctrl + C, Ctrl + V. В меню Правка имеется также команда Специальная вставка, которая позволяет копировать только часть информации о копируемом объекте, например только форматы или только значения (без формул).

Имеется еще один способ копирования — *автозаполнение*. При таком способе копирования необходимо сначала установить курсор на маркер (в виде квадратика) в правом нижнем углу активной ячейки и нажать левую клавишу мыши. Далее, не отпуская нажатую клавишу, перемещаем курсор в правую нижнюю ячейку заполняемого диапазона.

Адреса, которые используются в формулах, бывают *относительные* и *абсолютные*. Абсолютный адрес содержит два знака $: перед именем столбца и перед номером строки. Перевод относительного адреса в абсолютный адрес (при наборе формулы) можно выполнить, нажав клавишуЁF4. Например, формулу в ячейке D7 можно переписать, используя абсолютные адреса:

$$=(\$C\$7-\$B\$7)/\$B\$7$$

На полученный в ячейке D7 результат это никак не повлияет. В данном случае такое переписывание является вредным и делать его не нужно, так как это помешает использовать копирование. Поясним это.

Абсолютные адреса используются прежде всего в формулах, которые будут копироваться, так как при копировании формул происходит замена ячеек, имеющих относительные адреса. Смещения в адресе при копировании равны смещениям между ячейками (между столбцами и строками). В том случае, если требуется отменить только одно смещение (по строкам или по столбцам), следует сделать соответствующую часть адреса абсолютной.

В нашем примере, набрав формулу в ячейке D7, мы можем скопировать ее в ячейки D8:D11. Так как при копировании требуется замена ячеек в формуле, следует при наборе формулы в ячейке D7 использовать относительные адреса. Например, ячейка D9 по отношению к ячейке D7 смещена на 0 столбцов 2 строки, поэтому при копировании формула в ячейке D9 примет вид: =(C9-B9)/B9.

A.4. Даты и время

Даты и время вводятся в ячейки таблицы как обычные числа. Это позволяет производить с ними вычисления и использовать их в качестве аргументов в формулах. Например, введя даты покупки и продажи некой ценной бумаги, можно легко определить, сколько дней вы ею владели.

Дата хранится как целое число, равное количеству дней, истекших с начальной даты — 1 января 1900 г. (число 1)[4].

Узнать, какое число соответствует определенной дате, можно с помощью функции ДАТА(год;месяц;день). Например, при использовании формулы

=ДАТА(98;7;27)

мы узнаем, что дню 27 июля 1998 г. соответствует число 36003, если, конечно, зададим в ячейке с формулой числовой формат.

Для ввода дат имеется несколько встроенных форматов. Например, дату 8 февраля 2006 года можно ввести следующими способами: 08.02.06, 8/фев/06, 8-фев. Обратите внимание на то, что в строке формул введенная дата будет иметь вид: 08.02.2006.

Ввести текущую дату в ячейку можно двумя способами: нажать клавиши Ctrl+<;> или ввести формулу: =СЕГОДНЯ(), как это сделано в ячейке B16 (см. рис. 39). Функция СЕГОДНЯ() вырабатывает числовое значение текущей (машинной) даты. При первом способе значение ячейки изменится только при ее редактировании, а при втором — значение ячейки будет меняться с изменением текущей даты. Эти изменения будут происходить при каждом открытии рабочей книги.

Время хранится как десятичная дробь, равная истекшей доле суток. Для ввода времени также имеется несколько форматов, но только с единственным разделителем <:>. Например, время 3 часа 10 минут дня можно ввести следующими способами: 15:10, 15:10:00, 3:10 PM, 15:10 pm. Ввести текущее время в ячейку можно, нажав клавиши Ctrl+Shift+<:>.

[4]В версии Excel для Macintosh начальной датой является 2 января 1904 г.

Среди встроенных форматов для дат и времени имеется *комбинированный* формат (Д.ММ.ГГ ч:мм), который позволяет одновременно вывести в ячейке дату и время. Вводить время в ячейку можно до и после даты.

Функция ТДАТА() вырабатывает числовое значение текущей даты (целая часть числа) и времени (дробная часть числа). Обновление значения будет происходить при пересчете рабочего листа и при каждом открытии рабочей книги.

Ряд из нескольких равноудаленных друг от друга значений дат, расположенных в строке или столбце, можно создать с помощью универсальной команды Прогрессия или Автозаполнение.

Дату и время можно использовать в формулах и функциях, как обычные числа. Приведем два примера такого использования.

В ячейках B6 и C6 содержатся две даты: 01.09.2005 и 01.12.2005 соответственно. В ячейке B14 с помощью формулы =C6-B6 подсчитано количество дней между этими датами — 91 (день).

В ячейке B16 хранится значение текущей даты, а в ячейке B17 с помощью формулы $=$ B16 $+$ 100 определяется дата, которая наступит через 100 дней после текущей.

Ряд специальных функций для дат и времени включены в Пакет анализа. Расскажем на примере только об одной из них.

Сроки вкладов часто задаются в месяцах и днях, например 3 месяца и 1 день. Для них не годится приведенная выше формула определения даты закрытия вклада. Проще всего в этой ситуации воспользоваться функцией

ДАТАМЕС(нач_дата;число_мес)

Эта функция определяет дату, отстоящую от начальной даты, заданной аргументом нач_дата, на число месяцев, заданное аргументом число_мес. Например, если срок хранения открываемого на текущую дату вклада — 3 месяца и 1 день, то срок его закрытия можно посчитать по формуле:

= ДАТАМЕС(B21;3) + 1

Мы кратко описали возможности Excel при работе с датами и временем. Для более детального ознакомления советуем прочесть соответствующие разделы в специальной литературе.

А.5. Использование функций

В Excel имеется огромное число встроенных функций, что позволяет упростить организацию различных типов вычислений, в том числе математические, статистические и логические. Одни функции, такие как СУММ, ФАКТР, являются эквивалентом длинных математических формул. Другие, такие как СЛЧИС, в виде формулы реализовать невозможно. Если среди встроенных функций отсутствует функция, реализующая какое-то необходимое вычисление, то всегда есть возможность создать пользовательскую функцию. О том, как это сделать, рассказывается в приложении Б.

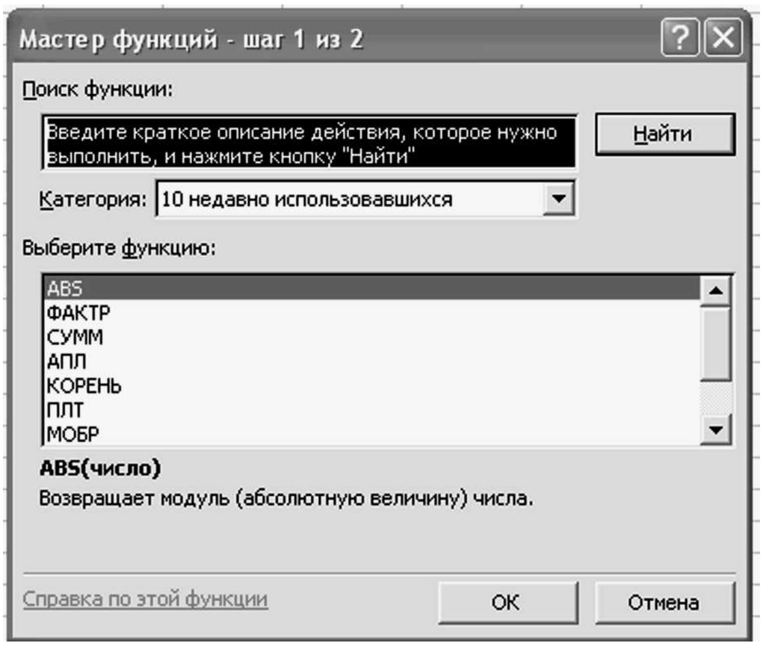


Рис. 40. Первое диалоговое окно Мастер функций

Использовать встроенные и дополнительные функции можно двумя способами: набирая обращения к ним непосредственно на клавиатуре или с помощью команды Функция из меню Вставка. Второй способ незаменим, если вы знаете имя функции, но не помните, какие у нее аргументы и(или) их порядок. Заметим, что многие финансовые функции имеют три и более параметров, поэтому для дополнительного контроля рекомендуем использовать второй способ, особенно если под рукой нет необходимой

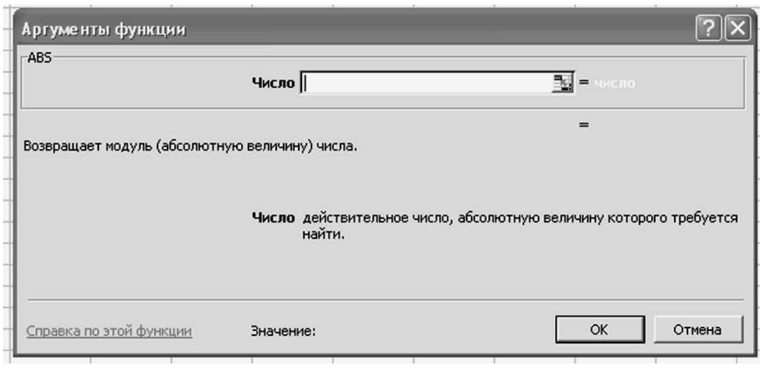


Рис. 41. Второе диалоговое окно Мастер функций

справочной литературы.

Выбрав команду Функция (из меню Вставка), вы увидите первое диалоговое окно Мастер функций (рис. 40).

Для быстрого поиска функции укажите сначала ее категорию в списке Категория функции. При выполнении примеров и упражнений из этой книги понадобится в основном категория Финансовые. Рекомендуем также использовать категорию 10 недавно использовавшихся, состав которой ясен из ее названия.

Далее найдите имя интересующей вас функции в упорядоченном по алфавиту списке Функция. К сожалению, имена многих финансовых функций (для большинства пользователей) трудно запоминаются (например, как расшифровать имя ДДОБ?), поэтому следует использовать информацию в нижней части окна. Там приведен синтаксис использования встроенной функции и краткая справка о назначении функции, выделенной курсором. С помощью кнопки Справка можно получить дополнительную информацию об этой функции. Для отказа от работы со встроенной функцией требуется нажать кнопку Отмена.

На рис. 40 выбрана функция ABS в категории 10 недавно использовавшихся. После нажатия кнопки OK (или клавиши Enter) в активной ячейке появится знак равенства и имя выбранной функции с пустыми скобками, а затем откроется второе диалоговое окно Мастер функций (рис. 41).

Это окно предназначено для ввода аргументов выбранной функции. Если значение аргумента задается посредством ссылки на ячейку (интервал), то справа от поля ввода появляется текущее значение аргумента (интервал значений). Значение функции при заданном наборе значений аргументов также появляется в отведенном для этого поле. Мы сознательно не приводим здесь имена полей диалоговых окон и места их расположения, так как они меняются от версии к версии программы Excel.

Для тех, кто любит использовать специальные комбинации клавиш, сообщим, что если вы помните имя нужной функции, но не помните ее аргументов или порядка их следования, нажмите клавиши Ctrl+A. Сразу откроется второе диалоговое окно Мастер функций.

А.6. Построение диаграмм

О том, как строить диаграммы, можно прочесть в любой литературе, посвященной Excel. В главе 9.5 мы также останавливаемся на этом вопросе. Однако диаграммы в Excel представляют настолько мощное средство, что имеются специальные книги, посвященные изложению только возможностей и приемов работы с диаграммами. В этом пункте приводятся только сведения о том, как размещать в области диаграммы дополнительный поясняющий текст. Эта полезная информация, к сожалению, отсутствует во многих популярных справочниках по Excel.

Выполняя пошаговое построение диаграммы, легко задать на ней заголовки и надписи данных. Однако следует знать, что, кроме заголовков элементов диаграммы, на ней можно размещать и любой другой текст. Допускается размещение текста в произвольном месте и выполнение с ним различных команд форматирования. Для размещения фрагмента текста требуется выполнить следующие действия:

1. Активируем какой-либо нетекстовый элемент диаграммы (например, область построения) и щелкаем клавишей мыши.
2. Вводим текст, который по мере ввода будет появляться в строке формул. Допускается редактирование этого текста помощью обычных процедур редактирования.
3. Нажимаем клавишу Ввод.

После выполнения перечисленных действий на диаграмме появится текст в рамке с маркерами. С помощью мыши можно перемещать и изменять размеры рамки. Для редактирования текста внутри рамки необходимо переместить на него курсор и сделать два одиночных щелчка левой кнопкой мыши. После окончания редактирования следует разместить курсор вне рамки текста и щелкнуть клавишей мыши. На рис. 42 приведены два графика: остаточная стоимость по годам при равномерной амортизации (РА) и при амортизации по правилу суммы лет (ПСЛ). Эти графики, как и все графики в этой книге, построены с помощью механизма создания диаграмм в Excel. Использованы данные из примеров в главе 4. Описанным выше способом рядом с графиками помещены название методов амортизации, которым они соответствуют (РА и ПСЛ).

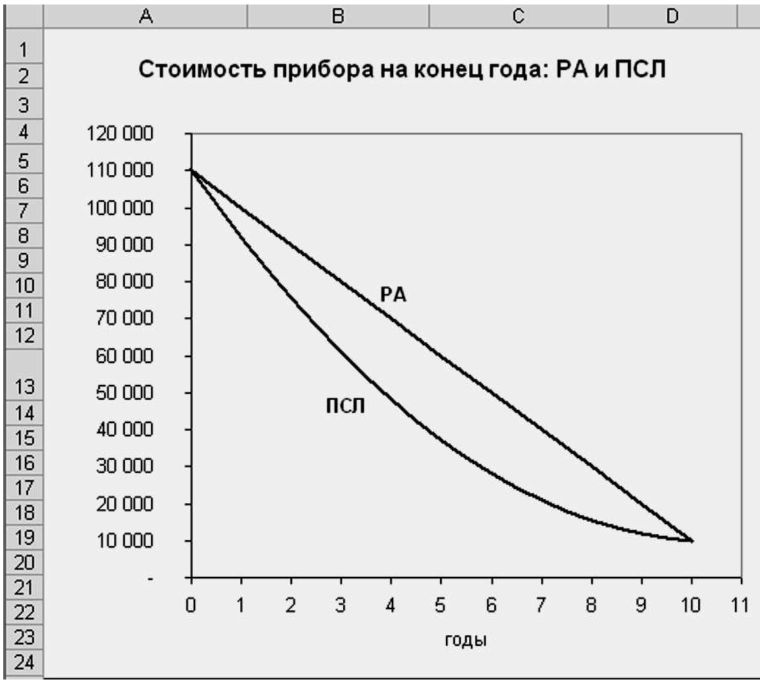


Рис. 42. Диаграмма со вставленным текстом

Приложение Б
Программирование на VBA

Язык программирования Visual Basic for Application в его современном виде сравнительно молод, хотя можно сказать, что он является одним из потомков языка программирования Basic, который был разработан в начале 60-х годов XX века. Для унификации языков макросов различных приложений и для поддержки современной технологии программирования фирма Microsoft создала специальную версию языка программирования Visual Basic и назвала ее Visual Basic for Application (сокращенно VBA). Язык программирования VBA включает в себя многие черты и свойства других популярных языков программирования, таких как Pascal, C и C++.

Язык VBA является встроенным средством программирования пакета MS Excel, позволяющим не только расширить стандартные библиотеки встроенных функций, но и создавать мощные профессиональные программные продукты, в частности, предназначенные для решения финансовых задач. В основном тексте книги мы уже привели несколько примеров функций, написанных на VBA. Для читателя, не знакомого с VBA, мы приводим в этом приложении некоторые начальные сведения о программировании на этом языке.

Строки приведенных листингов функций на VBA пронумерованы для удобства комментариев. Номер строки отделяется от строки на VBA двоеточием. Каждый листинг (без номеров строк!) представляет из себя законченный модуль. Его можно ввести в редакторе VBA (опустив номера строк и двоеточия!), откомпилировать и далее использовать при решении упражнений. Для этого достаточно иметь на компьютере программу Excel 2000 (или более позднюю версию).

Разбор приведенных в этом тексте примеров достаточен только для получения начального опыта программирования на VBA. Для дальнейшего изучения мы рекомендуем книги [6, 8, 10] из списка литературы, приведенного в конце введения.

Б.1. Редактор VBA

Как было отмечено выше, написанные пользователем процедуры и функции на VBA хранятся в самом xls-файле (рабочей книге). Вся информация, сохраненная в рабочей книге Excel, называется *проектом*. Функции, процедуры и любой другой возможный текст на VBA содержится в модулях, которые являются частью проекта. Проект может содержать один или несколько модулей. Каждый модуль может содержать несколько процедур или функций.

Инструментом для создания модулей, их просмотра и редактирования является редактор языка VBA. Проще всего можно запустить редактор, нажав комбинацию клавиш Alt + F11. Нажатие этих клавиш эквивалентно выполнению следующей последовательности действий:

1. Выбираем меню Сервис (Tools).
2. Выбираем подменю Макрос (Macros).
3. Выбираем команду Редактор Visual Basic (Visual Basic Editor).

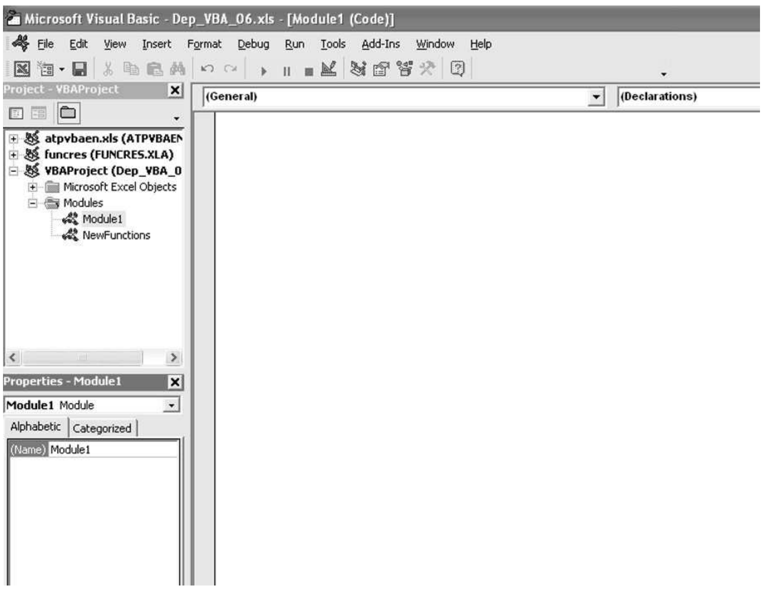


Рис. 43. Окно редактора VBA

Возможный вид окна редактора VBA приведен на рис. 43. Окно редактора на рисунке состоит из трех дочерних окон: окна проекта (Project), окна свойств (Properties) и окна программы (Code). В окне Project показана структура проекта. Окно Properties содержит свойства выделенного объекта. В примере на рисунке выделен объект Module, а его свойства состоят только из имени этого объекта — Module1. Окно Code обычно содержит программный текст того объекта, который выделен. В примере на рисунке модуль пока пустой.

Если рабочая книга, в которой будет создаваться функция, не содержит модулей или эту функцию требуется поместить в отдельный модуль, то необходимо создать новый модуль. Создание нового модуля в редакторе VBA осуществляется командой Module из меню Insert. При этом будет также открыто окно Code, соответствующее созданному модулю. Новый модуль получит имя Module с некоторым номером. Грамотное программирование предполагает, что пользователь поменяет это имя на содержательное. Ввод имени выполняется в поле Name окна Properties.

Б.2. Встроенные типы данных

Все данные в VBA, как и во всех популярных языках программирования, имеют *тип*, который определяет: формат представления объекта этого типа в памяти компьютера; область возможных значений для объектов этого типа; множество допустимых операций, которые можно выполнять с объектами этого типа. Типы данных делятся на простые (встроенные и невстроенные) и на структурные (или составные). Мы ограничимся рассмотрением только встроенных типов данных языка VBA, так как только такие типы данных используются при программировании примеров в этом тексте.

Язык программирования VBA содержит традиционные встроенные типы данных (числовые, строковые и логические) и свои уникальные. Полный перечень встроенных типов данных в языке VBA приведен в табл. Б.1. В этой таблице имеется основная информация о каждом типе: его назначение, область значений и требуемая память. За подробным описанием встроенных типов данных VBA и правилам работы с ними мы отсылаем читателя к специальной литературе по программированию на VBA. Приведем несколько пояснений, касающихся специфических типов данных этого языка, явного и неявного описания переменных.

О типе Currency. Это тип данных с фиксированной десятичной точкой (справа от нее всегда 4 значащие цифры), который редко встречается в языках программирования. Тип Currency используется, когда нужна особая точность, прежде всего в финансовых вычислениях. Напомним, что одним из главных значений английского *Currency* являются *наличные деньги*.

О типе Variant. В переменных этого типа можно хранить значения всех допустимых в VBA типов, включая Object и Array. Любая переменная, тип которой не указан явно, считается переменной типа Variant. Следует избегать неоправданного применения переменных этого типа, так как они требуют больше памяти для своего хранения и большинство действий с ними выполняется медленнее, чем с переменными других типов. Кроме того, использование переменных типа Variant затрудняет чтение программы (не понятна природа переменной), что, в свою очередь, может привести к трудно обнаруживаемой ошибке.

> **i** *Хотя в переменной типа* Variant *допустимо хранить значение типа* Date*, это может привести к ошибке, например, при вводе даты из ячейки листа в* Excel*. Аналогичная ошибка может возникнуть при записи значения переменной типа* Variant *в ячейку листа с форматом* Date*. Поэтому всегда задавайте для переменной, в которой будут храниться значения дат, тип* Date*.*

Об опции Option Explicit. Если в модуле имеется строка Option Explicit (обычно это первая строка), то все переменные этого модуля должны быть объявлены с использованием оператора Dim. Эта строка указывает компилятору, в каком режиме обрабатывать текущий модуль. Для того чтобы строка Option Explicit автоматически появлялась в каждом вновь создаваемом модуле, необходимо выполнить следующие действия:

1. В редакторе VBA раскрываем меню Tools.
2. Выбираем команду Options...
3. В диалоговом окне Options устанавливаем флажок: Require Variable Declaration.
4. Нажимаем кнопку OK.

О задании типа переменной. Явно тип переменной задается оператором Dim. Например, можно так объявить целую переменную i:

```
Dim i As Integer
```

Как дань старым версиям языка Basic, можно указать тип переменной неявно, добавляя в конце ее имени специальный символ[1]. Например, типу Integer соответствует символ %. Таких символов всего шесть, но мы не будем даже перечислять их, так как считаем такую возможность вредной в современном программировании. Отметим только, что не существует специальных символов для типов Byte, Boolean, Date и Object.

Наличие директивы Option Explicit в модуле запрещает неявное задание типа с помощью специальных символов, но не запрещает использовать специальные символы в операторе Dim:

```
Dim i%
```

Одним из основных положений грамотного программирования является требование явного задания типа всех переменных. В языке VBA явный тип переменной может быть указан в любом месте, но до ее первого использования. Попытка изменить явный или неявный тип переменной приведет к появлению сообщения об ошибке.

Каким бы способом ни задавался тип переменной, для ее размещения компилятор выделит необходимое место в памяти компьютера. Единицей измерения размера выделенного места служит байт.

> $\boxed{\mathbf{i}}$ *Байт (byte) — наименьшая адресуемая единица памяти, состоящая из 8 битов (двоичных разрядов). Служит единицей измерения памяти. Один килобайт (kilobyte) равен $1024 = 2^{10}$ байтам. Один мегабайт (megabyte) равен $1\,048\,576 = 2^{20}$ байтам. Один гигабайт (gigabyte) равен $1\,073\,741\,824 = 2^{30}$ байтам.*

[1]Когда-то это был единственный способ задания типа переменной в языке Basic.

Таблица Б.1. Встроенные типы данных языка VBA

Тип данных	Описание	Диапазон значений	Требуемая память
Boolean	Логическое значение	True (Истина) и False (Ложь)	2 байта
Byte	Положительное целое число	От 0 до 255	1 байт
Currency	Десятичное число с фиксированным количеством знаков после запятой	От −922337203685477.5808 до +922337203685477.5807	8 байтов
Date	Дата	1 января 100 г. – 31 декабря 9999 г. Время от 00:00:00 до 23:59:59	8 байтов
Decimal	Любое число	±79228162514264337493543950335 без десятичной точки; ±7.9228162514264337493543950335 (28 цифр после точки)	14 байтов
Double	Вещественное число (двойная точность)	От -1.79×10^{308} до -4.9×10^{-324} для отрицательных чисел и от 4.9×10^{-324} до 1.79×10^{308} для положительных чисел	8 байтов
Integer	Короткое целое число	От −32768 до 32767	2 байта
Long	Длинное целое число	От −2147483648 до 2147483647	4 байта
Object	Ссылка на объект		4 байта
Single	Вещественное число (обычная точность)	От -3.4×10^{38} до -1.4×10^{-45} для отрицательных чисел и от 1.4×10^{-45} до 3.4×10^{38} для положительных чисел	4 байта
String	Строка символов	До 2 миллионов символов	1 байт на символ
Variant	Может использоваться для хранения всех типов	Любое значение и константы: Null, Error, Empty, Nothing	16 байтов + 1 байт на каждый символ строки

Б.3. Функции, определяемые пользователем

В этом пункте на примерах из книги показано, как на языке VBA создать и использовать функции, которые выполняют необходимые для решения примера вычисления. В этом тексте речь идет только о создании функций, но разобранные приемы программирования годятся и для создания процедур.

Общая информация

Перед тем как перейти к рассмотрению примеров, приведем основные термины, связанные с понятием *функция* в VBA. *Процедура-функция* — наиболее общий термин для функции, которую создает пользователь. В приложении Excel можно использовать не любые процедуры-функции, а только те, которые удовлетворяют дополнительным требованиям. Такие процедуры-функции часто называют *нестандартными функциями (user defined functions)*. Все ограничения, которые накладываются на нестандартные функции, являются следствием требования, согласно которому эти функции *не должны менять среду* Excel. Это означает, что нестандартная функция не может, например, вставлять, удалять и форматировать данные рабочего листа. Как правило, нестандартная функция выполняет вычисления с данными, полученными через список аргументов или извлеченными из Excel.

> **i** *К сожалению, использование процедуры-функции, которая не является нестандартной, обычно не приводит к сообщению об ошибке ни в* VBA*, ни в* Excel*. Такая функция только не сможет вернуть результат.*

Далее речь пойдет только о нестандартных функциях, которые для краткости мы будем называть просто функциями. Основное назначение функции – вернуть одно-единственное значение-результат. При написании функции порой возникает соблазн дополнительно поменять еще значения некоторых из ее аргументов, что, в принципе, возможно. Требования грамотного программирования запрещают это делать. Поэтому при написании функции следует помнить, что текст функции должен содержать только вычисления, необходимые для получения ее результата. В качестве образца такой функции можно привести любую встроенную математическую функцию VBA, например функцию Sqr(N), которая возвращает квадратный корень из числа N.

Создаем функцию для амортизации по методу ССПП

В главе 4 был рассмотрен пример 4.9 на вычисление амортизации методом списания стоимости пропорционально объему продукции (сокращенно ССПП). Для этого метода амортизации не существует встроенной функции в Excel. Создадим такую функцию и дадим ей имя ССПП. Для удобства повторим условие примера.

Пример 4.9. *В декабре 2004 г. фирма приобрела и ввела в эксплуатацию технологическое оборудование, срок службы которого равен 8 годам. Стоимость оборудования составила 72 000 руб., в том числе НДС — 12 000 руб. Остаточная стоимость оборудования через 8 лет равна 0 руб. Предполагается, что за 8 лет на купленном оборудовании будет произведено 100 000 штук некоторого продукта. Определить амортизационные отчисления, которые будут начислены за период по методу ССПП, если за этот период было произведено 15 000 штук выпускаемого продукта.*

Так как функцию мы будем писать на языке VBA, то необходимо сначала переключиться в редактор этого языка. Напомним, что проще всего сделать это, нажав комбинацию клавиш Alt + F11.

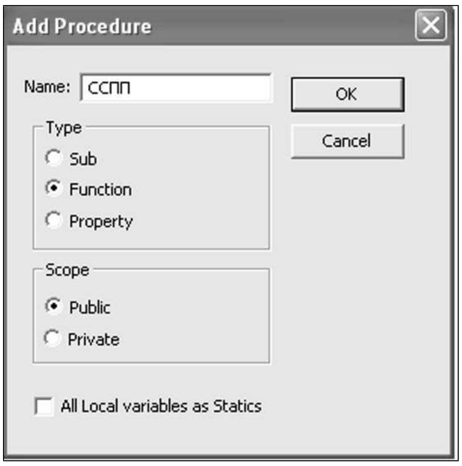


Рис. 44. Вставка функции ССПП в модуль

В открывшемся окне редактора VBA (рис. 44) выполняем следующие действия, чтобы создать новый модуль и заготовку для функции ССПП :

1. Выбираем меню Insert (Вставка).
2. Выбираем команду Module (Модуль).
3. Выбираем меню Insert (Вставка).
4. Выбираем команду Procedure (Процедура).
5. В диалоговом окне Add Procedure (Вставка процедуры) вводим имя функции (ССПП) и устанавливаем флажок: ⊙ Function.

В окне модуля, используя появившуюся заготовку функции, набираем следующий текст:

Листинг Б1

```
1: Function ССПП(НачСтоим, ОстСтоим, ОбщОбъем, ПериодОбъем)
2:          ССПП = (НачСтоим - ОстСтоим)*ПериодОбъем/ОбщОбъем
3: End Function
```

Обсудим текст листинга Б1. Напомним, что номера строк не являются частью программы. Они приведены, чтобы удобнее было комментировать конкретные строки.

Первая строка в листинге Б.1 — это объявление функции ССПП. У функции ССПП четыре аргумента, имена которых перечислены в круглых скобках. Имена аргументов подсказывают, какие значения должны быть подставлены при вызове этой функции: НачСтоим — начальная стоимость оборудования, ОстСтоим — остаточная стоимость оборудования, ОбщОбъем — общий объем производства, ПериодОбъем — объем производства за период.

Строка 2 — это оператор присваивания, в котором имени функции присваивается то значение, которое функция ССПП вырабатывает. При записи вычисления значения функции применяются обычные знаки арифметических операций.

В строке 3 функция ССПП заканчивается ключевыми словами End Function. При вызове функции после выполнения этого оператора происходит возврат к тому оператору, который вызвал функцию, а сам вызов заменяется значением функции.

Приведенный текст функции ССПП может не удовлетворить приверженцев строгого стиля программирования. Они отметят, что не указан тип аргументов и самой функции, не выполняется проверка значений аргументов функции на корректность. Поэтому далее мы создадим улучшенный вариант функции ССПП — функцию UPM. Однако заметим, что функция ССПП будет корректно вычислять значения амортизационных отчислений при правильно заданных значениях аргументов.

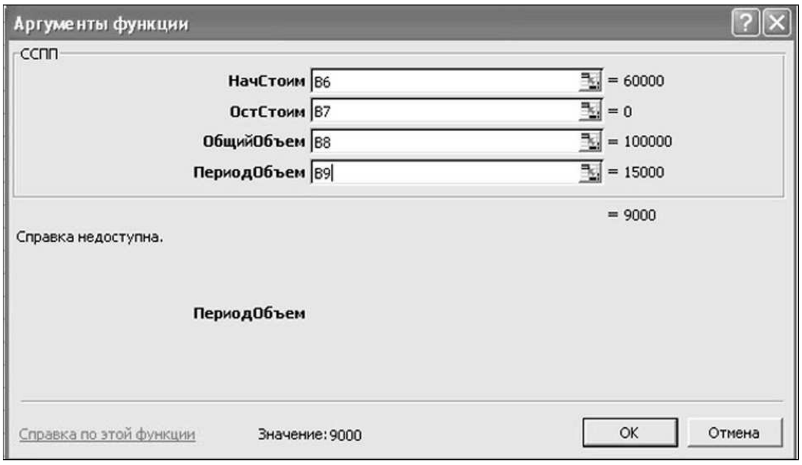


Рис. 45. Окно аргументов функции ССПП

Чтобы оттранслировать функцию ССПП и выйти из редактора VBA[2], выполняем следующие действия:

1. Выбираем меню Debug.
2. Выбираем команду CompileVBAProject.
3. Выбираем меню File.
4. Выбираем команду Close and Return … .

В результате этих действий функция ССПП включается в категорию функций Определенные пользователем (Defined User), а ее использование в формулах на рабочем листе ничем не отличается от использования встроенных функций программы Excel. На рис. 45 приведено диалоговое окно для задания аргументов функции ССПП. Фрагмент рабочего листа с решением примера 4.9 приведен на рис. 46. Значение амортизационного

[2]Выйти из редактора VBA можно также стандартным для Windows способом, нажав клавиши Alt + F4.

отчисления по методу ССПП в ячейке B13 вычислено с помощью функции ССПП.

Следует иметь в виду две технические детали, связанные с использованием функций из категории Определенные пользователем, о которых не следует забывать. Во-первых, *при открытии* xls-*файла, в котором имеется хотя бы одна функция пользователя, программа* Excel *выдает запрос об открытии доступа к этим функциям* (рис. 47). Функции пользователя будут доступны, если нажать кнопку Макросы не отключать. Пусть читателя не смущает тот факт, что в запросе речь идет о макросах. Программа Excel называет макросами и собственно макросы, которые мы в этой книге не рассматриваем, и функции, созданные пользователем.

Во-вторых, можно использовать функции пользователя, которые содержатся в другом xls-файле. Однако для доступа к некоторой функции пользователя *необходимо иметь открытым тот* xls-*файл, в котором эта функция содержится.* Имеется возможность создать специальную библиотеку из функций, созданных пользователем, но это потребует дополнительных навыков программирования, которые в этой книге не предполагаются.

	A	B	C	D	E
1	**Глава: Амортизация**				
2					
3					
4	**Пример 4.9 (использование функции ССПП)**				
5	*Данные:*				
6	Начальная стоимость объекта	60 000р.			
7	Остаточная стоимость объекта	0р.			
8	Общий объем производства (штук)	100000			
9	Объем производства за период	15000			
10	*Вопрос:*				
11	Сумма амортизационных отчислений за период?				
12	*Решение:*				
13	Аморт. отчисления =	**9000**	=ССПП(B6;B7;B8;B9)		
14					
15					
16					
17					

Рис. 46. Использование функции ССПП

Переписываем функцию ССПП

Как было отмечено ранее, приведенный текст функции ССПП (листинг Б1) может не удовлетворить приверженцев строгого стиля програм-

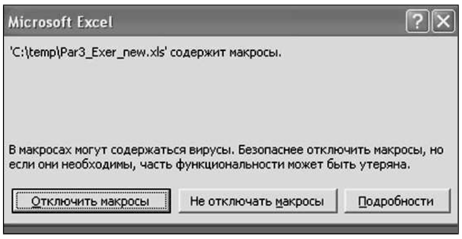


Рис. 47. Запрос Excel об открытии доступа к функциям

мирования. Поэтому мы написали улучшенный вариант этой функции, который назвали UPM:

Листинг Б2

```
 1: Function UPM(НачСтоим As Double, ОбщийОбъем As Double, _
 2:              ПериодОбъем As Double, _
 3:             Optional ОстСтоим As Double = 0) As Double
 4:  'возвращает амортизационные отчисления по методу ССПП
 5:  if (ПериодОбъем > ОбщийОбъем) Or (ОстСтоим > НачСтоим) Then
 6:      MsgBox ("Ошибка в аргументах функции UPM!")
 7:      End 'конец программы
 8:  End If
 9:  UPM = (НачСтоим - ОстСтоим) * ПериодОбъем / ОбщийОбъем
10: End Function
```

Обращаем внимание читателя на существенные отличия листинга Б2 от листинга Б1. Хотя функция UPM имеет те же аргументы, что и функция ССПП, но теперь указан тип каждого аргумента и самой функции. Заголовок функции UPM занимает три строки текста (используется символ продолжения строки).

Аргумент ОстСтоим объявлен *необязательным* — на это указывает ключевое слово Optional. Для него указано значение по умолчанию (0).

Строка 4 содержит комментарий, в котором описывается назначение функции. Признаком начала комментария служит знак апострофа ('). Комментарием считается текст от апострофа до конца строки. Строка 7 также содержит комментарий, который занимает часть строки.

В строках 5–8 записан условный оператор. В этом операторе частично проверяется корректность значений аргументов функции: объем продукции за период не должен превышать общий объем продукции, а остаточная стоимость оборудования не должна превышать его начальную стоимость. В случае обнаружения ошибки выдается сообщение об этом (рис. 48) и выполнение программы прерывается (строка 7).

Напомним еще раз читателю, что *во многих встроенных функциях* Excel *отсутствует проверка корректности значений аргументов этих функций.* Например, при вызове функции АПЛ можно указать отрицательное число в качестве времени эксплуатации. В этом случае значением функции будет отрицательное число, вычисленное по обычной формуле. А вот попытка сделать то же самое при амортизации по правилу суммы лет (функции АСЧ) приводит к сообщению об ошибке. Считаем, что автор программы должен сам решить, будет ли в его программе проверяться корректность аргументов, и если будет, то насколько исчерпывающе это будет делаться.

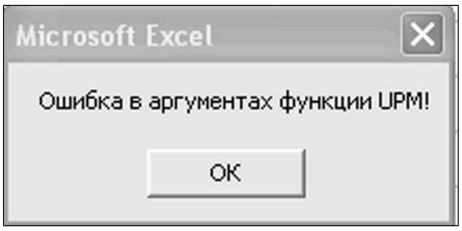


Рис. 48. Окно функции MsgBox в функции UPM

В строке 6 для выдачи сообщения об ошибке используется функция MsgBox. Эта функция выведет окно с сообщением, текст которого является единственным обязательным аргументом. Следует обратить внимание на то, что хотя MsgBox является функцией, результат, который она вырабатывает, чаще всего игнорируется.

Создаем функцию для амортизации по МУО

Среди встроенных финансовых функций отсутствует функция, которая вычисляет амортизационные отчисления по методу убывающего остатка (МУО). В отличие от амортизации по методу ССПП, применение которого предполагает очень простые вычисления, амортизация по МУО требует выполнения более громоздких вычислений. Напомним, что этот метод подробно разобран в п. 4.8. Там же имеется пример 4.10, в котором показано, как организовать вычисление амортизационных отчислений по МУО на рабочем листе Excel.

Прежде чем приступить к созданию функции, которая будет вырабатывать значения амортизационных отчислений по МУО, обсудим вычислительные особенности этого метода и выведем формулы, которые упростят его программную реализацию на *VBA*.

Процесс амортизации по МУО разбивается на два последовательных этапа: на первом этапе происходит амортизация по методу фиксированного процента (МФП), а на втором — равномерная амортизация (РА). При амортизации по МФП процент i, на который снижается стоимость за год, принимается равным a/n, где n — срок эксплуатации имущества, a — коэффициент ускорения. Переход от амортизации по МФП к РА происходит, когда балансовая стоимость имущества станет равной r процентам его начальной стоимости S (или rS).

Определим сначала, сколько *полных лет* будет происходить амортизация по МУО. Обозначим эту величину через t_1. Значение t_1 находим из неравенства:

$$S(1-i)^{t_1} \geq rS.$$

Решая это неравенство, находим максимальное целое значение t_1, при котором оно выполняется:

$$t_1 = \mathrm{Int}\left(\frac{\ln r}{\ln(1-i)}\right). \tag{Б.1}$$

В формуле (Б.1) мы через Int обозначили функцию, которая вычисляет целую часть аргумента. Мы намеренно выбрали обозначение, которое совпадает с именем встроенной функции VBA, вычисляющей именно это значение.

Далее следует вычислить, сколько месяцев в (t_1+1)-м году будет происходить амортизация по МФП. Амортизационные отчисления за весь (t_1+1)-й год составили бы величину, равную $iS(1-i)^{t_1}$. По российскому законодательству амортизационные отчисления в месяц (при любом методе амортизации) составляют 1/12 годовой суммы. Следовательно, амортизационные отчисления в месяц в (t_1+1)-м году d_1 можно вычислить по формуле:

$$d_1 = \frac{iS(1-i)^{t_1}}{12}\,. \tag{Б.2}$$

Обозначим через k количество месяцев в (t_1+1)-м году, когда будет происходить амортизация по МФП. Величину k находим из неравенства:

$$S(1-i)^{t_1} - d_1 k \geq rS.$$

Опуская часть выкладок, которые мы предлагаем самостоятельно выполнить читателю, получаем формулу для вычисления k:

$$k = \mathrm{Int}\left(\frac{12}{i}\left(1 - \frac{r}{(1-i)^{t_1}}\right)\right). \tag{Б.3}$$

Обозначим через t_2 длительность в месяцах второго этапа амортизации, во время которого будет происходить РА. Значение t_2 вычислим по формуле:

$$t_2 = 12(n - t_1) - k\,. \tag{Б.4}$$

Обозначим через d_2 амортизационные отчисления в месяц при РА. Сумма, которая должна быть амортизирована за t_2 месяцев, равна $S(1-i)^{t_1} - d_1k$, поэтому величина d_2 может быть вычислена по формуле:

$$d_2 = \frac{S(1-i)^{t_1} - d_1k}{t_2}\,. \tag{Б.5}$$

Осталось написать общую формулу для величины амортизационных отчислений при амортизации по МУО в году t, которую мы обозначим через D_t:

$$D_t = \begin{cases} iS(1-i)^{t-1}, & \text{если } t \le t_1; \\ kd_1 + (12-k)d_2, & \text{если } t = t_1 + 1; \\ 12d_2, & \text{если } t > t_1 + 1. \end{cases} \tag{Б.6}$$

Теперь нетрудно написать функцию MDDOB, которая вырабатывает величины амортизационных отчислений при амортизации по МУО в заданном году, используя выведенные выше формулы (листинг Б3). У функции пять аргументов: НачСтоим — начальная стоимость (в формулах она обозначена через S), Срок — срок эксплуатации (в формулах он обозначен через n), Период — год (в формулах он обозначен через t), Коэф — коэффициент ускорения (в формулах он обозначен через a), ПроцентРА — процент начальной стоимости для перехода к РА (в формулах он обозначен через r). Последние два аргумента являются необязательными, на что указывает ключевое слово Optional. По умолчанию им присваиваются значения, которые оговорены в НК РФ на момент написания этого текста.

В листинге Б3 в комментариях приведены дополнительно номера формул, которые соответствуют строкам программы. Логическая структура вычислений соответствует условной формуле (Б.6) — используются два вложенных условных оператора.

<u>**Листинг Б3**</u>

```
Function MDDOB(НачСтоим As Double, Срок As Integer, _
         Период As Integer, Optional Коэф As Integer = 2, _
        Optional ПроцентРА As Double = 0.2) As Double
'амортизационные отчисления за Период при МУО
 Dim i As Double
'i - величина фиксированного процента
 i = Коэф / Срок
 Dim t1 As Integer
't1 - срок применения МФП процента i (Б.1)
 t1 = Int(Log(ПроцентРА) / Log(1 - i))
 If Период <= t1 Then
     MDDOB = НачСтоим * i * (1 - i) ^ (Период - 1)
 Else
     Dim S As Double
     'стоимость после t периодов
     S = НачСтоим * (1 - i) ^ t1
     Dim d1 As Double
    'аморт. отчисл. в месяц при МФП в год t1+1 (Б.2)
     d1 = S * i / 12
     Dim k As Integer
     'число месяцев по МФП в год t1+1 (Б.3)
     k = Int(12 / i * (1 - ПроцентРА / (1 - i) ^ t1))
     Dim t2 As Integer
     'срок РА в месяцах (Б.4)
     t2 = 12 * (Срок - t1) - k
     Dim d2 As Double
     'аморт. отчисления в месяц при РА (Б.5)
     d2 = (S - d1 * k) / t2
     'итоговая формула
     If Период = t1 + 1 Then
       MDDOB = k * d1 + (12 - k) * d2
     Else
       MDDOB = 12 * d2
     End If
  End If
End Function
```

В листинге Б3 непривычным для некоторых читателей, возможно, окажется то, что переменные объявляются не в начале процедуры, а перед тем оператором, в котором эти переменные впервые используются. Язык программирования VBA это допускает. Делать так или нет — дело вкуса. Отметим два плюса такого стиля. Во-первых, такую программу удобнее читать и понимать. Во-вторых, в ряде случаев это полезно, если вычисления зависят от выполнения некоторых условий. Например, мы экономим на операциях выделения и освобождения памяти, если значение аргумента `Период` не больше величины `t1`, — переменные, которые объявлены ниже строки 12 (`d1`, `k` и т. д.), не понадобятся.

	A	B	C	D	E
1	**Глава: Амортизация**				
2					
3	**Пример 4.10 (МУО)**				
4					
5	*Данные:*				
6	Начальная стоимость объекта	60 000р.			
7	Срок эксплуатации	8			
8	Коэффициент	2			
9	Процент	20%			
10	*Вопрос:*				
11	Амортизационных отчисления за все периоды?				
12	*Решение:*				
13		**Период**	**Аморт. отчисления**	**Стоимость на конец периода**	
14		**0**	**0р.**	**60 000р.**	
15		**1**	**15 000р.**	**45 000р.**	
16		**2**	**11 250р.**	**33 750р.**	
17		**3**	**8 438р.**	**25 313р.**	
18		**4**	**6 328р.**	**18 984р.**	
19	**=MDDOB(B6;B7;B17)**	**5**	**4 746р.**	**14 238р.**	
20		**6**	**4 173р.**	**10 065р.**	
21		**7**	**5 032р.**	**5 032р.**	
22		**8**	**5 032р.**	**0р.**	
23					
24			**=D16-B17**		
25					
26					

Рис. 49. Использование функции MDDOB

В функции MDDOB не проводится проверка значений аргументов на корректность. Мы не включили такую проверку только по причине экономии места.

Функция MDDOB после трансляции включается в категорию функций `Определенные пользователем`, а ее использование ничем не отличается от использования встроенных функций. На рис. 49 приведен фрагмент рабочего листа с решением примера 4.10 (использовалась функция MDDOB).

Приложение B
Язык программирования AWK как инструмент поиска и обработки экономической информации

В процессе своей профессиональной деятельности экономистам и менеджерам порой приходится просматривать огромные массивы информации экономического характера с целью поиска необходимых сведений. Такой просмотр обычно выполняется неоднократно, так как, во-первых, не всегда с первого раза удается полностью формализовать задачу поиска, а, во-вторых, возникает желание осуществить дополнительную обработку найденной информации.

Довольно часто информация, которую приходится просматривать, представляет из себя один или несколько текстовых файлов в формате csv (Comma Separated Values). Например, именно в таком виде доступна большая часть информации, распространяемой Организацией Экономического Сотрудничества и Развития (ОЭСР)[1].

Приведем еще один пример использования csv-формата — на сайте РТС[2] различная информация, такая как список торгуемых инструментов, итоги торгов и архивы значений различных вариантов индекса РТС, может быть получена в виде csv-файлов. Иногда при этом требуется дополнительно выбрать, какой знак разделителя будет использован: запятая или точка с запятой.

Приведенные примеры должны убедить читателя, что задача автоматизации извлечения необходимой информации из текстовых csv-файлов

[1]Organization for Economic Co-operation and Development (OECD) — международная экономическая организация развитых стран, признающих принципы представительной демократии и свободной рыночной экономики. ОЭСР, начиная с января 1999 года, использует csv-формат.

[2]РТС — фондовая биржа „Российская Торговая Система“.

является весьма актуальной.

В качестве примера рассмотрим типичную задачу выборки информации из файла с экономическими показателями. Предположим, что мы хотим получить список российских компаний, которые вошли в список 100 лучших компаний в Восточной Европе в 2005 г. Информация о компаниях всех стран Европы, вошедших в этот список, доступна в виде csv-файла[3], который мы обозначим tab100.csv. Этот файл мы используем далее в качестве файла с данными, на котором мы иллюстрируем решение различных задач.

На первый взгляд кажется, что естественным подходом к решению поставленной задачи было бы использование Excel, так как формат csv является одним из базовых форматов для программы Excel. Это означает, что исходный файл может быть автоматически представлен в виде рабочей таблицы. Далее, пользуясь встроенными средствами поиска или визуально просматривая таблицу, мы сможем составить необходимый список. Однако при большом размере файла с информацией такой подход становится очень трудоемким. Размеры реальных файлов с информацией бывают настолько велики, что вручную трудно определить даже количество столбцов в соответствующей таблице. Имеется еще одно неудобство при использовании Excel — для наглядности информации необходимо дополнительно выполнить форматирование рабочей таблицы.

А теперь приведем программу на языке AWK, которая решит поставленную задачу — напечатает список компаний из России, которые вошли в список 100 лучших компаний в Восточной Европе в 2005 г.:

```
/Россия/ {print $3}
```

Нетрудно догадаться, что нужно изменить, чтобы получить аналогичный список компаний из другой страны, например Польши. В том случае, если нужен не список, а число компаний из России, попавших в список (их 39), то программа выглядит так:

```
/Россия/ {n=n+1}
     END {print n}
```

А выполнив программу

```
/Россия/&&/Банки/ {print $3}
```

[3] Читатели могут загрузить этот файл с сайта http://bukhvalov.som.pu.ru/fc.

мы узнаем, что среди компаний из России, вошедших в список, только один банк — Сбербанк.

Обычно подобные примеры производят впечатление на тех, кто впервые знакомится с языком AWK. Никак не будем сейчас комментировать эти программы, а отметим только, что их компактность связана с тем, что AWK *специально предназначен* для решения задач по обработке текстовых файлов. Одна из сильных сторон этого языка — умение работать со строками символов так же легко, как другие языки программирования работают с числами.

B.1. Немного истории

Первоначально язык программирования AWK был реализован в операционной системе UNIX. В этой системе имеются специальные программы — *программируемые фильтры*, которые читают входной поток (файлы-аргументы или стандартный входной поток), выполняют простые операции над ним и записывают результат в выходной поток. Работа этих программ (их также называют и командами) полностью программируется на специальном языке, своем для каждой программы.

Одним из таких программируемых фильтров и является AWK. Имя программы составлено из первых букв фамилий ее создателей: Ахо (Aho), Вайнбергер (Weinberger), Керниган (Kernighan). Программа AWK просматривает входной файл в поисках строк, которые соответствуют какому-либо из образцов, указанных в программе. Язык, на котором программируется поведение программы AWK, больше всего похож на язык программирования C: имеются аналогичные по форме записи условные операторы, циклы, переменные и функции пользователя. Однако принято считать, что язык имеет несколько источников, в частности язык SNOBOL4 и редактор sed. Сходство с языком C порождает некие трудности, но только для тех, кто привык программировать на C: некоторые конструкции в языке AWK отсутствуют, а некоторые отличаются от соответствующих конструкций языка C.

Самым лучшим руководством по программированию на языке AWK по-прежнему является учебник „The AWK Programming Language“, написанный авторами языка в 1988 году[4]. Эта замечательная книга является не только руководством по программированию на языке AWK, но преж-

[4] **A. Aho, B. Kernighan, P. Weinberger**. *The AWK Programming Language*. Addison-Wesley Publishing, 1988.

де всего учебником по технологии программирования, безотносительно к языку программирования.

Различная информация, связанная с программированием на языке AWK (в частности, тексты руководств), имеется в Интернете. Не будем приводить много ссылок, так как они, с одной стороны, быстро устаревают, а с другой стороны, быстро ищутся с помощью поисковых систем. Ограничимся только двумя ссылками, которые помогут найти много полезной информации, включая ссылки на интерпретаторы языка AWK, — на домашнюю страницу упомянутого выше учебника и домашнюю страницу Б. Кернигана:

http://plan9.bell-labs.com/cm/cs/awkbook/index.html
http://www.cs.princeton.edu/~bwk/

Приведем теперь краткую информацию только об интерпретаторах для системы Windows, так как именно эта операционная система установлена на подавляющем большинстве компьютеров в нашей стране.

Язык для команды AWK (его также стали называть AWK) был по достоинству оценен программистами, и в 90-е годы появились его интерпретаторы для MS DOS. Лучшим из них долгое время оставался интерпретатор mawk, созданный М. Бреннаном (M. Brennan) в рамках проекта GNU. Объем самого интерпретатора — 96K, описания языка и реализации — 13K. Вызов интерпретатора имеет вид:

```
mawk -f awkfile data1file data2file ...
```

Текст программы читается из файла awkfile, а данные — из файлов data1file, data2file и т. д. Результат работы программы выводится на экран. Имеется возможность переадресовать выходной поток в файл resfile обычным способом:

```
mawk -f awkfile datafile > resfile
```

При использовании интерпретатора mawk следует иметь в виду, что он имеет ряд ограничений. Перечислим только некоторые из них. Во-первых, нельзя использовать файлы с *длинными* именами. Во-вторых, нельзя обрабатывать файлы, размер которых больше 64K. В-третьих, имеются ограничения на некоторые другие параметры входного и выходного файлов.

Перечисленные выше ограничения были сняты в интерпретаторах, созданных позже. Среди них самыми популярными являются bmawk, gawk и nawk. В 2000 г. стал доступен интерпретатор AWK95, написанный самим Б. Керниганом. И хотя в нем были обнаружены ошибки, он больше всего приспособлен для работы под управлением системы Windows. Сами интерпретаторы и информация о них доступны в Интернете.

До начала сканирования первого входного файла интерпретатор проверяет программу на AWK на наличие в ней синтаксических ошибок. Если обнаруживается ошибка, то выдается диагностическое сообщение. Например, пусть в *пятой* строке программы случайно набрана не та скобка (вместо }, набрана)):

```
$3 < 0 {print $0)
```

Если использовался интерпретатор mawk, на экране появится сообщение:

```
mawk: line 5: extra ')'
mawk: line 5: missing '}' near end of file
```

Сообщения, которые будут выданы в этом случае другими интерпретаторами, или совпадают с приведенным, или будут похожи.

B.2. AWK для начинающих

Ниже приведено описание структуры программы на языке AWK и краткий обзор основных конструкций, которые используются при написании программ на этом языке. Приведены многочисленные примеры их использования.

Текстовые файлы

Как уже отмечалось выше, язык AWK предназначен для обработки текстовых файлов. В словаре по программированию и информатике приведено следующее определение *текстового файла*: файл, содержащий информацию в виде последовательности текстовых символов, разделенных символами новой строки, и не содержащий управляющих символов. Предполагается, что текстовые символы представляются в коде ASCII. Полезно знать, что в системах DOS и Windows признаком конца строки являются два идущих подряд *непечатаемых* символа: <LF> (ASCII код 10) и <CR> (ASCII код 13). В системе UNIX признаком конца строки является один символ: <LF>. По соглашению, заимствованному из языка C, символ перевода строки в программах на языке AWK изображается как \n.

Некоторые сложности могут возникнуть из-за различных способов кодировки русских букв. Для корректной работы интерпретаторов, упомянутых в предыдущем разделе, необходимо использовать *альтернативную* кодировку.

В настоящее время существуют два основных метода представления текстовых файлов. Первый из них основан на представлении каждой строки как отдельной записи, а файла — как потока таких записей. При таком представлении в операциях ввода-вывода единицей обмена становится строка. Именно это представление используется интерпретаторами языка AWK при вводе входного потока.

Второе представление текстовых файлов основано на реализации текстового файла как потока символов. При таком подходе строка выделяется появлением специального символа, обозначающего *конец строки* (ASCII код 13), в конце каждой строки. Именно так формируется большинство строк выходного потока программами на языке AWK.

Каждый приведенный в тексте пример является программой на языке AWK. Во всех нетривиальных случаях объяснено, в чем состоит результат работы такой программы. При изучении материала рекомендуется выполнить на компьютере все примеры-программы и убедиться, что результаты их работы полностью совпадают с теми, которые приведены в тексте.

В качестве входного файла с данными для программ обычно будет использоваться текстовый файл tab100.csv, который содержит информацию о 100 лучших (по капитализации) компаниях Восточной Европы в 2005 г. Каждая строка этого файла содержит следующую информацию о конкретной компании, вошедшей в рейтинг: место компании в рейтинге 2005 г.; место компании в рейтинге 2004 г.; название компании; название страны, в которой компания зарегистрирована; название отрасли, к которой принадлежит компания; капитализация компании (в миллионах долларов). Таким образом, каждая строка файла tab100.csv содержит шесть полей, которые разделены знаком *запятая*. Ниже приведен фрагмент этого файла, содержащий первые 10 строк:

```
1,1,Газпром,Россия,Нефть и газ,67942.9
2,3,Сургутнефтегаз,Россия,Нефть и газ,30102.2
3,4,ЛУКОЙЛ,Россия,Нефть и газ,28791.6
4,7,Мобильные ТелеСистемы,Россия,Услуги связи,14029.0
5,5,Норильский никель,Россия,Металлургия,12481.4
6,6,РАО "ЕЭС России",Россия,Электроэнергетика,12472.5
7,8,Сбербанк,Россия,Банки,11567.0
8,15,Cez,Чехия,Электроэнергетика,10444.5
9,11,Otp Bank,Венгрия,Банки,9557.1
10,9,Telekomunikacja Polska,Польша,Услуги связи,9436.1
```

Структура программы

Программа на языке AWK представляет собой набор строк (конструкций) вида:

```
BEGIN  {начальные действия}
шаблон {действие}
шаблон {действие}
.................
шаблон {действие}
END    {конечные действия}
```

После того как интерпретатор языка AWK проверит программу на отсутствие синтаксических ошибок, выполняются начальные действия, приписанные к шаблону BEGIN. Далее он последовательно читает все строки входного файла. В каждой строке ищутся *шаблоны* в том порядке, в котором они перечислены в программе. Если шаблон в строке обнаружен (обычно говорят и пишут, что шаблон *соответствует* строке), то со строкой выполняются действия, которые соответствуют этому шаблону. После чтения и обработки всех строк выполняются конечные действия, приписанные к шаблону END. Шаблоны BEGIN и END могут быть опущены.

В некоторых строках программы может быть опущен шаблон, а в некоторых — действие. Действие без шаблона выполняется с каждой строкой входного файла. Конструкция шаблон (без действия) печатает входящие строки, соответствующие данному шаблону.

В конструкции шаблон–действие операторы, содержащиеся внутри действия, обычно разделяют знаком *новая строка*. Однако несколько операторов могут быть расположены в одной строке, если они разделены знаком *точка с запятой*.

Открывающая фигурная скобка действия должна находиться в той же строке, что и предшествующий ей шаблон. Оставшаяся часть действия, включая закрывающую фигурную скобку, может располагаться на следующих строках.

Комментарии могут быть вставлены в конце любой строки. Комментарий начинается с символа # и заканчивается в конце строки.

Строки, состоящие из пробелов, игнорируются. Они могут быть вставлены до или после любой конструкции, чтобы улучшить *дизайн* программы. Пробелы и знаки табуляции могут быть поставлены вокруг операторов и операндов с той же целью.

Поля

Каждая входная строка автоматически разбивается на поля — последовательности символов без пробелов, разделенные пробелами и/или символами табуляции.

Разделитель полей контролируется встроенной переменной FS. По умолчанию предполагается, что поля разделяются произвольным числом пробелов или символов табуляции. Присваивание переменной FS любого символа, отличного от пробела, делает этот символ разделителем полей. Например, в файле tab100.csv в качестве разделителя используется запятая, поэтому в начале многих программ в этом тексте потребуется менять умолчательное значение переменной FS:

```
BEGIN { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
```

Входные строки читаются по одной и сохраняются в переменной $0. Поля текущей строки от начала к концу присваиваются встроенным переменным $1, $2,...,$NF, где NF — *встроенная* переменная, значение которой устанавливается равным числу полей в строке. Присваивание переменной $0 какого-либо значения приводит к перевычислению полей и переменной NF. Ниже приведен текст программы, назначение которой объяснено в комментарии:

```
BEGIN { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
      { print $3, $6 }
# печать названия компании и ее капитализации
```

Обратите внимание на разницу между NF — числом полей и $NF — последним полем текущей строки. Только встроенные переменные, в которых хранятся значения полей текущей строки, начинаются с символа $, остальные переменные (встроенные или введенные автором программы) такого префикса иметь не могут.

Обратим внимание читателя на то, что язык AWK *различает заглавные и строчные буквы*. Например, если набрать имя переменной FS как fs или Fs, то интерпретатор интерпретирует ее как переменную, введенную автором программы, и инициализирует ее нулем, что приведет к трудно обнаруживаемой ошибке вычисления.

Длинная конструкция может быть расположена в нескольких строках. Разрыв конструкции возможен на месте любого пробела:

```
BEGIN { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
      {print $3,# название компании
             $6 # ее капитализация
      }
```

Переменные и арифметические действия с ними

В программах на языке AWK одновременно с построчным сканированием данных можно организовать различные вычисления с этими данными. Типичный пример таких вычислений — подсчет суммы чисел, записанных в некотором поле. Следующая программа вычисляет и печатает сумму чисел в шестом поле (общая капитализация компаний, вошедших в список):

```
BEGIN { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
      {s = s + $6}
  END {print s}
```

Как и в языке C, в языке AWK имеются сокращенные формы записи арифметических операторов, поэтому последний пример может быть переписан короче:

```
BEGIN { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
      {s += $6}
  END {print s}
```

Этот пример показывает, как используются переменные в программах. В языке AWK есть только два базовых типа данных: числа и строки символов. Способы записи числовых констант и набор операций с числами такие же, как в популярных языках программирования. Что же касается работы со строками, то именно в ней ядро языка.

На самом деле основных типов данных три: имеется еще *строково-числовой* тип. Данные этого типа имеют одновременно и числовые, и строковые значения. Какой именно тип использовать при выполнении операций, определяется контекстом. Переменные, не являющиеся встроенными, определяются самим фактом их использования. По умолчанию они инициируются строково-числовым значением null, числовым значением — 0 и строковым значением — ""(пустая строка).

В качестве еще одного примера выполнения арифметических операций приведем программу, которая определяет число строк, слов и символов во входном потоке (встроенная функция length вычисляет длину строки):

```
     {chars += length($0) + 1 # учитываем символ cr
      words += NF}
END {print NR, words, chars}
```

Тип выражения определяется контекстом. Преобразование типов, когда это нужно, выполняется автоматически. Явного преобразования типов можно добиться конкатенацией с пустой строкой или прибавлением 0. Важно понять, что именно здесь кроются основные сложности языка AWK, и, по возможности, избегать неявных преобразований типов.

Шаблоны

Предположим, что требуется напечатать информацию о российских компаниях, вошедших в список. В файле tab100.csv отличительной особенностью строк, в которых записана информация о таких компаниях, является то, что они содержат подстроку Россия, поэтому программа состоит из одного шаблона:

```
/Россия/
```

При выполнении этой программы для каждой строки, которая содержит подстроку Россия, будет выполняться ее печать, так как именно это действие выполняется тогда, когда при задании шаблона опущено соответствующее ему действие. Заметим, что в этой программе не имеет значения, какой разделитель полей используется.

Наиболее типичное использование шаблонов в программах на языке AWK сводится к задачам простой проверки данных. Большинство из них немногим сложнее, чем поиск строк, не удовлетворяющих какому-либо критерию. Для таких программ отсутствие выходного потока свидетельствует о том, что все данные удовлетворяют указанному критерию. Например, в следующей программе, состоящей из двух шаблонов, проверяется, что в файле tab100.csv в первом и втором полях нет отрицательных чисел:

```
BEGIN  { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
$1 <= 0
$2 <  0
```

Можно сделать выходной поток более информативным, напечатав предупреждающие сообщения при обнаружении ошибки в данных:

```
BEGIN   { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
$1 <= 0 {print "В строке ", NR, " ошибка в 1-м поле: ", $1}
$2 <  0 {print "В строке ", NR, " ошибка во 2-м поле: ", $2}
```

В этой программе используется встроенная переменная NR, в которой хранится порядковый номер текущей входной строки. В том случае, если входной поток состоит из нескольких файлов, осуществляется сквозная нумерация строк.

В ряде случаев удобно использовать составные шаблоны. *Составной шаблон* — это выражение, которое образуется из других шаблонов с помощью скобок и логических операторов. Составной шаблон соответствует текущей входной строке, если выражение, его задающее, имеет значение true. В следующей программе составной шаблон содержит оператор && (AND):

```
/Россия/ && /Банки/
```

Эта программа выделит в файле tab100.csv строки, которые соответствуют банкам из России. Такая строка будет всего одна:

```
7,8,Сбербанк,Россия,Банки,11567.0
```

Приведем еще пример программы, состоящей из одного составного шаблона:

```
BEGIN   { FS = "," }
# разделитель полей - запятая
($4 == "Польша"||$4 == "Чехия") && $6 >= 5000
```

Эта программа выделяет в файле tab100.csv строки, которые соответствуют компаниям из Польши и Чехии, капитализация которых не меньше 5 000:

```
8,15,Cez,Чехия,Электроэнергетика,10444.5
10,9,Telekomunikacja Polska,Польша,Услуги связи,9436.1
11,,PKO Bank,Польша,Банки,8796.9
14,10,Pekao,Польша,Банки,7316.6
17,20,PKNorlen,Польша,Нефть и газ,6171.6
18,17,Cesky Telecom,Чехия,Услуги связи,6056.4
20,14,Komercni Banka,Чехия,Банки,5429.2
```

Имеется еще один тип шаблона — *интервальный шаблон*, который задается двумя шаблонами, разделенными запятой. Интервальный шаблон соответствует интервалу входных строк, начиная со строки, соответствующей первому шаблону, и кончая ближайшей строкой, соответствующей второму шаблону. Сопоставление шаблона начинается всякий раз, когда первый шаблон диапазона соответствует входящей строке. Заметим, что этот интервал строк может состоять из одной строки, если входная строка соответствует обоим шаблонам, задающим интервал. Например, для файла tab100.scv шаблон

```
/Латвия/, /Польша/
```

соответствует трем строкам, начиная с 87-й строки, содержащей Латвия, до ближайшей строки, содержащей Польша:

```
87,86,Latvijas Gaze,Латвия,Нефть и газ,476.7
88,,РИТЭК,Россия,Нефть и газ,468.8
89,,Cersanit,Польша,Строительство.Строительные материалы,465.5
```

Если ни одной строки, соответствующей второму шаблону, далее не найдено, то все последующие строки считаются соответствующими данному шаблону диапазона. Например, программа, состоящая из интервального шаблона

```
/Польша/, /Молдавия/
```

выведет все строки файла tab100.csv, начиная с десятой.

В следующем примере используются встроенные переменные, которые ранее не встречались:

FNR — номер текущей строки из текущего входного файла,

FILENAME — имя текущего входного файла.

Программа:

```
FNR == 1, FNR == 3 {print FILENAME  ":" $0}
```

печатает первые три строки каждого входного файла с именем файла перед каждой из них:

```
tab100.csv:1,1,Газпром,Россия,Нефть и газ,67942.9
tab100.csv:2,3,Сургутнефтегаз,Россия,Нефть и газ,30102.2
tab100.csv:3,4,ЛУКОЙЛ,Россия,Нефть и газ,28791.6
```

Заметим, что последняя программа могла бы быть написана и короче:

```
FNR < = 3 {print FILENAME ":" $0}
```

Следует помнить, что интервальный шаблон не может быть частью другого шаблона.

Ассоциативные массивы

Одной из стандартных задач обработки данных является получение суммарных и/или средних значений для пар имя-значение. В качестве примера рассмотрим задачу получения общей капитализации компаний, вошедших в список, по странам. Это означает, что требуется для каждого типа четвертого поля получить сумму значений шестого поля: Язык AWK предлагает изящное решение этой задачи с помощью *ассоциативных массивов*:

```
BEGIN { FS = ",";}
# разделитель полей - запятая
      {sum[$4] += $6}
  END {for (name in sum) print name, sum[name]}
```

Обычно мы представляем себе индекс массива как целое число, а в языке AWK в качестве индекса можно использовать любое значение. В приведенной выше программе каждое имя страны ($4) служит индексом в массиве sum. В шаблоне END применена специальная форма цикла for для перебора всех индексов массива sum. Такой цикл устанавливает значение переменной name, равным каждому значению индекса поочередно. Однако порядок появления индексов непредсказуем, поэтому может возникнуть необходимость в сортировке. Результатом выполнения последней программы будут следующие строки:

```
Словакия 2290.2
Чехия 28444.6
Латвия 476.7
Румыния 10596.5
Эстония 7056
Литва 2997.8
Польша 58155.7
Венгрия 28486.6
Хорватия 1091.4
Россия 234416
Словения 3880.3
```

Еще немного полезных программ

Хотя на языке AWK можно писать сложные программы, имеется много полезных программ, которые не сложнее уже приведенных в качестве примеров. Ниже дана небольшая коллекция коротких программ, которую, мы надеемся, читатель дополнит потом своими примерами. Заметим, что не все из приведенных ниже программ выполняют осмысленные действия для файла tab100.scv.

1. Печать общего числа введенных строк:

```
END {print NR}
```

2. Печать пятой введенной строки:

```
NR==5 # обратите внимание на 2 знака равенства!
```

3. Печать строк, у которых число полей больше 6:

```
NF > 6 # наличие таких строк в файле tab100.scv
       # означает ошибку в данных
```

4. Печать пронумерованных строк:

```
{print NR ": " $0}
```

5. Печать строк без последнего поля:

```
{$NF=" "; print}
```

6. Печать строк, длина которых больше 40 символов:

```
length($0) > 40
```

7. Печать числа строк, содержащих Россия:

```
/Россия/ {nlines=nlines+1}
    END  {print nlines}
```

8. Печать суммы всех полей для каждой строки:

```
{sum=0
 for (i=1; i <= NF; i=i+1) sum=sum+$i
 print sum
}
```

Учет нерегулярных строк

В разобранных ранее примерах программ на языке AWK в качестве файла с данными мы использовали файл tab100.csv. Этот файл содержит реальные данные о 100 крупнейших (по капитализации) компаниях Восточной Европы в 2005 г. Но до настоящего момента мы скрывали от читателя следующий факт: для того чтобы программы на языке AWK были более короткими, мы немного *изменили* этот файл. Дело в том, что подобные файлы обычно содержат начальные строки, в которых поясняется, какая информация содержится в файле, и строку с названиями столбцов. В исходном файле tab100.csv такая информация занимала две первые строки:

```
100 крупнейших компаний Восточной Европы
Место 2005,Место 2004,Компания,Страна,Сектор,Рыночная капитал. $млн
```

Есть два способа учета *нерегулярных* строк в начале файла: создать копию файла без этих строк или учитывать их наличие в программе. Для реализации первого способа проще всего выполнить программу, подобную той, что была использована нами для удаления первых двух строк из файла tab100.csv:

```
NR>2
```

Возможны случаи, когда удаление нерегулярных строк является нежелательным. Поэтому покажем, как учитывать их наличие в файле. Вернемся к ранее разобранному примеру: формирование списка компаний с указанием их капитализации. Теперь в программу вставлена дополнительная пара шаблон-действие, которая осуществляет пропуск первых двух строк файла:

```
BEGIN { FS = ","; title = 2 }
# разделитель полей - запятая
NR <= title {next}
      { print $3, $6 }
# печать названия компании и ее капитализации
```

В программе используется оператор next, действие которого заключается в переходе к вводу следующей строки файла с данными.

Заметим, что нерегулярные строки могут располагаться не только в начале, но и в конце файла и даже среди регулярных строк. Поэтому прежде, чем начать обработку нового файла с данными, следует ознакомиться с его структурой и продумать способы учета нерегулярных строк. Обычно сделать это не на много сложнее, чем в приведенном примере.

Приложение Г
Финансовые пирамиды

Многие прекрасно помнят, а те, кто мал был тогда, слышали, как в начале 1990-х большая часть взрослого населения России добровольно отдавала свои деньги компаниям, которые по сути своей являлись *финансовыми пирамидами* (ФП). В последние два года история во многом повторяется — появилось много новых финансовых пирамид. Ущерб от них еще только предстоит оценить, но не вызывает никакого сомнения, что он огромен. Так, в первом полугодии 2008 г. было закрыто 6 пирамид. Только в одной из них, компании „Гарант инвест“, было 245 000 вкладчиков. Эта компания имела порядка 40 филиалов в различных российских городах. По предварительным данным, вкладчики потеряли более 360 млн руб.

Теперь большинство обманутых (а также их родственники и знакомые) не верят ни в какие финансовые инструменты и даже банкам. Но неистребимое желание обогатиться быстро осталось. На запрос „*быстро стать богатым*“ поисковая система Google выдает (июнь 2008) более 3.5 млн ссылок. А в англоязычном мире предложений забрать ваши деньги существенно больше: на запрос „*get rich quick*“ было выдано более 4.5 млн ссылок.

Все знают, что принимать участие в ФП опасно. Но когда мы узнаем о том, что наши знакомые (неглупые люди!) вложили свои деньги под высокий процент и вот уже несколько раз этот процент получили, у нас возникает непреодолимое желание тоже поучаствовать в этом. Мы знаем, что долго такое продолжаться не может, но надеемся, что успеем и процент получить, и денежки свои забрать вовремя. Но одной такой слепой надежды мало, лучше, если мы сможем подкрепить ее хотя бы простейшим финансовым анализом. Поэтому давайте попробуем разобраться с тем, что такое ФП, используя две ее простейшие модели.

Естественно предположить, что организаторов ФП интересует, какую максимальную сумму денег можно *заработать* и за какое время. А того, кто готов рискнуть, вложив свои деньги в ФП, интересует, когда организаторы могут свернуть свою деятельность и скрыться. Заметим, что в литературе утверждается, что обычно ФП живет полтора года. Правда, ФП в Албании просуществовали 4 года, но тому были особые политические причины.

Ответы на все эти вопросы зависят прежде всего от того, какое предположение сделано о поступлении новых денег. Мы рассмотрим только два простейших случая: стационарное поступление и рост поступления в геометрической прогрессии. В обоих случаях мы будем предполагать, что время дискретно и измеряется в периодах. Каждое поступление денег или выплата процентов происходит в начале определенного периода.

Г.1. Модель с постоянным поступлением денег

Для начала рассмотрим самый простой случай. Предположим, что организована финансовая контора по *сбору* денег, которая принимает (вернее занимает) деньги под 25% в месяц (период равен месяцу). Величина 25% абсолютно условна, хотя именно такой процент был у ФП в Албании. Предположим также, что каждый месяц в ФП поступает примерно одинаковая сумма денег, которую мы обозначим через m. Величина m равна разности между суммой денег, которую принесли одни клиенты, и суммой денег, которую другие клиенты забрали из пирамиды. Таким образом, мы предполагаем, что клиент может забрать все или часть своих денег из ФП в начале любого периода.

Так как организаторы намерены только собирать деньги, то встает вопрос: за сколько месяцев будет собрана максимально возможная сумма?

Обозначим через M_t — сумму денег, которая будет у организаторов ФП через t месяцев. Выпишем значения этой суммы за первые 6 месяцев:

$$\begin{aligned}
&M_1 = m,\\
&M_2 = m + \tfrac{3}{4}m = \tfrac{7}{4}m,\\
&M_3 = m + \tfrac{3}{4}m + \tfrac{1}{2}m = \tfrac{9}{4}m,\\
&M_4 = m + \tfrac{3}{4}m + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{4}m = \tfrac{10}{4}m,\\
&M_5 = m + \tfrac{3}{4}m + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{4}m + 0 = \tfrac{10}{4}m,\\
&M_6 = m + \tfrac{3}{4}m + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{4}m + 0 - \tfrac{1}{4}m = \tfrac{9}{4}m.
\end{aligned}$$

Из формул видно, что *трудиться* имеет смысл только 4 месяца, так как в 5-м месяце все вновь принесенные деньги пойдут на уплату процентов, а потом этих денег уже не будет хватать на это.

Получим теперь этот же результат из других соображений. Обозначим через s_t — сумму денег, на которую увеличиваются собранные деньги в месяце t. Эта сумма равна разности между вновь принесенными деньгами и процентными выплатами за деньги, принесенные в предыдущие $(t-1)$ месяцев:

$$s_t = m - \frac{1}{4}\, m(t-1). \qquad (\text{Г}.1)$$

Из формулы (Г.1) следует, что s_t образуют убывающую арифметическую прогрессию с первым членом, равным m, и разностью, равной $-\frac{1}{4}m$.

Условием, при выполнении которого разумно продолжать деятельность в t-ом месяце, является выполнение неравенства $s_t > 0$. Оно означает, что от вновь поступивших денег хоть что-то остается после уплаты процентов. Решая неравенство $s_t > 0$ относительно t, получаем: $t < 5$. Это совпадает с полученным ранее результатом: надо *работать* 4 месяца.

Предположим теперь, что процентная ставка за период равна β. В этом случае условие продолжения деятельности $s_t > 0$ принимает вид:

$$m - \beta m(t-1) > 0.$$

Решая последнее неравенство относительно t, получаем:

$$t < 1 + \frac{1}{\beta}, \qquad (\text{Г}.2)$$

что подтверждает и так понятный нам факт: чем меньший процент платят организаторы, тем дольше они могут работать с пользой для себя.

Предположим, что $\frac{1}{\beta}$ — целое число, тогда при $t = 1 + \frac{1}{\beta}$ имеем $s_t = 0$. Максимальный доход можно вычислить как сумму $t = \frac{1}{\beta}$ членов арифметической прогрессии с первым членом, равным m, и с разностью, равной $-\beta m$:

$$M_t = \frac{s_1 + s_t}{2}\, t = \frac{m}{2}(1 + \frac{1}{\beta}).$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда $\beta = 0.05$. Если период равен месяцу, то это соответствует примерно 80% в год. Ставки, которые предлагают коммерческие банки, существенно меньше, так что 5% в месяц вполне смогут привлечь вкладчиков. Из неравенства (Г.2) вытекает, что, если организаторами ФП раньше не заинтересуются правоохранительные органы, им следует *работать* 20(!) месяцев. При этом все это время будет исправно выплачиваться обещанный клиентам процент. За это время организаторы ФП соберут приличную сумму денег:

$$M_{20} = \frac{m}{2}21 = 10.5m.$$

Что касается вкладчиков, то полностью вернут свои деньги только те, кто принесет их в первом месяце существования пирамиды, да и то при условии, что ФП просуществует 20 месяцев. Те же, кто принесет свои деньги позднее, уже не успеют их вернуть, так как на возврат денег требуется все те же 20 месяцев.

А теперь рассмотрим другой вариант поведения вкладчиков. Вспомним, как было с реальными ФП: после нескольких месяцев выплат процентов число вкладчиков начинало резко расти.

Г.2. Модель с геометрическим ростом поступающих денег

Предположим теперь, что число вкладчиков, а следовательно, и новых денег, растет в геометрической прогрессии со знаменателем $\alpha > 1$. Это означает, что в периоде t будет получено $\alpha^{t-1}m$ новых денег.

Как и в ранее рассмотренном случае, деятельность по сбору денег надо продолжать в периоде t, если от вновь приносимых денег хоть что-то остается нам после выплаты процентов:

$$\alpha^{t-1}m - \beta m \sum_{i=0}^{t-2} \alpha^i > 0.$$

Применив формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{i=0}^{t-2} \alpha^i = \frac{\alpha^{t-1} - 1}{\alpha - 1},$$

преобразуем последнее неравенство:

$$\alpha^{t-1}m - \beta m \frac{\alpha^{t-1} - 1}{\alpha - 1} > 0.$$

Так как $\alpha > 1$ и $t > 1$, то $\alpha^{t-1} > 1$ при всех t. Преобразуем последнее неравенство к виду более удобному для последующего анализа, разделив обе его части на $\alpha^{t-1} - 1$:

$$\frac{1}{\alpha^{t-1}-1} > \frac{\beta}{\alpha-1} - 1. \tag{Г.3}$$

Левая часть неравенства (Г.3) всегда положительна. Знак правой части зависит от соотношения между величинами α и β. Поэтому возможны два случая.

Если $\beta < \alpha - 1$ (процент прироста поступления денег за один период больше выплачиваемого процента), то $\frac{\beta}{\alpha-1} - 1 < 0$, и неравенство (Г.3) будет выполняться при любом t. Это означает, что сумма собранных денег будет возрастать, пока верно сделанное предположение.

Если $\beta > \alpha - 1$ (процент прироста поступления денег за месяц меньше выплачиваемого процента), то $\frac{\beta}{\alpha-1} - 1 > 0$, и при больших t неравенство (Г.3) не будет выполняться. Еще раз преобразуем это неравенство:

$$\alpha^{t-1} < \frac{\beta}{1+\beta-\alpha},$$

и, прологарифмировав, найдем значения t, при которых оно будет выполнено:

$$t < 1 + \frac{\ln \dfrac{\beta}{1+\beta-\alpha}}{\ln \alpha}. \tag{Г.4}$$

Далее приведена таблица, в которой содержатся вычисленные по формуле (Г.4) длины периодов возрастания собранных сумм денег $t_{\max}$ для некоторых значений α и β.

α	β	$t_{\max}$
1.05	0.25	5
1.10	0.25	6
1.20	0.25	9
1.24	0.25	15
1.01	0.05	23

Понятно, что деньги, собранные за несколько месяцев, складываются из денег, собранных за предыдущие месяцы, плюс деньги, которые остались от денег, принесенных в текущем месяце, после уплаты процентов, то есть верны следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
&M_1 = m,\\
&M_2 = M_1 + \alpha m - \beta m,\\
&M_3 = M_2 + \alpha^2 m - \beta(1+\alpha)m,\\
&\vdots\\
&M_t = M_{t-1} + \alpha^{t-1}m - \beta(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{t-2})m.
\end{aligned} \tag{Г.5}$$

Как и раньше, обозначим через s_t сумму, на которую в месяце t увеличиваются собранные деньги. Эта сумма равна разности между вновь принесенными деньгами $\alpha^{t-1}m$ и процентными выплатами по вкладам за предыдущие месяцы:

$$\begin{aligned}
&s_1 = m,\\
&s_t = \alpha^{t-1}m - \beta(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{t-2})m, \text{ при } t > 1.
\end{aligned}$$

Обозначим $\delta_t = s_{t-1} - s_t$ $(t \geq 2)$. Покажем, что числа δ_t образуют геометрическую прогрессию со знаменателем α и $\delta_1 = \gamma m$, где

$$\gamma = 1 + \beta - \alpha.$$

Действительно, имеем:

$$s_{t-1} - s_t = \alpha^{t-2}m - \beta m \textstyle\sum_{i=0}^{t-3}\alpha^i - \alpha^{t-1}m + \beta m \sum_{i=0}^{t-2}\alpha^i =$$

$$= \alpha^{t-2}m - \alpha^{t-1}m + \beta m\alpha^{t-2} = (1+\beta-\alpha)\alpha^{t-2}m = \gamma\alpha^{t-2}m.$$

Теперь мы можем переписать рекуррентные соотношения (Г.5) в форме, удобной для вычислений:

$$\begin{array}{lll}
 & s_1 = m; & M_1 = s_1;\\
\delta_2 = \gamma m; & s_2 = s_1 - \delta_2; & M_2 = M_1 + s_2;\\
\delta_3 = \delta_2\alpha; & s_3 = s_2 - \delta_3; & M_3 = M_2 + s_3;\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\delta_t = \delta_{t-1}\alpha; & s_t = s_{t-1} - \delta_t; & M_t = M_{t-1} + s_t.
\end{array} \tag{Г.6}$$

Используя формулы (Г.6), проверим, что при $\alpha = 1.20$ и $\beta = 0.25$ максимальная сумма денег будет собрана за 9 месяцев. Не умаляя общности, можно считать, что $m = 1$. Ниже приведена таблица, по которой можно проследить, как меняется по месяцам сумма собранных денег M_t. Из нее видно, что за 9 месяцев можно собрать примерно $6.1m$ и что далее эта сумма начинает убывать:

t	δ_t	s_t	M_t
1		1.00	1.00
2	0.05	0.95	1.95
3	0.06	0.89	2.84
4	0.07	0.82	3.66
5	0.09	0.73	4.39
6	0.10	0.63	5.02
7	0.12	0.51	5.53
8	0.14	0.37	5.90
9	0.17	0.20	6.10
10	0.21	−0.01	6.09

Мы оставляем любознательному читателю возможность самому выполнить подобные расчеты для других моделей поведения клиентов и надеемся, что он воспримет этот рассказ про финансовые пирамиды не как инструкцию для их создания, а как предостережение от бездумного участия в них.

Предметный указатель

А

Амортизация, *89–116*
— в РФ, *109*
— использование функций Excel, *105*
— метод двойного процента, *99*
— метод фиксированного процента, *96*
— по правилу суммы лет, *92*
— равномерная, *90*
— списание стоимости пропорционально объему продукции, *110*
— уменьшение остатка, *110*, *112*
Аннуитет, *140*
Арбитраж, *56*, *224*
— межвременной, *227*
— пространственный, *226*

Б

Базисный актив, *228*
Безналоговые покупки, *20*
Будущая ценность, *69*

В

Вексель, *53*
— учет, *54*, *74*
Вклад, *119*
— до востребования, *120*
— пролонгация, *120*
Встроенные функции Excel, *321*
— АПЛ, *106*
— АСЧ, *106*
— БС, *164*
— ВСД, *281*
— ДДОБ, *105*
— ДОХОД, *248*
— ДОХОДСКИДКА, *250*
— ЕСЛИ, *41*, *135*
— КПЕР, *164*
— МВСД, *281*
— НАКОПДОХОД, *249*
— НАКОПДОХОДПОГАШ, *249*
— НОМИНАЛ, *85*
— ОБЩДОХОД, *164*
— ОБЩПЛАТ, *164*
— ПЛПРОЦ, *164*
— ПЛТ, *164*
— ПС, *164*
— ПУО, *106*
— РУБЛЬ.ДЕС, *247*
— СКИДКА, *250*
— СТАВКА, *162*
— ЦЕНА, *248*
— ЦЕНАСКИДКА, *250*
— ЧПС, *281*
— ФУО, *105*
— ЭФФЕКТ, *85*

Д

Депозит, *119*
Диаграммы в Excel, *282*
Дисконт, *55*
— простой, *55*
Дисконтирование, *57*, *72*, *131*

З

Задолженность
— погашение, *158*, *182*
Займ, *119*
Закон единой цены, *224*

И
Инвестиции, *45*
Инвестиционный проект, *254*
— влияние инфляции, *268*
— внутренняя норма доходности (IRR), *263*
— дополнительное образование, *269*
— приведенная ценность (PV), *259*
— регулярный, *255*
— средняя норма прибыли, *257*
— срок окупаемости, *258*
— ставка отсечения, *264*
— чистая приведенная ценность (NPV), *258*
Интерес, *45*
Инфляция, *62*, *268*
— номинальный процент, *62*
— реальный процент, *62*
— модель Фишера, *63*

К
Команда Подбор параметра, *218*, *284*
Консолидация платежей, *195*
Контракт
— продажа, *198*
— срочный, *227*
— форвардный, *227*
— — цена поставки, *228*, *229*
— — ценность, *234*
— эквивалентность, *57*, *194*
Короткая продажа, *231*
Кредит потребительский, *208*

М
Метод линейной интерполяции, *186*
Множитель
— дисконтный, *72*, *131*
— наращения, *68*

Н
Налоги, *25*, *101*

О
Обезличенный металлический счет, *124*
Облигация, *211*
— бескупонная, с нулевым купоном, *212*
— — рыночная (спот) процентная ставка, *239*
— — форвардная процентная ставка, *240*
— доходность к погашению, *213*
— купонная, *212*
Опцион, *227*

П
Перпетуитет, *157*
Позиция
— длинная, *228*
— короткая, *228*
Портфель
— ценных бумаг, *23*
— облигаций, *215*
Поток денежных платежей, *140*, *254*
Правило 69, *81*
Правило 72, *82*
Принцип отсутствия арбитражных возможностей, *226*
Процент, *15*
— простой, *45*, *46*
— сложный, *67*
— — непрерывное начисление, *73*

— — плавающий, *80*
— — эффективный, *79*
Процентное число, *15*
Процентный пункт, *52*

Р

Рента, *140*
— бессрочная, *157*
— — приведенная ценность, *177*
— годовая, *143*
— — приведенная ценность, *172*
— период, *140*
— постнумерандо, *141*
— пренумерандо, *141*
— процентная ставка, *186*
— срок, *140*
— p-срочная, *149*
— — приведенная ценность, *172*

С

Сберегательный сертификат, *127*
— именной, *127*
— на предъявителя, *127*
Спот-рынок, *228*
Спот-цена, *228*
Стоимость кредита, *214*
Сумма
— исходная, *45*
— наращенная, *45*, *46*
— — финансовой ренты, *142*
— начисленных процентов, *45*

Ф

Финансовая пирамида, *358*
Форвард, *227*
— цена поставки, *228*, *229*
Функция
— $a_{n;i}$, *169*
— $s_{n;i}$, *141*
Фьючерс, *227*

Ц

Ценность
— будущая, *69*
— приведенная, *56*, *68*, *128*
— — балансовое равенство, *132*
— — финансовой ренты, *169*
Ценообразование, *30*
— наценка, *31*
— розничная цена, *37*
— рыночное, *34*
— стандартное, *32*
— стратегическое, *36*
— целевое, *33*

Э

Эквивалентность
— контрактов, *57*, *194*
— процентных ставок, *75*
— учетной и процентной ставок, *59*
Эффективная процентная ставка, *79*

Я

Язык программирования AWK, *346*
— ассоциативный массив, *354*
— встроенные переменные, *349–353*
— структура программы, *348*
Язык программирования VBA, *325*
— редактор, *326*
— встроенные типы данных, *327*
— функции пользователя, *331*

Учебное издание

А. В. Бухвалов, В. В. Бухвалова

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ МЕНЕДЖЕРОВ

3-е издание, исправленное и дополненное

Учебное пособие

Корректор *Н. Э. Тимофеева*
Подготовка оригинал-макета: *А. В. Бухвалов*

Высшая школа менеджмента СПбГУ
199004, Санкт-Петербург, Волховский пер., 3
тел.: (812) 323 8460, эл. почта: publishing@gsom.pu.ru
www.gsom.pu.ru

Подписано в печать с оригинал-макета 03.04.2010.
Формат 70x100 $_{1/16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,9.
Уч. изд. л. 24,5. Тираж 1000 экз. Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета
в Издательско-полиграфическом комплексе «Бионт»
199026, Санкт-Петербург, Средний пр., 86