

Санкт-Петербургский государственный университет
Высшая школа менеджмента

А.В. Бухвалов, Е.А. Дорофеев, В.Л. Окулов

**ЛЕКЦИИ
ПО ИЗБРАННЫМ ВОПРОСАМ
КЛАССИЧЕСКИХ ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ**

Учебное пособие

Под научной редакцией А.В. Бухвалова

Санкт-Петербург
Издательство «Высшая школа менеджмента»
2010

УДК 336
ББК 65.261
Б94

Рецензенты:

д.э.н., проф. **Е. М. Рогова** (С.-Петербургский филиал ГУ-ВШЭ);
к.т.н. **А. Т. Мухаметшин** (вице-президент С.-Западного об-ва оценщиков)

Печатается по решению Ученого Совета
Высшей школы менеджмента СПбГУ

Бухвалов А.В., Дорофеев Е.А., Окулов В.Л.

Л47 Лекции по избранным вопросам классических финансовых моделей:
учеб. пособие / А.В. Бухвалов, Е.А. Дорофеев, В.Л. Окулов; под научн.
ред. А.В. Бухвалова; Высшая школа менеджмента СПбГУ. — СПб.: Изд-
во «Высшая школа менеджмента», 2010. — 352 с.

ISBN 978-5-9924-0050-2

Данное учебное пособие продвинутого уровня посвящено ряду классических моделей теории финансов — модели эффективности рынка, модели ценообразования на капитальные активы (CAPM) как в исходной, так и в обобщенной формулировке, приложению моделей ценообразования на опционы к финансовым рынкам, модели ценности под риском (VaR), моделированию поведения стратегических инвесторов. Центральным моментом является не просто рассмотрение общей теории, а демонстрация того, как с ее помощью можно решать конкретные задачи и анализировать конкретные ситуации. Во-первых, показывается, как соответствующие модели надо модифицировать и развивать для решения конкретных задач. Во-вторых, результаты доводятся до детальных расчетов, причем на данных российского рынка. Оба указанных умения относятся к специфике работы финансового аналитика высокого класса.

Издание может использоваться в качестве учебного пособия в аспирантуре и магистратуре, на программах MBA и EMBA финансового профиля, а также для самообразования специалистами финансового рынка и сотрудниками отделов инвестиций компаний и банков.

ISBN 978-5-9924-0050-2 © А.В. Бухвалов, Е.А. Дорофеев, В.Л. Окулов, 2010
© Высшая школа менеджмента СПбГУ, 2010

Содержание

Предисловие редактора	10
1. Эффективность рынка государственных ценных бумаг и анализ кривых доходности	17
1.1. Исследование временной структуры процента в России . . .	17
1.2. Кривая доходности	20
1.2.1. Кривая доходности к погашению и кривая спот-ставок	21
1.2.2. Методы построения кривой спот-ставок	24
1.3. Кривая доходности	28
1.4. Форвардные ставки и гипотеза чистых ожиданий	31
1.4.1. Прогнозирование по форвардным ставкам	31
1.4.2. Две формы гипотезы чистых ожиданий	32
1.4.3. Эконометрика модели	34
1.5. Анализ рынка ГКО	35
1.5.1. Подготовка данных для эмпирической проверки гипотезы об ожиданиях	39
1.5.2. Результаты эмпирической проверки гипотезы чистых ожиданий	41
1.5.3. Влияние ставки налогообложения на доходность ГКО	44
1.5.4. Взаимосвязь между ставкой рефинансирования и доходностью по ГКО	47
1.6. Анализ рынка облигаций Санкт-Петербурга	50
1.6.1. Построение кривой спот-ставок на рынке облигаций Санкт-Петербурга	50

1.6.2. Эффективность первичного рынка облигаций Санкт-Петербурга	54
Задачи к главе 1	58
Приложения к главе 1	60
П 1.1. Метод обработки данных и результатов статистического анализа	60
П 1.2. Результаты статистического анализа	62
2. Модель САРМ как модель общего рыночного равновесия	65
2.1. История теории портфеля	65
2.2. История модели САРМ и ее основные предпосылки	67
2.3. Подход Дженсена: САРМ как форма рыночного равновесия	71
2.3.1. Описание предпосылок и вывод модели	71
2.4. Модель с нерыночными активами: обобщение САРМ	75
Задачи к главе 2	77
3. Эмпирическая проверка модели САРМ	79
3.1. План исследования	79
3.2. Классическая модель САРМ с безрисковым активом	82
3.2.1. Предпосылки модели и основные соотношения	82
3.2.2. Методы эмпирической проверки модели	84
3.2.3. Эконометрика модели	86
3.2.4. Исходные данные для проверки модели	87
3.2.5. Результаты эмпирической проверки модели	93
3.3. Модель САРМ в версии Блэка	97
3.3.1. Предпосылки модели и основные соотношения	97
3.3.2. Методы эмпирической проверки модели	99
3.3.3. Эконометрика модели	100
3.3.4. Исходные данные для проверки модели	103
3.3.5. Результаты эмпирической проверки модели	103
Задачи к главе 3	110
4. Варианты классической модели САРМ	111
4.1. САРМ в версии Блэка как двухфакторная модель	112
4.1.1. Эконометрика модели	113
4.1.2. Результаты эмпирической проверки модели	115
4.2. Модель D-САРМ	117
4.2.1. Модели с учетом асимметрии доходности активов	117

4.2.2. Основные предпосылки модели D-CAPM	122
4.2.3. Эконометрика модели	124
4.2.4. Исходные данные для проверки модели	125
4.2.5. Результаты эмпирической проверки модели	126
Задачи к главе 4	130

5. Рыночные спреды и моменты входа на рынок

фондовых активов	133
5.1. Логика торговли отдельным финансовым инструментом . .	133
5.2. Построение модели с единственным инструментом фондового рынка	138
5.2.1. Общая схема и гипотезы модели	138
5.2.2. Решение модели с единственным инструментом фондового рынка	142
5.2.3. Граничные условия для «высоких» ставок альтернативной доходности	143
5.2.4. Граничные условия для «низких» ставок альтернативной доходности	144
5.2.5. Решение модели для периода «высоких» ставок альтернативной доходности	146
5.2.6. Решение модели для периода «низких» ставок альтернативной доходности и стабильного роста рынка	147
5.3. Выбор активов и проверка гипотез	147
5.4. Модель <i>bid-ask</i> -спредов с возможностью обмена альтернативных инструментов фондового рынка друг на друга	150
5.5. Группировка активов РТС для статистического оценивания модели спредов в случае обмена	154
5.6. Результаты статистического оценивания модели с возможностью обмена фондовых активов	156
5.6.1. Результаты статистического анализа арбитражных возможностей по обмену активов друг на друга	156
Задачи к главе 5	161
Приложение к главе 5	162
П 5.1. Математическое приложение: теоретическая оценка опционов на покупку актива по цене предложения и продажу по цене спроса	162

6. Облигации с плавающим купоном: принципы ценообразования	171
6.1. Облигации с плавающим купоном: определения и описательная статистика	171
6.2. Теоретические основы ценообразования на облигации с плавающим купоном	175
6.3. Сравнение доходностей плавающих облигаций и госбумаг: модель ценообразования на облигации с плавающим купоном	176
6.4. Оценка риска облигаций с плавающим купоном	181
6.5. Облигации Государственного сберегательного займа — первый опыт российских долговых производных бумаг . . .	183
6.5.1. Условия обращения	183
6.6. Статистика ценообразования на ОГСЗ	184
6.7. Корпоративные облигации с плавающим купоном	187
Задачи к главе 6	191
Приложение к главе 6	193
П 6.1. Численное решение уравнений в пакете Matlab 7.0 и графики	193
7. Влияние мониторинга инвестиций со стороны крупного собственника	199
7.1. Предпосылки модели	199
7.2. Описание модели	204
7.3. Анализ исходов игры	208
7.3.1. Дополнительные предположения и промежуточные результаты	208
7.3.2. Невозможность решения игры в чистых стратегиях .	210
7.3.3. Решения игры в смешанных стратегиях и оптимальный выбор доли собственности менеджера	216
Задачи к главе 7	219
8. Методология вычисления ценности под риском VaR	221
8.1. Модель оценивания возможных потерь	221
8.1.1. Определение Value at Risk	221
8.1.2. Простейшие приемы вычисления VaR	224
8.2. Оценка рискованности портфеля активов	228
8.2.1. Корреляция доходностей активов	228

8.2.2.	Диверсификация портфеля	233
8.2.3.	Ожидаемая доходность и дисперсия портфеля	235
8.2.4.	Диверсифицированный и недиверсифицированный VaR портфеля	237
8.3.	Методы вычисления VaR для различных активов	238
8.3.1.	Общие принципы	238
8.3.2.	Интерполяция данных в методе дисперсии-ковариации	240
8.3.3.	Вычисление VaR портфеля акций	244
8.3.4.	Вычисление VaR портфеля облигаций	245
8.3.5.	Ценообразование на облигации	247
8.4.	Риск инвестирования в облигацию	251
8.4.1.	Использование дюрации и выпуклости облигации для оценки риска	257
8.4.2.	Риск портфеля облигаций. Минимизация риска	260
8.5.	Вычисление VaR для производных инструментов	262
8.5.1.	Дельта-гамма метод оценки риска производных инструментов	263
8.5.2.	Фьючерсный контракт. Хеджирование риска	266
8.5.3.	Оценка риска фьючерсного контракта	268
8.5.4.	Риски форвардного контракта	272
8.5.5.	Опционы и опционные стратегии хеджирования риска	273
8.6.	Стохастический метод моделирования риска	277
8.6.1.	Моделирование динамики цен	277
8.6.2.	Метод Монте-Карло	280
8.6.3.	Вычисление VaR стохастическим методом	282
Задачи к главе 8		290
Приложения к главе 8		292
П 8.1.	Построение гистограммы в пакете Excel	292
П 8.2.	Характеристики распределения вероятности	293
П 8.3.	Проверка гипотезы о нормальности распределения	296
П 8.4.	Работа с матрицами в пакете Excel	297
П 8.5.	Дюрация и выпуклость облигации	297
П 8.6.	Ценообразование на форвардные контракты	300
П 8.7.	Ценообразование на опционы	301
П 8.8.	Генерация случайных чисел в пакете Excel	302

СД 1. Статистические дополнения к главе 1	307
СД 1.1. Временная структура процента в России: январь — февраль 1998 г.	307
СД 5. Статистические дополнения к главе 5	312
СД 5.1. Статистика <i>bid-ask</i> -спредов для случая с единственным инструментом фондового рынка: данные	312
СД 5.2. Статистика <i>bid-ask</i> -спредов для случая с единственным инструментом фондового рынка: результаты расчетов	315
СД 5.3. Рыночные спреды по группам ликвидности акций .	319
СД 5.4. Рыночные спреды акций по отраслям при возможности их обмена друг на друга	321
СД 5.5. Сравнение индексов различных отраслей	327
Словарь терминов	329
Литература	339

Список кейсов

Кейс 1.1. Поиск недооцененных облигаций на примере рынка ГИО Санкт-Петербурга	57
Кейс 5.1. Торговля РАО ЕЭС в 1997–1998 гг.	159
Кейс 6.1. Торговля облигациями ЕБРР (2005–2006 гг.)	189
Кейс 6.2. Плавающие облигации г. Санкт-Петербурга	190
Кейс 8.1. Оценка VaR фьючерсного контракта методом Монте-Карло	284

Предисловие редактора

Авторы этой книги поставили перед собой цель написать *продвину-тый* учебник по финансам, который показывал бы, как практически могут моделироваться финансовые инструменты и решения, какая информация понадобится для реального расчета, как эти расчеты проводить. Это книга для будущего и действующего *финансового аналитика*.

Мы выбрали для книги жанр лекций, а не систематического учебника, так как в отдельной книге возможно осветить лишь отдельные направления исследований. Мы нигде не стремились к энциклопедичности и полному обзору подходов и литературы. Наоборот, мы всюду сосредоточивали наши усилия на решении конкретной задачи.

Такого рода попытка, насколько нам известно, предпринимается впервые не только в российской, но и в мировой литературе. Большинство, прекрасных в педагогическом смысле, вводных и промежуточных зарубежных учебников написано в рамках неизбежного на этом уровне принципа «не обманешь — не продашь».

Почти каждый учебник рассказывает нам об облигациях с постоянным купоном. Каждый специалист знает, что на российском рынке корпоративных облигаций наряду с такими облигациями широко распространены и существенно иные — выплаты по купону являются регулируемы-ми по тем или иным правилам, а основная сумма возвращается частями (см. проспекты эмиссии на сайте <http://www.cbonds.info> информационно-го агентства Cbonds). Но где учебник, обсуждающий эту реально трудную проблему? Откуда брать безрисковую ставку процента в России и мире? Существует ли она в природе?

Число таких вопросов, на которые читатель не найдет ответов в учебниках, можно множить до бесконечности. Безусловно, никакая отдельная книга не может претендовать на то, что она даст ответы на все подобные вопросы. Более того, «вечные» ответы дать здесь и невозможно. Поэтому важно овладеть методами исследования, так как «правильные» ответы меняются со временем и местом. Финансовый аналитик никогда не останется без дела!

Особенностью данной книги является то, что все основные ее разделы основываются на собственных исследованиях авторов или на исследованиях, проведенных под их руководством. Большая часть этих работ была опубликована в академических журналах и сборниках. Наша задача заключалась в том, чтобы преподнести научные результаты в понятной и подробной форме, руководствуясь стратегическим принципом, используемым в морском бою, когда нет возможности давать детальные инструкции, — «делай, как я».

Этим наша книга отличается от многих квалифицированно написанных учебников по финансам — как иностранных, так и российских, — в которых хорошо и последовательно излагается абстрактная теория, но не показывается, как эту теорию применять технически и какие задачи можно решить с ее помощью идейно.

Например, можем рекомендовать читателю неплохой учебник [Малюгин, 2003] по статистике финансовых рынков, во многом дополняющий наше изложение на более вводимом уровне. Но в этой книге нет ни одного сосчитанного реального примера, нет даже на уровне мини-кейсов результатов конкретных вычислений, нет финансовых задач, решенных с помощью излагаемой техники. Наконец, единственная ссылка на работы самого автора сводится к руководству пользователя некоего программного продукта, и практически нет ни одной ссылки на исследовательские статьи каких-либо авторов. Учебник является «производной ценной бумагой» — все ссылки даны на другие учебники (не статьи!). Безусловно, и такой учебник имеет право на жизнь и может быть полезен (что имеет место в указанном случае, но не в целом для основной массы подобной литературы)¹.

Предпосылкой к появлению данной книги стало то, что еще в середине 1990-х гг. автор этих строк поставил перед собой задачу создать исследовательскую группу, которая проанализировала бы возможность применения классических финансовых моделей к российскому рынку (отсюда — название этой книги). В такой возможности я не сомневался, но работа в любом случае предстояла не простая. Безусловно, речь не шла просто

¹ Экстремальным случаем абстракционизма без какой-либо конкретики является переводной немецкий учебник [Крушвиц, 2000]. Однако и он пригодился нам как источник, на который мы ссылаемся в этой книге в указаниях к решению упражнений. Не можем удержаться от предостережения: то, что общепринято называется «финансовыми активами», переводчики называют «финансовыми титулами» [Крушвиц, 2000; Крушвиц, Шеффер, Шваке, 2001]. Вообще проблема качества перевода книг по финансам — настоящий бич.

о верификации существующих моделей. Хотелось с помощью этих моделей проводить аналитическую работу, дающую интерпретацию событиям на российском финансовом рынке. Во многих случаях новые результаты имели универсальный характер: российская специфика выражалась только в эмпирике, на которой иллюстрировалась сила моделей. Началось все с аспирантских курсов в С.-Петербургском государственном университете экономики и финансов², успешно продолжилось в Европейском университете в С.-Петербурге (ЕУСПб), где в 1995–1999 гг. я был деканом-организатором экономического факультета. Параллельно проходили спецкурсы по финансовой эконометрике на математико-механическом факультете СПбГУ. С 1999 г. автор этих строк работает на факультете менеджмента (ныне — в Высшей школе менеджмента — ВШМ) СПбГУ. В ЕУСПб ко мне присоединились два талантливых слушателя магистерской программы, которые сегодня уже являются самостоятельными учеными и успешными практиками, активно сотрудничающими с ВШМ СПбГУ, — это мои соавторы по этой книге.

Стиль изложения любого продвинутого учебника — это не последовательное изложение теории, как во вводно-промежуточном учебнике или монографии, а концентрация на отдельных исследовательских задачах. Совокупность этих задач должна вести к достижению стратегической цели — дать читателю разнообразный по тематике и технике набор продвинутых аналитических задач, доведенных до решения. Конечно, нам приходится комбинировать исследовательский материал с учебным, что необходимо для удобства читателя. Так как исследовательские задачи взяты из (конечного) запаса таких задач, накопленных авторами, то одни из них относятся еще к событиям докризисного периода 1998 г., а другие — к совсем недавним событиям. В связи с тем, что цель учебника — научить, а техника не устарела, мы не стали предпринимать никаких попыток осовременивания наших расчетов (что пришлось бы делать, если бы мы писали монографию) — более того, такой подход в некоторых случаях привел бы к получению других результатов и решению других задач.

Финансовый рынок — не рынок продуктов питания. Без последнего человек не может обходиться. Финансовые же активы востребованы только опосредованно. Инвестор по теоретическому определению и по реальной практике имеет отношение к риску более осторожное, чем завсегдатай

² Этот этап закончился, по-видимому, первой российской диссертацией по использованию валютных фьючерсов [Бухрякова, 1994], написанной под руководством автора. Сейчас Л. П. Харченко (Бухрякова) работает доцентом кафедры финансов и банковского дела СПбГИЭУ.

игорного дома. Для того чтобы финансовый рынок отличался от казино, необходимо, чтобы он был более доступен для аналитического исследования, чем «дурная» вероятность рулетки. Однако теория давно показала, что цены на рынке предсказывать невозможно. Тем не менее возможен некоторый полезный прогноз, выраженный в вероятностных терминах. Рынок, где большинство инвесторов рациональны, а информация быстро и полно отражается на ценах активов, называется *эффективным*. Если этого нет, то финансовый рынок не привлекателен. Поэтому одной из первых задач, которой мы начали заниматься, стала проблема эффективности российского финансового рынка. Именно с этого и начинается наша книга. Результаты посвященной этой тематике главы 1 принадлежат в основном А. В. Бухвалову и В. Л. Окулову. Гипотеза эффективности проверяется с помощью анализа временной структуры процента, которая рассчитывается по государственным и муниципальным облигациям России.

Глава 2 вводит на продвинутом уровне в теорию модели ценообразования на капиталные активы (САРМ). Это известный классический материал, восходящий к 1960-м — началу 1970-х гг. Речь идет о выдающихся результатах Нобелевских лауреатов Тобина и Шарпа, известного профессора финансов и менеджмента Дженсена и его ученика Мейерса. Изложение в основном построено на лекциях, которые я читал на магистерской программе ЕУСПб и аспирантской программе ВШМ СПбГУ. Это глава носит чисто теоретический характер и является единственной, не содержащей авторских результатов, но она готовит к дальнейшему эмпирическому анализу.

Главы 3 и 4 посвящены конкретике проверки САРМ и ее версий для российского финансового рынка. Эти результаты основаны на работах А. В. Бухвалова и В. Л. Окулова, а также ряда магистрантов ЕУСПб, выполнявших свои работы под руководством А. В. Бухвалова. Значительное внимание уделено эконометрической технике проверки и вопросам подготовки данных.

Главы 5–7 написаны в основном по результатам исследований Е. А. Дорофеева. Главы 5 и 6 наряду с новой теорией содержат непростую эмпирику, выполненную на российском материале. Глава 5 посвящена приложению техники теории реальных опционов, образцово изложенной в монографии [Dixit, Pindyck, 1994] и читавшейся автором этих строк в продвинутом курсе в ЕУСПб, к анализу поведения инвестора на фондовом рынке. Речь идет о поведенческой, но математической модели учета размера

спредов между ценами предложения и покупки для разработки инвестиционной политики. В связи с написанием настоящей книги Е. А. Дорофеев получил ряд новых результатов, включенных в главу 5 и ранее не публиковавшихся (см. также [Дорофеев, 2005]). Отправной точкой для материалов главы 6 по облигациям с плавающим купоном стал реферативный доклад Е. А. Дорофеева на семинаре по финансам в ЕУСПб. Это хороший пример того, как делается наука: отталкиваемся от статьи, являющейся «новой классикой» (работа [Ramaswamy, Sundaresan, 1986] очень быстро попала в хрестоматии по финансам), рассматриваем имеющийся на российском рынке инструмент, строим модификацию математической модели для этого инструмента, проводим вычисления, получаем хорошее совпадение с эмпирикой (см. [Дорофеев, 2000]). Глава 7 по корпоративному управлению написана по результатам Е. А. Дорофеева [Дорофеев, 2004] при участии А. В. Бухвалова. Предлагается достаточно простая игровая (теоретическая) модель агентской проблемы. Результаты имеют непосредственное отношение к российским реалиям.

Глава 8, посвященная специальной технике риск-менеджмента — метрике **VaR**, написана почти единолично В. Л. Окуловым, являющимся теперь крупным практиком в этой области. Эта глава несколько выпадает из стиля всех остальных, отличаясь более элементарным, учебным характером — здесь нет новых результатов авторов.

Теперь необходимо сказать несколько слов о требованиях, предъявляемых к читателям. Любой продвинутый учебник по финансам подразумевает хорошую подготовку в области финансов и математики, техники компьютерных вычислений. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории финансов по одному из промежуточных учебников корпоративных финансов или инвестиций. В качестве примера можно указать на [Брейли, Майерс, 2004; Бригхэм, Гапенски, 1997; Шарп, Александер, Бейли, 1997]. Укажем также на последнее текущее издание [Brealey, Myers, Allen, 2009] на английском языке и [Grinblatt, Titman, 2002]. Основные навыки работы в Excel, полезные для работы с простыми финансовыми моделями, можно приобрести по учебникам [Беннинга, 2007] (см. также более современное английское издание [Benninga, 2008]), [Джексон, Стонтон, 2006] и [Мур, Уэдерфорд, 2004]. Более продвинутые алгоритмы см. в [Люу, 2002]. Справочным пособием энциклопедического типа по становлению рыночной экономики в России является серия монографий [Гайдар, 1998; 2003; 2008] под редакцией Е. Т. Гайдара (см. также и другие публикации ИЭПП, напр., [Радыгин, Энтов, 1999]).

Книга может быть положена в основу чтения многих продвинутых курсов по финансам: главы 1 и 6 — по облигациям, главы 2–4 — по САРМ, главы 2–6 — по рынку ценных бумаг, глава 7 — по корпоративному управлению, глава 8 — по риск-менеджменту. Каждая глава сопровождается набором задач. В большинстве глав имеются российские кейсы, разработанные авторами.

Я как редактор этой книги и организатор многолетних совместных исследований хотел бы прежде всего поблагодарить своих соавторов, без которых она никогда бы не появилась и без которых нельзя было бы говорить о существовании хотя бы немногочисленной финансовой школы в С.-Петербурге. Хочу высказать благодарность за работу и общение своим бывшим магистрантам В. В. Ишкову, О. В. Крюковской и Д. В. Синцову, чьи результаты были использованы нами. Не могу не вспомнить теплым словом и других учеников и слушателей моих курсов, которые не смогли принять участие в написании данной книги. Отмечу прежде всего И. В. Осколкова, занимающего в настоящий момент заметную должность в МЭРТ, чья работа [Осколков, 2000] посвящена исследованию в отраслевом разрезе одной модификации САРМ для российского рынка. В работе А. В. Косенко, который ныне преподает в С.-Петербургском филиале ГУ–ВШЭ, была изучена эконометрика причинности между ценами на российском и американском фондовых рынках (см. [Косенко, 2000]³). Не могу не вспомнить своего любимого ученика А. С. Каплина, который успешно окончил одну из ведущих в мире аспирантур по финансам в Школе менеджмента им. Келлогга Северо-Западного университета (Эванстон) и после ее окончания работает аналитиком по моделированию управления портфелем в корпорации Moody's KMV в Сан-Франциско⁴. Еще в аспирантские годы Каплин построил формальный пример, показывающий, что не любая матрица коэффициентов корреляции может соответствовать некоторому портфелю активов, который вошел в учебники (см. [Bodie, Kane, Marcus, 2002, p. 293]⁵).

Я хочу особо поблагодарить Л. Н. Копылову, менеджера НИИМ ВШМ СПбГУ, с которой автор связан многими годами совместной работы. Она

³ Цены РТС действительно оказались причинно-зависимыми от NYSE на данных конца 1990-х гг.

⁴ Отметим, что в аббревиатуре KMV, возникшей из имен создателей компании, буква V относится к легендарному специалисту по кредитному риску Васичеку (Oldrich Vasicek).

⁵ Российский читатель знаком с облегченной версией предыдущего издания учебника этих авторов.

не только набрала в $\text{\LaTeX}$ 'е весь первоначальный текст книги, но и содействовала коммуникации между соавторами, с которыми она была знакома еще со времен работы в ЕУСПб.

Общение с многими ведущими специалистами способствовало формированию идей и методологии этой книги. Книга не смогла бы появиться без той полугодовой стажировки в Институте переходных экономик Банка Финляндии (BOFIT), которую автор этих строк прошел в 1999 г. по приглашению директора BOFIT, доктора Пекки Сутелы. Именно там были выполнены начальные работы по временной структуре процента и начался сбор методических материалов по **VaR**. Нельзя не отметить значительное влияние выдающихся специалистов по финансовой экономике, с которыми судьба меня свела в разные годы: профессора Марко Пагано из Неаполитанского университета — от него начало интереса к производным, профессора Майкла Бреннана из Школы менеджмента им. Андерсона Калифорнийского университета в Лос-Анжелесе — от него общий интерес к ценообразованию на ценные бумаги, профессора Двайта Джаффи из Школы бизнеса им. Хааса Калифорнийского университета в Беркли, с которым обсуждались результаты по CAPM и корпоративному управлению. Наконец, нельзя с благодарностью не отметить, что эта книга появилась в результате двухлетней работы в рамках и при финансовой поддержке приоритетного национального проекта «Образование» в стенах ВШМ СПбГУ.

А. В. Бухвалов

1. Эффективность рынка государственных ценных бумаг и анализ кривых доходности

Рынок долговых ценных бумаг, выпускаемых государством, играет, с одной стороны, важнейшую макроэкономическую (регулятивную) роль, а с другой — является объектом спекулятивной деятельности многочисленных инвесторов. В государстве с федеральным политическим устройством к государственным ценным бумагам относят ценные бумаги, выпускаемые как федеральным правительством, так и правительствами субъектов федерации. Правительство осуществляет с их помощью заимствование на внутреннем рынке (но при открытости экономики к этому рынку допускаются и иностранные инвесторы), позволяющее решать краткосрочные проблемы бюджета, регулирует количество денег в обращении, обменные курсы валют и т. п. Инвесторы же получают возможность вложить свободные денежные средства в ценные бумаги не с самой высокой доходностью, но и с невысоким риском дефолта. Центральные банки и министерства финансов всех стран являются регуляторами этого рынка, который во всех развитых странах представляет собой один из крупнейших сегментов финансового рынка. Важностью проблематики объясняется огромное количество теоретических и прикладных исследований по ценообразованию и рискам на данном рынке.

1.1. Исследование временной структуры процента в России

Главный и естественный вопрос заключается в том, является ли рынок государственных долговых бумаг подчиняющимся некоторой экономической логике (мы не говорим — предсказуемым, это не так в буквальном смысле слова), или же здесь не работают никакие решения, основанные на

изучении истории рынка. В первом случае рынок называется (информационно) эффективным и большинство инвесторов готовы на нем работать. Во втором случае мы имеем дело с «русской рулеткой», которая далеко не всем по душе. Поэтому изучение эффективности рынка является пререквизитом интереса инвестора к участию в торговле.

Теория излагаемого в главе 1 материала достаточно хорошо отработана в мировой литературе. Однако любая модельная теория не легко превращается в практику расчетов. В этой главе мы показываем, как это делается, на очень трудном примере — примере российского рынка государственных облигаций: дисконтных облигаций (ГКО) на периоде до кризиса 1998 г. и облигаций Санкт-Петербурга на периоде стабилизации и роста российской экономики, наступившем после 2000 г.

Мы оцениваем эффективность российского рынка по результатам анализа *временной структуры процента* на рынке государственных краткосрочных облигаций. На основе построенной различными способами кривой доходности тестируются две формы гипотезы о чистых ожиданиях. Исследование охватывает промежуток времени, в начале которого западные эксперты оценивали российский финансовый рынок как «рынок номер один» среди всех развивающихся рынков (*emerging markets*), а конец которого приходится на дефолт и крах 17 августа 1998 г. Это одновременно период наибольших объемов и высокой ликвидности (по крайней мере, по краткосрочным бумагам).

История российских государственных краткосрочных облигаций (ГКО; по технике торговли — полный аналог американских T-Bills) началась в 1993 г. Появление ГКО связано, по-видимому, с лоббированием крупных корпораций-экспортеров, которые в условиях обязательной продажи части валютной выручки оказывались с огромными суммами мгновенно обесценивавшихся инфляцией рублей. До середины 1995 г. ГКО играли незначительную роль, а затем стали, наряду с долларом, основным спекулятивным инструментом на российском рынке. Этому, безусловно, способствовал и скачок доходности ГКО, сопровождавший предвыборную кампанию 1996 г., — государству нужны были деньги для выплаты зарплаты бюджетникам. Преобладание спекулятивной функции и стало причиной дефолта августа 1998 г., хотя сами причины кризиса носили гораздо более глубокие корни, на которых мы здесь останавливаться не будем (см., напр.: [Гребенников, 2000; Гурвич, Дворкович, 1999; Энтов, 1999]). После того как произошел кризис, можно было часто услышать о хаотическом и непредсказуемом поведении российского финансового рынка. Наши иссле-

дования показывают, что это вовсе не так. Наоборот, спекулянты быстро приспосабливались к изменению правил (введение налога на ГКО в январе 1997 г.) и переключению режимов (многократные и значительные изменения ставки рефинансирования).

В данной главе использованы известные в теории финансов и эконометрике подходы. Однако специфические особенности российского рынка — низкая ликвидность, бедность набора финансовых инструментов, слабость рыночных институтов по отношению к государственному вмешательству, короткие инвестиционные горизонты участников рынка — потребовали в ряде случаев существенно модифицировать технику исследования. В частности, проведение исследований привело к разработке нового модельного инструмента, которого на тот момент на российском рынке еще не существовало — *кривой доходности*.

К сожалению, в России до сих пор не много работ, посвященных анализу временной структуры процентных ставок на российском рынке. Большинство из них носит вербально-описательный характер (например, обзоры REСЕР, обзоры ЦБ РФ, аналитические материалы информационных агентств и крупных финансовых компаний). Отметим отдельно некоторые работы по эмпирическому анализу рынка ГКО–ОФЗ⁶, выполненные на высоком уровне: исследования Института экономики переходного периода [Энтов, 1999; Гайдар, 1998; Дробышевский, 1999а, 1999б], где рассматриваются различные модели рынка ГКО; исследования [Ивантер, Пересецкий, 1999], посвященные взаимодействию различных сегментов российского финансового рынка; [Urga, Peresetsky, Turmuhambetova, 2001]. Исторически первой работой, в которой был поставлен вопрос об эконометрической проверке эффективности российского рынка государственных ценных бумаг, по-видимому, была работа [Бухвалов, Окулов, 2000], результаты дальнейших исследований в этой области были опубликованы в [Бухвалов, Крюковская, Окулов, 2001; Крюковская, 2003]. Эмпирических исследований других сегментов российского рынка, субфедеральных или корпоративных облигаций до сих пор имеется мало (исключение составляют работы: [Дорофеев, 2001] — исследование рынка ОГСЗ; [Окулов, 2001; Окулов, Корнеев, 2002а, 2002б] — исследования рынка ГИО СПб). Описанные в данной главе исследования являются *ex-post* анализом временной структуры процентных ставок на российском рынке ГКО мето-

⁶ ГКО — государственные краткосрочные облигации; ОФЗ — облигации федерального займа; ОГСЗ — облигации государственного сберегательного займа; ГИО СПб — государственные именные облигации Санкт-Петербурга.

дами математической статистики. Цель анализа — определить, являлось ли движение процентных ставок на российском долговом рынке случайным или было подчинено некоей внутренней закономерности, которую участники рынка интуитивно предчувствовали и их предчувствия были отражены в ценах. Если бы ожидания участников рынка были уже заложены в ценах, то это означало бы возможность прогнозирования рынка и позволяло бы предсказывать будущие цены или доходности, что свидетельствует о высокой степени эффективности рынка.

1.2. Кривая доходности

Исследование соотношений между ценой кредитных ресурсов на различные сроки, называемое *анализом временной структуры процента*, является одной из центральных тем как в современной теории финансов, так и в практической работе любого участника финансового рынка, будь то инвестор или эмитент. Особое место в этой тематике занимает анализ временной структуры процентных ставок, или *кривой доходности*, по государственным ценным бумагам, которые обычно рассматриваются как инструменты с минимальным кредитным риском. С одной стороны, кривая доходности является важнейшим модельным инструментом макроэкономического анализа, — прикладные аспекты для выработки макроэкономической политики США рассмотрены в работе [Campbell, 1995]. Существует множество гипотез, связывающих вид временной структуры процентных ставок и их динамику с изменением ситуации в экономике (большое количество ссылок приведено в работе [Дробышевский, 1999а, 1999b]). В частности, предполагается, что существует взаимосвязь:

- между краткосрочными и долгосрочными процентными ставками (гипотеза ожиданий — *expectations hypothesis*);
- между долгосрочными процентными ставками и ожидаемыми темпами инфляции (гипотеза Фишера);
- между фискальной и денежно-кредитной политикой государства и динамикой процентных ставок (условие «эквивалентности Рикардо» — *Ricardo equivalence*);
- между временной структурой процента и ожиданиями в изменении экономической активности, валютного курса, шоков денежно-кредитной политики, бюджетного дефицита, изменений в законодательстве, ситуации на фондовом рынке, политических процессов, информационных потоков и т. п.

С другой стороны, кривая доходности является наиболее информативным индикатором состояния финансового рынка [Deventer, Imai, 1997]. На основании кривой доходности можно:

- прогнозировать цены новых долговых инструментов, размещаемых на аукционах (см. раздел 1.5 данной главы);
- проводить поиск недооцененных и переоцененных долговых бумаг на рынке (см. кейс 1.1 ниже);
- прогнозировать будущие процентные ставки;
- строить систему количественного кредитного рейтинга инструментов в смежных секторах рынка (рынки муниципальных и корпоративных облигаций) [Golub, Tilman, 1997].

Наконец, кривая доходности является эффективным инструментом риск-менеджмента, позволяющим осуществлять более точную оценку рискованности портфеля облигаций по сравнению с традиционными методами, основанными на анализе дюрации и выпуклости конкретных инструментов (см., например, статьи [Gagnon, Hurley, Johnson, 1997] и [Reitano, 1997] в монографии [Fabozzi, 2005]). Изучению кривой доходности посвящены классические работы [Vasicek, 1977; Vasicek, Fong, 1982].

1.2.1. Кривая доходности к погашению и кривая спот-ставок

В один и тот же момент на рынке государственных облигаций обращается множество выпусков дисконтных и купонных облигаций, отличающихся номиналами, размерами и датами купонных выплат и сроками до погашения. Облигация представляет собой обязательство эмитента выплатить владельцу облигации ее номинальную стоимость в дату погашения и, если облигация является купонной, выплачивать определенные суммы (купоны) в даты купонных платежей. Таким образом, облигация обеспечивает ее владельцу поток точно определенных платежей в точно определенное время. Удобной характеристикой потока платежей является его *внутренняя норма доходности* (*internal rate of return*), определяемая из равенства рыночной цены этого потока сумме текущих приведенных стоимостей (*present value*) всех платежей по отдельности. На рынке облигаций внутренняя норма доходности потока платежей по облигации получила название *доходности к погашению* облигации (*yield to maturity*). В общем случае для купонной облигации номиналом P_0 , сроком до погашения $T(n)$ и купонами C_i ($i = 1, \dots, n$), выплачиваемыми через время

$T(i)$, доходность к погашению Y определяется из уравнения

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+Y)^{T(i)}} + \frac{P_0}{(1+Y)^{T(n)}},$$

где P — рыночная «грязная» цена облигации (котировочная цена плюс накопленный купонный доход), а суммирование проводится по всем купонным выплатам этой облигации⁷.

Доходность к погашению рассчитывается в России всеми организаторами торгов, многими информационными агентствами и аналитическими отделами крупных финансовых компаний. График значений $Y = Y(T(n))$ называется *кривой доходности к погашению* (*yield curve to maturity*). Вид этой кривой имеет определенное значение для стратегического инвестора, который вкладывает деньги на длительный и заранее известный срок — до даты погашения. Действительно, величина доходности к погашению конкретного выпуска купонных облигаций дает *ориентировочное* значение доходности (с учетом реинвестирования купонов), которую получит инвестор, дождавшись погашения этого выпуска. Однако кривая доходности к погашению не предоставляет возможности корректно сравнивать облигации с разными параметрами (купонами, сроками), оценивать стоимость новых выпусков, прогнозировать параметры инвестиционного портфеля.

Другой, более продуктивный подход, заключается в том, чтобы оценивать справедливую стоимость облигации, представляя ее цену как функцию нескольких внешних по отношению к облигации факторов. В качестве таких факторов используют процентные ставки по кредитам, не подверженным риску дефолта, на разные сроки. Если известны процентные ставки $R(i)$ по кредитам на сроки $T(i)$ ($i = 1, \dots, n$), совпадающие со сроками выплаты купонов и номинала рассматриваемой облигации, то ее справедливая стоимость равна

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+R(i))^{T(i)}} + \frac{P_0}{(1+R(n))^{T(n)}},$$

где C_i — купонные платежи, P_0 — номинал облигации.

На финансовом рынке величины $R(i)$ получили название спот-ставок. График значений $R = R(i)$ на разные сроки называется кривой спот-

⁷ Отметим, что существуют разные методики определения доходности к погашению и, соответственно, разные формулы для ее вычисления.

ставок, или кривой доходности (*yield curve*)⁸. Если процентные ставки на короткие сроки непосредственно устанавливаются на рынке (например, ставки межбанковских кредитов на денежном рынке), то процентные ставки на длинные сроки не являются рыночными величинами, их можно определить только через цены финансовых инструментов, обращающихся на рынке. Наиболее прямой способ оценки спот-ставок заключается в вычислении набора спот-ставок на основе цен государственных облигаций.

Например, очевидно, что доходность к погашению государственной дисконтной облигации должна совпадать со спот-ставкой на срок, соответствующий погашению этой облигации, так как, с одной стороны, рыночная цена облигации равна $P = \frac{P_0}{(1+Y)^T}$, а с другой стороны, считая рыночную цену истинно справедливой, можно записать: $P = \frac{P_0}{(1+R(T))^T}$. Поэтому, наблюдая за рыночными ценами государственных дисконтных облигаций, можно определить спот-ставки на разные сроки. Однако даже на развитых рынках мало дисконтных облигаций со сроком погашения более года, а на российском рынке их нет вовсе. Выход заключается в том, чтобы подобрать значения спот-ставок таким образом, чтобы они наилучшим образом описывали текущие рыночные цены всех государственных облигаций (и дисконтных, и купонных), обращающихся на рынке.

Вычислив спот-ставку на определенный срок, мы тем самым можем отождествить ее с доходностью искусственной «виртуальной» дисконтной облигации с постоянным, не меняющимся с течением времени сроком до погашения. Доходность (и цена) такой виртуальной облигации определяется на основе рыночных цен множества реально существующих облигаций, поэтому она менее подвержена случайным колебаниям, обусловленным относительно низкой ликвидностью инструментов (особенно на развивающихся рынках). Можно утверждать, что доходности виртуальных облигаций (т. е. спот-ставки) лучше отражают состояние рынка в целом и позволяют корректно проводить межвременные сравнения.

Применительно к задаче анализа эффективности рынка необходимо отметить, что использование виртуальных облигаций дает ряд существенных преимуществ. Во-первых, анализировать поведение нескольких спот-ставок легче, чем отслеживать движение цен (доходностей) десятков различных бумаг, обращающихся на рынке. Во-вторых, цены облигаций с низкой купонной доходностью ($C_i/P_0 < Y$) обычно растут с приближением срока погашения, а с высокой купонной доходностью ($C_i/P_0 > Y$) — падают, т. е. имеют место ценовые тренды, затрудняющие сравнение бу-

⁸ Другое название — кривая бескупонной доходности (*zero-coupon rate curve*).

маг в разные моменты времени. В-третьих, цена отдельной облигации подвержена не только рыночным (процентным) рискам, но и специфическим рискам, следовательно, в коротком периоде ее цена может двигаться в противоположную сторону относительно рынка. Например, общую картину могут нарушать «нерыночные» сделки, имеющие обычно небольшой объем и заключаемые по аномальным ценам. Поэтому именно концепция спот-ставок используется для анализа эффективности рынка государственных ценных бумаг.

Отметим, что концепция спот-ставок имеет и огромную практическую ценность для инвесторов и эмитентов. Например, знание спот-ставок позволяет эмитентам и дилерам прогнозировать цены новых выпусков на первичных аукционах, инвесторам и спекулянтам — проводить на рынке поиск недооцененных облигаций и т. п. Некоторые применения концепции спот-ставок продемонстрированы в кейсах в конце данной главы.

1.2.2. Методы построения кривой спот-ставок

Рассмотрим кратко методы построения кривой доходности (кривой спот-ставок), предложенные для развитых рынков.

Наиболее интуитивно понятный метод построения кривой доходности — метод наведенных спот-ставок [Anderson et al., 1996]. Поясним этот метод на простом примере: пусть на рынке обращаются две облигации — дисконтная, сроком до погашения 1 год, и купонная — с ежегодной выплатой купонов и сроком до погашения 2 года. Тогда спот-ставки $R(1)$ и $R(2)$ (на 1 и 2 года, соответственно) можно найти, зная рыночные цены облигаций P_1 и P_2 , номиналы облигаций P_0 и купонные выплаты C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{P_0}{1 + R(1)}, \\ P_2 &= \frac{C_1}{1 + R(1)} + \frac{P_0 + C_2}{(1 + R(2))^2}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Определив из первого уравнения значение $R(1)$ и подставив его во второе уравнение, можно определить $R(2)$ и т. д. — для $R(3)$ и других спот-ставок. К сожалению, применение данного метода не всегда возможно из-за отсутствия подходящих по срокам платежей инструментов. Кроме того, последовательная процедура расчета накапливает большие ошибки.

В другом методе (представление кривой доходности заданной функциональной формой) предполагается, что кривая спот-ставок на всем временном горизонте R_t может быть выражена в виде единственного аналитического уравнения с несколькими, вообще говоря, неизвестными параметрами. Параметрический способ построения кривой доходности очень широко используется на практике (см. обзоры: [Гамбаров и др., 2004; 2006]).

Простой вариант этого способа был применен для построения кривой доходности при анализе поведения инвесторов на рынке ГКО в 1996–1998 гг. в работах А.В. Бухвалова, В.Л. Окулова и О.В. Крюковской, которые положены в основу настоящей главы. В этих работах применялась аппроксимация временной структуры процентных ставок по ГКО кубическими полиномами

$$R(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3. \quad (1.2)$$

Коэффициенты b_i вычисляются следующим образом. Пусть на рынке обращаются N облигаций. Для справедливой цены j -ой облигации, обеспечивающей денежные выплаты CF_i в моменты времени t_i , можно записать:

$$P_j^* = \sum_i \frac{CF_i}{(1 + b_0 + b_1 t_i + b_2 t_i^2 + b_3 t_i^3)^{t_i}}. \quad (1.3)$$

Неизвестные коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 можно найти из условия минимизации отклонений расчетных (справедливых) цен P_j^* всех облигаций от рыночных цен P_j :

$$\sum_{j=1}^N (P_j^* - P_j)^2 \rightarrow \min. \quad (1.4)$$

Существенным недостатком аппроксимации полиномами третьей степени является возможность сильного отклонения от исходных данных при больших диапазонах значений t_i , поэтому способ применялся только для построения кривой доходности для относительно коротких промежутков времени (на срок менее года).

Наиболее известным и часто используемым на практике методом является интерполяция кривой доходности кубическими сплайнами. Впервые этот метод был применен в [MacCulloch, 1975]. Идея заключалась в том, чтобы аппроксимировать функцию дисконтирования для американских казначейских облигаций непрерывной «наиболее гладкой» кривой.

В этом случае кривая доходности не будет иметь разрывов первого и второго рода. Математически наиболее просто оценивать не кривую доходности (спот-ставки), а величину $D(t) = (1 + R(t))^{-t}$, получившую название функции дисконтирования.

Рассмотрим основную идею оценки функции дисконтирования. Обычно при оценке исходят из непрерывного начисления процентов, затем нетрудно перейти к эффективной годовой процентной ставке. Цена купонной облигации может быть представлена в следующей формуле:

$$P_j = \sum_k C_k D(k) + P_0 D(n). \quad (1.5)$$

Функцию дисконтирования в общем виде можно представить в виде:

$$D(m) = 1 + \sum_{s=1}^k g_s F_s(m), \quad (1.6)$$

где $F_s(m)$ — s -я базисная функция, а g_s — неизвестные коэффициенты, которые требуется оценить.

Подставляя (1.6) в (1.5), получим систему регрессионных уравнений, которую требуется дополнить граничными условиями на концах кривой. Решение системы дает оценки неизвестных коэффициентов g_s^* .

Основная проблема заключается в выборе вида базисной функции F_s . В первой из серии своих работ MacCulloch [MacCulloch, 1971] применил кусочную аппроксимацию квадратичными функциями. Затем он же применил полиномы третьей степени, «сшитые» в узловых точках приравниваем первых и вторых производных, — кубические сплайны. Этот метод стал классическим, поскольку дает наиболее гладкую кривую доходности [Deventer, Imai, 1997], хотя и приводит к появлению необъяснимой колеблемости выпуклости этой кривой. Недостатком метода является возможность возникновения большого числа перегибов на кривой доходности, что не имеет логического обоснования с точки зрения поведения инвесторов. Кроме того, особые условия на краях временного горизонта зачастую приводят к отрицательным форвардным ставкам, что не имеет экономического смысла.

В дальнейшем техника построения кривой доходности непрерывно совершенствовалась. Для наибольшей гладкости форвардных ставок некоторыми исследователями при аппроксимации дисконтной функции применялись сплайны четвертой степени, для неотрицательности форвардных ставок — полиномы Бернштейна и так называемые B -сплайны (краткий обзор современных методов оценки кривой доходности приведен в

книге [Anderson et al., 1996]). Одни методы хороши для использования в целях макроэкономического анализа: например, чтобы соответствовать некоторым стохастическим моделям временной структуры процентных ставок, дисконтная функция аппроксимируется так называемыми экспоненциальными сплайнами. Другие методы были разработаны специально для практических применений, в частности, для поиска квази-арбитражных возможностей на рынке.

В работе [Coleman, Fisher, Ibbotson, 1992] была предложена методика, в значительной степени отличающаяся от классических методов, описанных выше. В качестве оцениваемых величин использовались не спот-ставки и не дисконтная функция, а неявные форвардные ставки, выраженные в непрерывных процентах. Во-первых, это более удобно математически, во-вторых, достоинством данной методики можно назвать то, что все форвардные ставки автоматически оказываются положительными.

Приведем краткое описание данной методики. Справедливая цена облигации P может быть представлена в виде (по аналогии с (1.5)):

$$P = \sum_t D(t)C_t + P_0D(T), \quad (1.7)$$

где $D(t) = \exp[d(t)]$ — дисконтирующая функция — приведенная ценность единичной выплаты через время t , а $d(t)$ — дисконтирующий фактор.

Дисконтирующий фактор можно представить как интеграл от функции непрерывной форвардной ставки⁹ $f(u)$:

$$d(t) = - \int_0^t f(u)du. \quad (1.8)$$

В [Coleman, Fisher, Ibbotson, 1992] авторы использовали приближение функции форвардной ставки кусочно-постоянной функцией

$$f(t) = f_j = \text{const}, \text{ при } t_{j-1} < t < t_j. \quad (1.9)$$

С учетом этого приближения дисконтирующая функция может быть вычислена следующим образом (например, для временного промежутка $t \in (t_2, t_3)$):

$$D(t) = \exp\{-[f_1t_1 + f_2(t_2 - t_1) + f_3(t - t_2)]\}. \quad (1.10)$$

⁹ О форвардных ставках см. раздел 1.3.1. В контексте рассматриваемой методики $f(u)$ можно интерпретировать как некоторый параметр, характеризующий ожидания инвесторов.

На основе (1.7)–(1.9) можно рассчитать цены облигаций, обращающихся на рынке, и оценить неизвестные форвардные ставки, минимизируя разницу между рассчитанной ценой и реальной рыночной ценой, например, аналогично формуле (1.4). Затем можно перейти от дисконтной функции к спот-ставкам — например, с учетом возможности полугодового реинвестирования купонных платежей:

$$R(t) = 2 \times 100 [\exp(365f(t)/2) - 1]. \quad (1.11)$$

Отметим, что ввиду практической важности кривой доходности для конкретных условий, как правило, разрабатывается специальная отдельная методика. Методик построения кривой доходности существует множество, и их подробное обсуждение выходит за рамки нашей книги. Особенности различных методик и базовые принципы построения кривой доходности на рынках разных стран представлены в технической документации [BIS, 2005].

После того как построена кривая доходности, исследователю становятся доступны исторические данные о ценности будущих денег на разные периоды и в разное время (история временной структуры процента). Используя эту историю, можно проверить эффективность рынка.

1.3. Понятие эффективности рынка

Гипотеза *эффективности рынка* (*Efficient Market Hypothesis, EMH*) — одна из центральных гипотез финансовой экономики, и проверке справедливости этой гипотезы на развитых рынках посвящены сотни, если не тысячи работ. В наиболее общей формулировке гипотезу можно сформулировать в виде следующих трех утверждений, смысл которых заключается в том, что соответствующая информация полностью определяет цены на финансовом рынке, дающие правильные сигналы инвесторам для распределения капитала между активами¹⁰:

- (1) рынок капиталов эффективен, если он полно и корректно отражает всю доступную информацию, определяющую цены рыночных инструментов;

¹⁰ Основные определения теории эффективности рынков были сформулированы Ю. Фамой [Fama, 1970, 1991] (см. также: [Malkiel, 1992]); элементарный краткий обзор и ссылки можно найти в [Бригхем, Галенски, 1997, гл. 1]. Роль информации в этом определении иногда подчеркивается терминологически, когда говорят об информационной эффективности рынков.

- (2) рынок капиталов эффективен, если цены рыночных инструментов не изменяются, когда информация становится доступной всем участникам;
- (3) рынок капиталов эффективен по отношению к некоторой информации, если невозможно получить прибыль на основании этой информации.

В зависимости от того, какая информация подразумевается в этом определении, говорят о разных формах эффективности рынка:

- слабая форма эффективности — прошлая информация о ценах инструментов;
- средняя форма эффективности — публичная информация, доступная всем участникам;
- сильная форма эффективности — вся, в том числе частная (инсайдерская), информация.

Эффективность рынка можно проверить двумя способами. Первый, — выбрать группу информированных участников рынка (например, управляющих фондами) и проанализировать полученную ими за определенный период прибыль. Если эта прибыль, скорректированная на уровень риска, превышает общерыночную, значит, рынок неэффективен [Fama, 1991]. Второй путь подразумевает сравнение прибыли по всем основным рыночным инструментам с «нормальными», ожидаемыми результатами. Под «нормальными» результатами понимаются результаты, получаемые в рамках некоторых модельных представлений, построенных на общих принципах рационального поведения участников рынка или, в более узком смысле, моделей общего экономического равновесия. Разница между действительными и «нормальными» результатами должна статистически незначимо отличаться от нуля — это и будет свидетельствовать об эффективности рынка.

При использовании второго подхода фактически тестируется совместная гипотеза об эффективности рынка и справедливости выбранной для проверки эффективности рынка модели. Трудно ожидать, что такое тестирование даст совершенно определенные выводы по поводу эффективности, поскольку любые модельные представления сильно упрощают реальность. Всегда останется возможность сказать, что отрицательный результат обусловлен несовершенством модели и для истинной проверки необходимо включить в модель еще один «важный» фактор. Вместе с тем гипотеза эффективности рынка вряд ли в чистом виде выполняется

на практике, потому что участники рынка не могут быть в совершенно одинаковом положении. Например, эффективность в средней форме предполагает доступность всей информации, но не учитывает, что существуют индивидуальные для каждого участника издержки сбора и обработки информации, что приведет каждого из них к разной экономической прибыли. Однако тестирование может дать ответ об относительной эффективности рынка, например об эффективности конкретного сегмента рынка, или о большей эффективности рынка одной страны относительно другой страны.

Подчеркнем, что гипотеза эффективности рынка не оставляет места техническому анализу, теории хаоса и нейросетевым технологиям, а также роли чисто поведенческих стимулов отдельных групп участников рынка (психология, поведенческие финансы). Это не означает, что все эти подходы неправильны или не существенны на практике. Однако все они относятся только к краткосрочным процессам принятия решений (когда нет времени «экономически» подумать), тогда как теория финансов интересуется долгосрочными закономерностями. Именно к описанию поведения инвесторов на длительных (с точки зрения принятия решений) промежутках времени и относится вопрос о тестировании основных финансовых моделей.

Логика здесь такова — только по поводу долгосрочных действий инвестор может успеть принять экономические решения, т. е. решения, основанные на экономической логике, равновесии и рациональности. Поэтому развиваемый в данной книге подход принято теперь называть *неоклассической* теорией финансов, или *финансовой экономикой*. Этот подход является мейнстримом в теории финансов, определяющим сегодня подавляющую массу публикаций в ведущих академических финансовых журналах¹¹.

Становление российского фондового рынка дало уникальную возможность для проверки ключевых модельных представлений современной финансовой науки, и результаты этих проверок представлены в этой книге. Во всех исследованиях нас интересовало, насколько молодой российский фондовый рынок, который функционирует лишь несколько лет, на котором обращаются самые простые инструменты, который практически не дает возможностей для передачи рисков, на котором представлен в основном спекулятивный капитал и почти нет институциональных инвесторов,

¹¹ Общепринято лидерство (в порядке упоминания) следующих журналов: Journal of Finance, Journal of Financial Economics, Review of Financial Studies.

эффективен по отношению к развитым рынкам, и в частности — по отношению к американскому рынку.

1.4. Понятие эффективности рынка

1.4.1. Прогнозирование по форвардным ставкам

Общепринято считать, что *форвардная ставка* (*implied forward rate*) — это процентная ставка, соответствующая рыночным ожиданиям по поводу инвестиций на определенный срок, планируемых к осуществлению через определенное время в будущем. Фактически это ставка, уравнивающая доходности различных способов инвестирования на одном инвестиционном горизонте. Так, например, если процентная ставка (спот-ставка) на срок $N + M$ равна R_{N+M} , процентная ставка на срок N равна R_N , то форвардная ставка ${}_N F_M$ на срок M через срок N определяется из уравнения

$$(1 + R_{N+M,t})^{N+M} = (1 + R_{N,t})^N (1 + {}_N F_{M,t})^M. \quad (1.12)$$

Левая часть уравнения представляет собой доходность сегодняшних инвестиций на срок $N + M$. Правая часть уравнения представляет собой доходность от сегодняшних инвестиций на срок N и реинвестиций в момент N всей полученной суммы еще на срок M . Индекс t в уравнении означает текущий период и введен для того, чтобы подчеркнуть, что данные представляют собой временные ряды.

В дальнейшем в настоящей главе для упрощения математической записи будем использовать линеаризованные уравнения, обозначая строчными буквами логарифмы соответствующих величин:

$$r = \ln(1 + R), f = \ln(1 + F).$$

Логарифмируя формулу (1.12), получим линеаризованное уравнение, с которым работать значительно удобнее, чем с предыдущим:

$$(N + M) r_{N+M,t} = N r_{N,t} + M {}_M f_{N,t}.$$

Для форвардной ставки на один период через срок N , в частности, можно записать:

$$(1 + R_{N+1,t})^{N+1} = (1 + R_{N,t})^N (1 + {}_N F_{1,t}).$$

Логарифмируя и производя простые преобразования, получим:

$${}_N f_{1,t} = r_{N,t} + (N + 1) (r_{N+1,t} - r_{N,t}). \quad (1.13)$$

Из приведенных соотношений видно, что значения форвардных ставок полностью определяются кривой доходности (кривой спот-ставок). Таким образом, можно предположить, что кривая доходности содержит в себе рыночный прогноз будущих спот-ставок.

Так, например, в момент времени t прогноз будущей спот-ставки R_1 на $(N - 1)$ периодов вперед равен наблюдавшейся в момент времени t форвардной ставке на один период через $(N - 1)$ периодов. Эту форвардную ставку, в свою очередь, можно определить, аналогично (1.13), зная в момент времени t спот-ставки на N и $(N - 1)$ периодов:

$$E_t\{r_{1,t+N-1}\} = {}_{N-1}f_{1,t}, \quad (1.14)$$

где E_t — (условное) ожидание в момент времени t ставки, указанной в фигурных скобках.

Теоретически, используя изложенную теорию, можно составить прогноз на любой будущий горизонт — зная спот-ставки, это легко сделает любой аналитик. Вопрос в том, насколько можно доверять таким прогнозам. Визуальный анализ кривых форвардных и спот-ставок мало что дает, кроме субъективных ощущений. Необходимо ответить на вопрос: действительно ли математическое ожидание случайной величины — рыночной доходности облигаций — совпадает с расчетными значениями форвардных ставок? Тогда можно будет сделать определенные выводы о прогнозируемости российского рынка государственных ценных бумаг (ГКО) и оценить статистическую значимость прогнозов, сделанных на основании прошлых цен.

1.4.2. Две формы гипотезы чистых ожиданий

Исходной посылкой в гипотезе чистых ожиданий является предположение о совершенстве и эффективности рынка ценных бумаг. На таком рынке все участники обладают абсолютно полной информацией, и эта информация отражается в ценах всех рыночных инструментов. Любые формы арбитража невозможны. Более того, цены на различные инструменты в данный момент времени устанавливаются в соответствии с интуитивными представлениями всех участников рынка относительно будущих цен и доходностей. Если это действительно так, то, зная цены всех облигаций в настоящее время, можно предсказать цену (доходность) любой облигации в будущем.

Гипотеза чистых ожиданий (Pure Expectations Hypothesis, PEH) утверждает, что на эффективном рынке не может быть арбитража за счет

межвременных предпочтений инвестора. Строго говоря, эта гипотеза существует в двух взаимоисключающих формах [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997].

Первая форма *РЕН*. Покупая короткую ценную бумагу (с погашением через один месяц), инвестор ожидает получить такой же доход, как если бы он купил длинную ценную бумагу (с погашением через N месяцев) и спустя один месяц продал ее. Математически это можно записать следующим образом:

$$(1 + R_{1,t}) = (1 + R_{N,t})^N E_t\{(1 + R_{N-1,t+1})^{-(N-1)}\}. \quad (1.15)$$

Вторая форма *РЕН*. Покупая длинную ценную бумагу (с погашением через N месяцев), инвестор ожидает получить такой же доход, как если бы он купил короткую ценную бумагу (с погашением через один месяц) и $(N-1)$ раз реинвестировал средства опять в аналогичную короткую ценную бумагу (с погашением через один месяц). В математическом виде это записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 + R_{N,t})^N &= E_t\{(1 + R_{1,t})(1 + R_{1,t+1}) \dots (1 + R_{1,t+N-1})\} = \\ &= (1 + R_{1,t}) E_t\{(1 + R_{N-1,t+1})^{N-1}\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отметим, что в общем случае обе формы *РЕН* не эквивалентны, так как

$$E_t\{(1 + R_{N-1,t+1})^{N-1}\} \neq 1/E_t\{(1 + R_{N-1,t+1})^{-(N-1)}\}.$$

Различие двух формулировок отражает и разницу в рыночном поведении инвесторов. В первом случае на рынке преобладают спекулятивные настроения, инвесторы заинтересованы в максимальной прибыли за короткое время. Во втором случае инвесторы заинтересованы в долгосрочном инвестировании и гарантированной прибыли в течение долгого времени. Обычно это различие не принимается во внимание и в большинстве практических расчетов используется прогноз по форвардным ставкам наподобие того, что представлен формулой (1.14). Однако различие в двух формулировках приводит к тому, что относительные движения процентных ставок по коротким и длинным бумагам сильно отличаются не только по величине, но и по знаку, следовательно, выяснение, какая из форм *РЕН* справедлива на российском рынке, имеет важное практическое значение для инвестора. Важно оценить также, насколько статистически значима

справедливость гипотезы чистых ожиданий, — фактически это определяет предсказуемость российского рынка государственных краткосрочных облигаций.

1.4.3. Эконометрика модели

Опишем подробно рецепт построения эконометрической модели для тестирования рынка на справедливость той или иной формы *PEH* (см.: [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]). Определим *спред доходности* (*yield spread*) как разницу логарифмов доходностей длинных (на срок N периодов) и коротких (на один период) спот-ставок:

$$s_{N,t} = r_{N,t} - r_{1,t}. \quad (1.17)$$

Если гипотеза чистых ожиданий справедлива, то можно утверждать, что спред доходности является статистически оптимальным предсказателем для изменений длинных спот-ставок на коротком периоде или изменений коротких спот-ставок в длинном периоде (в зависимости от того, какая из форм *PEH* выполняется на российском рынке).

Используя несложные математические преобразования и применяя (1.17), из выражений (1.15) и (1.16) можно получить:

- для первой формы *PEH*:

$$E_t\{r_{N-1,t+1} - r_{N,t}\} = s_{N,t}/(N-1); \quad (1.18)$$

- для второй формы *PEH*:

$$E_t\left\{\sum_{i=1}^{N-1}(1-i/N)\Delta r_{1,t+i}\right\} = s_{N,t}, \quad (1.19)$$

где $\Delta r_{1,t+i} = r_{1,t+i} - r_{1,t+i-1}$.

Теперь можно построить эконометрическую модель и произвести ее проверку методами математической статистики. Для этого построим регрессию левой части уравнения (1.18) на правую:

$$r_{N-1,t+1} - r_{N,t} = \alpha_N + \beta_N s_{N,t}/(N-1) + \varepsilon_{N,t}, \quad (1.20)$$

где $\varepsilon_{N,t}$ — случайные ошибки наблюдений.

Оценим коэффициенты α_N и β_N , используя исторические данные по спот-ставкам на российском рынке. Если первая форма *PEH* справедлива,

то коэффициенты β_N в уравнениях регрессии (1.10) должны быть статистически значимы и близки к единице. Для тестирования второй формы построим аналогичным образом линейную регрессию по уравнению (1.19). Тогда, если справедлива вторая форма *РЕН*, то коэффициенты γ_N в следующих уравнениях регрессии (1.21) должны быть статистически значимы и близки к единице:

$$g_{N,t} = \mu_N + \gamma_N s_{N,t} + \varepsilon_{N,t}, \quad (1.21)$$

где $g_{N,t} = \sum_{i=1}^{N-1} (1 - i/N) \Delta r_{1,t+i}$.

1.5. Анализ рынка ГКО

Особенность российского рынка ГКО заключалась в том, что часто изменялся не только общий уровень цен на государственные облигации, но и быстро изменялась структура цен на рынке, т. е. менялась *временная структура* процентных ставок. Движение процентных ставок было столь причудливым, что казалось совершенно случайным и непредсказуемым. Даже на коротких отрезках времени имело место изменение базовой формы кривой — ее выпуклости вверх или вниз. В качестве примера в СД 1.1 представлен ряд графиков кривых доходности к погашению, отражающих последовательное движение временной структуры процентных ставок в период относительной экономической и политической стабильности (январь — февраль 1998 г.). Интересно проанализировать, какие факторы, экономические или политические, влияли на поведение инвесторов? Или российский рынок ГКО был хаотичным и непредсказуемым? Можно ли это согласовать с какой-либо рациональностью?

Напомним, что временной структуре процента и ее применению для выработки макроэкономической политики посвящены многие сотни, если не тысячи, статей теоретического и эмпирического характера. Приложения к выработке макроэкономической политики рассмотрены в работе Кэмпбелла [Campbell, 1995]. Эта публикация является как обзором по теме, так и исследовательской работой, обосновывающей целесообразность сокращения дюрации выпускаемых правительством США инструментов. Эконометрическая техника для анализа временной структуры процента приведена в монографии [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997] (см. также: [Anderson et al, 1996; Cuthbertson, 1999]; пионерной работой является [MacCulloch, 1971]).

Модели временной структуры процента делятся на два класса. Первый класс моделей основывается только на соображениях о наилучшей

аппроксимации. Это прежде всего работы с применением обычных и экспоненциальных сплайнов [Adams, Van Deventer, 1994; Anderson et al., 1996; Cuthbertson, 1999; Fisher, Nychka, Zervos, 1995; Shea, 1985]. Это классический, хотя и несколько механистический подход. Нетрадиционные параметрические модели представлены в [Pfann, Schotman, Tscherning, 1996; Soderlind, Svensson, 1997]. Другой класс моделей берет свое начало от знаменитой работы Кокса, Ингерсолла и Росса [Cox, Ingersoll, Ross, 1980] — этот подход использует идеи ценообразования на производные ценные бумаги, а тем самым и предпочтения инвесторов, для того чтобы связать краткосрочные и долгосрочные ставки процента. Такой подход естественно назвать экономическим.

Для периода высокой инфляции (1993—1996 гг.) существенным оказывается различие между реальной и номинальной доходностями. В классической работе [Fama, Schwert, 1977b] инфляция учитывается в виде аддитивной добавки: $R = R_{real} + I$, где R — ожидаемая номинальная доходность, R_{real} — ожидаемая реальная доходность и I — ожидаемая инфляция. Эта работа была мотивирована «высокой» инфляцией в 7%. Однако при инфляции в десятки и сотни процентов вместо нее корректно применять формулу сложных процентов: $1 + R = (1 + R_{real})(1 + I)$, приводящую к нелинейным эффектам. Следует, однако, эконометрически проверить, на какую формулу ориентировался российский инвестор. Проблема инфляции обсуждается также в [Grant, Thomas, 1999; Johnson, Stulz, 1987].

В работе [Fama, Schwert, 1977a] показано, что ГЦБ являются инструментом хеджирования от инфляции. В случае российского рынка ГКО также появились как инструменты защиты от инфляции. Однако начиная с 1996 г. они превратились в высокодоходный инструмент. Связано ли превращение в высокодоходный инструмент с соответствующей рисковой премией? Конечно. Интересно проанализировать компоненты риска, связанные как с колебаниями доходности, так и с «эффектом песа» ожидания дефолта. За исключением случая с президентскими выборами скачки были связаны прежде всего с изменением ставки рефинансирования и ставки межбанковского кредита. Это позволяет рассматривать (вторичный) рынок ГКО как рынок производной ценной бумаги, имеющей в основании скачкообразный случайный процесс. Стабилизация после скачка приводит к модели с *возвращением в среднем* (процесс Орнштейна—Уленбека) [Dixit, Pindyck, 1994]. Модели такого сорта известны (см., напр.: [Hull, White, 1995]), но требуют приспособления к ситуации. Можно использовать также технику эконометрических моделей с переключением (см.,

напр.: [Bekaert, Hodrick, Marshall, 1997]). Как уже было отмечено, для развитых рынков имеется значительное количество эмпирических работ, посвященных структуре процента и проверке гипотез о поведении инвестора. Наши исследования по проверке различных форм гипотезы чистых ожиданий в период, когда можно было пренебречь инфляцией, качественно совпали с результатами, приведенными в исследованиях, процитированных в [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]. Есть основания полагать, что учет «эффекта песо» может улучшить статистическую значимость результата.

Мы уже отмечали в начале главы, что подавляющее число работ по российскому рынку государственных ценных бумаг являются вербально-описательными (например, обзоры РЕСЕР, обзоры ЦБР, аналитические материалы информационных агентств). Никаких заключений о характере рынка ГКО, его эффективности и рациональности не делается. Нам удалось найти немногие работы, выполненные на достаточно высоком эконометрическом уровне, посвященные эмпирическим исследованиям российского рынка ГКО.

В монографии авторов из ИЭПП [Энтов и др., 1998, гл. 3] предпринята первая попытка оценки рациональности поведения инвесторов на рынке ГКО в период с февраля 1994 г. по февраль 1998 г. Рассматривая временную структуру процента и анализируя соответствие форвардных ставок будущим спот-ставкам, авторы пришли к выводу, что на российском рынке предсказательные свойства форвардных ставок значительно слабее, чем на американском рынке. В большинстве случаев ожидания инвесторов вряд ли можно считать рациональными. Однако полученные результаты не позволяют полностью отвергнуть гипотезу, согласно которой форма кривой доходности зависит от ожиданий инвесторов. Следовательно, структура процентных ставок на российском рынке может содержать существенную информацию об ожиданиях. К сожалению, авторы не уточняют, как строились кривые доходности ГКО. Более подробному рассмотрению временной структуры процента посвящены две другие публикации ИЭПП [Дробышевский, 1999а, 1999б].

В монографии под редакцией Е. Гайдара [Гайдар, 1998] моделям рынка ГКО посвящены приложения 6 и 7. Что касается динамики усредненной доходности ГКО, то она определяется инфляцией и размером эмиссии новых выпусков, причем изменения темпов инфляции оказываются более весомым фактором роста доходностей, чем изменения реального объема ГКО. По мнению авторов монографии, влияние объема эмиссии на доходность ГКО следует понимать как результат действия эффекта ограничен-

ной ликвидности. Выявленная зависимость между процентной ставкой по ГКО и темпами роста государственного долга показывает, что государство в период снижения инфляции выступало в качестве главного заемщика на внутреннем рынке. Такое положение на этапе формирования финансовых рынков оказывало искажающее воздействие на их развитие.

Проведенный в [Гайдар, 1998] анализ показывает очень высокие значения корреляционной зависимости между доходностью ГКО и средними темпами роста цен за предыдущий период. Наиболее высокие значения коэффициента корреляции существуют между текущей доходностью и индексом потребительских цен с лагом 7–11 недель. Этот факт подтверждает предположение о влиянии динамики инфляции на уровень текущей доходности: устойчивое снижение темпов роста цен формирует антиинфляционные ожидания и, как следствие, понижает номинальные процентные ставки. Таким образом, авторы делают вывод: ожидания экономических агентов являются в достаточной степени рациональными.

В работе [Ивантер, Пересецкий, 1999] исследовалось взаимодействие различных сегментов российского финансового рынка (ГКО, корпоративные бумаги, валюта, межбанковские кредиты и фьючерсные контракты). Рассмотрим только наиболее тесно связанный с темой нашей работы вопрос о взаимодействии рынка ГКО и рынка фьючерсных контрактов на ГКО. Такая постановка задачи интересна тем, что теоретически для рационального инвестора форвардная ставка, полученная из кривой доходности, должна быть однозначно связана с текущей доходностью по фьючерсному контракту на облигацию с той же датой до погашения. Фактически фьючерсный контракт — это материализованная форвардная ставка. В работе исследовался промежуток времени с сентября 1996 г. по август 1997 г. Анализировалась смещенность цены фьючерсного контракта на конкретную облигацию по отношению к будущей цене облигации. Эту смещенность авторы называют премией за риск на рынке фьючерсов на ГКО. Анализ показал, что премия за риск статистически значимо отличается от нуля. Таким образом, гипотеза о несмещенности цены фьючерсного контракта как оценки будущей цены спот должна быть отвергнута. Величина премии за риск почти всегда положительна и сильно меняется с течением времени. Авторы отмечают, что наличие такой премии может служить индикатором ожиданий инвесторов. Хотя никакой экономической интерпретации премии за риск в работе не приводится, можно сделать вывод о том, что увеличение размера премии для облигаций с большим сроком до погашения свидетельствует о большей неопределенности в ожиданиях ин-

весторов и, следовательно, о слабой предсказуемости российского рынка ГКО даже при относительно коротких горизонтах инвестирования (2—3 месяца). Фьючерсам на ГКО посвящена также работа [Турмухаметова, 1998].

1.5.1. Подготовка данных для эмпирической проверки гипотезы об ожиданиях

Для того чтобы абстрагироваться от случайных и необоснованных изменений цен и доходностей конкретных облигаций, мы проанализировали динамику спот-ставок на различные сроки, рассчитанных по ценам ГКО.

Для построения кривой спот-ставок обрабатывались ежедневные данные Московской межбанковской валютной биржи (с 1 апреля 1996 г. по 14 августа 1998 г.) по результатам торгов ГКО на вторичном рынке. Строился график YTM (*Yield-To-Maturity*) — «средневзвешенная доходность различных выпусков ГКО в зависимости от числа дней до погашения». Фактически этот график представляет собой набор точек, каждая из которых соответствует сложившейся на данный момент времени доходности конкретной облигации. При построении кривой YTM исключались из анализа бумаги с малым оборотом в торговой сессии (менее 0.3% от общего дневного оборота) и очень короткие бумаги (менее 5 дней до погашения), так как доходность таких сверхкоротких бумаг в основном определялась текущей потребностью банков в денежных средствах. Исключались также купонные облигации: во-первых, потому что они имели меньшую ликвидность, чем дисконтные; во-вторых, потому что дисконтные бумаги анализировать значительно легче.

Каждый торговый день график YTM в общем случае изменяется. Но иметь дело с причудливым движением многих точек неудобно, поэтому естественно аппроксимировать этот график подходящей кривой, которую можно было бы представить в аналитическом виде. Любая точка, лежащая на этой кривой, и будет спот-ставкой. В рассматриваемой методике график YTM аппроксимировался по методу наименьших квадратов полиномом третьей степени

$$R(T) = b_0 + b_1T + b_2T^2 + b_3T^3,$$

где b_i — коэффициенты полинома, T — время до погашения.

Тогда спот-ставка на срок $\tilde{T}$ определяется следующим образом:

$$R(\tilde{T}) = b_0 + b_1\tilde{T} + b_2(\tilde{T})^2 + b_3(\tilde{T})^3.$$

Задавая значения $\tilde{T}$, равными 30, 60, ..., 180 дней, получим ежедневный набор спот-ставок на разные сроки. В анализе удобнее оперировать не числом дней до погашения, а периодом до погашения, считая периодом один месяц. Соответственно, необходимо пересчитать годовую доходность ГКО в месячную доходность, используя технику сложных процентов. Далее, спот-ставки на каждый срок (1 мес., 2 мес., ..., 6 мес.) усреднялись в течение месяца, в результате получался ежемесячный набор спот-ставок на разные сроки.

На рис. 1.1 в качестве примера приведены ежедневные доходности к погашению двух различных спот-ставок: короткой и длинной, на срок 30 дней и 180 дней, соответственно. Видно, как сильно изменялся спред доходности, причем довольно часто короткая спот-ставка превышала значение длинной, т.е. наблюдалась инверсия кривой доходности.

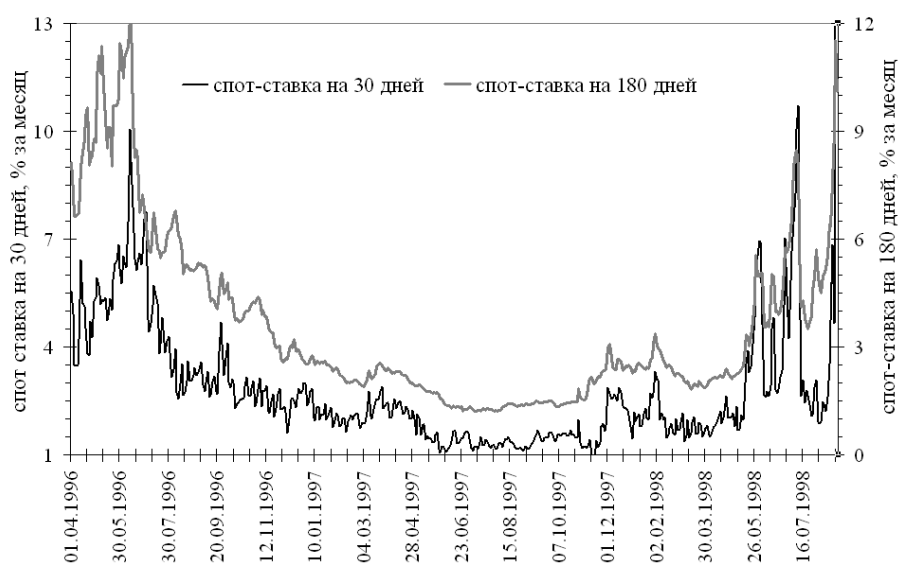


Рис. 1.1. Динамика изменений короткой (1 мес.) и длинной (6 мес.) спот-ставок на российском рынке

Временной ряд ежемесячных значений спот-ставок на разные сроки дает возможность вычислить форвардные ставки на рынке ГКО и, если на российском рынке выполняется гипотеза рациональных ожиданий (или ее наиболее жесткая форма — гипотеза чистых ожиданий), — предсказать будущие процентные ставки и сравнить их с действительными (*ex-post* анализ).

1.5.2. Результаты эмпирической проверки гипотезы чистых ожиданий

Статистический анализ показал, что коэффициенты β_N (для $N = 2, 3, 6$) в уравнении (1.20) близки к единице, но отрицательны по величине. Коррекция данных на серийную корреляцию приводит к тому, что коэффициент β_N (для $N = 2$) становится статистически незначимым и остается по-прежнему отрицательным (табл. 1.1). Это означает, что первая форма *РЕН* на российском рынке не выполняется. Данный вывод согласуется с выводом, полученным при анализе рынка государственных облигаций США (см.: [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]), где первая форма *РЕН* также не выполняется. Из того факта, что для относительно больших N коэффициент β_N статистически значим и отрицателен, можно сделать вывод, что на российском рынке ГКО высокий спред доходности, скорее всего, должен приводить в будущем в коротком периоде к падению доходности длинных облигаций.

Статистический анализ показывает, что вторая форма *РЕН* более правдоподобна на российском рынке: коэффициенты γ_N в уравнении (1.21) хотя и значительно меньше единицы, но имеют положительный знак. Статистическая значимость коэффициентов γ_N очень низка; кроме того, присутствует сильная автокорреляция остатков. Коррекция данных на серийную корреляцию приводит к тому, что коэффициенты γ_N становятся статистически более значимыми (например, коэффициент γ_3 статистически значим на уровне 90%) и по-прежнему положительными (табл. 1.1). Это означает, что вторая форма *РЕН* на российском рынке, скорее всего, выполняется, но временной горизонт предсказаний очень не глубок. Данные выводы согласуются (но только качественно, а не количественно) с выводами аналитиков, исследовавших американский рынок [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]. Таким образом, опираясь на результаты тестирования второй формы *РЕН*, из того факта, что для малых N коэффициент γ_N положителен, можно сделать вывод о том, что на российском рынке ГКО высокий спред доходности, скорее всего, должен приводить в будущем в длинном периоде к росту доходности коротких облигаций.

Таким образом, статистический анализ данных по результатам вторичных торгов ГКО показывает, что гипотеза чистых ожиданий на российском рынке строго не выполняется ни в какой своей форме, хотя вторая форма гипотезы все же более правдоподобна. Предсказуемость российского рынка очень низка по сравнению с американским, временной горизонт прогнозирования будущих цен (доходностей) на основании гипотезы

Таблица 1.1

Результаты эконометрической проверки гипотезы чистых ожиданий

		N=2	N=3	N=6
β_N	Россия	-0.502(0.329)	-1.322(0.403)	-3.638(1.014)
β_N	США	0.003(0.191)	-0.145(0.282)	-0.835(0.442)
γ_N	Россия	0.280(0.164)	-0.066(0.139)	0.361(0.219)
γ_N	США	0.502(0.096)	0.467(0.148)	0.320(0.146)

Примечание: в скобках приведены значения стандартной ошибки.

чистых ожиданий не превышал одного месяца. Из данных табл. 1.1 видно, что для российского рынка коэффициенты γ_N значительно меньше, чем для американского рынка, что свидетельствует о большей случайности российского рынка и его меньшей предсказуемости даже в коротком периоде (на один месяц). Прогнозирование доходности государственных краткосрочных облигаций на более длительный срок вообще не имело смысла.

Более полный статистический анализ данных, в частности анализ остатков $\varepsilon_{N,t}$ на соответствие нормальному закону распределения (после устранения серийной корреляции), показывает, что во временном ряду спот-ставок на российском рынке существовал короткий период, когда ожидания инвесторов были абсолютно аномальными и не могут быть объяснены в рамках рассмотренной теории. Трудно даже трактовать результаты анализа в этой временной точке. Этот период, май — июнь 1996 г., — канун президентских выборов в России. Ясно, что политические события так же, как и ожидание этих событий, должны влиять на поведение инвесторов, однако то, что эти ожидания проявились при статистическом анализе российского рынка столь ярко, свидетельствует о том, что политические события, возможно, оказывали даже более сильное влияние на временную структуру процентных ставок, нежели экономические показатели.

Обращает на себя внимание еще одна интересная особенность, выявленная при анализе временной структуры процентных ставок. На рис. 1.2 приведены график усредненной месячной доходности короткой спот-ставки (на срок 1 месяц) и график форвардных ставок ${}_1F_{1,t}$, вычисленных по формулам (1.13)–(1.14), которые можно рассматривать как прогноз короткой спот-ставки. Из рисунка видно, что в августе — сентябре 1997 г., в декабре 1997 г., а также в мае — июне 1998 г. действительные процентные

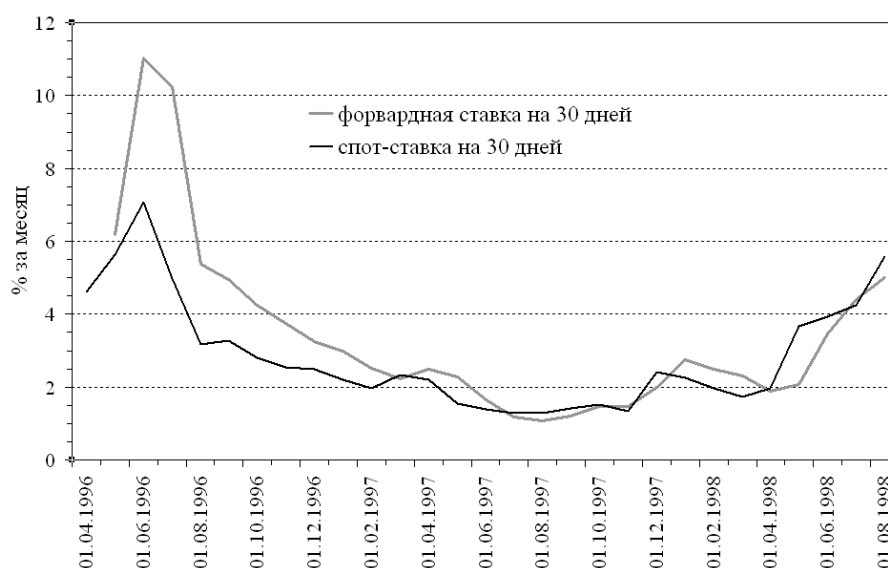


Рис. 1.2. Графики прогнозируемых и действительных процентных ставок по коротким ГКО (форвардная и спот-ставка на 30 дней)

ставки были выше прогнозируемых, соответствующих рыночным ожиданиям. Именно эти периоды (август 1997 г., ноябрь 1997 г. и май 1998 г.) были названы бывшим премьер-министром РФ С. В. Кириенко как знаковые даты в развитии финансового кризиса в России, причем именно в мае 1998 г. (по словам Кириенко) стало ясно, что кризиса не избежать. Эти же даты (октябрь 1997 г. и май 1998 г.) были названы критическими и бывшим председателем Центрального банка РФ С. К. Дубининым.

Возможно, что это случайное совпадение, однако ему можно попытаться дать экономическое обоснование. Высокие процентные ставки на рынке государственных ценных бумаг при относительно низкой инфляции свидетельствуют о недоверии участников рынка к эмитенту (государству), рынок постоянно ожидает ухудшения ситуации. Государство посредством активных действий Центрального банка и Министерства финансов старается не допускать ухудшения рыночной ситуации, поэтому процентные ставки всегда оказываются ниже ожидаемых. Однако в конце 1997 г. и особенно в мае 1998 г. процентные ставки возросли сильнее, чем этого ожидали участники рынка, — государство либо действовало неумело, либо уже не могло влиять на рыночную ситуацию.

Остановимся на возможных ошибках эмпирической проверки. Ошибка может быть связана с выбором типа кривой для аппроксимации кривой доходности. Выбор кубического полинома в [Бухвалов, Окулов, 2000] достаточно произволен. Отказ от техники сплайнов в этой работе был обусловлен трудностью интерпретации большого числа перегибов на кривой доходности — трудно обосновать более чем один перегиб кривой доходности. То, что «best fit» статистически (тем более в смысле метода наименьших квадратов) работает только для нормальных распределений доходностей¹², может оказаться бессмысленным экономически. Однако и использование сплайн-интерполяции третьей степени в дальнейших исследованиях [Бухвалов, Крюковская, Окулов, 2001; Крюковская, 2003] опять-таки не привело к каким-либо качественным различиям (табл. 1.2). При сравнении результатов, полученных при тестировании *РЕН* для четырех различных способов построения кривой доходности на рынке ГКО, выяснилось, что значения оцениваемых коэффициентов меняются незначительно и выводы при проверке обеих форм гипотезы качественно не меняются.

Ошибка могла быть обусловлена способом усреднения данных для построения кривой доходности. Первоначально в [Бухвалов, Окулов, 2000] использовался метод средних арифметических, но в работах [Энтов, 1999; Дробышевский, 1999a, 1999b] авторы применяли метод средних геометрических. Нет никакого однозначного рецепта о выборе между этими двумя альтернативами. Теоретически средние арифметические соответствуют накопленной доходности, а геометрические — доходности по ходу торгов. На какую доходность ориентировался инвестор — неизвестно, а это может быть важным, так как проверяется поведенческая гипотеза. В связи с этим в работе [Бухвалов, Крюковская, Окулов, 2001] были повторены вычисления со средним геометрическим усреднением. Выяснилось, что результаты при этом меняются незначительно и никакие выводы качественно не изменяются (табл. 1.2).

1.5.3. Влияние ставки налогообложения на доходность ГКО

Интересная возможность проследить рациональность поведения российских инвесторов представилась после введения налога на операции с

¹² Последнее условие не выполнено для российского рынка [Баринов, Первозванский, Первозванская, 1999].

Таблица 1.2

Результаты эконометрической проверки *REN* для различных способов построения кривой доходности

N	Приближение полиномами без учета налога (среднее арифметическое усреднение)	Приближение полиномами без учета налога (среднее геометрическое усреднение)	Приближение сплайнами без учета налога (среднее геометрическое усреднение)	Приближение сплайнами с учетом налога (среднее геометрическое усреднение)
2	β	-0.502	-0.578	-0.693*
	γ	0.280	0.211	0.154
3	β	-1.322*	-1.328*	-0.837*
	γ	-0.066	-0.074	0.113
6	β	-3.638	-2.051	-0.028
	γ	0.361	-0.036	0.280***
				-0.204

Примечания:

* — значимы на 95%-м уровне;

** — значимы на 99%-м уровне;

*** — значимы на 90%-м уровне.

ГКО в 1997 г. (до этого доходы от операций с ГКО налогом не облагались). В работе [Бухвалов, Крюковская, Окулов, 2001] в одном из алгоритмов построения спот-ставки было учтено введение 21 января 1997 г. ставки налогообложения доходов по ГКО на уровне 15% (до этого момента доходы по ГКО вообще налогом не облагались). Представляло интерес выяснить, насколько полно инвесторы учитывали величину налога при формировании своих представлений о величине требуемой доходности и как происходило их приспособление к новым условиям. Зададимся целью вычисления эффективной ставки налога — ставки, требуемой инвесторами в компенсацию изымаемых у них 15%. Для этого разделим все бумаги, обращавшиеся на рынке в период после введения налога, на две группы: в первую группу отнесем бумаги, обращавшиеся в этот период, но выпущенные до даты введения налога, а во вторую — после этой даты, и проверим, составляет ли разница 15%. Начиная с какого-то момента можно будет с достаточной точностью построить кривую временной структуры процентных ставок отдельно по бумагам каждого типа, приблизив данные по торгам в рассматриваемый день полиномами третьей степени (рис. 1.3).

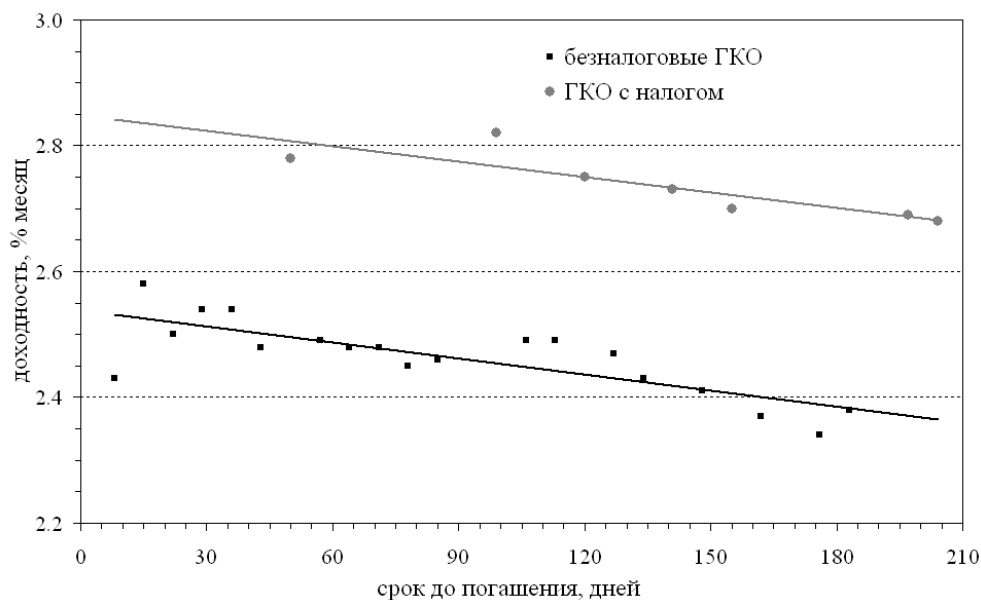


Рис. 1.3. Кривые доходности, построенные по безналоговым ГКО и налогооблагаемым ГКО

Построение кривой доходности необходимо ввиду того, что не существовало бумаг, имевших одинаковый срок до погашения, но принадлежащих к разным типам. Как и следовало ожидать, доходность бумаг, выпущенных до введения налога, меньше, чем доходность налогооблагаемых бумаг, — попытаемся определить, насколько. Зафиксировав узлы в пересечении областей, где оба полинома наиболее точно приближают исходные данные, — например, дни, соответствующие 1, 2 и 3 месяцам до погашения, — получим доходности пар виртуальных ГКО, с одинаковыми сроками до погашения, одни из которых облагались налогом, а другие — нет. Используя формулы расчета эффективной доходности ГКО к погашению с учетом налогообложения и без него и принимая эффективную ставку налога в качестве неизвестного параметра tax , можно приравнять доходности бумаг первого и второго типов с одинаковыми сроками до погашения и оценить этот параметр:

$$\frac{N - (N - P_2(T)) tax}{P_2(T)} = \frac{N}{P_1(T)},$$

где $P_1(T)$ и $P_2(T)$ — значения приближающих полиномов для срока T , N — номинал облигации. Далее параметр tax усреднялся для каждого торгового дня.

Проделав данную процедуру для временного интервала, где возможно построить кривую доходности по бумагам обоих типов (с 28 февраля до 7 июля 1997 г.), авторы получили временной ряд для оценки эффективного налога. Оказалось, что налог равен в среднем 11.27%, причем разброс невелик — наибольшее значение 11.44%, а наименьшее — 11.18%.

1.5.4. Взаимосвязь между ставкой рефинансирования и доходностью по ГКО

Еще одним, несомненно, важным моментом в анализе истории формирования временной структуры процентных ставок по ГКО было неоднократное изменение ставки рефинансирования ЦБ России. Через изменение ставки рефинансирования Центральный Банк имел возможность влиять на доходности, требуемые банками-дилерами при первичном размещении ГКО. Уже из графика динамики средневзвешенной доходности ГКО и ставки рефинансирования видно, что между этими временными рядами существует определенная взаимосвязь (рис. 1.4).

Для изучения этой взаимосвязи рассматривались различные модели, связывающие значения средневзвешенной доходности ГКО с лаговыми



Рис. 1.4. Динамика средневзвешенной доходности ГКО и ставки рефинансирования

значениями ставки рефинансирования. Было установлено, что в полной мере влияние изменения ставки рефинансирования на средневзвешенную доходность проявляется при построении регрессионной модели с лагом в 6 торговых дней. Обозначим через GKO_t средневзвешенную ставку ГКО в день t и через ref_{t-k} — ставку рефинансирования, установленную на дату $t - k$. Тогда регрессионная модель имеет вид:

$$GKO_t = 8.313 + 0.671 \times ref_{t-6},$$

причем оба коэффициента значимы на 99%-м уровне. Тем самым была получена оценка коэффициента эластичности реакции средневзвешенной доходности на изменение ставки рефинансирования — 0.671.

Полученные результаты демонстрируют тот факт, что инвесторы довольно быстро приспосабливались к новым условиям — будь то изменение ставки рефинансирования или введение налога. Следовательно, необходимо учитывать эти важные факторы при анализе временной структуры процентных ставок на рынке ГКО. Включение ожиданий инвесторов по поводу возможного изменения ставки рефинансирования в классическую гипотезу чистых ожиданий могло бы существенно улучшить результаты.

Ожидание инвесторами некоторого события, которое может и не случиться в рассматриваемый период, но которое было бы нерационально исключить из набора возможностей, может воздействовать на поведение рациональных агентов и состояние рыночного равновесия. Требование инвесторами необоснованно большой премии может быть результатом ожидания ими неприятного события, которое может и не произойти в данной выборке. Это явление известно как «эффект песо». Своим названием «эффект песо» обязан долгое время наблюдавшемуся в Мексике превышению форвардных ставок на мексиканское песо над наблюдавшимся в действительности курсом. «Эффект песо» возникает всякий раз, когда распределение данных включает чрезвычайно низкую вероятность события, приводящего к весьма неприятным последствиям для экономических агентов. Поскольку это событие имеет низкую вероятность, оно вряд ли в действительности наблюдается в имеющейся небольшой выборке данных, но, так как его последствия катастрофические, возможность его наступления существенно воздействует на решение экономических агентов, которые, в свою очередь, определяют равновесные цены и ставки доходности.

В более широком смысле проблема песо возникает всякий раз, когда частоты состояний *ex-post* по имеющимся данным существенно отличаются от *ex-ante* вероятностей их наступления, причем эти отклонения вносят серьезные искажения. Например, ожидание инвесторами повышения процентных ставок отражается в росте спреда между долгосрочными и краткосрочными ставками, однако, если ожидания повышения в следующем периоде не подтвердились, то ставки останутся на том же уровне, а возможно, даже понизятся. Тогда увеличение спреда *ex-post* окажется неоправданным, что является свидетельством невыполнения гипотезы чистых ожиданий. Включение же ожиданий инвесторов по поводу возможного переключения режима в классическую гипотезу чистых ожиданий может существенно улучшить результаты. Для преодоления трудностей такого рода в работе [Bekaert, Hodrick, Marshall, 1997] была предложена модель для краткосрочной процентной ставки, учитывающая переключение режимов. В состоянии каждого из режимов краткосрочная процентная ставка удовлетворяет авторегрессионному процессу первого порядка с условной гетероскедастичностью, а переключение режимов является марковским процессом. В работе было продемонстрировано существенное улучшение результатов тестирования *РЕН* с учетом переключения режимов для США, Германии и Великобритании; проверка данной гипотезы для России может являться целью дальнейших исследований.

1.6. Анализ рынка облигаций Санкт-Петербурга

1.6.1. Построение кривой спот-ставок на рынке облигаций Санкт-Петербурга

Настоящий подраздел посвящен проблемам анализа временной структуры процента для облигаций субъектов федерации, носящих название государственных именных облигаций (ГИО).

В отличие от большинства регионов, которые были вынуждены осенью 1998 г. отказаться от платежей или предложить владельцам облигаций их погашение в неденежной форме, Санкт-Петербург смог в полном объеме рассчитываться по всем своим обязательствам. В результате вторичный рынок ГИО продолжал успешно функционировать и являлся после кризиса 1998 г. наиболее развитым рынком российских субфедеральных облигаций. В 2002 г. (на момент написания работы [Окулов, Корнеев, 2002а, 2002б]) на этом рынке обращалось 42 выпуска облигаций (5 дисконтных — со сроком погашения до 1 года и 37 купонных — со сроком погашения до 4 лет). Номинал облигаций составлял 100 руб. Объем рынка по глобальным сертификатам достигал 10.9 млрд руб. Среднедневной объем сделок превышал 50 млн руб., среднее количество сделок — более 200 в день.

Конкретный алгоритм расчета спот-ставок был разработан именно для этого рынка [Окулов, Корнеев, 2001, 2002а, 2002б]. Авторы отказались от техники сплайнов, так как на неразвитом российском рынке с большими спредами котировок, наличием «договорных» сделок такая методика приведет к причудливо изогнутой кривой доходности с большим числом перегибов.

В предложенной авторами [Окулов, Корнеев, 2002а, 2002б] методике в качестве базовых величин используется набор спот-ставок, соответствующих доходности виртуальных дисконтных облигаций со сроками до погашения 1, 3, 6 месяцев и 1, 2, 3, 4 года ($R_{30}, R_{90}, R_{180}, \dots, R_{1440}$). Выбор этих сроков в значительной степени произволен, однако в ближней области кривая доходности, как правило, более изменчива, что приводит к необходимости использования большего числа базовых точек в этой части кривой (этот подход используется практически во всех методиках). Изначально значения спот-ставок $R_{30}, \dots, R_{1440}$ выбираются достаточно произвольным образом, например как доходности к погашению близких по срокам облигаций.

Знание спот-ставок позволяет рассчитывать «справедливые» цены облигаций как текущие значения (*present value*) потоков платежей, дисконтированных с использованием спот-ставок на соответствующие сроки. При этом, как правило, необходимо знание не только значений спот-ставок в реперных точках (виртуальных облигаций), но и спот-ставок на любые сроки. Вычисление этих значений может осуществляться по-разному, авторами для простоты был использован метод линейной интерполяции кривой доходности между узловыми точками. Так, например, спот-ставка на кривой доходности, соответствующая 48 дням, рассчитывается по следующей формуле:

$$R_{48} = R_{30} + (48 - 30) \frac{(R_{90} - R_{30})}{(90 - 30)}. \quad (1.22)$$

Таким образом, через исходные семь неизвестных может быть вычислена спот-ставка на любой срок, что позволяет определить справедливую цену ($P_{\text{расч.}}$) облигации с любыми параметрами. Эта цена будет функцией семи неизвестных спот-ставок, соответствующих исходным виртуальным дисконтным облигациям.

Если известна расчетная цена облигации, то может быть определена разница dP между реальной ценой, сформировавшейся в результате рыночных торгов, и расчетной ценой $dP = P - P_{\text{расч.}}$. Минимизируя эту разницу по всем облигациям, можно найти семь неизвестных спот-ставок:

$$\sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{облигациям}}} dP^2 \rightarrow \min. \quad (1.23)$$

Для этого необходимо, чтобы на рынке торговались не менее 7 различных облигаций, со сроками до погашения более-менее равномерно распределенными в интервале от 1 месяца до 4 лет. В послекризисный период единственным сегментом рынка государственных облигаций (если не считать рынок ГКО–ОФЗ), где обращалось значительное число ценных бумаг и где было оправдано применение кривой доходности, являлся рынок ГИО Санкт-Петербурга (ГИО СПб).

Для поиска доходностей к погашению семи виртуальных облигаций (спот-ставок) использовались данные о дисконтных облигациях (выпуски RU21xxxGSP) и облигациях с фиксированным купоном (выпуски RU25xxxGSP) — всего около 25 облигаций. Был принят алгоритм расчета доходностей виртуальных облигаций в два этапа. На первом этапе находились доходности виртуальных облигаций со сроками до погашения 30,

90, 180 и 360 дней — для расчета использовались только дисконтные облигации с нулевым купоном. На втором этапе рассчитывались доходности оставшихся виртуальных облигаций (720, 1080, 1440 дней до погашения). При этом для расчетов использовались все торгующиеся на рынке купонные облигации. Доходности виртуальных облигаций со сроками погашения 30, 90, 180 и 360 дней на втором этапе считались фиксированными.

Использование двухступенчатой процедуры связано с тем, что дисконтные облигации с короткими сроками обращения, как правило, более ликвидны и более точно оценены рынком. Это приводит к тому, что «короткие» спот-ставки могут быть оценены более точно и для этого не требуется знание длинных спот-ставок. Для расчетов использовались ежедневные данные о средневзвешенных ценах по результатам торговой сессии на Санкт-Петербургской Валютной Бирже (СПВБ).

Первоначальные расчеты кривой спот-ставок показали, что значения доходностей виртуальных облигаций достаточно стабильны. Резких, экономически неоправданных колебаний доходностей не происходит. Исключение составляет лишь точка, соответствующая 30-дневной виртуальной облигации. Такая ситуация связана с тем, что доходность этой облигации определяется малым количеством реальных облигаций, срок до погашения которых находится в интервале 0–90 дней. Обычно в этот диапазон попадает не более 2–3 облигаций, что приводит к значительному влиянию цены каждой облигации на общий результат. Ситуацию усугубляет то, что доходности облигаций с короткими сроками до погашения имеют сильную волатильность. Главным образом это относится к облигациям со сроками меньше 10–15 дней. Поэтому для исключения выбросов в ближней части кривой спот-ставок представлялось разумным не использовать для расчетов сверхкороткие облигации (в расчетах облигации со сроком до погашения менее 10 дней не учитывались).

Другим важным моментом, от выбора которого зависит положение первой точки (доходности 30-дневной облигации), является выбор доходности соответствующей облигации с практически нулевым сроком до погашения (в пределе стремящемся к нулю). Здесь возможны следующие варианты:

- положить эту доходность равной нулю. Такой выбор можно оправдать тем, что заимствования на нулевой срок должны осуществляться с нулевой ставкой. Проблема возникает в связи с тем, что ставка однодневных заимствований уже значительно отличается от нуля, в результате реальная кривая доходности в ближней области достаточно сильно выпукла вверх. Использование для аппроксимации

кривой доходности кусочно-линейной функции приводит к значительному завышению 30-дневной точки;

- решением данной проблемы мог бы стать выбор доходности в нулевой точке, равной какой-либо из ставок межбанковского кредита, например MIBOR на один день. Однако этот вариант неприемлем в силу большой волатильности ставок на межбанковском рынке, в условиях неразвитого рынка производных инструментов и больших транзакционных издержек;
- третьим вариантом, на котором авторы и остановились, является выбор спот-ставки в нуле, равной доходности 30-дневной виртуальной облигации. Конечно, такой выбор также искажает реальную ситуацию, но, как показало сравнение результатов, получаемых при различных вариантах расчетов, 30-дневная точка в последнем случае менее волатильна.

На рис. 1.5 представлены примеры кривых спот-ставок на рынке ГИО Санкт-Петербурга. Круглые точки обозначают спот-ставки для виртуальных облигаций, для сравнения приведены доходности к погашению реальных дисконтных и купонных облигаций, рассчитанные СПВБ.

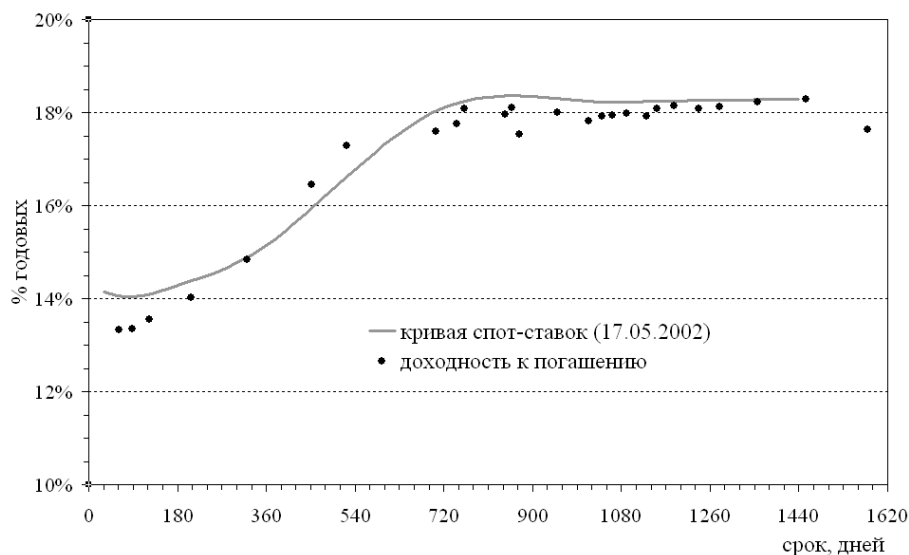


Рис. 1.5. Пример построения кривой спот-ставок на рынке облигаций Санкт-Петербурга

1.6.2. Эффективность первичного рынка облигаций Санкт-Петербурга

Важным применением кривой спот-ставок является возможность ее использования для оценки характеристик (цены или доходности к погашению) новых облигаций, размещаемых на первичных аукционах.

Для дисконтных облигаций доходность к погашению должна быть равна спот-ставке с соответствующим сроком до погашения. Для купонных облигаций процедура оценки несколько сложнее, но здесь также производится поиск справедливой цены через значения соответствующих спот-ставок. Так, цена любой купонной облигации может быть выражена через значения спот-ставок $R(t)$, определенных для моментов времени выплаты купонов и номинала следующим образом:

$$P_{\text{расч.}} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{[1 + R(T(i))]^{T(i)}} + \frac{P_0}{[1 + R(T(n))]^{T(n)}}. \quad (1.24)$$

С использованием этой формулы была проведена оценка облигаций ГИО СПб, размещенных на первичных торгах в конце 2001 — начале 2002 г.

Если эмитент устанавливает цену размещения на аукционе, близкую к справедливой цене облигации, то цена на вторичных торгах должна быть близка к цене размещения и вторичные торги должны быть активными. Эмитент, вообще говоря, устанавливает цену отсечения (тем самым влияя на цену размещения), исходя из своих соображений, и при этом не обязательно ориентируется на справедливую цену облигаций. Зная об этом, участники вторичных торгов должны интуитивно¹³ оценивать действия эмитента и реагировать на них единственно доступным способом — низким спросом на облигацию, если ее цена отсечения слишком высока. Это будет косвенным подтверждением эффективности рынка ГИО СПб.

В качестве примера можно привести облигацию RU25024GSP, размещенную 14.11.2001 г. На основании кривой спот-ставок от 13.11.2001 г. расчет по формуле (1.24) дает прогнозное значение цены $P_{\text{расч.}} = 84.34$ руб. Это значение близко к средневзвешенной цене размещения 84.06 руб., более того, эмитент дал небольшую премию при размещении, и активность вторичных торгов была высока (спрос был так велик, что цена по результатам первого дня торгов даже превысила справедливую). Средневзвешенная цена на вторичных торгах 15.11.2001 г. — 84.65 руб.

¹³ В этот период кривая доходности на рынке ГИО СПб организатором торгов не рассчитывалась и участникам рынка не были известны ни спот-ставки, ни справедливая цена облигации.

Результаты прогнозирования цен других облигаций приведены в табл. 1.3. Анализ полученных результатов позволяет сделать ряд интересных выводов. Как правило, средневзвешенная цена аукционов меньше (на 0.23 руб.), чем цена, рассчитанная с использованием кривой спот-ставок. С одной стороны, это может свидетельствовать о недостаточной спецификации модели (какие-либо важные факторы, влияющие на цену новых облигаций, могли быть не учтены). Однако, с другой стороны, разница в цене может быть следствием предоставления эмитентом некоторой аукционной премии дилерам для увеличения их активности на первичных торгах. С этой точки зрения расчетная цена должна более точно предсказывать цену на вторичных торгах, чем цену на аукционе. Проведенные расчеты подтвердили это предположение. Средняя ошибка прогноза для первого дня торгов в 2.5 раза меньше, чем для аукциона.

В рассмотренной выборке присутствуют облигации (RU25027, RU25029), которые были размещены на первичных торгах без премии. Наоборот, средневзвешенная цена аукциона была больше, чем прогнозная. В этом случае рынок должен интуитивно чувствовать, что цена слишком велика по сравнению со справедливой, и сделок по столь высокой цене быть не должно. Действительно, на вторичных торгах в первые дни после аукциона по таким облигациям сделок практически не было (ноль сделок и одна сделка, соответственно) в отличие от среднего количества 25 для остальных бумаг.

Таблица 1.3

Результаты прогнозирования цен облигаций Санкт-Петербурга на первичных аукционах

Облигация	Количество дней до погашения	Размер купона (% от номинала)	Прогнозная цена, руб.	Средневзвешенная цена на аукционе, руб.	Ошибка прогноза относительно аукциона, руб.	Цена отсечения на аукционе, руб.	Средневзвешенная цена в первый день торгов, руб.	Ошибка прогноза относительно первого дня торгов, руб.	Количество сделок в первый день торгов
RU25024GSP	1421	от 12 до 5	84.34	84.06	0.28	83.30	84.65	-0.31	68
RU25025GSP	1127	от 9 до 5	89.03	88.62	0.41	88.32	88.92	0.11	9
RU25026GSP	546	от 7 до 6	93.96	93.96	0.00	92.61	93.92	0.04	7
RU25027GSP	602	от 10 до 7	96.29	97.28	-0.99	97.22	сделок не было		
RU25028GSP	1505	от 11 до 7	89.65	89.13	0.52	88.79	89.19	0.46	5
RU25029GSP	637	3	92.14	92.35	-0.21	92.30	92.70	-0.56	1
RU25030GSP	1645	от 7 до 5	82.93	82.78	0.15	82.50	83.30	-0.37	53
RU25031GSP	1316	от 9 до 6	91.12	90.36	0.76	90.30	90.45	0.67	32
RU25032GSP	1456	от 7 до 6	90.00	88.81	1.19	88.70	89.34	0.66	46
Среднее					0.23		0.09	0.25	
Среднеквадратичное отклонение						0.62		0.48	

Примечания: купонный период облигации RU25029GSP составляет 91 день, для остальных облигаций — 182 дня; номинал всех облигаций равен 100 руб.

Кейс 1.1. Поиск недооцененных облигаций на примере рынка ГИО Санкт-Петербурга

Еще одно применение кривой спот-ставок может быть связано с поиском квази-арбитражных возможностей на рынке — определением недооцененных и переоцененных облигаций. Для этого используются отклонения рыночных цен реальных облигаций от цен, рассчитанных с использованием кривой спот-ставок:

$$\Delta = P - P_{\text{расч.}}, \quad (1.25)$$

где P — рыночная цена облигации, $P_{\text{расч.}}$ — расчетная цена, вычисленная по формуле (1.24). Если величина Δ отрицательна, то облигация является недооцененной относительно облигаций с тем же сроком до погашения и можно ожидать роста ее цены относительно других облигаций с близкими сроками погашения в ближайшем будущем. Если Δ больше нуля, то облигация переоценена по сравнению с другими облигациями и можно прогнозировать уменьшение цены (или меньшего роста цены по сравнению с другими облигациями с близкими сроками до погашения). Пример, иллюстрирующий ситуацию на рынке облигаций Санкт-Петербурга, представлен на рис. 1.6.

Рассмотрим группу облигаций с примерно одинаковым сроком до погашения (1050–1150 дней). Сравнивая две облигации с близкими сроками погашения, можно предположить, что облигация RU25020GSP является переоцененной по сравнению с облигацией RU25022GSP. Если это так, то можно ожидать, что доходность переоцененной облигации RU25020GSP будет в будущем увеличиваться относительно недооцененной облигации RU25022GSP. Действительно, в течение следующих 4 торговых дней — отсутствие значительных изменений ближайшей спот-ставки (на 1080 дней) и доходности к погашению облигации RU25022GSP, и вместе с тем наблюдалось монотонное увеличение доходности к погашению облигации RU25020GSP (табл. 1.4).

Оценки показывают, что, коротко продав облигацию RU25020GSP и купив на полученные средства облигацию RU25022GSP, дилер получил бы (с учетом дюрации облигаций) практически безрисковый (квазиарбитражный) доход в размере 1.3% от величины позиции. В данном случае этот доход реализовался за 4 дня, что соответствует доходности, равной примерно 100% годовых.

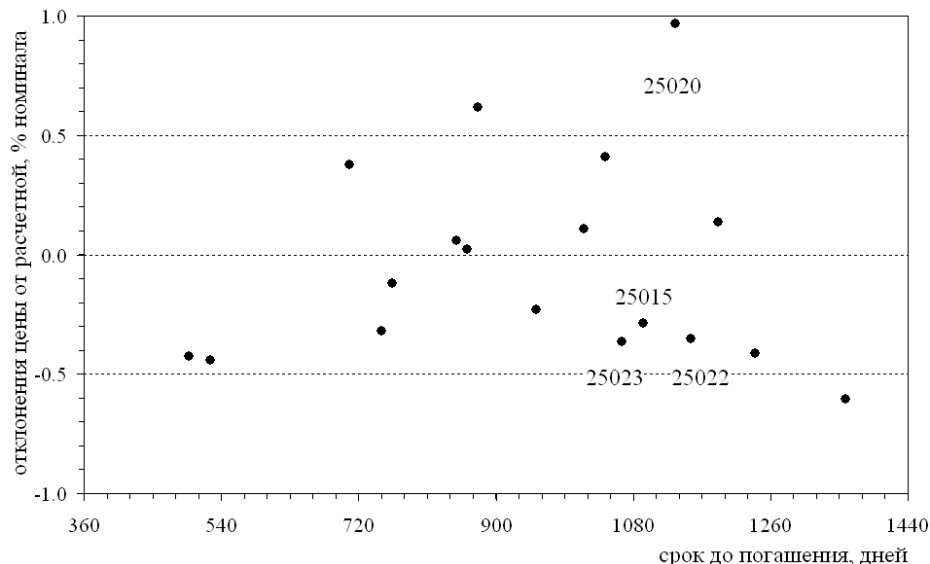


Рис. 1.6. Отклонения рыночных цен от расчетных для различных купонных облигаций Санкт-Петербурга (дата торгов 14.05.2002 г.)

Задачи к главе 1

1. При каких условиях форвардные ставки могут оказаться отрицательными? Придумайте пример, иллюстрирующий эту ситуацию.
2. Докажите, что при непрерывном начислении процентов для форвардной ставки справедливо уравнение

$$f_n = r_n + n(\partial r_n / \partial n).$$

Указание. Представьте форвардную ставку как доходность владения облигацией на горизонте от n до $n + \Delta n$.

3. Выведите формулы (1.18) и (1.19).

Указание: При выводе (1.19) выразите ставку на длинный срок через последовательность коротких ставок в будущем.

4. Имеет ли содержательный смысл гипотеза чистых ожиданий на рынке корпоративных облигаций?

Указание. Представьте доходность корпоративных облигаций одного эмитента как сумму доходности государственной облигации с тем же сроком погашения и надбавки за риск дефолта по корпоративной облигации.

Таблица 1.4

**Пример квазиарбитражной ситуации на рынке ГИО
Санкт-Петербурга**

Дата торгов	Доходность к погашению RU25020GSP, % годовых	Доходность к погашению RU25022GSP, % годовых	Спот-ставка на 1080 дней, % годовых
14.05	17.86	18.51	18.62
15.05	18.18	18.39	18.46
16.05	17.91	18.10	18.30
17.05	18.20	18.09	18.23
18.05	18.33	18.36	18.32

5. Покажите, что в качестве приближения к кривой спот-ставок лучше использовать не кривую доходности к погашению различных выпусков ГЦБ, а кривую в осях «доходность к погашению выпуска — дюрация выпуска».

Указание. Покажите, что в первом приближении, на инвестиционном горизонте, равном дюрации облигации, инвестор получит (с учетом реинвестирования купонов) точно определенную сумму независимо от изменения ситуации на рынке.

6. Используя данные по спот-ставкам, публикуемые ММВБ (<http://www.micex.ru/marketdata/indices/state/yieldcurve/chart>), протестируйте гипотезу чистых ожиданий на российском рынке за период 2006—2007 гг.

Приложения к главе 1

П 1.1. Метод обработки данных и результатов статистического анализа

Материал этого Приложения не является оригинальным (его можно найти, например, в [Pindyck, Rubinfeld, 1998]) и приводится исключительно для удобства читателя. Запишем уравнение регрессии в матричной форме:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad (1.26)$$

где Y, ε — вектора размерностью $(T \times 1)$, X — матрица размером $(T \times 2)$, T — число наблюдений.

Оценим сначала методом наименьших квадратов (*ordinary least-squares estimation*) коэффициенты β :

$$\beta = (X'X)^{-1}(X'Y).$$

Здесь и далее знак $'$ означает операцию транспонирования матрицы.

Оценка β будет эффективной, если остатки регрессии $\varepsilon = Y - X\beta$ являются нормально распределенными с нулевым математическим ожиданием и не зависящими друг от друга, т. е. $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$, где I — единичная матрица размером $(T \times T)$, σ^2 — дисперсия остатков.

Если остаток ε_t зависит от величины остатков в предыдущие моменты времени ε_{t-k} , то наблюдается серийная корреляция остатков. В присутствии серийной корреляции оценка β будет неэффективной, хотя она и является несмещенной и состоятельной. Эта потеря эффективности маскируется тем фактом, что стандартная ошибка оценки β является смещенной (она меньше, чем есть на самом деле). Для проверки наличия серийной корреляции остатков применялся *Durbin–Watson test*:

$$DW = \sum_{t=2}^T (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2.$$

Значения статистики DW лежат в интервале от 0 до 4. Если $DW < d_{1\text{крит.}}$, то присутствует положительная серийная корреляция остатков, если $DW > d_{2\text{крит.}}$, то положительной серийной корреляции нет. Значения $DW > 2$ относятся к отрицательной серийной корреляции. Для рассматриваемого случая (одна объясняющая переменная, 28 наблюдений) критические значения DW -статистики, соответственно, равны $d_{1\text{крит.}} = 1.34$ и $d_{2\text{крит.}} = 1.48$.

Если выявлена серийная корреляция остатков регрессии, то необходимо принять какую-либо модель для описания взаимозависимости остатков регрессии. Наиболее часто используется модель авторегрессии первого порядка $AR(1)$. Эта модель была принята и в данной работе:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t, \quad (1.27)$$

где остатки ν_t распределены по нормальному закону и независимы.

В этом случае (серийная корреляция первого порядка) $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2\Omega$ и k -я строка ковариационной матрицы остатков Ω (размером $T \times T$) выглядит следующим образом:

$$\Omega = \left(\rho^{|k-1|}, \rho^{|k-2|}, \dots, \rho^{|k-T+1|}, \rho^{|k-T|} \right).$$

Оценить коэффициенты β регрессии (1.26) при условии (1.27) можно обобщенным методом наименьших квадратов (generalized least-squares estimation):

$$\beta = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y), \quad \text{или} \quad \beta = (X'H'HX)^{-1}(X'H'HY),$$

где H — матрица преобразования (transformation matrix), $H'H = \Omega^{-1}$.

Применение преобразования H к исходному уравнению регрессии эквивалентно переходу к обобщенным разностям (*generalized differencing process*)

$$Y_t^* = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2X_t^* + \nu_t,$$

где $Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$, $X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$, $\nu_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$, и затем применению обычного метода наименьших квадратов для оценки β_1 и β_2 .

Однако предварительно необходимо оценить параметр ρ . Для его оценки могут применяться различные методы, например, процедура Хилдрита–Лу (Hildreth–Lu). Фактически метод заключается в прямом переборе разных значений ρ . Критерием оптимального выбора значения ρ является минимум суммы квадратов остатков регрессии.

Вычисления проводились в пакете Statistica for Windows, v.5.1 (StatSoft, Inc.). В качестве примера ниже приводятся результаты расчетов для первой и второй формы PEH при $n = 2$ (приведены исходные сообщения программы, слегка скорректированные для удобства чтения и понимания).

П 1.2. Результаты статистического анализа

Первая форма PEH: n = 2 data file: PEH1.STA [29 cases]

VARIABLES: 1: S2 спред доходности
2: DY2 временные изменения

STAT. Regression Summary for Dependent Variable: DY2(PEH1.sta)
MULTIPLE R= .50843231 RI= .25850341 Adjusted RI= .22998431
REGRESS. F(1,26)=9.0642 p<.00573 Std.Error of estimate: .00346

N=28	B	St.Err.of B	t(26)	p-level
Intercpt	-.000055	.000761	-.07218	.943008
S2	-.853020	.283331	-3.01068	.005735

STAT. Durbin--Watson DW (PEH1.sta)
MULTIPLE and serial correlation of residuals
REGRESS.

	Durbin--Watson DW	Serial Corr.
Estimate	1.382898	.262638

Коррекция на серийную корреляцию:

VARIABLES: 5: NEWVAR3 S2(t)-0.41*S2(t-1)
6: NEWVAR4 DY2(t)-0.41*DY2(t-1)

STAT. Regression Summary for Dependent Variable: NEWVAR4(PEH1.sta)
MULTIPLE R= .29461794 RI= .08679973 Adjusted RI= .05027172
REGRESS. F(1,25)=2.3763 p<.13576 Std.Error of estimate: .00329

N=27	B	St.Err.of B	t(26)	p-level
Intercpt	-.000360	.000679	-.53044	.600487
NEWVAR4	-.501666	.325438	-1.54151	.135757

STAT. Durbin--Watson DW (PEH1.sta)
MULTIPLE and serial correlation of residuals
REGRESS.

	Durbin--Watson DW	Serial Corr.
Estimate	1.754723	.086753

Вторая форма PEH: n = 2 data file: PEH2.STA [29 cases]

VARIABLES: 1: S2 спред доходности
2: G2 временные изменения

STAT. Regression Summary for Dependent Variable: G2 (PEH2.sta)
MULTIPLE R= .10121434 RI= .01024434 Adjusted RI= -----
REGRESS. F(1,26)=.26911 p<.60832 Std.Error of estimate: .00173

N=28	B	St.Err.of B	t(26)	p-level
Intercpt	-.000027	.000380	-.072184	.943008
S2	.073490	.141665	.518758	.608317

STAT. Durbin--Watson DW (PEH2.sta)
MULTIPLE and serial correlation of residuals
REGRESS.

	Durbin--Watson DW	Serial Corr.
Estimate	1.382898	.262638

Коррекция на серийную корреляцию:

VARIABLES: 5: NEWVAR3 $S2(t) - 0.45 \cdot S2(t-1)$
6: NEWVAR4 $G2(t) - 0.45 \cdot G2(t-1)$

STAT. Regression Summary for Dependent Variable: NEWVAR4 &(PEH2.sta)
MULTIPLE R= .32213500 RI= .10377096 Adjusted RI= .06792180
REGRESS. F(1,25)=2.8947 p<.10128 Std.Error of estimate: .00164

N=27	B	St.Err.of B	t(25)	p-level
Intercpt	-.000183	.000336	-.543811	.591389
NEWVAR4	.279821	.160468	1.751369	.098281

STAT. Durbin--Watson DW (PEH2.sta)
MULTIPLE and serial correlation of residuals
REGRESS.

	Durbin--Watson DW	Serial Corr.
Estimate	1.775236	.075858

2. Модель САРМ как модель общего рыночного равновесия

В данной главе мы начинаем изучение одной из основных, если не просто основной, модели теории финансов — *модели ценообразования на капитальные активы* — Capital Assets Pricing Model (САРМ; по-английски произносится «кэпм»). Имеется масса критической литературы по ее поводу, но без САРМ не может обойтись не только теория ценообразования на ценные бумаги, но и, что важнее, теория корпоративных финансов. Дело в том, что САРМ, наряду с тем, что это модель формирования портфеля ценных бумаг инвестором, является источником исчисления рискованной премии — величины, необходимой для нахождения ставки дисконтирования инвестиционных проектов компаний, ценности компаний, средней взвешенной стоимости капитала, влияния леввериджа на оценку и риски компаний и многого другого. Без нее действительно нельзя жить. Признавая все недостатки данного инструмента, мы не можем им не пользоваться. Этим и обусловлен наш фундаментальный интерес к апробации САРМ и ее различных модификаций.

2.1. История теории портфеля

Настоящая теория финансов началась лишь в 1952 г. с появлением статьи аспиранта Чикагского университета Харви Марковица [Markowitz, 1952], который предложил моделировать поведение инвестора как зависящее от двух факторов — доходности и риска.¹⁴ Согласно этому подходу, каждый актив инвестор рассматривает в статике, но с учетом грядущей неопределенности. По поводу каждого актива предполагается, что инвестор знает, какова его *ожидаемая доходность* за период (ясно, что чем больше, тем лучше) и каков его *риск*, определяемый разбросом возможных значений доходности вокруг ожидаемой доходности (ясно, что, при

¹⁴ См. мнение нобелевского лауреата Р. Мертона, приведенное в [Вэриан, 2003, с. 153].

прочих равных, больше риска — плохо). Анализ инвестора в этих двумерных координатах получил название анализа «среднее — вариация» (mean — variance). При этом ожидаемая доходность отождествлялась с математическим ожиданием доходности как случайной величины, а риск — с квадратным корнем из дисперсии (финансисты чаще используют термин *вариация*) этой случайной величины. Сам по себе этот формализм не привел бы Марковица к основанию теории финансов и будущей Нобелевской премии, если бы он не объяснил в его рамках диверсификацию риска на базе построения портфеля рискованных активов — *портфеля Марковица*. Теория портфеля требует от инвестора знать еще и корреляции между доходностями всевозможных пар активов.

Кроме того, теория полезности инвестора, лежащая под теорией портфеля, требует, чтобы многомерная случайная величина — доходность всех активов на рынке — была нормально распределенной многомерной случайной величиной. Последнее положение особенно незащитно против эмпирической проверки. Достаточно заметить, что размерность равна количеству активов, а выбор самих активов в конкретике страдает неизбежным произволом. Однако в случае экономики критика предпосылок теории не означает отказ от самой теории. Физики пользуются (часто математически некорректно) теорией возмущений, позволяющей переходить от просчитываемого идеального случая к реальному. Экономика не имеет ни аппарата теории возмущений, ни самого умения оценивать эти возмущения. Подход экономиста иной. Он пользуется идеальной теорией как эвристическим аппаратом для вывода фундаментальных соотношений, которые далее проверяются и уточняются на практике. Этим и занимается теория финансов, и именно этому посвящена большая часть настоящей книги.

Интересно, что на защите Марковицем диссертации в Чикагском университете еще не признанный отец монетаризма, макроэкономист Милтон Фридман выступил против его работы под другим «соусом» — портфель требовал постоянной перетряски. Это означало, что есть спрос на различные акции со стороны портфельных инвесторов в соответствии с моделью Марковица. Но почему имеется соответствующее по объемам предложение, да еще по предлагаемым теорией ценам? Экономист Фридман справедливо не видел в модели даже частного равновесия, а потому был не удовлетворен диссертацией (см.: [Вэриан, 2003, с. 153]). Это обстоятельство, вместе со сложностью нахождения портфеля по Марковицу, и привело Уильяма Шарпа в 1962 г. (см.: [Sharpe, 1963]; кстати, это то-

же исследование в рамках диссертации) к линейной однофакторной, или рыночной, модели, где доходность любого актива полностью объясняет рыночный индекс, а модель представляет собой простую одномерную регрессию доходности актива на доходность рынка в целом, выраженную через доходность рыночного индекса. Через год сам же Шарп опубликовал существенное обобщение этой модели. Результат и получил название *модели ценообразования на капитальные активы* (CAPM). Доказательство, как подчеркивало само название статьи [Sharpe, 1964], превращало CAPM в модель равновесия, что ввело финансы в русло экономики, которое они больше не покидали. Однако это доказательство, находящее равновесные цены, опять не показывает, что имеются соответствующие им равновесные объемы. Таким образом, если имеется равновесие, то цены должны удовлетворять условиям CAPM. Сам же факт существования равновесия оставался открытым.

Однако 1950-е гг. были славны еще одним выдающимся результатом в экономике. Американские экономисты-математики Эрроу и Дебре доказали существование общего экономического равновесия на совокупности всех товарных рынков (тоже Нобелевский результат). Это была чистая теорема существования, без намека на какие бы то ни было формулы для вычислений. Конечно, финансовые активы в их традиционной экономической постановке отсутствовали. Это было легко объяснимо — товары покупаются на основе потребительской полезности, а производятся фирмами с издержками, которые надо окупить. Финансовые активы в непревращенном виде не полезны, а их выпуск вроде бы не связан с издержками. Замечательно, что в начале 1970-х гг. Майкл Дженсен сделал следующий шаг вслед за Шарпом — он показал, что CAPM можно и полезно рассматривать как (вычисляемую!) модель общего рыночного равновесия.

В этой главе мы приведем доказательство Дженсена (редко встречающееся в учебной или монографической литературе; исключением является учебник [Крушвиц, 2000]). Затем будет приведена более общая форма CAPM с неторгуемым активом, которой мы дадим некоторые интерпретации.

2.2. История модели CAPM и ее основные предпосылки

Модель CAPM как модель анализа инвестиционных альтернатив в условиях двухфакторной функции полезности участника рынка (доход-

ность как положительный фактор, риск портфеля, оцениваемый как волатильность доходности, — как отрицательный) появилась почти одновременно в нескольких независимых работах американских исследователей в первой половине 1960-х гг. Обычно приоритет отдается Уильяму Шарпу ([Sharpe, 1963, 1964] (но имела неопубликованная рукопись 1961 г. финансового консультанта Трейнора [Treynor, 1961], другие доказательства Линтнера [Lintner, 1965a, 1965b] и Моссина [Mossin, 1966])).

Начнем с модели, геометрия которой легла в основу всех дальнейших построений. Эта модель (почти целиком принадлежащая Нобелевскому лауреату макроэкономисту Дж. Тобину) показывает, что в определенных условиях все инвесторы выбирают аналогичные рыночные портфели M рискованных активов, обеспечивающие на графике «риск — доходность» максимальный наклон так называемой прямой *линии рынка капитала* (*Capital Market Line, CML*), а именно: инвесторы вкладывают в комбинацию из двух активов. Первый из них — это так называемый *безрисковый* актив, на практике отождествляемый с теми или иными государственными облигациями или ликвидным рынком межбанковского кредита (например, LIBOR, на который могут ориентироваться все крупные международные инвесторы). Предполагается, что безрисковый актив можно как занимать, так и ссужать по одной и той же ставке R_f в произвольных объемах (на практике это означает требование незначительности спреда между ссудной и кредитной ставками и большой объем обращения актива, что вместе дает определение *ликвидности*; и то и другое выполняется для LIBOR). Хотя в реальности все указанные ставки колеблются, предполагается, что в рамках горизонта принятия решений безрисковая ставка постоянна, а тогда риск соответствующего актива равен нулю. Вторым активом, по Тобину, является «касательный» портфель M . Касательность легко вытекает из условий оптимальности, но задачей поиска интерпретации этого портфеля в конкретике Тобин не заинтересовался — его пробойным результатом было то, что даже самый рискованный инвестор получит выгоду от вложения части своих средств в безрисковый актив. Доказательство того, что этот портфель необходимым образом является *рыночным портфелем* (т. е. портфелем, в котором каждый актив представлен в соответствии со своей пропорцией в рынке в целом), принадлежит уже Шарпу. Это важное конкретное указание, хотя и рыночный портфель является некоторой абстракцией — мы не можем даже описать все активы, в него входящие. Рыночный портфель сам является рискованным активом с ожидаемой доходностью R_M и риском σ_M . Обычно эти величины

вычисляют с помощью использования того или иного фондового индекса: S&P500 — в США, FT100 — в Великобритании, RTSI — в России и т. д.

Линия, на которой расположены оптимальные для любого рационального инвестора комбинации двух указанных активов, проходит через точку безрискового актива $(0, R_f)$ и оказывается касательной к «зонтику Марковица» в точке M (рис. 2.1).

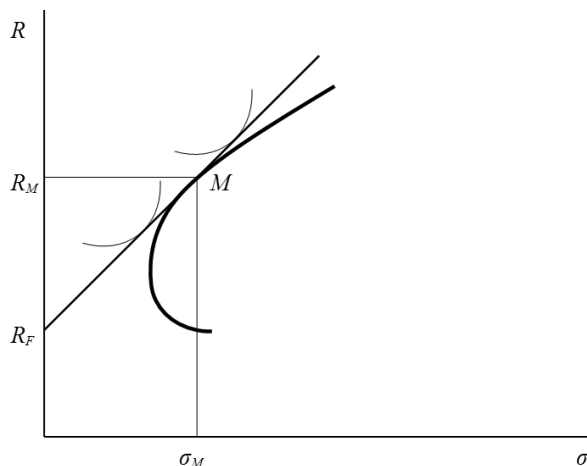


Рис. 2.7. Расположение «классической» линии CML

Инвесторы оказываются в состоянии выбирать различные сочетания вложений в безрисковый актив с доходностью R_f и рискованный рыночный портфель M , но при этом активы второго всегда оказываются в портфеле в положительном количестве. Безрисковый актив может оказаться и «коротким», т. е. инвестор взятые в долг по безрисковой ставке деньги инвестирует в рискованные активы. Кривая безразличия менее склонного к риску инвестора изображена на рис. 2.1 левее M , а более склонного — правее. Таким образом, мы видим, что структура рискового портфеля различных инвесторов оказывается одинаковой — это M . Естественно, это утверждение противоречит эмпирике и служит отправной точкой для различных уточнений модели.

Набор предпосылок CAPM включает прежде всего следующие положения:

- (1) все инвесторы имеют один и тот же *однопериодный горизонт планирования* операций с ценными бумагами, и они стремятся макси-

- мально увеличить ожидаемый уровень полезности, определяемый на основе соотношения риск — доходность;
- (2) все активы совершенно делимы и совершенно ликвидны (т.е. легко реализуемы при сформировавшейся на рынке цене), а их объем потенциально неограничен;
 - (3) инвесторы имеют *однородные ожидания* (*homogeneous expectations*) относительно поведения всех активов, — иначе говоря, их оценки средней доходности, а также вариации и ковариации доходности всех активов совпадают;
 - (4) все инвесторы имеют возможность занимать или давать займы неограниченную сумму денег по известной безрисковой ставке R_f ; на *короткую продажу*¹⁵ (*short sale*) ценных бумаг не накладывается никаких ограничений;
 - (5) все инвесторы являются «малыми» в том смысле, что их сделки не влияют на рыночную цену;
 - (6) рынок свободен от налогов и транзакционных затрат.

Линейная модель, описывающая ситуацию на рис. 2.1, является моделью «эталонного» (benchmark) портфеля, указывающей на соотношение между доходностью и риском в оптимальном портфеле. На практике это позволяет оценивать отклонения реальных портфелей от оптимума.

В силу того, что рыночный портфель не дан в ощущениях, модель SML имеет ограниченное теоретическое и прикладное значение, сводящееся в основном к анализу деятельности паевых фондов (mutual funds). Значительно более важным является анализ доходности отдельной ценной бумаги, который делается в предположении, что инвестор строит диверсифицированный портфель в рамках рассмотренной выше модели SML. В результате получается уравнение для ожидаемой доходности произвольной (j -й) ценной бумаги

$$E(R_j) = R_f + \beta_j(E(R_M) - R_f)$$

и соответствующая этому уравнению *линия рынка ценных бумаг* SML (Security Market Line), отражающая зависимость рисковой премии данной ценной бумаги по отношению к систематическому (рыночному, неди-

¹⁵ Производя короткую продажу, инвестор занимает актив, немедленно продает его на рынке в расчете выкупить позднее (по более низкой цене) и затем вернуть долг. Если цена актива действительно падает, то он оказывается в прибыли, а если растет, — то в убытке. На практике на большинстве рынков короткие продажи либо запрещены, либо срок или объем таких операций ограничены. На момент написания этой книги короткие продажи в России были запрещены.

версифицируемому) риску этой ценной бумаги — бета ценной бумаги. Соответствующий вывод на основе геометрического рассуждения, отталкивающегося от CML, был проведен в [Sharpe, 1964, р. 437] (аналитический же вывод с помощью дифференциального исчисления был запрятан Шарпом в подстрочную сноску 22). Выведенная формула действительно стала у Шарпа по форме равновесной, т. е. было получено ценовое равновесие (необходимое условие равновесия) без проверки равновесия по объемам, которые вообще не фигурировали в доказательстве. Таким образом, формула не могла претендовать на настоящее экономическое равновесие.

2.3. Подход Дженсена: CAPM как форма рыночного равновесия

В данной главе мы опускаем классический вывод CAPM, восходящий к пионерным работам Шарпа, Линтнера, Моссина, Трейнора и Фамы (подробное изложение и сравнительный анализ можно найти в [Francis, Archer, 1971, Appendix 5A]). Здесь же мы рассмотрим вывод CAPM, предложенный Дженсеном [Jensen, 1972] и основанный на предположении о том, что финансовый рынок, на котором инвесторы выбирают альтернативные соотношения риска — доходности, является примером общего рыночного равновесия.

Иначе говоря, в отличие от предположения (2), инвесторы учитывают, что *предложение активов фиксировано*, а сами они действуют *в условиях балансовых ограничений*, связанных с ожидаемыми доходами от владения активами. Данный подход, хотя и является более сложным технически, представляет собой значительный шаг вперед, так как позволяет, в принципе, рассматривать финансовые активы наравне с прочими как составляющие функции полезности индивида.

2.3.1. Описание предпосылок и вывод модели

Будем использовать следующие обозначения:

$U_i(e_i, \sigma_i^2)$ — функция полезности i -го инвестора, зависящая (положительно) от его чистого ожидаемого дохода e_i и (отрицательно) — от его риска (волатильности) σ_i ;

X_{ij} — доля j -й фирмы, принадлежащая i -му инвестору. При этом предполагается $\sum_i X_{ij} = 1, \forall j$, что означает фиксированность спроса на

активы каждой фирмы. При этом условие $X_{ij} \geq 0$ не накладывается (допускаются короткие продажи);

d_i — задолженность i -го инвестора;

D_j — чистый денежный поток, производимый в данном периоде j -й фирмой (случайная величина). При этом мы будем считать, что капитализация каждой фирмы связана только с ожидаемыми на конец периода чистыми денежными потоками.

При этом для каждого i -го инвестора имеет место равенство

$$e_i = \sum_j X_{ij} E(D_j) - r d_i, \quad (2.1)$$

где $r = 1 + R_f$ — коэффициент наращения безрискового долга по ставке R_f .

Риск (вариация) дохода инвестора в этом случае равняется

$$\sigma_i^2 = \sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik} \sigma_{jk} = \sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik} \text{cov}(D_j, D_k). \quad (2.2)$$

Каждый инвестор решает задачу о максимизации своей ожидаемой полезности, а именно: требуется максимизировать ожидаемую полезность инвестора

$$\max_{X_{ij}, d_i} EU_i(e_i, \sigma_i^2) \quad (2.3)$$

при учете балансового ограничения

$$W_i = \sum_j X_{ij} V_j - d_i, \quad (2.4)$$

где V_j — капитализация j -й фирмы и W_i — сумма сбережений (инвестиций) i -го инвестора в начале периода.

В предположении однородности ожиданий инвесторов в отношении основных поведенческих параметров (e_i, σ_i^2) , — а это возможно только в условиях равновесия! — запишем функцию Лагранжа произвольного инвестора

$$\Psi = EU_i(e_i, \sigma_i^2) + \lambda_i \left[W_i - \sum_j X_{ij} V_j - d_i \right]. \quad (2.5)$$

Приравнивая к нулю частные производные Ψ по X_{ij} , d_i , λ_i , получаем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_{ij}} = \frac{\partial EU_i}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial X_{ij}} + \frac{\partial EU_i}{\partial \sigma_i^2} \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial X_{ij}} - \lambda_i V_j = \quad (2.6)$$

$$= \frac{\partial EU_i}{\partial e_i} E(D_j) + \frac{\partial EU_i}{\partial \sigma_i^2} 2 \sum_k X_{ik} \sigma_{jk} - \lambda_i V_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial d_i} = \frac{\partial EU_i}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial d_i} + \frac{\partial EU_i}{\partial \sigma_i^2} \frac{\partial \sigma_i^2}{\partial d_i} + \lambda_i = \quad (2.7)$$

$$= \frac{\partial EU_i}{\partial e_i} (-r) + \lambda_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} = W_i = \sum_i X_{ij} V_j - d_i = 0.$$

Из (2.7) заключаем, что

$$\lambda_i = r \frac{\partial EU_i}{\partial e_i},$$

а подставляя это соотношение в равенство (2.6), получаем

$$\frac{\partial EU_i}{\partial e_i} E(D_j) + \frac{\partial EU_i}{\partial \sigma_i^2} 2 \sum_k X_{ik} \sigma_{jk} - r \frac{\partial EU_i}{\partial e_i} V_j = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial EU_i}{\partial e_i} [E(D_j) - r V_j] + \frac{\partial EU_i}{\partial \sigma_i^2} 2 \sum_k X_{ik} \sigma_{jk} = 0. \quad (2.8)$$

Легко заметить, что в условиях равновесия (2.8) выполняется для всех инвесторов i и фирм j . Заметим также, что если разделить одно уравнение типа (2.8) (для инвестора i и фирмы j) на другое (для того же инвестора i и другой фирмы t), то получится равенство:

$$\frac{(\partial EU_i / \partial e_i) [E(D_j) - r V_j]}{(\partial EU_i / \partial e_i) [E(D_t) - r V_t]} = \frac{-(\partial EU_i / \partial \sigma_i^2) (2 \sum_k V_{ij} \sigma_{jk})}{-(\partial EU_i / \partial \sigma_i^2) (2 \sum_k X_{ik} \sigma_{tk})},$$

или

$$\frac{E(D_j) - r V_j}{E(D_t) - r V_t} = \frac{\sum_k X_{ij} \sigma_{jk}}{\sum_k X_{it} \sigma_{tk}} \quad \text{для всех } i, j, t. \quad (2.9)$$

Как мы уже отмечали, в равновесии, когда все активы находятся в портфелях инвесторов, $\sum_i X_{ij} = 1, \forall j$. С учетом этого замечания, складывая равенства (2.9) по всем инвесторам i , получаем после преобразований

$$\frac{E(D_j) - rV_j}{\sum_k \sigma_{ij}} = \frac{(D_j) - rV_j}{\sum_k \sigma_{tk}} = \theta, \quad (2.10)$$

где $\theta = [E(D_M) - rV_M]/\sigma_M^2$ — едино для всех активов.

Наконец, суммируя (2.10) по всем активам t , получаем

$$\frac{\sum_t [E(D_j) - rV_j]}{\sum_t \sum_k \sigma_{jk}} = \frac{E(D_M) - rV_M}{\sigma_M^2} = \theta, \quad (2.11)$$

где D_M — совокупные денежные потоки рынка, σ_M^2 — их вариация, а V_M — капитализация рынка.

Таким образом, подставляя правую часть (2.11) в (2.10) и решая полученное уравнение относительно V_j , получаем

$$\begin{aligned} \frac{E(D_j) - rV_j}{\sum_k \sigma_{jk}} &= \frac{E(D_M) - rV_M}{\sigma_M^2}, \quad \text{или} \\ V_j &= \frac{1}{r} \left[E(D_j) - \frac{E(D_M) - rV_M}{\sigma_M^2} \sum_k \sigma_{jk} \right] = \\ &= \frac{1}{r} [E(D_j) - \theta \text{cov}(D_j, D_M)], \end{aligned} \quad (2.12)$$

поскольку

$$\frac{E(D_M) - rV_M}{\sigma_M^2} \sum_k \sigma_{jk} = \theta \text{cov}(D_j, D_M).$$

Формула (2.12) представляет собой выражение для *безрискового эквивалента ценности* произвольного актива V_j на фоне волатильности его денежных потоков.

Ее легко преобразовать в формулу для справедливой доходности соответствующего актива $R_j = (V_j - D_j)/D_j$. С учетом этого равенства, а также замечая, что $R_f = r - 1$, легко получаем

$$E(R_j) = R_f + \gamma \text{cov}(R_j, R_M), \quad \gamma = (E(R_M) - R_f)/\sigma_M^2.$$

Таким образом, получено равенство, традиционно называемое формулой CAPM:

$$E(R_j) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M^2} \text{cov}(R_j, R_M).$$

2.4. Модель с нерыночными активами: обобщение CAPM

Помимо классической формы CAPM, значительный интерес представляет и так называемый вариант модели с *нерыночными активами*, вывод которого принадлежит Мейерсу, ученику Дженсена (см.: [Mayers, 1972]; в работе [Mayers, 1973] рассматривается аналогичная постановка по отношению к модели Блэка с активом с нулевым бета, см. п. 3.3 далее). Важными свойствами нерыночного актива является, аналогично обычным рыночным компонентам благосостояния инвестора, — его рискованность и доходность (т.е. инвесторы рассматривают нерыночные активы как составляющие своих портфелей), но в этом случае отсутствует возможность управлять его количеством в портфеле инвестора (*нерыночность*). Таким образом, нерыночный актив — это некая индивидуальная характеристика инвестора, которую он имеет возможность использовать при накоплении своего богатства.

Одним из вариантов трактовки нерыночного актива является отождествление его с опущенными в обычной CAPM активами (missing assets, или omitted marketable assets) [Mayers, 1972, p. 230–232]. Мейерс также полагал, что под нерыночным активом можно подразумевать, например, человеческий капитал, который не отделим от носителя и в отсутствие рабовладения на рынке не торгуется. В модели каждый инвестор имеет индивидуальную отдачу на нематериальный актив (кроме того, важно, что абсолютная ценность нематериальных активов не нужна для модели — используются только приростные величины или доходности). Человеческий капитал, однако, торгуется и без рабства — в качестве его цены можно рассматривать полный объем оплаты инвестора. В работе [Fama, Schwert, 1977a] авторы предприняли попытку оценить существенность поправки Мейерса к рискованной премии торгуемых активов, используя американские статистические данные по заработной плате. Их вычисления не подтвердили такое влияние, что на многие годы положило конец исследованиям в этом направлении. Однако очень вероятно, что темп роста заработной платы в США, который оказался слабо коррелированным с фондовым рынком, является плохим прогностом для роста компенсаций инвесторов (включающих много инструментов, прямо привязанных к фондовому рынку — бонусы, фондовые опционы и пр.). Интересной интерпретацией могут быть доходы от оппортунистического поведения тех, кто распоряжается денежными потоками. Данная проблематика имеет прямое отношение к проблематике корпоративного управления.

Перейдем к более подробной формулировке модели, используя обозначения п. 2.3.1 и вводя новые для нерыночного актива.

В модели САМ с нерыночными активами предполагается, что каждый инвестор получает в конце периода неопределенный поток D_i^{nm} , порожденный неторгуемым активом, приносящий ему доходность R_i^{nm} . Все инвесторы в совокупности получают поток D_{nm} . Теперь вместо равенства (2.1), определяющего суммарную доходность активов инвестора, возникает равенство:

$$e_i = \sum_j X_{ij} E(D_i) + E(D_i^{nm}) - r d_i. \quad (2.13)$$

Аналогично выражение для вариации активов инвестора вместо (2.2) приобретает вид

$$\sigma_i^2 = \sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik} \sigma_{jk} + \sigma^2(D_i^{nm}) + 2 \sum_j X_{ij} \text{cov}(D_i^{nm}, D_j). \quad (2.14)$$

Соответственно, инвесторы решают оптимизационную задачу, аналогичную (2.3), с тем же балансовым ограничением (2.4), но с новыми формулами для доходности и вариации.

В результате новая форма САМ с неторгуемым активом приобретает вид:

$$E(R_j) = R_f + \lambda [V_m \text{cov}(R_j, R_m) + \text{cov}(R_j, D_{nm})], \quad (2.15)$$

$$\lambda = \frac{E(R_m) - R_f}{V_m \sigma_m^2 + \text{cov}(R_m, D_{nm})}. \quad (2.16)$$

Коэффициент λ показывает рыночную цену единичного риска по отношению ко всему рынку, включая неторгуемый актив.

Важной особенностью, отличающей модель Мейерса от САМР в направлении реализма, является то, что теперь все инвесторы формируют свой индивидуальный портфель рискованных активов, а не копию рыночного портфеля, как это было в САМР. При расчете бета изменения нужны как для инвесторов, имеющих неторгуемый актив, так и для инвесторов его не имеющих. Важную роль играет ковариация между рыночными активами и специфическими неторгуемыми активами инвестора. Отметим также, что в отличие от большинства финансовых моделей, в которые входят только доходности, в модель Мейерса явно входят объемы, что имеет свои существенные последствия.

Приложениям модели Мейерса к проблемам активного управления ценностью компаний (в частности, использованию реальных опционов;

см.: [Бухвалов, 2004а, 2004б, 2006; Лимитовский 2008]), стратегической диверсификации деятельности нефинансовых компаний, недооценке акций российских компаний и созданию финансового центра в России посвящена работа [Бухвалов, 2008].

Задачи к главе 2

1. Каким образом изменится формулировка CAPM, если короткие продажи полностью исключены?

Указание. Рассмотрите доказательство Дженсена. В этом доказательстве возникает задача оптимизации, где все ограничения имеют вид равенства и нет ограничений на знак переменных. В этом случае работает классическая техника условной оптимизации — метод множителей Лагранжа. В случае невозможности коротких продаж неизвестные X_{ij} являются неотрицательными. Так как задача является выпуклой (почему?), то применима теорема Куна–Таккера, которая дает уравнения для обобщенных множителей.

2. Рассмотрим CAPM в случае наличия налогов. А именно, предположим, что годовая прибыль каждой компании облагается по корпоративной ставке налога τ . Каким образом изменится CAPM? Что можно сказать о новом бета?

Указание. См.: [Крушвиц, 2000, п. 5.7.2].

3. Каким образом следует учитывать (и следует ли это делать) инфляцию в формулах CAPM?

Указание. Используйте доказательство Дженсена.

3. Эмпирическая проверка модели САРМ

Главы 3 и 4 основаны на цикле исследований, проведенных в разное время под руководством А. В. Бухвалова. Основная цель этих исследований заключалась в попытке выяснить, эффективен ли российский рынок, т. е. может ли поведение инвесторов на российском рынке быть проанализировано в рамках общепризнанных модельных представлений, которые, как считается, должны описывать их поведение при достаточно разумных предположениях. Если да, то каковы основные параметры этих моделей, если нет, — то по каким причинам эти модели могут не выполняться на российском рынке?

Среди исследований российского фондового рынка других авторов отметим [Goriaev, Zabotkin, 2006; Kargin, 2005].

3.1. План исследования

Если в главе 1 мы изучали вопрос об эффективности рынков государственных и муниципальных облигаций, то в этой главе мы обращаемся к не менее важным проблемам анализа эффективности фондового рынка. Эффективность рынка можно оценивать в соответствии с различными модельными представлениями. В этой и следующей главе делается попытка оценить эффективность российского рынка по результатам тестирования модели ценообразования на капитальные активы (САРМ — Capital Asset Pricing Model) в различных ее версиях. Эконометрические исследования российского фондового рынка на современном уровне практически не проводились, большинство работ посвящено институциональным аспектам его развития (см., напр.: [Энтов, Радыгин, 1999]) или имеют прикладной характер, например строятся многофакторные модели динамики фондового индекса [Энтов, 1999]. Однако способность объяснить изменение индекса не может помочь в определении некоторых важных для прикладного финансового менеджмента параметров, таких, например, как рыночная стоимость собственного капитала в отрасли и в отдельной компании.

Обычно при оценке таких параметров на основе рыночных данных предполагается справедливость модели CAPM, но в России до сих пор попытка применения выводов этой модели на практике вызывает недоверие. Главным аргументом «против» является утверждение, что на российском рынке нет безрисковой процентной ставки, — обычно менеджеры-практики под моделью CAPM подразумевают версию с безрисковым активом. Поэтому вопрос обсуждения строгой проверки модели CAPM в различных ее версиях, предпринятый в данном исследовании, актуален и теоретически, и практически. По-видимому, исторически первым достаточно строгим с точки зрения эконометрики исследованием применимости модели CAPM на российском рынке была работа [Окулов, 1999], посвященная тестированию модели CAPM в версии Шарпа–Линтнера (W. Sharpe, J. Lintner). Эти исследования были затем продолжены и расширены в статье [Окулов, 2000] — было впервые проведено тестирование на российском рынке модели CAPM в версии Ф. Блэка (F. Black). Нетривиальная эконометрика подобного тестирования была уже к этому моменту разработана (см.: [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]), но потребовалось создать оригинальную методику подготовки эмпирического материала с учетом специфики российского рынка. Результат оказался отрицательным — модель Блэка оказалась отвергнутой на данных за период с июля 1996 г. по июль 1998 г. Отметим, что этот период характеризовался бурным ростом российского фондового рынка в 1997 г. и значительными объемами и перепадами на рынке ГКО, вызванными как необходимостью подавления инфляции, так и поддержанием валютного коридора. Относительно небольшое количество конкурирующих финансовых активов делало правдоподобной гипотезу о том, что хотя бы на более коротких и более однородных промежутках этого периода модель все же будет выполнена. В связи с этим в работе [Ишков, 2001] было проведено более детальное исследование применимости модели CAPM в версии Блэка на российском рынке за тот же период времени. Результат опять оказался отрицательным для всех подпериодов.

Позволим себе дать спекулятивное обсуждение полученных отрицательных результатов по модели Блэка. В [Окулов, 1999] указано, что такие причины могут быть формально модельными: негауссовское распределение доходностей и неучет инфляции. Конечно, и то и другое имеет место. Однако едва ли это главные причины. Действительно, на развитых рынках практически ни один инструмент не проходит тест на гауссовость, что привело к моде на исследование распределений с тяжелыми

хвостами в математической статистике (распределение Парето и другие устойчивые законы), но не в финансах. Такого рода исследования важны для отдельных специфических инструментов. Однако представляется безнадежной попытка встроить такие распределения (с различными параметрами!) в модель общего равновесия типа САРМ. Вопрос о том, как влияет инфляция на товарных рынках на поведение профессиональных участников финансовых рынков, требует совершенно отдельного исследования. Достаточно отметить, что любой американский банк или фонд, осуществляющий портфельные инвестиции в России, мало интересуется ценой на хлеб в Нижневартонске. В значительной мере то же касается и отечественных участников.¹⁶

Значительно более вероятным представляется другой сюжет. Блэк строил свою модель, одной из особенностей которой было отсутствие безрисковой ставки, в начале 1970-х гг., когда национальные финансовые рынки имели множество барьеров для инвесторов. С тех пор финансовый рынок стал глобальным, что сняло остроту отсутствия национального безрискового инструмента. На российском рынке имелся огромный объем портфельных инвестиций иностранных инвесторов, у которых был свободный доступ ко всем вариантам безрисковых инструментов: T-Bills, T-Bonds, LIBOR. Более спорным является вопрос о доступе к тем же инструментам для крупных российских инвесторов, но с определенными транзакционными издержками они также были доступны (это означает неравенство ставок заимствования и кредитования). В любом случае для исследования необходим анализ альтернативных глобальных возможностей, который пока еще никем не проводился на модельном уровне.

Отметим, что положительный результат по модели Блэка дал бы для инвесторов намного больше полезного, чем САРМ. Модель САРМ предполагает единообразие портфелей у всех инвесторов, тогда как модель Блэка — построение уникального портфеля для каждого инвестора. В качестве метафоры можно указать, что это аналогично переходу от теории репрезентативной фирмы в неоклассике к современной теории фирмы, где фирма рассматривается как объект, обладающий уникальными ресурсами. Такого рода результат значительно повысил бы актуальность финансового маркетинга, существенно изменив стратегию как финансовых компаний, так и компаний-эмитентов.

¹⁶ В работе мы имеем дело только с долларовыми величинами и доходностями, что соответствовало практике торговли на РТС, крупнейшей фондовой площадке второй половины 1990-х гг. Таким образом, результаты очищены от рублевой инфляции, которая косвенно сказывается только через ставки на рынке ГКО.

Наконец, в работе [Синцов, 2003] были рассмотрены некоторые модификации классической модели CAPM и проанализирована возможность их применения для российского рынка, в частности, была изучена модель D-CAPM, предложенная в работах испанского финансиста Эстрада (J. Estrada) для развивающихся рынков.

Эта и последующие главы представляют собой попытку систематизировать указанные исследования российского рынка и сделать некоторые обобщающие выводы. Структура этих глав имеет следующий вид — сначала кратко рассматривается экономическая сущность модели, затем — способы ее эконометрической проверки, использованные для тестирования модели данные, основные результаты и выводы.

3.2. Классическая модель CAPM с безрисковым активом

3.2.1. Предпосылки модели и основные соотношения

Модель ценообразования на капитальные активы CAPM¹⁷ с разной степенью строгости и подробности описана во многих руководствах по теории финансов (см., напр.: [Copeland, Weston, Shastri, 2005]). Поэтому, не останавливаясь подробно на основных идеях, положенных в основу этой модели, отметим, что изначально CAPM была построена как однопериодная статическая модель общего равновесия совершенного рынка. Дальнейшее развитие шло по пути отказа от некоторых ограничений, свойственных идеальному совершенному рынку. В настоящее время существует несколько версий модели. Наиболее известна модель CAPM в версии Шарпа–Линтнера [Sharpe, 1964; Lintner, 1965a, 1969]. Основные сведения по истории развития классических идей теории финансов см. в [Bernstein, 1992; 2007]. Значительное влияние на теорию и верификацию CAPM оказали работы Фамы (см., напр., [Fama, 1968; Fama, French, 1992, 1993, 1996, 2004]). Их критический настрой вызывал креативную реакцию защитников CAPM (см. [Jagannathan, Wang, 1993, 1996], а также обзор [Perold, 2004]).

Классическая модель CAPM, хотя и записывается обычно в эконометрической форме, является моделью общего равновесия (идея восходит к Джеймсу Тобину (1950-е гг.); строгий вывод был проведен в [Jensen,

¹⁷ Еще раз напомним, что по-русски CAPM читается точно так же, как по-английски: «КЭПМ».

1969]). Модель оперирует рыночным портфелем рискованных активов и безрисковым активом в рамках статики, что предполагает абсолютную ликвидность во всех секторах рынка и одинаковый горизонт планирования для всех инвесторов.

Исходные предположения модели:

- (1) инвесторы избегают риска и максимизируют ожидаемую полезность своего благосостояния на конец периода;
- (2) все инвесторы являются ценополучателями (pricetakers) и не могут своими действиями оказывать влияние на цены активов;
- (3) инвесторы имеют однородные ожидания относительно доходностей активов. Горизонт планирования фиксирован и одинаков для всех инвесторов;
- (4) существует безрисковый актив. Для любого инвестора имеется возможность неограниченного кредитования и заимствования по некоторой (одной и той же) всем известной безрисковой ставке;
- (5) все активы бесконечно делимы и торгуемы на рынке. Количество любого актива фиксировано;
- (6) рынки совершенны. Налоги, трансакционные издержки, какое-либо регулирование рынка и ограничения на короткие продажи отсутствуют;
- (7) наличие полной и бесплатной информации для всех участников рынка.

Основные выводы данной модели формулируются следующим образом:

- (A) все инвесторы держат рискованные активы в одинаковой пропорции. Данная пропорция отражает собой так называемый *рыночный портфель*, т. е. портфель, в который все рискованные активы входят согласно их удельному весу в совокупной стоимости всех рискованных активов на рынке;
- (B) степень неприятия риска инвестором отражается в соотношении между долей безрискового и рискованных активов в его портфеле. Чем больше инвестор избегает риска, тем больше будет доля безрискового актива и тем меньше — доля рыночного портфеля;
- (C) ожидаемая доходность произвольного i -го актива $E(R_i)$ пропорциональна степени рискованности этого актива, причем мерой риска является ковариация $\text{cov}(R_i, R_m)$ доходностей этого актива R_i

и рыночного, так называемого касательного, портфеля (*tangency portfolio*) R_m .

Основное уравнение модели:

$$\mathbf{E}(R_i) = R_f + \beta_{im}(\mathbf{E}(R_m) - R_f), \quad \beta_{im} = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}, \quad (3.1)$$

где R_f — доходность безрискового актива (всем известная ставка процента, по которой можно занимать и давать в долг), R_m — доходность рыночного портфеля, β_{im} — бета-коэффициент актива, отражающий систематический риск актива, фактически степень согласованности изменений доходности актива с изменениями доходности всех активов на рынке.

Модель Шарпа–Линтнера часто формулируется в терминах избыточной доходности (*excess return*), имеющей смысл рыночной премии за риск:

$$\begin{aligned} Z_m &= R_m - R_f, \\ Z_i &= R_i - R_f. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\mathbf{E}(Z_i) = \beta_{im}\mathbf{E}(Z_m), \quad \beta_{im} = \frac{\text{cov}(Z_i, Z_m)}{\sigma^2(Z_m)}. \quad (3.2)$$

Важнейшим моментом в модели является понятие «рыночного портфеля», под которым понимается портфель, состоящий из всех рискованных активов, и в котором доля каждого актива соответствует его относительной рыночной стоимости (условие равновесия). Очевидно, что рыночный портфель должен являться одним из множества эффективных портфелей по Марковицу. Под эффективным портфелем понимается совокупность длинных и коротких позиций по активам, обеспечивающая минимальный уровень риска при заданном уровне доходности. Основным практически важным следствием модели CAPM в версии Шарпа–Линтнера является то, что инвестиции всех рациональных участников рынка одинаковы по структуре и отличаются только различной долей безрискового актива.

3.2.2. Методы эмпирической проверки модели

В экономической литературе предложено несколько методов эмпирической проверки модели CAPM. Все они основаны на *ex-post* анализе исторических данных по ценам различных активов. Кратко рассмотрим ос-

новые методы проверки, которые могут быть применены на российском рынке.

Исторически первым методом проверки был регрессионный метод (*cross-sectional regressions*) [Fama, MacBeth, 1973]. Идея заключается в том, чтобы вначале на базовом промежутке времени оценить рискованность каждого актива (с помощью коэффициента бета), вычислив ковариацию доходности актива и доходности по индексу. Иногда (необязательно) активы группируют по значению бета-коэффициента в портфели. Затем на другом временном промежутке для каждого момента времени строится регрессия доходностей активов (портфелей) на величину бета. Наклон линии регрессии, так называемой *security market line (SML)*, дает оценку рыночной премии за единицу риска, а точка пересечения линии регрессии — оценку доходности актива с нулевым бета. Затем методами статистики анализируются временные ряды этих оценок. Эконометрическая форма уравнения CAPM записывается в виде:

$$Z_t = \gamma_{0t}\xi + \gamma_{1t}\beta + \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

где Z_t — вектор избыточных доходностей активов в момент времени t , ξ — единичный вектор, β — вектор бета-коэффициентов, $\gamma_{i,t}$ — коэффициенты регрессии ($i = 0, 1$), ε — случайные ошибки регрессии.

Можно показать, что отношение $\hat{\gamma}_i / \hat{\sigma}_{\gamma_i}$ подчиняется t -статистике с $(T-1)$ -й степенями свободы, где $\hat{\gamma}_i$ и $\hat{\sigma}_{\gamma_i}$ — среднее значение и стандартное отклонение для временного ряда γ_{it} ($i = 0, 1$).

Проверке подвергаются следующие гипотезы:

$$\begin{aligned} a) \quad & \gamma_0 = 0, \\ b) \quad & \gamma_1 > 0, \\ c) \quad & \gamma_1 = Z_m, \\ d) \quad & \text{отсутствие в (3.3) нелинейных членов по } \beta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Обычно данным методом проверяется гипотеза о том, что бета-коэффициенты полностью описывают изменения ожидаемой доходности активов. Часто этот метод используют, чтобы тестировать гипотезу о наличии дополнительных объясняющих переменных, таких как отношение рыночной капитализации фирмы к бухгалтерской стоимости активов фирмы, отношение рыночной цены акции к прибыли на акцию, уровень дивидендной доходности и т. п. Недостаток метода заключается в том, что бета-коэффициенты вычисляются на временном промежутке, отличном от промежутка времени, для которого затем проводится тестирование

модели. В российских условиях это становится основным препятствием применения данной методики, поскольку история российского рынка еще очень коротка, а экономическая и политическая ситуация в стране часто менялась. Кроме того, метод является чувствительным к используемому в анализе фондовому индексу как заменителю действительного рыночного портфеля.

Другой способ проверки основан на предположении, что средняя норма доходности актива является несмещенной оценкой ожидаемой (по модельным представлениям) доходности актива. Этот способ и был использован для эконометрической проверки модели на российском рынке.

3.2.3. Эконометрика модели

Определим Z_t как N -мерный вектор избыточного дохода по N активам в момент времени t . В соответствии с (3.2) построим линейные регрессии [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]:

$$Z_t = \alpha + \beta Z_{mt} + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

в предположениях

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Omega, \quad \text{cov}(Z_{mt}, \varepsilon_t) = 0,$$

где Z_t — временные ряды (векторы) избыточной доходности, α и β — векторы коэффициентов регрессии, ε_t — вектор остаточных членов регрессии, Ω — матрица ковариаций остатков регрессий, N — число рискованных активов, обращающихся на рынке. Знак $\mathbf{E}$ означает математическое ожидание случайной величины, а знак $'$ — транспонирование вектора.

Тестируется гипотеза $\alpha = 0$.

Обозначим

$$\mathbf{E}(Z_{mt}) = \mu_m, \quad \sigma^2(Z_{mt}) = \mathbf{E}((Z_{mt} - \mu_m)^2) = \sigma_m^2.$$

Если модель Шарпа–Линтнера выполняется, то все компоненты вектора α должны быть статистически близки к нулю. В этом случае m -портфель является касательным портфелем. Следовательно, необходимо проверить простую нулевую гипотезу $H_0: \alpha = 0$ против альтернативной гипотезы $H_A: \alpha \neq 0$. Для проверки гипотезы H_0 построим статистику

$$J_1 = \frac{T - N - 1}{N} \frac{\hat{\alpha}' \hat{\Omega} - 1 \hat{\alpha}}{1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}}, \quad (3.6)$$

где T — число наблюдений, $\hat{\mu}_m$, $\hat{\sigma}_m^2$ — выборочное среднее и выборочная дисперсия, оцененные по исходным данным, $\hat{\alpha}$, $\hat{\Omega}$ — оценки параметров α и матрицы ковариаций остатков регрессии (3.5):

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_m &= T^{-1} \sum_t Z_{mt}, \quad \hat{\sigma}_m^2 = T^{-1} \sum_t (Z_{mt} - \hat{\mu}_m)^2, \\ \hat{\alpha} &= \hat{\mu} - \hat{\beta} \hat{\mu}_m, \quad \hat{\mu} = T^{-1} \sum_t Z_t, \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum (Z_t - \hat{\mu})(Z_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum (Z_{mt} - \hat{\mu}_m)^2}, \\ \hat{\Omega} &= T^{-1} \sum (Z_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Z_{mt})(Z_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} Z_{mt})'.\end{aligned}$$

Знак $\sum$ означает суммирование по всему временному ряду.

В работе [Muirhead, 1983] доказано, что величина J_1 имеет F -распределение с $(N, T - N - 1)$ степенями свободы. Таким образом, необходимо сравнить вычисленное значение J_1 с критическим значением F -статистики при заданном уровне ошибки. Отметим, что с экономической точки зрения можно интерпретировать [Gibbons, Ross, Shanken, 1989] величину J_1 как меру близости использованного в анализе рыночного портфеля к идеальному касательному портфелю модели CAPM.

3.2.4. Исходные данные для проверки модели

Как уже отмечалось, ключевым понятием модели является понятие эффективного рыночного портфеля. Этот портфель в принципе является ненаблюдаемым, поэтому при практическом использовании моделей CAPM часто эффективный рыночный портфель заменяется набором активов, по которым определяется один из рыночных (биржевых) индексов. Ненаблюдаемость эффективного рыночного портфеля приводит к тому, что строгая проверка модели невозможна (знаменитая критика Ролла [Roll, 1977]). Замена доходности эффективного портфеля на доходность по индексу приводит к тому, что любая проверка лишь отвечает на вопрос о том, является ли используемый индекс достаточно хорошим заменителем эффективного портфеля. Однако эмпирические проверки модели, проведенные для различных индексов, и теоретические исследования показали, что если корреляция между индексом и действительным эффективным портфелем превышает 70%, то гипотеза о несправедливости модели может быть проверена и с использованием такого индекса [Kandel, Stambaugh, 1987; Shanken, 1985].

Таким образом, в *ex-post* анализе можно считать доходность R_m доходностью по рыночному индексу. Значения дисперсии доходности рыночного портфеля $\sigma^2(R_m)$ и ковариации доходностей активов и рыночного портфеля $\text{cov}(R_i, R_m)$ исследователи обычно оценивают, используя временной ряд данных по рыночным ценам активов и временной ряд данных по рыночному индексу. Например, исследования рынка корпоративных ценных бумаг в США часто проводятся с использованием индекса *S&P500* (как правило, в форме временного ряда месячных доходностей за 5 лет). Выбор активов для анализа достаточно произволен. Однако для уменьшения влияния несистематического риска, присущего отдельно взятым активам, их объединяют в портфели. Объединение можно производить по разным признакам: по размеру капитализации фирмы, по отраслевому признаку, по степени рискованности активов. Последнее применяется наиболее часто. Обычно в анализе используют 10–20 портфелей.

Одним из наиболее важных предположений модели CAPM в версии Шарпа–Линтнера является возможность неограниченного кредитования и заимствования по некоторой безрисковой ставке. Очевидно, что данное предположение достаточно далеко от реальности. На развитых финансовых рынках более реалистичным предположением являлось бы предположение о наличии возможности неограниченного кредитования и невозможности заимствования по безрисковой ставке. На практике такое предположение реализуется в виде возможности для инвестора приобретать государственные ценные бумаги, соответствующие по своему сроку погашения его горизонту планирования. Предполагается, что данные бумаги практически не подвержены риску дефолта и потому ставка по ним низка. Требуемая доходность на рискованные активы определяется как сумма безрисковой процентной ставки и рисковой премии. Стандартным примером таких безрисковых государственных ценных бумаг являются американские Treasury Bills.

В первых проверках Окулова использовались месячные данные по ценам 9 наиболее ликвидных российских акций (табл. 3.1), фондовые индексы (PTC, RESI, AK&M) в качестве заменителей рыночного портфеля и 30-дневные «виртуальные заменители» государственных краткосрочных облигаций (ГКО) в качестве безрискового актива. Период тестирования: апрель 1996 г. — август 1998 г. (рис. 3.1).

Фактически в этой работе анализировалось, существуют ли систематические отклонения средней действительной доходности некоторых акций от предсказываемой по модели CAPM. Формальный анализ показал,

Таблица 3.1

Рискованные активы для тестирования модели CAPM

Компания-эмитент	Обозначение	Доля в обороте торгов, %
Газпром	GAZP	25
Лукойл	LKOH	23
Сургутнефтегаз	SNGS	15
РАО ЕЭС	EESR	11
Мосэнерго	MSNG	4.5
Иркутскэнерго	IRGZ	2
Ленэнерго	LENE	1
Ростелеком	RTKM	5
СПб телефонная сеть	SPTL	1

что гипотеза о том, что систематические отклонения существуют, должна быть отвергнута на высоком уровне значимости, однако детальный анализ полученных результатов выявил ряд моментов, которые трудно согласовать с выводами модели CAPM и здравым смыслом. Например, 8 из 9 активов имели бета-коэффициенты меньше 1, кроме того, систематические отклонения доходности некоторых важных активов (акции «Газпрома») оказались слишком велики (табл. 3.2).

Недостаток исследования заключался в том, что было использовано слишком мало активов и временных точек, что снижает точность анализа. В дальнейшем для проверки модели CAPM в различных версиях использовался один и тот же набор данных. Были приняты во внимание особенности российского фондового рынка, которые накладывают определенные ограничения на выбор активов и временного промежутка для исследования. Так как модель CAPM в версии Блэка оперирует реальными доходностями, то необходимо выбрать период, в течение которого инфляция незначительна. Этому условию удовлетворяет временной промежуток с мая 1996 г. по июль 1998 г., когда месячный темп инфляции никогда не превышал 2%, а среднее значение составляло 0.85%. Период май — июнь 1996 г. также был исключен из анализа, поскольку можно предположить, что политическая неопределенность, связанная с президентскими выборами в России, сильно влияла на ожидания инвесторов. Таким образом, для анализа был выбран период времени с июля 1996 г. по июль 1998 г. Этот период характеризовался бурным развитием рынков

Результаты проверки модели CAPM

Таблица 3.2

		Активы							
	GAZP	SNGZ	LKOH	EESR	MSNG	IRGZ	LENE	RTKM	SPTL
Рыночный портфель: индекс РТС									
β	0.526	0.414	0.573	0.754	0.587	0.586	1.189	0.446	0.571
α	0.0970	-0.0089	0.0345	0.0283	-0.0027	-0.0006	0.0629	-0.0050	0.0327
Рыночный портфель: индекс АК&М									
β	0.627	0.324	0.500	0.649	0.476	0.519	1.197	0.359	0.522
α	0.1013	0.00042	0.0337	0.0376	0.00464	0.00872	0.0523	0.0072	0.0269
Рыночный портфель: индекс RESI									
β	0.591	0.541	0.495	0.821	0.634	0.702	0.672	0.545	0.375
α	0.1386	0.0279	0.0718	0.0864	0.0423	0.0480	0.1214	0.0326	0.0636

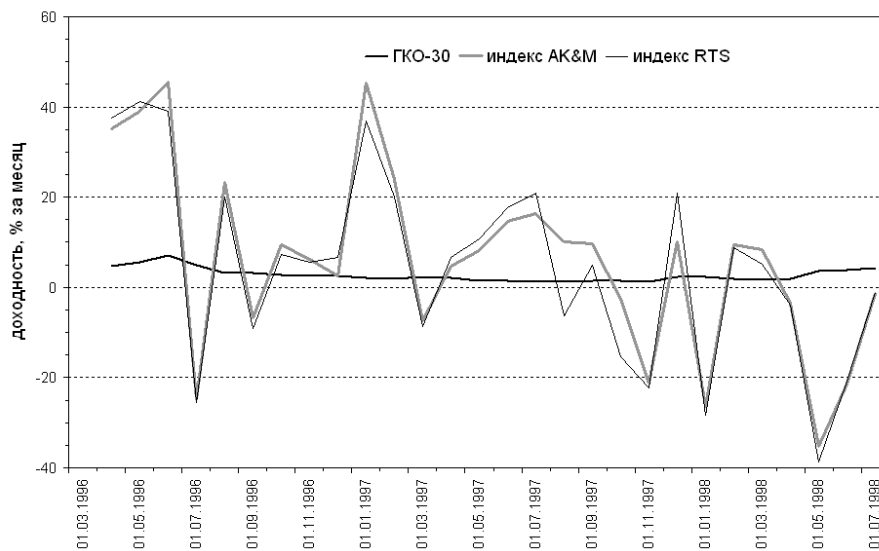


Рис. 3.1. Динамика доходности рыночного портфеля и безрискового актива

корпоративных ценных бумаг и государственных ценных бумаг, многие активы обладали высокой ликвидностью, по менее ликвидным активам спреды котировок были невелики. Именно для этого периода можно было бы ожидать наличие эффективности российского рынка.

Так как выбранный временной промежуток невелик, то использование месячных данных по доходностям активов сильно ограничило бы точность оценок и снизило достоверность анализа. Поэтому разумнее оперировать недельными доходностями активов. В качестве базового дня для расчета недельной доходности была выбрана среда. Отчасти этот выбор был обусловлен желанием учесть результаты первичного размещения государственных ценных бумаг, которые происходили по средам.

В качестве заменителя рыночного эффективного портфеля был выбран индекс SKATE-100 Russia, вычисляемый как сумма взвешенных по объему капитализации цен закрытия для 100 наиболее ликвидных российских обыкновенных акций¹⁸:

$$I_t = I_{t-1} \frac{M_t}{M_{t-1}}, \quad M_t = \sum_i P_{i,t} N_i, \quad (3.7)$$

¹⁸ Данные агентства Red Stars.

Таблица 3.3

Характеристики использованных в расчетах фондовых индексов

Индекс	Код	Число активов в индексе	Средний оборот (млн долл.)	Дата введения
SKATE-100 Russia	ASPGEN	100	47.4	20.06.1994
Industrial	ASPIND	24	3.3	02.11.1994
Engineering	ASPMAC	14	0.8	02.11.1994
Non-Ferrous Metals	ASPMET	3	2.2	02.11.1994
Oil&Gas	ASPO&G	18	14.9	02.11.1994
Power Industry	ASPENG	20	20.6	02.11.1994
Telecommunications	ASPTTEL	32	6.4	02.11.1994
Retailing	ASPTRA	2	0.2	02.11.1994
MT-Index	ASPMT	50	9.8	01.09.1994

где $P_{i,t}$ — цена акции, N_i — число акций. Суммирование проводится по всем активам в листинге данного индекса.

В качестве активов были использованы 7 отраслевых индексов SKATE (табл. 3.3). Выбор именно этих индексов обусловлен большим среднедневным оборотом торгов на биржевом и внебиржевом рынках, приходящимся на активы в данных индексах. Остальные индексы не рассматривались. Дополнительно в качестве актива был выбран индекс Moscow Times, рассчитываемый для 50 ликвидных обыкновенных акций фирм с наибольшей капитализацией. Расчетная формула для всех индексов идентична, что обеспечивает полную методическую совместимость всех использованных для анализа портфелей. Привилегированные акции не рассматривались, поскольку индекс на эти акции был введен только 2 сентября 1996 г.

Кроме вложений в корпоративные ценные бумаги на российском рынке целесообразно рассмотреть вложения в государственные ценные бумаги, в иностранную валюту и вложения на межбанковском кредитном рынке.

В качестве обобщенной характеристики вложений в государственные ценные бумаги (ГКО, ОФЗ–ПД, ОФЗ–ПК, облигации Министерства финансов, евробонды, а также спектр муниципальных облигаций) рассматривался ценовой индекс ГКО (GKO–P) агентства Red Stars (SKATE)

$$\text{Ind}_t = \text{Ind}_{t-1} \frac{1}{V} \sum_t \frac{P_{i,t} V_i}{P_{i,t-1}}, \quad (3.8)$$

где $P_{i,t}$ — цена закрытия торгов по i -му траншу, V — общий объем всех траншей ГКО, V_i — объем i -го транша в обращении. Суммирование проводится по всем траншам, находящимся в обращении. Остальные индексы не рассматривались.

Базовое значение всех индексов равно 100. Все использованные индексы номинированы в российских рублях. Доходность по всем индексам определялась по формуле

$$R_{\text{ind},t} = \frac{\text{Ind}_t - \text{Ind}_{t-1}}{\text{Ind}_{t-1}}. \quad (3.9)$$

В качестве вложений в иностранную валюту рассматривались вложения в доллары США. Цена доллара США определялась по итогам торгов на ММВБ¹⁹, доходность вложений в доллар — как относительное изменение цены.

В качестве доходности вложений на межбанковском рынке использовалась доходность по семидневым кредитам.²⁰ Кредиты на более долгий срок (14, 21, 30 и 60 дней) не рассматривались, поскольку их объемы относительно невелики по сравнению с краткосрочными. Кредиты на более короткие сроки (1 и 3 дня) также не рассматривались, поскольку для инвесторов с рациональными ожиданиями процентные ставки по кредитам на разные сроки должны быть взаимосвязаны.

Графики недельной доходности по некоторым индексам SKATE приведены на рис. 3.2, графики недельной доходности по индексу ГКО, по вложениям в валюту и на рынке МБК — на рис. 3.3.

3.2.5. Результаты эмпирической проверки модели

Результаты анализа приведены в табл. 3.4, где представлен список использованных активов, а также вычисленные значения α и β . Расчеты были проведены трижды: в качестве доходности безрискового актива использовались, соответственно, доходность по вложениям в валюту, доходность ГКО, доходность вложений на рынке МБК. Значения статистики J_1 при использовании различных безрисковых активов также приведены в табл. 3.4. Видно, что почти для всех анализируемых активов альфа-коэффициенты действительно близки к нулю. По результатам расчетов гипотеза о равенстве коэффициентов α нулю не может быть отвергнута

¹⁹ Данные получены с сайта ЦБ России: <http://www.cbr.ru>.

²⁰ Данные получены с сайта ЦБ России: <http://www.cbr.ru>.

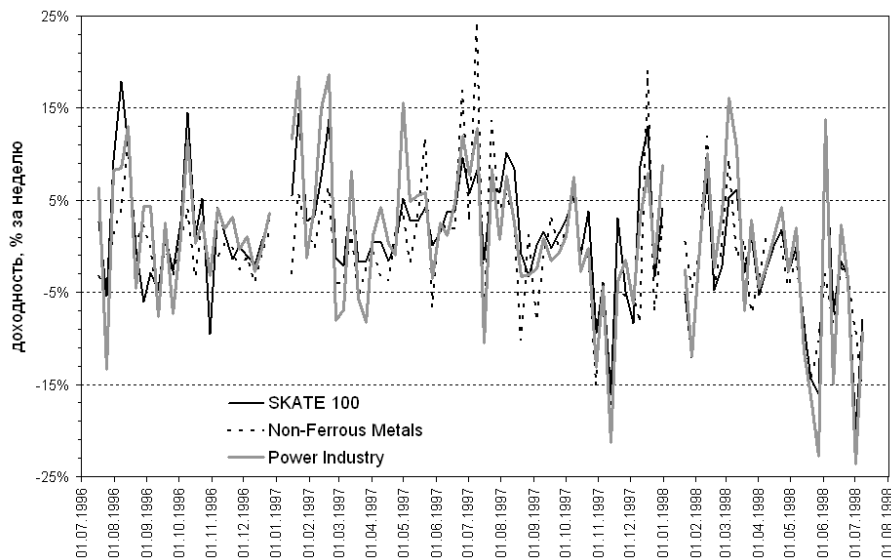


Рис. 3.2. Динамика доходностей по индексам корпоративных ценных бумаг

на уровне значимости 95%, если считать, что доходность безрискового актива совпадает с доходностью по вложениям в валюту или совпадает с доходностью ГКО (фактически мы предполагаем, что безрисковым активом мог являться либо доллар США, либо ГКО). Однако, если предположить, что в качестве безрискового актива выступали ставки по семидневным кредитам, то гипотеза $\alpha = 0$ должна быть отвергнута. Критическое значение F -статистики: $F_{(0.05;8;90)} = 2.04$, в то время как значения J_1 равны, соответственно, 0.64, 1.54 и 2.28.

На первый взгляд, это очень странный результат. Значения альфа-коэффициентов слабо отличаются при использовании в анализе различных безрисковых активов. Кроме того, из рис. 3.3 видно, что волатильность доходности вложений в ГКО много выше, чем волатильность доходности вложений на рынке МБК, и, казалось бы, вложения в ГКО никак не следует считать безрисковыми. Полученный парадоксальный результат свидетельствует о том, что использованный метод тестирования является слишком мягким и изначально предполагает справедливость модели CAPM на рассматриваемом рынке. Действительно, если точки «средняя доходность — риск», соответствующие разным активам, широко разбросаны вокруг линии рынка SML , то уравнение регрессии всегда или почти

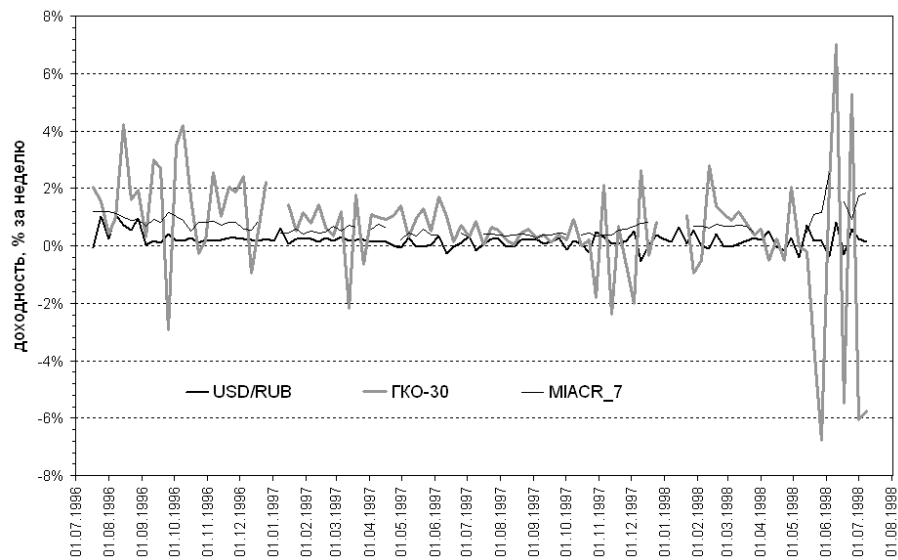


Рис. 3.3. Динамика доходностей вложений на валютном рынке, на рынках ГКО и межбанковского кредита

всегда можно постараться провести через начало координат или любую близкую к нему точку, и считать соответствующий актив безрисковым (для этого необходимо, чтобы данный актив имел меньшую в сравнении с рыночной волатильность). Но это вовсе может не означать, что движения цен на таком рынке являются согласованными, т. е. кажущееся присутствие «безрискового актива» не означает справедливость модели CAPM. В этом отношении версия Блэка гораздо жестче, так как при выбранном рыночном портфеле тестируется не гипотеза $\alpha = \text{const}$ для всех рискованных активов, а гипотеза $\alpha = (1 - \beta)R_z$, где актив z состоит из всех рыночных активов и должен дополнительно иметь нулевую корреляцию с рыночным портфелем. Таким образом, тестирование модели Блэка позволяет не столько идентифицировать актив с нулевым бета, сколько проверить эффективность рынка.

Результаты расчетов (модель Шарпа–Линтнера)

Таблица 3.4

		Активы						
	Industr	Engineer	NF-Met	Oil&Gas	Power	Telecom	Retail	MT-Ind
Безрисковый актив USD/RUR ($J=0.64$)								
β	0.737	0.653	0.698	1.010	1.091	0.874	0.582	1.030
α	0.0029	0.0026	-0.0125	0.0002	-0.0017	0.0008	-0.0059	-0.0046
Безрисковый актив GKO ($J=1.54$)								
β	0.759	0.613	0.680	1.012	1.076	0.841	0.490	1.002
α	0.0022	0.0014	-0.0138	0.0004	-0.0018	0.0000	-0.0085	-0.0048
Безрисковый актив MIACR-7 ($J=2.28$)								
β	0.729	0.641	0.663	1.020	1.069	0.871	0.583	1.015
α	0.0019	-0.0004	-0.0177	0.0005	-0.0020	0.00093	-0.0100	-0.0056

3.3. Модель САРМ в версии Блэка

3.3.1. Предпосылки модели и основные соотношения

В начале 1970-х гг. Фишер Блэк предложил новую версию САРМ [Black, 1972], носящую теперь название *модель Блэка*, или *модель с активом с нулевым бета*. Внешне суть состоит в том, что предположение о существовании безрискового актива исключается из модели. Это приводит к неоднозначности выбора эффективного «образцового» портфеля (*benchmark portfolio*), играющего теперь роль заменителя рыночного портфеля в классической САРМ, по отношению к которому и строится актив с нулевым бета. Эконометрика модели чрезвычайно усложняется — вместо простой одноиндексной модели линейной регрессии мы приходим к двухфакторной модели, которая вдобавок является нелинейной (так как мы не знаем актива с нулевым бета, то мы не можем считать бета просто коэффициентом регрессии). Отметим, однако, что — за прошедшие почти 30 лет — эта эконометрика была весьма детально проработана и представлена в монографии [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997].

Интереснее, однако, обратиться к экономике модели Блэка. Эта модель — не просто отклик практика (а Блэк был одновременно корифеем и в теории, и в практике) на тот факт, что бывают рынки, на которых отсутствует безрисковый актив (что всегда было ясно по отношению к российскому рынку и что лишь формально зафиксировал дефолт 17 августа 1998 г.). Это отклик выдающегося теоретика на недостатки классической САРМ. Дело в том, что на рынке обязательно присутствуют активы с различной ликвидностью и различными сроками созревания (*maturity*). Основная задача банков и многих других финансовых учреждений состоит в преобразовании краткосрочных пассивов (вложений) в долгосрочные активы (инвестиции в реальный сектор). Долгосрочные активы в развитой банковской системе имеют и ценность, и ликвидность, но «приравнивание» их к спекулятивным активам некорректно. Таким образом, в статическую модель неявно вносится динамический аспект. Конкретная реализация ликвидности может происходить через репо-рынок, рынок межбанковского кредита, валютные и процентные свопы. Все эти инструменты не учитываются САРМ, хотя их роль для поддержания ликвидности видимого спекулятивного рынка весьма велика. С точки зрения классической САРМ важность этих инструментов означала бы ошибку в модели: неэффективность рыночного индекса. Модель Блэка позволяет включать эти инструменты в качестве ненаблюдаемой компоненты финансового рынка,

регистрируемой только после идентификации эконометрической модели. Именно такой подход развивался в серии работ [Kandel, Stambaugh, 1987; Shanken, 1985, 1986] опубликованных в 1980–1990-х гг. Часть из этих статей положена в основу приводимого ниже исследования.

Основной вывод модели, как и в классической версии, заключается в том, что ожидаемая доходность любого актива $E(R_i)$ пропорциональна относительной рискованности этого актива, мерой которой является ковариация $\text{cov}(R_i, R_m)$ доходностей актива R_i и любого из эффективных портфелей (*minimum-variance portfolio*) R_m . Кардинальное отличие выводов модели Блэка состоит в том, что ожидаемая доходность произвольного актива может быть описана ожидаемой доходностью любого эффективного портфеля и доходностью некоторого гипотетического портфеля R_z . Этот гипотетический ненаблюдаемый портфель, так называемый актив с нулевым бета (*zero-beta portfolio*), является ортогональным к данному эффективному портфелю R_m , причем для каждого эффективного портфеля существует свой единственный актив R_z . Таким образом, актив с нулевым бета, по определению, это такая комбинация рискованных активов, доходность которой имеет нулевую ковариацию с данным эффективным портфелем и наименьший уровень риска. Основное уравнение модели:

$$E(R_i) = E(R_z) + \beta_{im}(E(R_m) - E(R_z)), \quad \beta_{im} = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}. \quad (3.10)$$

Подчеркнем еще несколько важных отличий модели Блэка от «классической» версии CAPM:

- поскольку модель Блэка не может быть сформулирована в терминах избыточной доходности, то под доходностью активов понимается реальная, а не номинальная доходность — учет инфляции приводит к более сложному уравнению (см., напр.: [Cuthbertson, 1996]);
- ожидаемая доходность любого актива определяется линейной комбинацией ожидаемых доходностей двух ненаблюдаемых портфелей (по сути, эта модель является двухфакторной);
- модель Блэка не требует, чтобы все инвесторы формировали одинаковые по структуре инвестиционные портфели. Разные инвесторы могут формировать инвестиционные портфели в соответствии со своими предпочтениями, используя разные эффективные портфели и, соответственно, разные активы с нулевым бета;
- поскольку нет известной всем безрисковой ставки, то формирование индивидуального инвестиционного портфеля требует либо возможности коротких продаж, либо наличия активов с отрицательным

бета-коэффициентом (отрицательной ковариацией доходности хотя бы одного актива с доходностью эффективного портфеля).

Эти отличия делают модель Блэка более реалистичной и гибкой, чем модель Шарпа–Линтнера, но и значительно более сложной для эконометрической проверки и применения.

Остановимся кратко на экономических различиях этих двух версий. Модель Шарпа–Линтнера оперирует только рыночным портфелем рискованных активов и безрисковым активом в рамках статики и предполагает абсолютную ликвидность во всех секторах рынка и одинаковый горизонт планирования для всех инвесторов. Экономика модели Блэка кардинально отлична, несмотря на схожесть уравнений. Она позволяет включить в рассмотрение не только капитальные активы, но и инструменты, посредством которых в развитой банковской системе происходит трансформация краткосрочных спекулятивных инвестиций в долгосрочные активы. Важность этих инструментов означала бы с точки зрения модели Шарпа–Линтнера неэффективность рыночного индекса как аппроксимации рыночного портфеля. Модель Блэка позволяет органично включить эти инструменты в качестве ненаблюдаемой компоненты финансового рынка, регистрируемой только после идентификации эконометрической модели.

3.3.2. Методы эмпирической проверки модели

Эконометрика модели CAPM в версии Блэка значительно более сложна. Впервые строгий метод проверки модели Блэка был применен в работе [Gibbons, 1982]. Подробный анализ метода приведен в работе [Shanken, 1985]. Метод заключается в следующем. Для каждого актива рассматриваются регрессионные уравнения

$$R_t = \alpha + \beta R_{mt} + \varepsilon_t. \quad (3.11)$$

Из (3.11) обычным методом наименьших квадратов легко получить оценки коэффициентов α^* , β^* и ковариационной матрицы остатков регрессии $\Omega^*(\alpha^*, \beta^*)$. Идея метода заключается в проверке гипотезы $\alpha = (1 - \beta)R_z$ для всех активов. Делается это следующим образом. Для уравнений регрессии

$$R_t = (1 - \beta)R_z + \beta R_{mt} + \varepsilon_t \quad (3.12)$$

методами максимального правдоподобия строятся оценки $R_z^{**}(\beta^{**})$, $\beta^{**}(R_z^{**})$, $\Omega^{**}(\beta^{**}, R_z^{**})$. Поскольку эти оценки взаимосвязаны, то исполь-

зуется итерационная процедура, в которой в качестве начального приближения принимаются оценки β^* , Ω^* . Если процедура сходится, то можно вычислить оценку максимального правдоподобия

$$J = \left(T - \frac{N}{2} - 2 \right) (\log(\det(\Omega^{**})) - \log(\det(\Omega^*))).$$

Эта величина асимптотически стремится к χ^2 -распределению с $(N-1)$ степенями свободы. Сравнив полученное значение J с критическим значением статистики χ^2 , можно сделать вывод о том, следует ли отвергнуть гипотезу $\alpha = (1 - \beta)R_z$.

Данный метод имеет два существенных недостатка. Первый — необходимость многократных итерационных вычислений с неясными перспективами относительно их сходимости. Вторым недостатком заключается в том, что построенная статистика является асимптотической. Ее пригодность для не слишком больших выборок, характерных для короткой истории и недостаточной развитости российского рынка, может быть поставлена под сомнение.

Оригинальный метод проверки модели CAPM в версии Блэка предложен в работах [Kandel, 1984; Shanken, 1986]. Основным отличием от предыдущего метода является использование для проверки модели уравнения

$$R_t - R_z = \alpha + \beta(R_{mt} - R_z) + \varepsilon_t.$$

Идея метода заключается в проверке гипотезы $\alpha = 0$ для всех активов, при этом неизвестный параметр R_z оценивается в предположении $\alpha \equiv 0$. Именно этот метод был использован при тестировании модели на российском рынке.

3.3.3. Эконометрика модели

Определим R_t как N -мерный вектор доходности по N активам в момент времени t . В соответствии с (3.10) построим линейные регрессии [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]:

$$R_t - R_z - \xi = \alpha + \beta(R_{mt} - R_z) + \varepsilon_t \quad (3.13)$$

в предположениях

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Omega, \quad \text{cov}(Z_{mt}, \varepsilon_t) = 0,$$

где α, β — вектора коэффициентов регрессии, ξ — единичный вектор, ε_t — вектор остаточных членов регрессии, Ω — матрица ковариаций остатков регрессий. R_t являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, причем их совместное распределение подчиняется нормальному закону. Последнее предположение особенно важно, поскольку для оценки параметров используется метод максимального правдоподобия.

Обозначим

$$\mathbf{E}(R_t) = \mu^*, \quad \mathbf{E}(R_{mt}) = \mu_m, \quad \sigma^2(R_{mt}) = \mathbf{E}((R_{mt} - \mu_m)^2) = \sigma_m^2,$$

где μ^*, μ_m, σ_m^2 — выборочные средние и дисперсия, оцененные по исходным временным рядам.

Оценки максимального правдоподобия имеют следующий вид (предполагаем, что R_z известно):

$$\begin{aligned} \alpha^*(R_z) &= \mu^* - R_z \xi - \beta^*(\mu_m - R_z), \\ \beta^*(R_z) &= \frac{\sum (R_t - \mu^*)(R_{mt} - \mu_m)}{\sum (R_{mt} - \mu_m)^2}, \\ \Omega^* &= T^{-1} \sum (R_t - \mu^* - \beta^*(R_{mt} - \mu_m))(R_t - \mu^* - \beta^*(R_{mt} - \mu_m))', \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем временным наблюдениям (общее число наблюдений T).

Если модель Блэка справедлива, то должно выполняться тождество $\alpha = 0$. В этом случае оценки максимального правдоподобия коэффициентов регрессионных уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} \beta^{**}(R_z) &= \frac{\sum (R_t - R_z \xi)(R_{mt} - R_z)}{\sum (R_{mt} - R_z)^2}, \\ \Omega^{**}(R_z) &= T^{-1} \sum (R_t - R_z(\xi - \beta^{**}) - \beta^{**} R_{mt})(R_t - R_z(\xi - \beta^{**}) - \beta^{**} R_{mt})'. \end{aligned}$$

Логарифмическое отношение правдоподобия записывается в форме

$$LR^*(R_z) = -\frac{T}{2(\log(\det(\Omega^{**})) - \log(\det(\Omega^*)))},$$

где L — логарифм функции максимального правдоподобия для соответствующего уравнения регрессии.

Оценку максимального правдоподобия для R_z^* можно получить, минимизируя $LR^*(R_z)$. Условия первого порядка

$$\frac{\partial LR^*(R_z)}{\partial R_z} = 0$$

приводят к нелинейному уравнению для определения R_z^* :

$$A(R_z)^2 + BR_z + C = 0, \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\xi - \beta^*)'(\Omega^*)^{-1}(\mu^* - \beta^*\mu_m)}{\sigma_m^2} - \\ &\quad - \frac{\mu_m(\xi - \beta^*)'(\Omega^*)^{-1}(\xi - \beta^*)}{\sigma_m^2}, \\ B &= \left(1 + \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}\right)(\xi - \beta^*)'(\Omega^*)^{-1}(I - \beta^*) - \\ &\quad - \frac{(\mu^* - \beta^*\mu_m)'(\Omega^*)^{-1}(\mu^* - \beta^*\mu_m)}{\sigma_m^2}, \\ C &= -\left(1 + \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}\right)(\xi - \beta^*)'(\Omega^*)^{-1}(\mu^* - \beta^*\mu_m) - \\ &\quad - \frac{\mu_m}{\sigma_m^2}(\mu^* - \beta^*\mu_m)'(\Omega^*)^{-1}(\mu^* - \beta^*\mu_m). \end{aligned}$$

Минимальный из двух корней уравнения (3.14) есть эффективная оценка доходности актива с нулевым бета R_z^* . Теперь можно проверить простую нулевую гипотезу $H_0: \alpha = 0$ против альтернативной гипотезы $Y_A: \alpha \neq 0$.

Для проверки гипотезы H_0 построим статистику

$$J^*(R_z^*) = \frac{1}{N} \frac{T - N - 1}{1 + \frac{(\mu_m - R_z)^2}{\sigma_m^2}} (\alpha^*)'(\Omega^*)^{-1}(\alpha^*). \quad (3.15)$$

Величина J^* имеет F -распределение с N степенями свободы в числителе и $(T - N - 1)$ степенями свободы в знаменателе [Muirhead, 1983]. Таким образом, необходимо сравнить величину J^* с критическим значением $F(N, T - N - 1)$ статистики при заданном уровне значимости. Если $J^*(R_z^*) > F_{\text{крит.}}$, то гипотеза $H_0: \alpha = 0$ должна быть отвергнута и, значит, модель Блэка на российском фондовом рынке не выполняется.

3.3.4. Исходные данные для проверки модели

В качестве исходных использовались те же данные, что и при проверке модели САРМ в версии Шарпа–Линтнера. В работе [Окулов, 1999] интервал тестирования составлял июль 1996 г. — июль 1998 г. В работах [Ишков, 2001; 2002] этот период времени был разбит на ряд интервалов. Был исключен «смутный период» непосредственно после июньских президентских выборов, а также период, предшествовавший валютному кризису августа 1998 г. и дефолту по ГКО. Затем, исходя из анализа событий, оказывавших влияние на российский финансовый рынок, оставшийся промежуток времени был разбит на три более однородных подпериода: с 1.08.1996 г. по 15.05.1997 г. — приход на рынок ГКО нерезидентов; с 16.05.1997 г. по 27.10.1997 г. — стабилизация рынка; с 28.10.1997 г. по 13.05.1998 г. — уход нерезидентов под воздействием азиатского кризиса. Кроме того, в работе [Ишков, 2001] была исследована возможность использования самых необычных активов в качестве заменителя эффективного рыночного портфеля.

3.3.5. Результаты эмпирической проверки модели

Результаты анализа приведены в табл. 3.5, где представлен список активов, использованных в анализе, а также рассчитанные значения α^* , β^* и R_z^* .

Из данных табл. 3.5 видно, что почти для всех использованных в анализе активов альфа-коэффициенты действительно близки к нулю. Однако по результатам расчетов гипотеза о равенстве коэффициентов α нулю должна быть отвергнута на очень высоком уровне значимости. Действительно, критическое значение F -статистики (равное 2.51) значительно меньше $J^* = 11.3$. Таким образом, можно считать, что в период с июля 1996 г. по июль 1998 г. российский фондовый рынок не может быть описан в рамках модели Блэка.

Одной из причин этого может быть следующее обстоятельство: выбранный индекс SKATE-100 не может служить аппроксимацией рыночного эффективного портфеля. Однако дополнительные исследования показали, что этот индекс имеет высокую степень корреляции со всеми другими, часто используемыми российскими индексами (индекс Российской торговой системы, индекс RESI, сводный индекс АК&М), даже несмотря на сильно различающиеся методики построения этих индексов.

Второй причиной может быть невыполнение требования о нормальности распределения доходностей активов, которая лежит в основе постро-

Таблица 3.5

Результаты расчетов на модели Блэка

Активы	Средняя доходность	Коэффициенты уравнения (3.13)	
		β^*	α^*
SKATE-100 Russia	0.00724	1	0
USD/RUR	0.0018	-0.00913	-0.00167
GKO	0.00577	0.1292	0.00170
MIACR-7	0.00691	-0.0066	0.00333
Industrials	0.00873	0.7375	0.00244
Engineering	0.00796	0.6425	0.00202
Non-Ferrous Metals	-0.00693	0.695	-0.01307
Oil&Gas	0.00752	1.0122	0.00024
Power Industry	0.00604	1.0882	-0.00152
Telecoms	0.00730	0.8723	0.00052
Retailing	-0.00089	0.5819	-0.00662
MT-Index	0.00281	1.0280	-0.00453

Примечания: $R_z^* = 0.00360$; $J^* = 11.26$; $F_{\text{крит.}} = 2.51$.

ения оценок методом максимального правдоподобия. Проверка показала, что из всех использованных активов только доходность вложений в рынок межбанковских кредитов имеет распределение, сильно отличающееся от нормального. Для проверки значимости этой причины были проведены расчеты без использования актива MIACR-7. Результаты расчетов приведены в табл. 3.6.

По-прежнему один из активов имеет отрицательный бета-коэффициент. Доходность актива с нулевым бета почти точно совпадает с доходностью вложений в валюту. По сути, вложение в доллар США и есть актив с нулевым бета. Кроме того, поскольку $J^* < F_{\text{крит.}}$, то гипотеза о равенстве нулю коэффициентов α не может быть отвергнута на уровне значимости 5%. Тот факт, что исключение одного актива привело к значительным изменениям альфа-коэффициентов и почти двукратному изменению оценки доходности актива с нулевым бета, является свидетельством либо сильной неустойчивости оценок, полученных данным методом, либо неправильного подхода к выбору активов для исследования.

В связи с тем что распределение доходности некоторых активов на российском рынке не является нормальным, использовать метод макси-

Таблица 3.6

Результаты расчетов без учета рынка МБК

Активы	Средняя доходность	Коэффициенты уравнения (3.13)	
		β^*	α^*
SKATE Russia 100	0.00724	1	0
USD/RR return	0.001895	-0.00913	0.000005
GKO return	0.00577	0.1292	0.00319
Industrials	0.00873	0.7375	0.00289
Engineering	0.00796	0.6425	0.00263
Non-Ferrous Metals	-0.00694	0.6954	-0.01265
Oil&Gas	0.00753	1.0122	0.00022
Power Industry	0.00605	1.0882	-0.00167
Telecoms	0.00730	0.8723	0.00074
Retailing	-0.00090	0.5819	-0.00590
MT-Index	0.00282	1.0280	-0.00458

Примечания: $R_z^* = 0.001895$; $J^* = 1.933$; $F_{\text{крит.}} = 1.940$.

мального правдоподобия для оценки коэффициентов модели и проверки ее применимости, строго говоря, нельзя.

В работах [Окулов, 1999, 2000] сделан вывод о том, что эти результаты следует рассматривать с большой осторожностью как предварительные. Таким образом, вопрос о применимости модели Блэка на российском фондовом рынке остался открытым. Дальнейшие исследования могут быть связаны либо с применением робастных тестов, либо с построением обобщенного индекса (с учетом не только акций, но и государственных облигаций, других финансовых инструментов) для более точной аппроксимации рыночного эффективного портфеля. Еще одно возможное направление исследований связано с необходимостью учета инфляции, которая в этот период была, по меркам развитых стран, значительной.

Однако более целесообразной идеей является попытка проверить применимость модели CAPM на более узких промежутках времени, так как выбранный интервал времени не был однороден с точки зрения ожиданий инвесторов.

Во-первых, можно отметить, что доходность и волатильность доходности на некоторых секторах финансового рынка, особенно на рынке ГКО, снизилась не сразу же после второго тура выборов президента РФ, про-

веденного 4 июля 1996 г. и закончившегося победой Б. Н. Ельцина. К середине 1996 г. рынок ГКО достиг рекордной по тому времени доходности, и ее снижение происходило в течение некоторого промежутка времени. Исходя из вышесказанного, представляется целесообразным отбросить из рассмотрения начало базового периода.

Во-вторых, и это более важно, значительную неоднородность вносит период конца весны и лета 1998 г. Этот период времени непосредственно предшествовал кризису августа 1998 г. и включал в себя ряд важных для российского финансового рынка событий. К началу 1998 г. Минфин практически полностью отказался от использования рынка государственных облигаций для финансирования дефицита госбюджета. Объем выпуска новых облигаций определялся лишь суммой, необходимой для текущего обслуживания долга по ГКО–ОФЗ. К марту 1998 г. казалось, что властям удалось стабилизировать рынок государственных облигаций. В этом месяце выручка от первичного размещения очередных выпусков ГКО–ОФЗ превысила 34 млрд руб. Центральный банк позволил себе трижды снизить ставку рефинансирования с 42% до 30%. Однако в мае пришла вторая волна азиатского кризиса. Началось падение фондовых индексов на рынках США и Юго-Восточной Азии. В результате этого 27 мая 1998 г. ставка рефинансирования была поднята до 150%. Для обслуживания внутреннего долга из-за нехватки бюджетных средств пришлось прибегнуть к внешнему заимствованию, которое за первое полугодие 1998 г. составило 7.2 млрд долл., включая размещение еврооблигаций.

Непосредственно перед кризисом августа 1998 г. значительно ускорился темп инфляции, что также может негативно отразиться на качестве проверки модели Блэка. В июле 1998 г. месячный темп инфляции достиг значения 3.7%. Кроме того, начиная с середины мая 1998 г. происходило существенное увеличение доходности на рынке межбанковского кредита.

Для статистического подтверждения значимости произошедших изменений в работе [Ишков, 2001] весь базисный период 01.07.1996 — 31.07.1998 был разбит на два подпериода: с 01.07.1996 по 13.05.1998 и с 14.05.1998 по 31.07.1998. Были проведены тест на равенство средних значений и тест на равенство дисперсий индекса доходности ГКО. По результатам тестов нулевые гипотезы о равенстве средних значений и равенстве дисперсий были отвергнуты на высоком уровне значимости.

Исходя из анализа событий, оказывавших влияние на российский финансовый рынок, исследованный в работе [Окулов, 1999], период в работе [Ишков, 2001] был разбит на три более однородных подпериода:

с 01.08.1996 по 15.05.1997, с 16.05.1997 по 27.10.1997, с 28.10.1997 по 13.05.1998.

Первый подпериод был выбран таким образом, чтобы охватить время от момента президентских выборов 1996 г. до стабилизации рынка ГКО в середине 1997 г. В 1996 г. на рынок ГКО получили доступ нерезиденты. Высокая, по меркам развитых стран, доходность этого рынка, удерживаемый в валютном коридоре обменный курс рубля и положительное в течение ряда лет сальдо счета текущих операций в платежном балансе обеспечили приток иностранного капитала в Россию. Если в 1996 г. вывоз капитала из России на 6.8 млрд долл. превышал его ввоз, то в 1997 г. картина была обратная — зарегистрированный приток иностранного капитала на 6.3 млрд долл. превысил вывоз капитала из России. К концу 1997 г. доля иностранных инвесторов на рынке государственных облигаций приблизилась к 30%. Усиление конкуренции на данном рынке привело к существенному снижению его доходности. Снижение рыночной ставки процента было необходимо не только для снижения затрат по обслуживанию внутреннего долга, но и для стимулирования инвестиций в реальный сектор экономики. Приход иностранных инвесторов позволил Минфину также существенно удлинить средний срок погашения облигаций.

Конец второго и начало третьего подпериода совпадают по времени с обвалом рынков Юго-Восточной Азии и Японии и существенным падением фондовых индексов в США, произошедшим во второй половине октября 1997 г. Кризис на азиатских рынках привел к резкому оттоку иностранного капитала и с российского рынка. Вследствие массовой продажи государственных облигаций их доходность начала быстро расти. Центральный банк пытался противостоять повышению доходности государственных облигаций посредством их закупок на открытом рынке. Увеличивавшееся вследствие этого количество находившихся в обращении денег усиливало давление на обменный курс рубля, который и без того слабел из-за оттока иностранного капитала и сокращения положительного сальдо торгового баланса вследствие падения мировых цен на основные экспортируемые товары. Поэтому Центральному банку пришлось почти удвоить ставку рефинансирования и расширить границы валютного коридора.

На фондовом рынке события октября 1997 г. отразились в виде значительного падения фондовых индексов. 28 октября 1997 г. были впервые приостановлены торги в РТС. Начиная с октября 1997 г. средняя доходность по большинству фондовых индексов существенно снизилась и стала отрицательной.

Таблица 3.7

Результаты проверки для периода 16.05.1996 — 07.10.1997

Активы	Средняя доходность	Коэффициенты уравнения (3.13)	
		β^*	α^*
SKATE Russia 100	0.03282	1	0
GKO-P	0.00505	0.00852	0.00132
USD/RR	0.00084	0.00064	-0.00267
MIACR-7	0.00327	-0.00218	-0.00015
MT-Index	0.02240	1.16038	-0.01513
Industrials	0.03640	0.84395	0.00816
Engineering	0.05393	1.05947	0.01937
Non-Ferrous Metals	0.02696	1.02680	-0.00665
Oil & Gas	0.03974	0.99782	0.00698
Power Industry	0.02034	1.16810	-0.01741
Telecoms	0.02070	0.86506	-0.00817
Retailing	0.01284	0.48737	-0.00494

Примечания: $R_z^* = 0.00349$; $J^* = 5.98$; $F_{\text{крит.}} = 2.82$.

Поэтому можно было бы предположить, что ожидания инвесторов будут существенно различаться на этих подпериодах, а также что хотя бы на одном из подпериодов российский рынок будет эффективным. Однако результаты исследований [Ишков, 2001] показали, что ни на одном из тестированных подпериодов модель Блэка не выполняется. Часть результатов этой работы приведена в табл. 3.7 и 3.8.

Кроме того, исследования [Ишков, 2001] показали, что использование индекса РТС, индекса ГКО и доходности по операциям с долларом США в качестве заменителя эффективного портфеля не приводят к применимости модели на российском рынке. На основании этого можно сделать вывод о том, что неприменимость модели Блэка на российском рынке не связана с несовершенством использованных фондовых индексов.

При выбранных активах и на выбранном промежутке времени тестирование модели Шарпа–Линтнера показывает, что формально ценообразование на активы на российском фондовом рынке может быть описано в рамках модели CAPM, причем в качестве безрискового актива могут быть выбраны вложения в валюту или вложения в государственные краткосрочные обязательства. Однако выбранный метод тестирования является слишком «мягким», полученный положительный результат скорее свидетельствует о значительных отклонениях активов (по критерию риск —

Таблица 3.8

Результаты проверки для периода 28.10.1997 — 03.05.1998

Активы	Средняя доходность	Коэффициенты уравнения (3.13)	
		β^*	α^*
SKATE Russia 100	−0.01707	1	0
GKO-P	0.00376	0.11091	0.00184
USD/RR	0.00161	−0.01707	−0.00305
MIACR-7	0.00497	0.00797	0.00085
MT-Index	−0.01777	1.18502	0.00325
Industrials	−0.02055	0.57592	−0.01253
Engineering	−0.01964	0.79077	−0.00704
Non-Ferrous Metals	−0.02501	0.87533	−0.01060
Oil & Gas	−0.02255	0.82680	−0.00917
Power Industry	−0.01219	1.20213	0.00920
Telecoms	−0.01785	1.09169	0.00118
Retailing	−0.02266	0.43312	−0.01770

Примечания: $R_z^* = 0.00429$; $J^* = 10.43$; $F_{\text{крит.}} = 2.46$.

доходность) от рыночной линии, что фактически по сути отвергает согласованное изменение цен активов на российском рынке в рамках какой-либо модели.

Тестирование модели Блэка показывает, что ценообразование на активы в условиях становления российского фондового рынка до кризиса августа 1998 г. не может быть адекватно описано в рамках данной версии модели CAPM. Учитывая общность модели Блэка, этот результат означает хаотичность структуры российского финансового рынка на первом этапе своего развития. Вместе с тем можно сделать более осторожные выводы о том, что либо неверно были проведены оценки параметров модели, либо в анализе не учитывались некоторые важные экономические факторы. Первое обстоятельство может быть связано с негауссовским распределением доходности некоторых активов и требует применения робастных методов тестирования модели, второе — с необходимостью учета инфляции. Однако для того чтобы инфляция играла существенную роль, необходимо присутствие институциональных инвесторов, которые жестко привязывают свои капиталы к индексу потребительских цен, а российский рынок был в то время в значительной мере спекулятивен.

Более вероятная причина неудачи тестирования модели Блэка может быть связана с неэффективностью применения индекса SKATE-100 в ка-

честве рыночного портфеля. Хотя с точки зрения рыночного равновесия модель должна оперировать именно рыночными индексами (вычисляемыми с учетом рыночной капитализации), на высоковолатильном спекулятивном рынке может оказаться более правильным использование в расчетах торговых индексов (взвешенных по объему торгов). И, наконец, еще одна причина неудачи может объясняться тем, что экономическая ситуация в России даже в период 1996 — 1998 гг. несколько раз менялась. Такие моменты могли быть связаны с изменением ставки рефинансирования Центральным Банком РФ, решениями МВФ о выделении кредитов, изменениями налогового законодательства по операциям с государственными ценными бумагами. Интуитивно ясно, что это приводило к дополнительному перетеканию капитала между рынками корпоративных бумаг, государственных бумаг и валютным рынком. Таким образом, в этот период единого (одного и того же) портфеля с нулевым бета принципиально не могло существовать.

Задачи к главе 3

1. Предложите эконометрическую модель для эмпирической проверки необходимости включения в уравнение (3.1) каких-то дополнительных макроэкономических или финансовых факторов.
Указание. Воспользуйтесь уравнением (3.3), введя в него дополнительный фактор.
2. Как, на ваш взгляд, может повлиять на результат проверки модели CAPM смещенность оценок ожидаемой доходности и стандартного отклонения доходности рыночного портфеля, которая может возникнуть из-за несоответствия выбранного для оценок фондового индекса истинному рыночному портфелю?
Указание. Используя выражение (3.6), оцените, насколько может измениться значение итоговой статистики при малых изменениях ожидаемой доходности и стандартного отклонения доходности рыночного портфеля.
3. Разработайте алгоритм проверки модели CAPM в версии Блэка на основе итерационной процедуры, описанной в подразделе 3.2.2.

4. Варианты классической модели CAPM

В предыдущей главе рассматривались вопросы применимости классических версий модели CAPM на российском рынке. Было показано, что ни версия Шарпа–Линтнера [Sharpe, 1964; Lintner, 1965a], ни версия Блэка [Black, 1972] на российском рынке, строго говоря, не выполняются. Однако весьма интересно выяснить, какова структура базовых рыночных портфелей, на которые интуитивно ориентируются инвесторы, изменяя своими действиями цены на рискованные активы. Ответить на этот вопрос можно, протестировав CAPM в версии Блэка как двухфакторную рыночную модель с ограничениями. Такое тестирование, конечно, не изменит общего отрицательного результата, уже полученного в предыдущей главе другими методами, но позволит оценить структуру рыночного портфеля и, что более важно, структуру портфеля с нулевым бета на российском рынке. Близость этой структуры к определяемой по здравому смыслу дает информацию о поведении инвесторов. Способы оценки структур рыночных портфелей и результаты тестирования рассматриваются в первой части этой главы.

Возможно, неудача в тестировании классических версий модели CAPM связана с тем, что российский рынок относится к развивающимся рынкам, к которым традиционная модель CAPM не подходит, поскольку развивающиеся рынки являются «по определению» менее эффективными, чем развитые, и на них не выполняются исходные предположения модели CAPM. В литературе предложены другие варианты модели оценки капитальных активов, большинство из них основано на модели CAPM и является ее модификацией.

Одной из наиболее правдоподобных и обоснованных с теоретической точки зрения моделей является модель D-CAPM, предложенная в [Estrada, 2001, 2002b, 2002c]. Основное отличие модели D-CAPM от стандартной модели CAPM заключается в измерении риска активов. Если в стандартной модели риск измеряется дисперсией доходности, то в модели D-CAPM риск измеряется полудисперсией (*semivariance*), которая пока-

зывает риск снижения доходности относительно ожидаемого или любого другого уровня, выбранного в качестве базового. Полудисперсия является более правдоподобной мерой риска, поскольку инвесторы опасаются не возможности повышения доходности, а возможности ее снижения ниже определенного уровня (например, ниже среднего уровня).

На основе полудисперсии можно построить альтернативную поведенческую модель, основанную на новом измерении риска, а также — модифицированную модель CAPM. Новая модель ценообразования получила в академических публикациях название Downside CAPM, или D-CAPM [Estrada, 2002b, 2002c].

Как показано в [Estrada, 2002c], доходности на развивающихся рынках лучше описываются с помощью D-CAPM, чем с CAPM. Для развитых рынков различие в двух моделях гораздо меньше. В связи с этим возникает вопрос о применимости модели D-CAPM для российского фондового рынка, который исследуется во второй части главы.

4.1. CAPM в версии Блэка как двухфакторная модель

Как уже отмечалось в предыдущей главе, модель Блэка по сути является двухфакторной. Факторами в данном случае служат ненаблюдаемые торгуемые портфели: любой из эффективных рыночных портфелей и портфель, ортогональный к нему. Это может дать еще один метод проверки модели. Идея метода заключается в следующем. По имеющимся временным рядам доходностей различных активов методами факторного анализа можно выделить два наиболее значимых фактора и сформировать на основе факторных коэффициентов абстрактные портфели. Если для выделения факторов использовать метод главных компонент, то, по определению, эти факторы и, следовательно, сформированные портфели будут ортогональными. Тогда один из портфелей можно рассматривать как рыночный эффективный портфель, другой — как актив с нулевым бета. Далее необходимо проверить гипотезу о том, что сумма коэффициентов регрессии любого из активов на сформированные портфели равна единице. Это следует из основного уравнения модели CAPM в версии Блэка

$$\mathbf{E}(R_i) = \mathbf{E}(R_z) + \beta_{im}(\mathbf{E}(R_m) - \mathbf{E}(R_z)),$$

переписанного в несколько иной форме:

$$\mathbf{E}(R_i) = (1 - \beta_{im})\mathbf{E}(R_z) + \beta_{im}\mathbf{E}(R_m), \quad (4.1)$$

где $\beta_{im} = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$ — бета-коэффициент актива, отражающий систематический риск актива, фактически степень «согласованности» изменений доходности актива с изменениями доходности рыночного портфеля.

4.1.1. Эконометрика модели

Определим R_t как N -мерный вектор доходности по N активам в момент времени t . В соответствии с (4.1) построим линейные регрессии [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]

$$R_t = \alpha + BR_{K,t} + \varepsilon_t \quad (4.2)$$

в предположениях

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Omega, \quad \text{cov}(R_{K,t}, \varepsilon_t') = 0,$$

где α — вектор свободных коэффициентов регрессии, $R_{K,t}$ — вектор доходностей в момент времени t по факторным портфелям, B — матрица $(N \times 2)$ факторных коэффициентов, ε_t — вектор остаточных членов регрессии, Ω — матрица ковариаций остатков регрессий. R_t являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, причем совместное распределение является нормальным.

Обозначим

$$\mathbf{E}(R_t) = \mu^*, \quad \mathbf{E}(R_{K,t}) = \mu_K, \quad \mathbf{E}((R_{mt} - \mu_m)(R_{mt} - \mu_m)') = \Omega_K,$$

где μ^* , μ_K , Ω_K — выборочные средние и выборочная ковариационная матрица, оцененные по исходным временным рядам.

Оценки максимального правдоподобия имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \mu^* - B\mu_K, \\ B^* &= \frac{\sum_t (R_t - \mu^*)(R_{K,t} - \mu_K)'}{\sum_t (R_{K,t} - \mu_K)(R_{K,t} - \mu_K)'}, \\ \Omega^* &= \frac{\sum_t (R_t - \alpha^* - BR_{K,t})(R_t - \alpha^* - BR_{K,t})'}{T}, \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем временным наблюдениям (общее число наблюдений T).

Если модель Блэка справедлива, то должны выполняться условия²¹

$$\alpha \equiv 0 \text{ и } B\xi = \xi. \quad (4.3)$$

В этом случае оценки максимального правдоподобия коэффициентов регрессионных уравнений

$$R_t - \xi R_{1,t} = \alpha + B_1(R_{2,t} - R_{1,t}) + \varepsilon_t$$

с ограничениями (4.3) имеют вид

$$\begin{aligned} B_2^{**} &= \frac{\sum (R_t - \xi R_{1,t})(R_{2,t} - R_{1,t})}{\sum (R_{2,t} - R_{1,t})^2}, \\ B_1^{**} &= \xi - B_2^{**}, \\ \Omega^{**} &= \frac{\sum (R_t - B^{**} R_{K,t})(R_t - B^{**} R_{K,t})'}{T}, \end{aligned}$$

где матрица B^{**} состоит из векторов B_1^{**} и B_2^{**} .

Для проверки гипотезы $H_0: \alpha = 0$ построим статистику

$$J^{**} = \frac{T - N - 2}{N} \left(\frac{\det(\Omega^{**})}{\det(\Omega^*)} - 1 \right). \quad (4.4)$$

Величина J^{**} имеет F -распределение с $2N$ степенями свободы в числителе и $(2T - 2N - 2)$ степенями свободы в знаменателе. Таким образом, необходимо сравнить величину J^{**} с критическим значением $F(2N, 2T - 2N - 2)$ статистики при заданном уровне значимости. Если $J^*(R_z^*) > F_{\text{крит.}}$, то гипотеза $H_0: \alpha = 0$ должна быть отвергнута и, значит, модель Блэка на российском фондовом рынке не выполняется. Строго говоря, по крайней мере один из выделенных факторных портфелей не принадлежит границе Марковица, т.е. не имеет наименьшего риска при заданном уровне доходности.

Особый вопрос связан с вычислением доходностей факторных портфелей, сформированных на основе выделенных факторных нагрузок. Обычно применяется следующая процедура [Campbell, Lo, MacKinlay, 1997]. Методом главных компонент выделяются два наиболее значимых фактора и определяются факторные нагрузки для каждого актива. Математически процедура заключается в вычислении собственных значений и

²¹ Напомним, что, как и в главе 3, буквой ξ здесь обозначается единичный вектор.

собственных векторов матрицы выборочных коэффициентов корреляции доходностей всех активов. Выбираются два максимальных собственных числа, и для них определяются собственные векторы. Компоненты этих векторов и есть факторные нагрузки.

Обозначим их X^* , тогда отношение

$$\omega = X^*(\xi' X^*)^{-1} \quad (4.5)$$

есть вектор долей каждого рискованного актива в данном факторном портфеле, а произведение $\omega' R_t$ дает значение доходности факторного портфеля в момент времени t .

Таким образом, данный метод позволяет не только протестировать модель Блэка, но и оценить временной ряд доходностей как рыночного эффективного портфеля, так и портфеля с нулевым бета.

4.1.2. Результаты эмпирической проверки модели

В качестве исходных данных были взяты временные ряды доходностей на активы, использовавшиеся при проверке модели Блэка традиционным методом [Окулов, 1999, 2000]. Факторный анализ проводился в пакете Statistica. Выделение факторов осуществлялась с помощью метода главных компонент (principal components method). Значимых факторов (по модулю больше единицы) оказалось всего два. Собственные значения факторов равны 6.93 и 1.18. Вектора факторных нагрузок представлены на рис. 4.1, а значения факторных нагрузок — в табл. 4.1. В соответствии с формулой (4.5) были сформированы факторные портфели. Вычисленные доли активов в факторных портфелях также приведены в табл. 4.1.

Динамика изменения доходностей факторных портфелей представлена на рис. 4.2 и 4.3. На этих же рисунках для сравнения показаны доходности некоторых активов. Видно, что первый факторный портфель почти полностью совпадает с индексом SKATE-100 Russia. Доходность по этому факторному портфелю обнаруживает также очень высокую степень корреляции с доходностями всех активов, бета-коэффициенты которых близки к единице. Второй факторный портфель не совпадает ни с одним из активов даже на коротком промежутке времени, однако на отдельных промежутках есть высокая степень корреляции доходности второго факторного портфеля с доходностями активов USD, GKO и MIACR-7.

Компоненты векторов ω определяют доли различных активов в факторных портфелях. Из данных табл. 4.1 видно, что в первом факторном

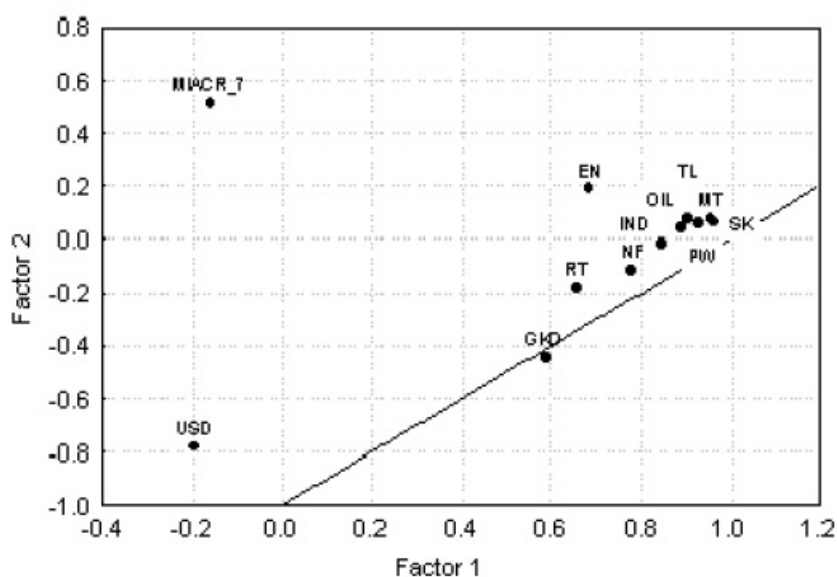


Рис. 4.1. Результаты вычислений векторов факторных нагрузок

портфеле есть только два отрицательных компонента и их величина невелика. Таким образом, первый факторный портфель может быть легко сформирован инвесторами на российском фондовом рынке без применения коротких продаж.

Однако число отрицательных компонентов во втором факторном портфеле весьма значительно — так же, как и их величина. Это означает, что второй факторный портфель может быть сформирован только при условии коротких продаж некоторых активов, что кажется нереальным в условиях российского рынка.

Интересно отметить, что первый факторный портфель в основном формируется за счет корпоративных ценных бумаг, в то время как второй — в основном за счет государственных ценных бумаг, валюты и вложений на межбанковском рынке.

Поскольку временные ряды факторных портфелей определены, то можно вычислить коэффициенты регрессии доходности актива на доходности факторных портфелей. По определению модели Блэка, сумма коэффициентов при независимых переменных должна быть равна единице, а свободный член регрессии должен быть равен нулю.

Таблица 4.1

Результаты расчетов (двухфакторная модель с ограничениями)

Активы	Факторные нагрузки		Доля актива в факторных портфелях	
	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$	$\omega_{i,1}$	$\omega_{i,2}$
SKATE-100 Russia	0.9638	0.0623	0.1232	-0.1150
USD/RR	-0.1992	-0.7844	-0.0254	1.4487
GKO	0.5866	-0.4460	0.0749	0.8238
MIACR-7	-0.1611	0.5132	-0.0206	-0.9479
Industrials	0.8440	-0.0144	0.1078	0.0267
Engineering	0.6862	0.1844	0.0877	-0.3405
Non-Ferrous Metals	0.7760	-0.1169	0.0992	0.2160
Oil & Gas	0.8864	0.0389	0.1133	-0.0718
Power Industry	0.9257	0.0529	0.1183	-0.0977
Telecoms	0.9025	0.0770	0.1153	-0.1423
Retailing	0.6558	-0.1836	0.0838	0.3392
MT-Index	0.9558	0.0752	0.1221	-0.1389

Анализ показывает, что для некоторых из рассмотренных активов эти условия не выполняются. В качестве примера в табл. 4.2 приведены результаты множественной регрессии для GKO. Видно, что свободный член регрессии действительно статистически значимо отличается от нуля, а сумма коэффициентов при регрессорах далека от единицы. Множественная регрессия для корпоративных ценных бумаг показывает лучшие результаты. Свободный член регрессии равен нулю, сумма коэффициентов регрессии близка к единице. В качестве примера в табл. 4.3 приведены результаты для индекса Oil&Gas.

Расчеты для статистики J^{**} , проведенные по (4.4), показывают, что гипотеза о применимости модели Блэка на российском фондовом рынке должна быть отвергнута. Это означает, что выделенные факторные портфели не являются эффективными по критерию риск — доходность.

4.2. Модель D-CAPM

4.2.1. Модели с учетом асимметрии доходности активов

При построении стандартной модели ценообразования на капитальные активы предполагается, что распределение доходностей является нормальным. Нормальное распределение является симметричным и полно-

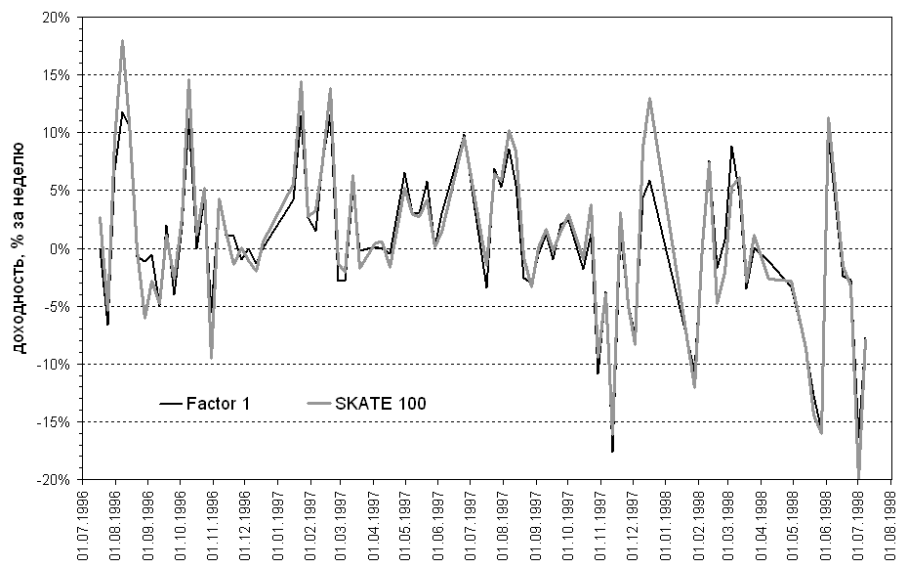


Рис. 4.2. Динамика изменения доходности первого факторного портфеля и доходности по индексу SKATE-100

стью определяется математическим ожиданием и дисперсией. В стандартной поведенческой модели на действия инвесторов влияют ожидание и вариация доходности (стандартное отклонение доходности).

Фактические данные свидетельствуют о том, что распределение доходностей не является симметричным. Можно предположить, что в этом случае на действия инвесторов будут влиять не только ожидаемое значение и дисперсия доходности, но также и коэффициент асимметрии распределения. Интуитивно понятно, что инвесторы при прочих равных условиях предпочитают распределения с положительным коэффициентом асимметрии. Хорошим примером является лотерея. Как правило, в лотереях существует большой выигрыш с малой вероятностью и маленький проигрыш с большой вероятностью. Многие люди покупают лотерейные билеты, несмотря на то что ожидаемый доход по ним отрицательный. Известно, что в соответствии с [Roy, 1952] инвесторы прежде всего стремятся сохранить первоначальную стоимость своих инвестиций и избегают снижения первоначальной стоимости инвестиций ниже определенного целевого уровня. Такое поведение инвесторов соответствует предпочтению положительной асимметрии.

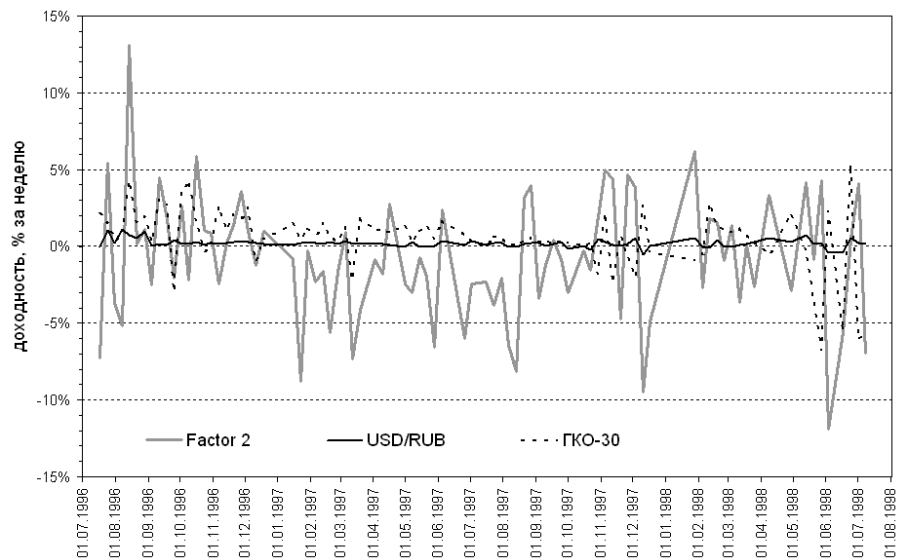


Рис. 4.3. Динамика изменения доходности второго факторного портфеля, вложений в валюту и в ГКО

Следовательно, активы, которые уменьшают асимметрию портфеля, нежелательны. Поэтому ожидаемая доходность такого актива должна включать премию за этот риск. Асимметрию можно включить в традиционную модель ценообразования. Модели, учитывающие асимметрию, рассматриваются в [Rubinshtein, 1973; Kraus, Litzenberger, 1976; Harvey, Siddique, 2000].

В этих моделях предполагается, что при прочих равных условиях инвесторы предпочитают активы с большей доходностью, активы с меньшим стандартным отклонением и активы с большей асимметрией. Соответственно, можно рассматривать альтернативную поведенческую модель инвесторов на основе трех показателей распределения доходности активов. В [Harvey, Siddique, 2000] описывается множество эффективных портфелей в пространстве среднего, дисперсии и асимметрии. Для данного уровня дисперсии существует обратное соотношение между доходностью и асимметрией. Значит, для того чтобы инвестор держал активы с меньшей асимметрией, они должны иметь большую доходность, т.е. премия должна быть отрицательна.

Как и в случае с дисперсией, на доходность актива влияет не асимметрия актива как такового, а вклад актива в асимметрию портфеля, т.е.

Таблица 4.2

**Результаты множественной регрессии доходности ГКО на
доходности факторных портфелей**

Регрессионная статистика				
Множественный R^2		0.655		
R^2		0.429		
Нормированный R^2		0.415		
Стандартная ошибка		0.0157		
Наблюдения		85		
Дисперсионный анализ				
	df	SS	MS	F
Регрессия	2	0.0152	0.007627	30.8
Остаток	82	0.0202	0.0002474	
Итого	84	0.0355		
Регрес- соры	Коэффи- циенты	Стандартная ошибка	t-стати- стика	p-значе- ние
Const	0.00562	0.001741	3.22	0.0017
Factor 1	0.2442	0.03125	7.81	1.6E-11
Factor 2	0.1999	0.04692	4.26	5.4E-05

коасимметрия (см.: [Harvey, Siddique, 2000]). Коасимметрия должна иметь отрицательную премию. Актив с большей коасимметрией должен иметь меньшую доходность, чем актив с меньшей коасимметрией.

Результаты, приведенные в [Harvey, Siddique, 2000], показывают, что асимметрия помогает объяснить вариацию доходности в пространственных данных и значительно улучшает значимость модели. В работе [Harvey, 2000] продемонстрировано, что если рынки полностью сегментированы, то на доходность влияют полная дисперсия и полная асимметрия. На полностью интегрированных рынках имеют значение только ковариация и коасимметрия.

В работе [Harvey, Siddique, 2000] выведена следующая модель, учитывающая асимметрию:

$$E_t(r_{i,t+1}) = \lambda_{1,t} \text{cov}_t(r_{i,t+1}, r_{M,t+1}) + \lambda_{2,t} \text{cov}_t(r_{i,t+1}, r_{M,t+1}),$$

где

Таблица 4.3

**Результаты множественной регрессии доходности по индексу
OIL & GAS на доходности факторных портфелей**

Регрессионная статистика				
Множественный R^2		0.891		
R^2		0.795		
Нормированный R^2		0.790		
Стандартная ошибка		0.0344		
Наблюдения		85		
Дисперсионный анализ				
	df	SS	MS	F
Регрессия	2	0.3791	0.1895	159.4
Остаток	82	0.0974	0.00118	
Итого	84	0.4766		
Регрес- соры	Коэффи- циенты	Стандартная ошибка	t -стати- стика	p -значе- ние
Const	0.00205	0.00381	0.538	0.591
Factor 1	1.0190	0.0684	14.8	5.2E-25
Factor 2	-0.1959	0.1028	-1.90	0.0602

$$\lambda_{1,t} = \frac{\sigma_t^2(r_{M,t+1}^2)\mathbf{E}_t(r_{M,t+1}) - \text{Skw}_t(r_{M,t+1})\mathbf{E}_t(r_{M,t+1}^2)}{\sigma_t^2(r_{M,t+1})\sigma_t^2(r_{M,t+1}^2) - (\text{Skw}_t(r_{M,t+1}))^2},$$

$$\lambda_{2,t} = \frac{\sigma_t^2(r_{M,t+1})\mathbf{E}_t(r_{M,t+1}^2) - \text{Skw}_t(r_{M,t+1})\mathbf{E}_t(r_{M,t+1})}{\sigma_t^2(r_{M,t+1})\sigma_t^2(r_{M,t+1}^2) - (\text{Skw}_t(r_{M,t+1}))^2}.$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$\mathbf{E}_t(r_{i,t+1}) = A_t \mathbf{E}_t(r_{M,t+1}) + B_t \mathbf{E}_t(r_{M,t+1}^2),$$

где A_t и B_t зависят от дисперсии, асимметрии, ковариации и коасимметрии. Коэффициенты A_t и B_t аналогичны коэффициенту β в традиционной модели CAPM.

Авторы работы [Harvey, Siddique, 2000] ранжировали акции по историческим значениям коасимметрии и сформировали портфель S^- , включающий 30% акций с наименьшим значением коасимметрии, портфель из 40% акций с промежуточными значениями коасимметрии и портфель S^+ , включающий 30% акций с наибольшим значением коасимметрии по отношению к рыночному портфелю.

Для эконометрической проверки в работе [Harvey, Siddique, 2000] были использованы следующие модели:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_i &= \lambda_0 + \lambda_M \hat{\beta}_i + \lambda_S \hat{\beta}_{Si} + \epsilon_i, \\ \hat{\mu}_i &= \lambda_0 + \lambda_M \hat{\beta}_i + \lambda_{SKS} \hat{\beta}_{SKSi} + \epsilon_i,\end{aligned}$$

где $\hat{\mu}_i$ — среднее значение превышения доходности над безрисковой ставкой (избыточная доходность), λ_0 , λ_M , λ_S и λ_{SKS} — оцениваемые параметры уравнений, ϵ_i — ошибки, $\hat{\beta}_i$ — бета-коэффициент стандартной модели, $\hat{\beta}_{Si}$ и $\hat{\beta}_{SKSi}$ — бета-коэффициенты активов по отношению, соответственно, к портфелю S^- и спреду между доходностью портфелей S^- и S^+ .

Показано, что включение дополнительного фактора значительно повышает соответствие модели реальным данным. В [Harvey, 2000] делается вывод о том, что в моделях ценообразования активов для развивающихся рынков необходимо учитывать уровень интеграции и, возможно, показатель коасимметрии.

4.2.2. Основные предпосылки модели D-CAPM

Одно из наиболее распространенных направлений модификации стандартной модели ценообразования основано на использовании полувариации в качестве меры риска активов. Напомним, что в классической теории, следуя Марковицу, за такую меру взята дисперсия доходности, которая одинаково трактует как отклонения вверх, так и вниз от ожидаемого значения.

$$D_i = \mathbf{E}((R_i - \mathbf{E}(R_i)))^2.$$

В отличие от дисперсии, полувариация «наказывает» только за отклонения вниз:

$$SD_i = \mathbf{E}((R_i - \mathbf{E}(R_i))^-)^2.$$

Корень из полувариации называют *downside risk* — риском отклонения вниз. Надо отметить, что эта мера имеет свои достоинства и свои недостатки. Из недостатков отметим, что выбрасывается положительная сторона риска, связанная с превышением над ожиданиями. Кроме того, такой «риск» не может быть использован в качестве волатильности, а значит, и для ценообразования на производные финансовые инструменты.

Вместе с тем использование полувариации в рамках теории портфеля позволяет ослабить некоторые предположения традиционной модели ценообразования на финансовые активы (предположение о нормальном распределении доходности и предположение о том, что поведение инвесторов определяется ожидаемой доходностью и дисперсией доходности активов).

В [Estrada, 2002a, 2002b] отмечается, что, во-первых, стандартное отклонение может использоваться только в случае симметричного распределения доходностей. Во-вторых, стандартное отклонение может непосредственно использоваться в качестве меры риска только тогда, когда распределение доходностей нормальное. Эти условия не подтверждаются на эмпирических данных. Кроме того, применение бета-коэффициентов, которые выводятся в рамках традиционной поведенческой модели, в качестве меры риска на развивающихся рынках оспаривается многими исследователями, возможность использования полувариации, напротив, подтверждается на эмпирических данных [Harvey, 2000; Estrada, 2000].

Использование полувариации поддерживается также и интуитивными соображениями. Обычно инвесторы не избегают риска повышения доходности выше среднего, они избегают риска снижения доходности ниже среднего или ниже некоторого целевого значения. Поскольку инвестирование на развивающихся рынках является очень рискованным для западного инвестора, то западный инвестор прежде всего избегает риска потери первоначальной ценности своих инвестиций или, в соответствии с работой [Roy, 1952], избегает снижения этой ценности ниже определенного целевого уровня. Поэтому в качестве меры риска на развивающихся рынках целесообразно использовать полудисперсию и, соответственно, стандартное полуотклонение.

В работе [Синцов, 2003] тестировалась модель, в которой риск измеряется с помощью нижнего частичного момента второго порядка, т. е. полувариацией. Использование полувариации, с одной стороны, является наиболее популярной модификацией модели CAPM, с другой стороны, — позволяет применять доступные статистические методы эмпирической проверки модели ценообразования.

В данной поведенческой модели мерой взаимозависимости доходности данного актива и рыночного актива служит так называемая полуковариация, которая является аналогом ковариации в стандартной модели

$$\Sigma_{im} = \mathbf{E}(\min((R_i - \mu_i), 0) \min((R_M - \mu_M), 0)).$$

Полуковариация также является неограниченной и зависящей от масштаба. Но ее также можно нормировать, разделив на произведение стандартного полуотклонения данного актива и рыночного портфеля:

$$\Omega_{iM} = \frac{\Sigma_{iM}}{\Sigma_i \Sigma_M} = \frac{\mathbf{E}(\min((R_i - \mu_i), 0) \min((R_M - \mu_M), 0))}{\sqrt{\mathbf{E}(\min((R_i - \mu_i), 0)^2) \mathbf{E}(\min((R_M - \mu_M), 0)^2)}}.$$

Аналогично, разделив ковариацию на полувариацию рыночного портфеля, можно найти модифицированный бета-коэффициент

$$\beta_i^D = \frac{\Sigma_{iM}}{\Sigma_M^2} = \frac{\mathbf{E}(\min((R_i - \mu_i), 0) \min((R_M - \mu_M), 0))}{\mathbf{E}\{\min((R_M - \mu_M), 0)^2\}}.$$

Модифицированный бета-коэффициент используется в альтернативной модели ценообразования. Эта модель, предложенная в [Estrada, 2002b], получила название D-CAPM (*Downside Capital Asset Pricing Model*):

$$\mathbf{E}(R_i) = R_f + MRP\beta_i^d,$$

где MRP — рыночная премия за риск. Таким образом, бета-коэффициент в традиционной модели CAPM предлагается заменять модифицированным бета-коэффициентом, который является мерой риска актива в новой поведенческой модели, в которой поведение инвесторов определяется ожиданием и полудисперсией доходности.

4.2.3. Эконометрика модели

Модифицированный бета-коэффициент можно вычислить как отношение полуковариации актива и рыночного портфеля и полувариации рыночного портфеля. Кроме того, модифицированный бета-коэффициент может быть найден с помощью регрессионного анализа. Следуя [Синцов, 2003], предположим, что

$$y_t = \min((R_{it} - \mu_i), 0), \quad x_t = \min((R_{Mt} - \mu_M), 0).$$

Пусть μ_x и μ_y — средние значения, соответственно, x_t и y_t . Построим регрессию переменной y_t на переменную x_t :

$$y_t = \lambda_0 + \lambda_1 x_t + \varepsilon_t,$$

где ε_t — ошибки, λ_0 и λ_1 — оцениваемые коэффициенты.

Тогда (МНК) оценка коэффициента λ_1 равна

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{E}((x_t - \mu_x)(y_t - \mu_y))}{\mathbf{E}((x_t - \mu_x)^2)}.$$

Но, в соответствии с определением, β_i^d должно оцениваться как

$$\beta_i^d = \frac{\mathbf{E}(x_t, y_t)}{\mathbf{E}(x_t^2)}.$$

Для того чтобы правильно оценить коэффициент λ_1 , необходимо построить регрессию y_t на x_t без константы и использовать коэффициент наклона в данной регрессии в качестве оценки модифицированного бета-коэффициента.

Действительно, если оценивать регрессию y_t на x_t без константы, то в соответствии с методом наименьших квадратов будет минимизироваться функционал

$$F = \sum_{t=1}^T (y_t - \lambda_1 x_t)^2.$$

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\frac{dF}{d\lambda_1} = -2 \sum_{t=1}^T (y_t - \lambda_1 x_t) x_t = 0,$$

или

$$\sum_{t=1}^T y_t x_t = \lambda_1 \sum_{t=1}^T x_t^2.$$

Следовательно,

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T y_t x_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} = \frac{\mathbf{E}(x_t y_t)}{\mathbf{E}(x_t^2)}.$$

Поэтому для тестирования модели необходимо построить регрессию y_t на x_t без константы и использовать коэффициент наклона в данной регрессии в качестве оценки модифицированного бета-коэффициента.

4.2.4. Исходные данные для проверки модели

При проверке модели в [Синцов, 2003] использовались данные торгов в РТС (всего 74 акции российских компаний) и данные МФБ по результатам торгов акциями «Газпром». В качестве рыночного индекса рассматривался индекс РТС. Котировки акций «Газпром», выраженные в рублях, приводились к долларам США по текущему курсу, и затем вычислялась доходность за соответствующий период. Недельные доходности по всем акциям и индексам вычислялись по формуле

$$R_t = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5}{5},$$

где R_t — средняя недельная доходность, $r_1, \dots, r_5$ — значения недельных доходностей с понедельника по пятницу для данной недели. Для данной даты t значение r_t определялось по формуле

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-7}}{P_{t-7}},$$

где P_t — цена соответствующего актива в день t .

Если по данным нельзя было определить все значения r для данной недели, то средняя доходность за неделю вычислялась как среднее из доступных значений r_i для данной недели. При отсутствии котировок в течение более чем двух недель средняя доходность определялась по формуле эффективной ставки процента. Период тестирования был достаточно глубоким — с 1996 г. по 2002 г. включительно. Отдельно был также рассмотрен период 01.04.2000 – 16.05.2003.

4.2.5. Результаты эмпирической проверки модели

Для тестирования D-CAPM оценивались стандартный бета-коэффициент — β_i , и бета-коэффициент модели D-CAPM — β_i^d . Кроме того, для каждой акции вычислялись дополнительные показатели риска: стандартное отклонение доходности — σ_i (показатель полного риска акции), асимметрия доходности — Skw , стандартное полуотклонение Σ_i :

$$\Sigma_i = \sqrt{\mathbf{E}((R_i - \mathbf{E}(R_i))^-)^2}.$$

В результате для каждой акции было получено пять показателей (факторов) риска. Бета-коэффициент, предложенный [Estrada, 2000] (d -бета), всегда больше стандартного бета-коэффициента по «классической» модели.

Для оценки влияния каждого из приведенных выше факторов риска была построена регрессия средней доходности на каждый из шести показателей риска следующего вида:

$$MR_i = \gamma_0 + \gamma_1 RV_i + \epsilon_i,$$

где MR_i — средняя доходность, RV_i — соответствующая переменная (фактор риска), γ_0 и γ_1 — оцениваемые параметры регрессии, ϵ_i — ошибки, i — индекс акции. Результаты регрессионных моделей для каждого показателя риска приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Регрессия средней доходности на показатели риска

RV_i	γ_0	t -стати- стика	γ_1	t -стати- стика	R^2
β	0.009694	6.066097	-0.000702	-0.329903	0.001509
β^d	0.003370	1.320454	0.006376	2.366568	0.072173
σ	0.000191	0.076750	0.081590	3.742343	0.162841
Σ	0.006476	1.331557	0.040255	0.590521	0.009317
Skw	0.007644	9.616020	0.001146	3.184780	0.123478

Примечание: критическое значение t -статистики на 5%-м уровне значимости равно 1.99.

Как видно из табл. 4.4, только три показателя риска являются значимыми в построенных регрессиях: β_i^d , σ и Skw . Наиболее значимым показателем риска является стандартное отклонение σ . Это, вообще говоря, противоречит модели ценообразования на капитальные активы, так как, согласно всем версиям модели, средняя доходность определяется систематическим риском, а не полным риском данной акции. Показатель асимметрии также оказался значимым. Это аргумент в пользу применения моделей, учитывающих асимметрию доходности.

Коэффициент d -бета оказался значимым. Стандартный бета-коэффициент является незначимым в описании вариации средней доходности. Поэтому стандартная модель CAPM не выполняется на российском рынке ценных бумаг.

Хотя d -бета коэффициент является значимым, следует отметить низкое значение коэффициента детерминации R^2 . Фактически бета-коэффициент объясняет менее 10% вариации средней доходности в выборке из 74 акций.

При построении множественной регрессии средней доходности на все показатели риска (табл. 4.5) незначимым оказывается только стандартный бета-коэффициент. Значение приведенного множественного коэффициента детерминации R^2 в данной модели значительно выше и составляет 0.63. Коэффициент d -бета оказался значимым и имеет ожидаемый положительный знак.

На основании этих результатов в работе [Синцов, 2003] был сделан вывод о том, что модифицированный бета-коэффициент модели D-CAPM

Таблица 4.5

Множественная регрессия средней доходности на показатели риска

Регрес- соры	Кэффи- циенты	Стандартная ошибка	<i>t</i> -стати- стика	<i>p</i> -значе- ние
σ	0.140032	0.023917	5.855003	0.0000
Σ	-0.276395	0.050092	-5.517784	0.0000
β	-0.001020	0.004491	-0.227173	0.8210
β^d	0.032274	0.003813	8.463421	0.0000
Skw	-0.022900	0.005670	-4.039045	0.0001
Const	0.000383	0.002235	0.171270	0.8645
R^2		0.657217	<i>F</i> -статистика	26.07521
Нормированный R^2		0.632012	<i>p</i> -значение	0.000000
Durbin-Watson статистика		1.712242		

лучше подходит для описания средней доходности, чем стандартный бета-коэффициент, и на практике вместо модели CAPM следует применять модель D-CAPM.

Для дополнительной проверки модели D-CAPM в работе [Синцов, 2003] была также построена следующая регрессия:

$$MR_i = a_1 + a_2\beta_i^d + a_3UV_i + \eta_i,$$

где MR_i — средняя доходность, UV_i — показатель волатильности i акции выше ожидаемого значения

$$UV_i = \sqrt{\mathbf{E}\{\min((\mathbf{E}(R_i) - R_i), 0)^2\}}.$$

В соответствии с теоретической моделью волатильность выше среднего значения не влияет на ожидаемую доходность. Поэтому, если на российском рынке выполняется модель D-CAPM, то значения коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 должны быть следующими:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\hat{a}_1) &= R_f, \\ \mathbf{E}(\hat{a}_2) &= \mathbf{E}(R_m) - R_f, \\ \mathbf{E}(\hat{a}_3) &= 0.\end{aligned}$$

Отметим, что в данной регрессии значение R^2 значительно больше (равно 0.21), чем в регрессии средней доходности только на показатель систематического риска (равно 0.07). Следовательно, включение показателя волатильности выше среднего значения значительно улучшает прогноз

Таблица 4.6

Регрессия средней доходности MR на бета-коэффициент модели D-CAPM β^d и превышение волатильности доходности UV

Регрес- соры	Коэффи- циенты	Стандартная ошибка	t -стати- стика	p -значе- ние
β^d	0.003049	0.002618	1.164915	0.2480
UV	0.089264	0.023297	3.831512	0.0003
Const	-0.001280	0.002635	-0.485573	0.6288
R^2		0.231147	F -статистика	0.67265
Нормированный R^2		0.209489	p -значение	0.000089
Durbin-Watson статистика		1.758959		

Примечание: количество наблюдений: 74.

Таблица 4.7

Регрессия средней доходности на показатели риска для периода 01.04.2000 г. — 16.06.2003 г.

RV_i	γ_0	t -стати- стика	γ_1	t -стати- стика	R^2
β	0.0119	6.7802	-0.005315	-1.9838	0.0518
β^d	0.00907	3.0606	-0.000257	-0.0792	0.00009
σ	-0.00403	-1.7042	0.17276	5.6994	0.3108
Σ	-0.00196	-0.5715	0.23449	3.2334	0.1267
Skw	0.00621	6.7419	0.002679	4.7463	0.2383

средней доходности. Это противоречит исходной модели, в соответствии с которой ожидаемая доходность зависит только от систематического риска данной акции — β_i^d . Кроме того, в данной регрессии переменная β_i^d является незначимой. Гипотеза о равенстве коэффициента a_3 нулю ($H_0: a_3 = 0$) отвергается (значение t -статистики равно 3.83 при критическом значении 1.99). Поэтому модель D-CAPM не выполняется на российском рынке ценных бумаг.

Тестирование (табл. 4.7), выполненное на подпериоде с 1.04.2000 по 16.05.2003 в [Синцов, 2003], также показало, что ни одна из рассмотренных моделей ценообразования (стандартная модель CAPM, модель D-CAPM) на российском рынке ценных бумаг не выполняется.

Тестирование CAPM в версии Блэка как двухфакторной модели показало, что модель неприменима к российскому рынку. Однако это тестирование позволило выделить в явном виде ненаблюдаемые в версии Блэка портфели — рыночный портфель и портфель с нулевым бета. Оказалось, что первый из них состоит преимущественно из корпоративных ценных бумаг, второй — из государственных ценных бумаг и валюты, что кажется вполне разумным и дает определенную надежду на успех в следующих, более тщательных проверках модели на более поздних данных, когда российский рынок характеризовался значительно большей ликвидностью и зрелостью.

Одно из возможных несовершенств российского рынка — сильная асимметрия доходности активов — учитывается в модели D-CAPM. Оказалось, что модифицированный бета-коэффициент модели D-CAPM лучше подходит для описания средней доходности на российском рынке ценных бумаг по сравнению со стандартным бета-коэффициентом. Модель D-CAPM частично решает проблему недооценки требуемой доходности на развивающихся рынках при использовании стандартной модели CAPM. Поэтому использование модели D-CAPM на российском рынке кажется предпочтительным. Для этого также есть теоретические основания, поскольку модель D-CAPM имеет менее жесткие исходные предположения по сравнению со стандартной моделью CAPM. Тем не менее строгая проверка показывает, что модель D-CAPM не соответствует динамике доходности российского рынка. Таким образом, ни одна из рассмотренных моделей ценообразования на капитальные активы — стандартная модель CAPM в версии Шарпа–Линтнера, модель CAPM в версии Блэка, модель D-CAPM — не соответствует данным российского рынка ценных бумаг.

Возможно, главная причина неудач в попытках описать российский рынок простыми модельными представлениями состоит в низкой ликвидности активов. Большие спреды в котировках на покупку и на продажу — лучшее отражение опасений инвесторов по поводу подавляющего большинства российских активов. Отсутствие потенциальных продавцов и покупателей есть серьезный риск для любого инвестора с разумным горизонтом инвестирования, и, по-видимому, любая модель, пригодная для российского рынка, должна это учитывать.

Задачи к главе 4

1. Рассмотрите случай только двух рискованных активов. Для произвольного (эффективного) портфеля, состоящего из этих двух акти-

вов, вычислите структуру портфеля с нулевым бета. Какова структура этого соответствующего портфеля, если эффективный портфель включает только один актив?

Указание. Воспользуйтесь выражением для ковариации между двумя портфелями со структурой w_A и w_B : $w_A' \Omega w_B$, где Ω — матрица ковариаций активов.

2. Рассмотрите двухфакторную регрессионную модель, связывающую доходность произвольного портфеля активов R_P с доходностью некоторого эффективного портфеля R_M и доходностью соответствующего портфеля с нулевым бета R_Z : $R_P = \alpha_0 + \alpha_1 R_Z + \alpha_2 R_M + \epsilon$. Докажите, что

$$\alpha_0 = 0; \quad \alpha_1 = 1 - \text{cov}(R_P, R_M) / \sigma_P^2; \quad \alpha_2 = 1 - \text{cov}(R_P, R_Z) / \sigma_P^2 = 1 - \alpha_1,$$

где σ_P^2 — дисперсия доходности портфеля, а $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ — ковариация доходностей портфеля и факторов модели, ϵ — случайные остатки с нулевым средним.

Указание. Воспользуйтесь формулами для оценки коэффициентов множественной линейной регрессии методом наименьших квадратов и учтите, что ковариация доходности факторных портфелей равна нулю.

3. Как вы думаете, можно ли построить вариант модели D-CAPM, используя вместо полудисперсии (полувариации) доходности активов какой-либо квантиль распределения доходности активов?

5. Рыночные спреды и моменты входа на рынок фондовых активов

В этой главе речь пойдет об одном из наиболее спорных и проблемных вопросов теории финансовых рынков и поведения рыночных агентов — определении оптимального момента проведения сделок. Здесь нас будут интересовать оптимальные моменты совершения сделок на рынке биржевых активов. В этой главе мы игнорируем портфельные эффекты, считая, что решение принимает брокер, специализирующийся на торговле определенным инструментом, например «market-maker».

5.1. Логика торговли отдельным финансовым инструментом

Считается, что выбор стратегии поведения на рынке основывается на предположении о том, что движение рыночных цен, вызванное теми или иными факторами, имеет долгосрочную направленность, — ориентацию на так называемые «целевые» цены. Отметим, что этот же принцип подразумевает постепенное *снижение до нуля* текущей доходности инвестиций в соответствующий инструмент: утверждается, что движение цены некоторого актива может иметь определенную относительную тенденцию (либо «опережать», либо «отставать» от рынка) лишь на протяжении ограниченного временного промежутка. Впрочем, неверные оценки инвесторами длительности соответствующего временного интервала нельзя расценивать как признак иррациональности их гипотез или поведения: причиной этого может быть как информационная асимметрия агентов, так и различие институциональных рамок их операций [Campbell et al., 1991; Klapper, Love, 2006].

Логика поведения, опирающаяся на предположение о существовании неких целевых цен активов (а именно: цен, движение к которым может быть объяснено *рациональным поведением* большинства инвесторов, адекват-

ватно и непредвзято оценивающих складывающуюся экономическую ситуацию) и их достижимости на экономически обоснованном временном горизонте, в настоящее время уже окончательно завоевала предпочтения и теоретиков – исследователей рынка (см., напр.: [Fama, Schwert, 1977a, 1977b; Estrada, 2004a, 2004b; Дробышевский, 1999a, 1999b; Ивантер, Пересецкий, 1999] и др.).

Важно отметить, что и фундаментальный, и технический анализ исповедуют эту общую философию. На самом деле целью и того и другого является построение «справедливых» оценок активов — а именно тех, которые в рамках определенных гипотез рациональности полагаются целевыми для движения рынка. Хотя при этом могут рассматриваться различные инвестиционные мотивы и горизонты инвестирования различных агентов, на временных интервалах, выбираемых в качестве таковых большинством инвесторов, как считается, можно ожидать позитивной переоценки портфелей тех инвесторов, кто занял позицию, ориентированную на эти оценки. Различие же состоит, в частности, в том, что *фундаментальный анализ* рассматривает в качестве целевого средний период окупаемости реальных инвестиций в соответствующем секторе экономики, тогда как *технический* рассматривает временной интервал от поступления новостного шока определенной силы до исчерпания его влияния на рыночную ситуацию.

При этом важно отметить, что де-факто большинство инвесторов-практиков в качестве источников информации и, соответственно, ожиданий о поведении активов используют лишь историю их рыночных котировок, а также доступные экономические показатели компаний-эмитентов. Иначе говоря, они *оказываются вынуждены* вести себя как инвесторы *эффективного рынка* (обычно речь идет о так называемой *средней форме эффективности*).

При этом фактически управление активами сводится к выделению временных интервалов, когда предпочтительны инвестиции в те или иные активы в силу того, что на этих интервалах их доходность из-за случайных ценовых флуктуаций (на выделение которых на различных временных горизонтах и нацелены фундаментальный и технический анализ) будет превосходить среднерыночную. При этом, очевидно, до начального момента каждого такого периода доходность актива не превышала рыночную, а в соответствующий момент — *сравнилась с ней и превзошла ее*. На протяжении же самого этого периода цена актива будет расти быстрее, чем рынок в целом, — до момента окончания соответствующего перио-

да. Тогда моментальная доходность актива вновь сравнивается с рыночной. В этот момент актив должен быть продан рациональным инвесторам, а средства переведены в другие инструменты, чья доходность теперь, в свою очередь, будет превосходить среднерыночную.

Отметим, что критерием для выбора соответствующих моментов входа – выхода может быть исключительно ожидаемое превосходство доходности тех или иных конкурирующих инструментов на бесконечно малом, инфинитезимальном временном промежутке (что автоматически предполагает *непрерывность процесса* рыночного ценообразования и заключения сделок).

В данной главе мы будем придерживаться более-менее стандартного предположения о том, что на самом деле цена актива удовлетворяет условиям некоторого диффузионного процесса (подробное обсуждение такого рода гипотез см. в [Dixit, Pindyck, 1994; Duffie, 2001; Hull, 2009] и др.). При этом фактически гипотеза эффективности рынка будет выражаться в том, что, *почти наверное*, никакой марковский момент покупки или продажи²² не будет оптимальным на любом *заранее фиксированном* активе временном горизонте, хотя и может быть таковым на малом интервале времени.

В настоящей главе представлен относительно новый подход, при котором ликвидность фондовых инструментов моделируется с помощью опционов. При этом фактически в главе будет исследоваться вопрос о том, пользуются ли рыночные агенты складывающимися в эти моменты благоприятными обстоятельствами на рынке, иначе говоря, удастся ли инвесторам эффективно выбирать соответствующие моменты входа – выхода (признаком чего обычно считается (см.: [Glosten, Harris, 1988; Campbell, 1995]) рост оборотов торгов и ликвидности активов в соответствующие периоды).

Отметим, что обычно под ликвидностью понимается степень активности трейдеров на том или ином рынке и возможность реализовать активы в произвольный момент времени по «рыночной цене». Именно поэтому (см.: [Campbell et al., 1991]) мерой ликвидности рыночных финансовых инструментов обычно выступают спреды между их котировками на покупку и продажу (*bid-ask-спреды*). Более ранние исследования проблемы *bid-ask-спредов* ориентировались преимущественно на один из двух

²² Момент, наступление которого определяется только событиями и информацией, поступившей в периоды времени не позднее этого момента. Естественно, в этом случае и ожидания инвесторов тоже опираются только на эту информацию.

подходов: так называемую *теорию рыночного запаса* («inventory theory»), пионерами которой выступили авторы работ (см.: [Stoll, 1978; Но, Stoll, 1981]), или *статистическую теорию ликвидности* [Glosten, Harris, 1988; Brennan, 1991; Liu, 2007].

В частности, *теория рыночного запаса* предполагает, что величина спреда (*bid-ask*) зависит в основном от транзакционных издержек, присутствующих при торгах, а распределение этой величины между долями спредов на покупку и продажу — от информационных несовершенств рынка (см.: [Glosten, Harris, 1988; Booth et al., 1999; Dolgoplov, 2004]; отметим также весьма оригинальную работу [Booth, Gurun, 2008]). Предполагается, что каждая рыночная сделка оказывает воздействие на цены будущих сделок постольку, поскольку от нее зависит среднее значение будущих котировок на покупку и продажу активов. При этом сама зависимость определяется накопленным инвесторами за день торгов запасом актива.

Важно отметить, что, согласно теории рыночного запаса (см.: [Но, Stoll, 1981]), *bid-ask*-спреды могут быть разложены на три аддитивные составляющие, зависящие, в свою очередь, от риска получения *неблагоприятной информации* о поведении актива после проведенной сделки («adverse information» component), от *величины «накопленного инвестором запаса»*, актива по отношению к общей величине его портфеля («inventory» component) и от *транзакционных издержек*, связанных с поддержанием рыночной позиции в активе («order processing» spread component).

Для российского рынка, вероятно, значимой является только первая из трех величин. Так, в среднем в системе РТС величина суммарного спреда составляла 10% и более от рыночной цены некоторых активов даже в дни относительной активности инвесторов, что в десятки раз превосходит величину транзакционных издержек (комиссионные и прочие затраты на трение) для крупных игроков (в периоды же кризисных явлений, — особенно в 1998 г. и осенью 2008 г., — она могла достигать 200–300% и более, причем по некоторым бумагам могло вовсе не быть котировок на покупку и/или продажу). При этом из-за того, что на российском рынке преобладали портфельные инвесторы, величины их рыночных запасов, как правило, эффективно контролировались и не достигали более 15–20% портфеля по отдельным бумагам. Потому и проявления «эффекта запаса» имели место относительно редко.

В данной главе авторы придерживаются гипотезы о том, что транзакционными издержками на российском рынке можно фактически пре-

небрежь. Кроме того, в условиях общей низкой ликвидности и высокой специализации российского фондового рынка оказывается несущественной для принятия инвесторами решений о спекулятивных сделках также и доля актива в общем портфеле инвестора, ибо в большинстве случаев последний работает на российском рынке с единственным активом либо очень узким их спектром. В то же время важным оказывается отношение запаса этого актива к запасу абсолютно ликвидных активов.

Более свежие исследования (см.: [Bondarenko, 2001; Norden, 2003; Pronk, 2006]) преимущественно обращают внимание читателя на инфраструктурные последствия наличия спредов на объемы торгов либо на величину транзакционных издержек инвесторов. Вместе с тем упускается из виду, что большая часть ежедневного оборота рынков порождается инвесторами-спекулянтами, для которых наличие спредов является источником не столько издержек, сколько волатильности, а следовательно, — *потенциала прибыли*. Именно шансы таких инвесторов по получению прибыли *на волатильности* рынка — при удачном выборе моментов входа и выхода на рынок того или иного актива — и исследуются в данной главе.

Тем не менее близость цены сделок к котировкам *bid* или *ask* определяется тем, по чьей инициативе заключается сделка (иначе говоря, кто является «price maker»): если принимающая цены сторона — спрос, то сделка будет происходить фактически по котировке предложения, и, наоборот, в условиях заключения сделок с помощью биржевых электронных систем *безадресных заявок* эффективные переговоры между стороной спроса и стороной предложения исключены.

При этом предполагается, что хотя обе стороны (*гипотеза эффективности*) на самом деле имеют одинаковый объем достоверной информации о поведении рынка и фундаментальных показателях бумаг, их *оценки* собственной информированности могут отличаться. Потому, например, продавец, предлагающий заключение сделки, должен снизить цену актива от рыночной цены до котировки *bid*, чтобы сделка была заключена в момент, когда *ему* это *выгодно*. В противном случае (его предложение выше котировки *bid*), он все равно сможет заключить сделку, но позднее, и соответствующий момент оказывается *случайным*. Покупатель же, желающий немедленно заключить сделку, повышает цену до величины *ask*.

При этом рассматриваются несколько заметно отличных друг от друга как по институциональной базе, так и по используемому математическому аппарату сценариев.

Сценарий 1. В первой части главы (п. 5.2) строится модель, позволяющая теоретически оценить спреды котировок рыночного актива, для которого в качестве альтернативного инструмента выступают абсолютно ликвидные инструменты денежного рынка. Полученные теоретические результаты применяются для нахождения моментов времени, в которые инвесторам следовало бы приобретать акции РТС различных групп ликвидности или избавляться от них. При этом неявно используется гипотеза, что для инвесторов недоступны прямые обмены фондовыми активами, но возможны их обмены на соответствующие альтернативные инструменты. Данный сценарий применяется отдельно для анализа поведения российских акций (рынок РТС) на протяжении двух исторических периодов. Сначала был рассмотрен предкризисный *период неустойчивости рынка* с января 1997 г. по июнь 1998 г., когда рост рынка, потом сменившийся резким падением, происходил на фоне чрезвычайно высоких ставок условно «безрисковых» инструментов денежного рынка и облигаций ГКО-ОФЗ, сравнимых по величине с темпами роста котировок акций. Затем отдельно был исследован относительно *спокойный период развития рынка* в 2000–2005 гг., когда средне- и долгосрочные инвестиции в инструменты собственности были, в соответствии с классической теорией риска, предпочтительнее инвестиций в альтернативные низкорисковые активы.

Сценарий 2. В дальнейшем (п. 5.4) мы откажемся от гипотезы единственности рискового актива. Здесь рассматривается схема «прямого» (без промежуточных сделок с активами денежного рынка) обмена фондовых активов друг на друга, что и происходит в условиях реальных биржевых операций, когда активы продаются за деньги исключительно с целью немедленного приобретения других (возможно, безрисковых, но лишь в качестве одной из альтернатив) доходных инструментов. При этом инвесторы оказываются поставленными не только перед проблемой оптимального выбора момента выхода из i -го актива «в рынок», но и перед выбором альтернативного инструмента для инвестирования (входа в новый актив).

5.2. Построение модели с единственным инструментом фондового рынка

5.2.1. Общая схема и гипотезы модели

Предположим, что все инвесторы, работающие на рынке фондового актива A , в любой момент могут находиться в одном из двух состояний:

- (а) держать абсолютно *ликвидные альтернативные активы* (фактически — активы денежного рынка или близкие к ним по ликвидности и доходности) и иметь возможность получать «безрисковую» доходность r^{23} . Такой инвестор, кроме альтернативных инструментов, имеет еще и *неявный (воображаемый) опцион $F(P)$ на покупку A* в любой момент времени по цене предложения. Альтернативная ставка доходности вычислялась для каждого дня в периоде как максимальная величина из *доходности индекса ГКО-ОФЗ*, вычисленного по средним за неделю эффективным ставкам закрытия ММВБ к погашению, и темпа роста доллара США по средним за неделю котировкам закрытия ММВБ. Для облегчения вычислений условно предполагается, что альтернативная ставка менялась *скачкообразно*, принимая одно из децильных значений между своими максимальным и минимальным уровнями за рассматриваемый промежуток времени;
- (б) держать рассматриваемый *рисковый актив* и *получать денежный поток*, связанный с ним, в размере D ден. ед. за период (данный денежный поток можно условно рассматривать как *дивиденд*)²⁴. При этом инвестор не имеет возможности делать альтернативные вложения до тех пор, пока не переведет средства из данного актива в наличные (перейдет в состояние (а)). Кроме того, он имеет *опцион $V(P)$ на продажу A* в любой момент времени по цене спроса.

Данный подход к оцениванию *bid-ask*-спредов финансовых инструментов и, как следствие, общей ликвидности рынка, является новым. Он был разработан и впервые применен в работе [Дорофеев, 1999b]. Отметим, что фактически изучаются бессрочные *пут* и *колл опционы американского типа*, в основе которых лежат акции российских эмитентов, причем цена их исполнения не оговорена заранее, а зависит по определенному правилу *от рыночной цены* соответствующего актива в тот же момент времени.

²³ В данной главе мы будем придерживаться простейшего предположения о постоянстве безрисковой ставки на соответствующих промежутках времени; обычно в литературе так и поступают (см.: [Hull, 2009; Dixit, Pindyck, 1994] и др.).

²⁴ В дальнейшем будет предполагаться, что денежный поток поступает инвестору не *периодически*, а *непрерывно*. Последнее в точности отвечает процедуре начисления купонного дохода по долговым инструментам, но не соответствует выплате дивидендов по акциям. Тем не менее, чем чаще происходит выплата дивидендов (а на российском рынке — особенно в отношении металлургических, пищевых и некоторых сырьевых компаний, — уже твердо установилась практика квартальных выплат), тем ближе оценка, предлагаемая моделью, к фактическим уровням оптимального входа — выхода с рынка актива.

Для формулирования математической модели предположим, что операторы рынка выставляют котировки актива A на продажу $P_a = (1 + \Delta_a)P$ и на покупку $P_b = (1 - \Delta_b)P$, где P — средневзвешенная цена актива в соответствующий момент времени. Величины $\Delta_a P$ ($\Delta_b P$) будем называть *котировочными коэффициентами* и трактовать $\Delta_a P$ как наценку, а величину $\Delta_b P$ — как дисконт по отношению к средней цене. В соответствии с этой терминологией будем называть Δ_a (соответственно, $\Delta_b P$) коэффициентом наценки (соответственно, дисконта). С точки зрения описанного выше опционного подхода, *котировки* P_a и P_b являются *ценами исполнения* опциона. Величины Δ_a и Δ_b определяют платы $\Delta_a P$ и $\Delta_b P$ за вход — выход на рынок данного актива, эти величины считаются постоянными параметрами модели.

Для нахождения оценок величин Δ_a и Δ_b в работе используется метод максимального правдоподобия (ММП). Гипотеза о постоянстве величин Δ_a и Δ_b , как выясняется, не может быть отвергнута на 5%-м уровне значимости для акций, о которых пойдет речь в дальнейшем.

В рамках предлагаемой ниже модели определяются два уровня цены данного актива: P_* и P^* . Интерпретация этих величин, определяемых ниже, следующая. Предполагается, что если цена актива опускается до уровня $P = P_*$, то инвесторы считают, что высока вероятность роста актива в дальнейшем. При этом агенты, не имевшие актива до этого, соглашались приобретать актив даже по цене предложения $P_a > P_*$. Наоборот, если цена повышается до уровня $P = P^* > P_*$, то агенты, имеющие актив, соглашались его продавать даже по цене спроса $P_b < P^*$. При этом «низкий» и «высокий» уровни цен определяются, исходя из масштабов денежных потоков, порождаемых активами, и их текущей вариации.

Соответственно, при цене актива $P \leq P_*$ нет инвесторов, которые бы не имели актива, а при цене $P \geq P^*$ нет инвесторов, которые бы имели только актив, но не имели средств в альтернативных вложениях. При этом ставится задача на основе статистических данных российского фондового рынка за различные периоды времени и для различных активов рассчитать величины P_* и P^* теоретически и впоследствии сравнить полученные данные с уровнями цен, когда наблюдались, соответственно, покупки этих активов даже по ценам предложения и их продажи — даже по ценам спроса.

Для анализа модели необходимо сделать предположения о характере колебаний средних цен P рискованных фондовых активов (рассматривались акции РТС) российского рынка на различных интервалах времени.

При этом, как было сказано выше, рассматривались два периода: предкризисный (январь 1997 г. — июнь 1998 г.) и период стабильного развития (2000–2005 гг.), кардинально отличавшиеся друг от друга по темпам и перспективам макроэкономического развития и спросу на продукцию отдельных отраслей.

В частности, имело место следующее ключевое для анализа различие макроэкономических условий: на протяжении *первого периода* средний темп роста рискованных активов уступал или был сравним с доходностью альтернативных (условно безрисковых) инструментов — облигаций ГКО-ОФЗ, а на протяжении второго — *существенно превосходил* ее. Соответственно, *формирование единой гипотезы* о поведении фондовых активов на *обоих промежутках* времени оказалось *невозможным*.

Тем не менее было сделано единое базовое предположение о том, что рыночная цена актива A изменяется по формуле *геометрического броуновского движения*:

$$dP = P(\mu dt + \sigma dz). \quad (5.1)$$

Здесь z обозначает *стандартный винеровский процесс*, а μ играет роль среднего (*геометрического* или *линейного*) темпа роста цены актива, который в первом случае *уступает или оказывается сравнимым* с доходностью альтернативного безрискового актива, а во втором — *превосходит* его.

В то же время были выдвинуты две различные гипотезы, соответствующие двум различным периодам развития рынка, о характере формирования цен спроса и предложения (котировок *bid* и *ask*) при определенном уровне среднерыночных цен актива:

- (1) на протяжении *первого периода* (январь 1997 г. — июнь 1998 г.) котировки спроса и предложения *линейно зависели* от среднего уровня цен на рынке:

$$P_b = (1 - \Delta_b)P; \quad P_a = (1 + \Delta_a)P; \quad (5.2)$$

- (2) на протяжении *второго периода* котировки спроса и предложения зависели от рыночной цены актива *степенным образом*:²⁵

$$P_b = P^{\Delta_b}, \quad \Delta_b < 1; \quad P_a = P^{\Delta_a}, \quad \Delta_a > 1. \quad (5.3)$$

²⁵ Как будет показано в дальнейшем, при естественном выборе шкалы измерений на этом промежутке времени практически всегда выполнялось условие $P > 1$, и, соответственно, имело место «нормальное» соотношение $P_b < P_a$.

При этом в обоих случаях агенты, инвестировавшие в альтернативные инструменты, имеют *неявный опцион* $F(P)$ на вход на рынок актива A в произвольный момент времени (на покупку актива по *цене предложения*), а инвесторы, держащие актив и получающие *денежный поток* D за период, — *опцион* $V(P)$ на выход с рынка (на продажу актива по цене спроса).

5.2.2. Решение модели с единственным инструментом фондового рынка

С учетом различия предположений о характере изменения котировок рискованных активов на различных интервалах времени решение модели для этих периодов также оказывается различным, хотя его общая структура сохраняется. В обоих случаях, в предположении «*гипотезы краткосрочных ожиданий*» (*Local Expectations Hypothesis, LEH* [Ramaswamy, Sundaresan, 1986]), выписываются и решаются системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $F(P)$ и $V(P)$ с *плавающими границами* P_* и P^* .

При этом явный вид уравнений оказывается единым, а граничные условия зависят от гипотез (5.2) и (5.3) о зависимости цены спроса P_a и предложения P_b актива от средней цены P на рынке. При этом *целью решения* системы является нахождение *пары неизвестных* значений P_* и P^* средней цены рынка, при которой инвесторы будут склонны, соответственно, приобретать актив даже по цене предложения или продавать даже по цене спроса.

Для нахождения P_* и P^* потребуется попутно определить также *четыре неизвестные константы* (по две — на каждое уравнение), определяющие частные решения двух дифференциальных уравнений второго порядка для функций $F(P)$ и $V(P)$. Таким образом, всего потребуется найти *шесть неизвестных* численных величин.

Четыре граничных условия следуют из предположений относительно уровней цен P_* и P^* . Данные условия в литературе обычно называют условиями «*гладкой склейки*» (см., напр.: [Samuelson, 1965]; подробное обсуждение условий «*гладкой склейки*» приведено в [Dixit, Pindyck, 1994, р. 130]. Соответствующие четверки условий зависят, очевидно, от предположений (5.2) и (5.3).

5.2.3. Граничные условия для «высоких» ставок альтернативной доходности

В этом случае граничные условия выводятся из предположений (5.2).

- (1) В частности, при рыночных ценах, равных P_* и P^* , актив A торгуется по ценам, равным, соответственно, *котировкам предложения и спроса*. В результате имеют место равенства:

$$\begin{aligned} F(P_*) + (1 + \Delta_a)P_* &= V(P_*), \\ F(P^*) + (1 - \Delta_b)P^* &= V(P^*), \end{aligned} \tag{5.4}$$

означающие, что, соответственно, купля инвестором актива A по цене предложения при рыночных ценах вблизи уровня P_* или продажа актива по цене спроса вблизи P^* равносильны для него переходу из позиции F в позицию V , и обратно.

Кроме того,

- (2) до того как рыночная цена *упадет* до уровня P_* , инвесторы *не покупают* актив по цене *предложения* (соответственно, пока цена не вырастет до P^* , инвесторы не продают его по цене спроса). Это условие означает, что в точке P_* для риск-нейтрального инвестора *безразличен* выбор между покупкой актива A по цене предложения и сохранением позиции в альтернативных активах (соответственно, в точке P^* для него безразличен выбор между продажей актива по цене спроса и сохранением в своем портфеле — аналогично (см.: [Dixit, Pindyck, 1994]). Более точно, имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP}[F(P) + (1 + \Delta_a)P - V(P)]|_{P=P_*} &= 0, \\ \frac{d}{dP}[F(P) + (1 - \Delta_b)P - V(P)]|_{P=P^*} &= 0, \end{aligned}$$

или, после упрощений:

$$\begin{aligned} F'(P_*) + 1 + \Delta_a &= V'(P_*), \\ F'(P^*) + 1 - \Delta_b &= V'(P^*). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Еще два условия вытекают из следующих замечаний:

- спрос на бесконечно дорогой актив в обозримом будущем будет равен нулю:

$$F(+\infty) = 0; \quad (5.6)$$

- стоимость неявного опциона на продажу актива, приносящего положительные операционные денежные потоки, но имеющего нулевую цену, равна нулю: если $P \rightarrow 0+$, то ценность рыночной позиции инвестора, имеющего такой актив, опускается до *приведенной стоимости денежных потоков*:

$$V(0) = D/r. \quad (5.7)$$

Отметим, что данная формула не предполагает *постоянства* $r > \mu$. Имеется в виду, что в любой момент времени инвесторы используют для дисконтирования текущую *рыночную ставку*.

5.2.4. Граничные условия для «низких» ставок альтернативной доходности

В этом случае граничные условия выводятся, соответственно, из предположений (5.3). В самом деле,

- (1) при рыночных ценах, равных P_* и P^* , актив A торгуется по ценам, равным, соответственно, *котировкам предложения и спроса*. Значит, имеют место равенства

$$F(P_*) + P_*^{\Delta_a} = V(P_*), \quad (5.8)$$

$$F(P^*) + P^{*\Delta_a} = V(P^*),$$

означающие, что купля инвестором актива A по цене предложения при рыночных ценах вблизи уровня P_* или продажа актива по цене спроса вблизи P^* равносильны для него, соответственно, переходу из позиции F в позицию V , и обратно.

Кроме того,

- (2) до того как рыночная цена упадет до уровня P_* , инвесторы *не покупают* актив по цене *предложения* (соответственно, пока цена не вырастет до P^* , инвесторы не продают его по цене спроса). Это

условие означает, что в точке P_* для риск-нейтрального инвестора *безразличен выбор* между покупкой актива A по цене предложения и *сохранением позиции* в альтернативных активах (соответственно, в точке P^* для него безразличен выбор между продажей актива по цене спроса и сохранением в своем портфеле — аналогично [Dixit, Pindyck, 1994]). Более точно, имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dP}[F(P) + P^{\Delta_a} - V(P)]|_{P=P_*} &= 0, \\ \frac{d}{dP}[F(P) - P^{\Delta_b} - V(P)]|_{P=P^*} &= 0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}F'(P_*) + \Delta_a P_*^{\Delta_a - 1} &= V'(P_*), \\ F'(P^*) + \Delta_b P^{*\Delta_b - 1} &= V'(P^*).\end{aligned}\tag{5.9}$$

При этом условия (5.6)—(5.7) сохраняют свою силу и в этом случае.

Также отметим, что в дальнейшем для упрощения вычислений мы будем подразумевать, если прямо не оговорено иное, что величины типа *цен активов и соответствующих опционов* $F(P)$ и $V(P)$ *выражены в единицах денежного потока* D . Например, граничное условие (5.7) в этом случае примет вид $V(0) = 1/r$.

Как можно показать, экономические оценки, соответственно, F и V , позиций инвесторов в альтернативные инструменты и в рискованный актив A , оказываются удовлетворяющими следующим дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F'' + \mu P F' - rF = 0\tag{5.10}$$

и

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V'' + \mu P V' - rV + 1 = 0.\tag{5.11}$$

Равенство (5.10) имеет место при условии, что инвесторы держат свои средства в альтернативных активах и не считают возможным приобретать актив A по *цене предложения*, т. е. если рыночная цена актива выше P_* : $P \geq P_*$. Аналогично, (5.11) выполняется при $P \leq P^*$. Величины F и V могут *одновременно* быть найдены из (5.10) и (5.11) при $P \in [P_*, P^*]$.

Заметим, что уравнения (5.10) и (5.11) допускают следующие общие решения:

$$\begin{aligned}F(P) &= A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}, \\ V(P) &= B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + 1/r,\end{aligned}\tag{5.12}$$

где β_1 и β_2 , соответственно, — отрицательный и положительный корни уравнения²⁶

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \mu\beta - r = 0. \quad (5.13)$$

Необходимо отметить, что оба корня уравнения вещественны, так как дискриминант (5.13) $(\mu - \sigma^2/2)^2 + 2r\sigma^2$ положителен, если ставка r положительна²⁷. Они имеют различные знаки, ибо их произведение $-2r/\sigma^2$ отрицательно.

При этом на протяжении первого периода времени ставка r по предположению больше μ . При этом $\beta > 1$, ибо при $\beta = 1$ значение квадратного трехчлена в левой части (5.13) отрицательно.

Отличительной чертой второго периода является то обстоятельство, что теперь ставка r предполагается меньше μ . При этом $\beta_2 < 1$, ибо теперь значение квадратного трехчлена в левой части (5.13) при $\beta = 1$, равное $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r$, положительно, ибо $\mu > r$.

5.2.5. Решение модели для периода «высоких» ставок альтернативной доходности

В этом случае имеет место

Теорема 5.1. *Экономическая стоимость инвестиций в альтернативные инструменты F и в актив V с учетом возникающих опционов, соответственно, на покупку актива по цене предложения и продажу его по цене спроса, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (5.10)–(5.11) с граничными условиями (5.4), (5.5) и (5.6)–(5.7) с плавающими границами P_* и P^* .*

Система дифференциальных уравнений (5.10)–(5.11) с граничными условиями (5.4), (5.5) и (5.6)–(5.7) имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $0 < P_* < P^* < +\infty$. Доказательству теоремы 5.1 посвящено Математическое приложение (П 5.1.3).

²⁶ В качестве упражнения можно предложить читателю доказать, что один корень действительно является положительным, а другой — отрицательным.

²⁷ В данной части главы в качестве альтернативной ставки рассматривалось наибольшее значение из доходности индекса ГКО-ОФЗ, вычисленного по средним за неделю эффективным ставкам к погашению облигаций на момент закрытия ММВБ, и темпа роста курса доллара США — см. далее. Очевидно, что эта величина положительна.

5.2.6. Решение модели для периода «низких» ставок альтернативной доходности и стабильного роста рынка

В данном случае экономические оценки, соответственно, F и V , позиций инвесторов, в альтернативные инструменты и в рискованный актив A вновь удовлетворяют дифференциальным уравнениям второго порядка (5.10)–(5.11), но с иными граничными условиями. При этом имеет место

Теорема 5.2. *Экономическая стоимость инвестиций в альтернативные инструменты F и в актив V с учетом возникающих опционов, соответственно, на покупку актива по цене предложения и продажу его по цене спроса, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (5.10)–(5.11) с граничными условиями (5.8), (5.9) и (5.6)–(5.7) с плавающими границами P_* и P^* .*

Система дифференциальных уравнений (5.10)–(5.11) с граничными условиями (5.8), (5.9) и (5.6)–(5.7) имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $0 < P_* < P^* < +\infty$.

5.3. Выбор активов и проверка гипотез

Для применения результатов, полученных в последнем подразделе, для анализа активов РТС необходимо сначала проверить, соответствовало ли их поведение гипотезе, соответственно, *геометрического броуновского движения* (5.1), а также гипотезам величины *bid-ask-спредов* (5.2) и (5.3).

Поведение активов изучалось отдельно в двух качественно различных ситуациях:

1. Период перед кризисом 1998 г.

Для каждого из двух подпериодов ($i = 1, 2$) развития рынка в *предкризисный период: периода бума* (с начала 1997 г. до ноября 1997 г.) и *периода падения* (с ноября 1997 г. по июнь 1998 г.). Для дискретных временных рядов использовалась следующая структурная модель:²⁸

$$\ln \frac{P_t^{(i)}}{P_{t-1}^{(i)}} = \left(\mu^{(i)} - \frac{\sigma^{(i)2}}{2} \right) + \sigma^{(i)} \varepsilon_t^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (5.14)$$

²⁸ Весьма подробное разъяснение того, почему коэффициент сноса логарифма процесса, описываемого геометрическим броуновским движением (5.1), равен средней скорости прироста значения процесса, уменьшенной на половину квадрата его коэффициента вариации, дается, например, в монографии Диксита и Пиндайка [Dixit, Pindyck, 1994, p. 81].

оценивающая (индивидуально для каждого актива) *средние параметры роста* временного ряда, отвечающего условию геометрического броуновского движения цены актива P . Здесь $\varepsilon_t^{(i)}$ предполагаются стандартными независимыми гауссовскими величинами, а t — номер дня в периоде. Доходности активов оценивались в реальном выражении. Параметры модели находились с помощью параметрического метода оценки параметров гауссовского распределения методом максимального правдоподобия;

2. Период стабильного развития.

Для *послекризисного периода* (2000–2005 гг.) использовалась следующая *структурная модель*:

$$\Delta P_t^{(i)} = \mu^{(i)} + \sigma^{(i)} \varepsilon_t^{(i)}. \quad (5.15)$$

Для нашего анализа акции, включенные в РТС-1, были разбиты на три группы:²⁹ 1) *ведущие «голубые фишки»*, такие как РАО ЕЭС, Лукойл, Мосэнерго, Ростелеком, а также акции Сургутнефтегаза и Газпрома; 2) *менее ликвидные «голубые фишки»* — большинство остальных акций нефтегазовой промышленности (включая НПЗ), региональных энергосетей и предприятий связи; 3) *активы, обладающие более низкой ликвидностью*, — преимущественно акции транспортных компаний и предприятий машиностроения и торговли. Отметим, что активы первой группы отличаются очень значительными по величине, но неустойчивыми денежными потоками и высокой колеблемостью цен на акции с низким дивидендным доходом, акции второй группы также подвержены колебаниям, но их денежные потоки, тоже значительные, более устойчивы (особенно это относится к секторам телекоммуникаций и электроэнергетики), тогда как третья группа отличается относительно низкими по величине денежными потоками и очень низкой ликвидностью акций.

Результаты проверки соответствия поведения активов гипотезам приведены ниже.

(1) Для *предкризисного периода* были изучены обыкновенные акции следующих шести эмитентов: EESR (РАО ЕЭС) и LKOH (Лукойл) — из первой группы, SPTL (ПТС) и ORNB (Оренбургнефть) — из второй и GUMM (ГУМ) и KMAZ (КАМАЗ) — из третьей. Кроме того, аналогичное исследование было проведено также в отношении совокупного индекса РТС. Поскольку было необходимо получить достаточные для стати-

²⁹ При этом для простоты предполагается, что активы РТС ведут себя независимо друг от друга, но их поведение зависит от величины доходности инструментов финансового рынка.

стической обработки временные ряды котировок активов при каждом из уровней альтернативной доходности, использовались данные почасовых фиксингов (по 8 часовых фиксингов в день).

Все изученные активы показали *не менее чем 10%-ю значимость* формулы геометрического роста (5.14). При этом интересно отметить, что *акции первой группы* продемонстрировали *1%-значимую положительную ARCH-структуру*³⁰ статистически вычисленных остатков ε_t (как в первом, так и во втором полупериоде); в частности, для акций EESR были получены следующие результаты:

$$(e_t^{(1)})^2 = 0.0009 + 0.546(e_{t-1}^{(1)})^2 + u_t^{(1)},$$

$$(e_t^{(2)})^2 = 0.0014 + 0.901(e_{t-1}^{(2)})^2 + u_t^{(2)}.$$

Ошибки u_t имеют *незначимую* на уровне 5% автокорреляцию. Отметим, что и свободный член, и регрессионный коэффициент оказались *выше* во втором периоде (*периоде спада*). Вероятно, это проявление того, что в период, когда на рынке преобладают нежелательные тенденции, инвесторы склонны в течение более длительного срока придавать значение любым новостям, влияющим на рынок (как положительным, так и отрицательным).

Для активов *второй группы* также были обнаружены значимые на уровне 10% *ARCH-эффекты*, но знаки соответствующих регрессионных коэффициентов оказались *неустойчивы*, тогда как *для третьей группы* автокорреляция выявлена *не была* вовсе.

(2) Для *послекризисного периода* результаты оказались близкими: вновь все изученные активы показали *не менее чем 10%-ю значимость* формулы геометрического роста (5.14), причем акции первой группы, а также акции межрегиональных телекоммуникационных компаний, отнесенные нами ко второй, показали *5%-ю значимость*.

При этом *ARCH-структура* для первой группы по-прежнему имела место (5%-я значимость), однако важной отличительной особенностью периода стала ее *несмещенность*: ежедневные вариации цен *не аффинно*, а *линейно* зависели от их прошлых значений:

$$e_t^2 = 0.722e_{t-1}^2 + u_t.$$

Вероятно, это явилось следствием общего «упрощения» поведения инвесторов в ликвидные активы в период бурного роста рынка (в самом деле,

³⁰ Изучению ARCH-структуры российского фондового рынка посвящена, в частности, работа [Воронцовский, Абелканс, 2001].

в этом случае наиболее примитивная стратегия «buy-and-hold» могла рассматриваться как близкая к оптимальной).

Ошибки u_t имели автокорреляцию, *незначимую* на уровне 3%.

Для отдельных активов *второй группы* также были обнаружены *значимые* аффинные *ARCH-эффекты*, но знаки соответствующих регрессионных коэффициентов оказались неустойчивы, тогда как *для третьей группы* автокорреляция выявлена не была вовсе.

(3) Для проверки гипотез *bid-ask-спредов* (5.2) и (5.3) анализировались, соответственно, простые регрессионные структурные модели

$$\begin{aligned} P_{b,t} &= c_b + (1 - \Delta_b)P_t + u_{b,t}, \\ P_{a,t} &= c_a + (1 - \Delta_a)P_t + u_{a,t} \end{aligned}$$

для периода «высоких альтернативных ставок» и

$$\begin{aligned} \ln P_{b,t} &= c_b + \Delta_b \ln P_t + u_{b,t}, \\ \ln P_{a,t} &= c_a + \Delta_a \ln P_t + u_{a,t} \end{aligned}$$

для «более стабильного» периода «низких ставок».

При этом дроби в обоих приведенных выражениях показали не менее чем 5%-ю значимость регрессии и, что и требовалось, с погрешностью не более 5% были отвергнуты гипотезы отличия свободных членов регрессий c_b , c_a от нуля.

5.4. Модель *bid-ask-спредов* с возможностью обмена альтернативных инструментов фондового рынка друг на друга

Пусть на финансовом рынке присутствует конечное число альтернативных инвестиционных инструментов: $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ ³¹.

При этом предполагается, что среди них имеется выделенный актив A_0 , обладающий *безрисковой* доходностью r . Цена P_0 актива A_0 полагается равной 1 и используется в качестве масштабной единицы цен активов. Активы $A_1, A_2, \dots, A_n$ порождают постоянные операционные денежные потоки $D_i \geq 0$ за период. Инвесторы имеют возможность свободного обмена активов друг на друга с соответственной передачей прав на получение

³¹ В данном случае предположений о том, к какому сегменту финансового рынка (*фондовому* или *денежному*) относятся те или иные инструменты, не делается, ибо альтернативными полагаются любые доходные активы.

денежных потоков, при этом величина относительных цен активов определяется на рынке. Также предполагается, что цены активов $A_1, A_2, \dots, A_n$ отвечают стохастическим дифференциальным уравнениям (SDE)

$$d(\log P_i) = \mu_i dt + \sigma_i dw_i, \quad (5.16)$$

где P_i — цена i -го актива, μ_i и σ_i — соответственно, параметры сноса и диффузии, а w_i — стандартный винеровский процесс. Процессы w_i, w_j могут быть коррелированными, т. е.

$$\mathbf{E} \begin{bmatrix} w_i(t) \\ w_j(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i(t) \\ w_j(t) \end{bmatrix}' = t \begin{bmatrix} 1 & p_{ji} \\ p_{ij} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

где $\mathbf{E}$ — оператор математического ожидания, а $|p_{ij}| < 1, p_{ij} = p_{ji}, dw_i(t) = w_i(t+dt) - w_i(t)$.

Отметим, что выражение (5.16), по формуле Ито, соответствует стохастическому дифференциальному уравнению

$$dP_i = P_i \left(\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2} \right) dt + \sigma_i dw_i \right),$$

что с точностью до переопределения параметра μ_i эквивалентно (5.14).

Так же, как и ранее, используется гипотеза о том, что инвесторы ведут себя как *ценополучатели*. Для случая финансовых рынков это предположение эквивалентно гипотезе о том, что инвесторы не способны влиять на какие-либо параметры рынка, включая «рыночные» цены $P_0, P_1, \dots, P_n$ и параметры соответствующих SDE μ_i и σ_i . Соответственно, каждый из трейдеров считает эти параметры *экзогенно заданными*.

Предполагается, что в каждый момент инвесторы наблюдают набор *относительных цен* (котировок спроса и предложения) на обмен i -го актива на j -й. Котировки лежат, соответственно, на интервалах

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_j}{P_i} \right)^{(b)} &\in \left[\frac{P_j}{P_i} (1 - \Delta_{ij}^{(b)}), \frac{P_j}{P_i} \right), \\ \left(\frac{P_j}{P_i} \right)^{(a)} &\in \left(\frac{P_j}{P_i}, \frac{P_j}{P_i} (1 + \Delta_{ij}^{(a)}) \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $P_{ij}^{(a)} = (P_j/P_i)^{(a)}$ означает число единиц актива A_i , которое соответствует (относительной) *цене предложения* единицы A_j , а $P_{ij}^{(b)} = (P_j/P_i)^{(b)}$ — соответственно, относительная цена спроса на A_i . Очевидно, что в условиях равновесия спроса и предложения должно выполняться условие $1 + \Delta_{ij}^{(a)} = 1 / (1 - \Delta_{ij}^{(b)})$ для всех i и j . При этом предполагается,

что заключение инвесторами отдельных сделок не влияет на величины параметров $\Delta_{ij}^{(a),(b)}$, и инвесторы полагают эти параметры *экзогенно заданными*.

Трейдеры вправе согласиться на любую относительную цену из приведенных выше интервалов, но лишь в том случае, если соответствующий объем спроса или предложения достаточно велик. При этом данное условие считается выполненным лишь в исключительных случаях, пока цены спроса и предложения не окажутся равными, соответственно, $P_{ij}^{(b)} = \frac{P_j}{P_i}(1 - \Delta_{ij}^{(b)})$ и $P_{ij}^{(a)} = \frac{P_j}{P_i}(1 + \Delta_{ij}^{(a)})$. В то же время емкость рынка предполагается достаточной для того, чтобы позволить любому инвестору продать актив A_i за A_j по «цене спроса» $P_{ij}^{(b)}$ или купить по «цене предложения» $P_{ij}^{(a)}$ ³².

Как и ранее, предполагается, что инвестор имеет возможность держать средства в произвольном активе A_i ($i \geq 1$), приносящем денежный поток D_i (в частном случае — в активе A_0 , для которого предположение о денежном потоке заменено капитальной доходностью). В данном случае инвестор может в любой момент по своему выбору купить любой иной актив A_j за A_i по цене $P_{ji}^{(a)}$ (или, что равносильно, продать актив A_i за A_j по цене $P_{ij}^{(b)}$).

Вновь замечаем, что агент, владеющий в настоящий момент активом A_i , фактически обладает (*неявным*) *опционом* F_{ji} на право получения операционных денежных потоков, связанных с этим активом, а также на право перехода в произвольный момент времени на рынок конкурирующего актива A_j (т.е. на покупку A_j по цене его предложения, что эквивалентно продаже A_i за A_j по цене спроса на A_i) с целью дальнейшей спекулятивной игры.

При этом, как и выше, предполагая выполненной гипотезу LEH краткосрочных ожиданий, получаем в случае выплаты единичного дивиденда следующее уравнение для экономической стоимости опциона, имеющегося у обладателя актива A_j ³³:

$$\mathbf{E}(dF_{ij}) + 1dt = F_{ij}r dt,$$

где $dF_{ij}(t) = F_{ij}(t + dt) - F_{ij}(t)$.

³² При этом, как и в начале главы, будут изучаться только сделки, осуществляемые по ценам, близким к (относительным) котировкам спроса и предложения.

³³ Здесь мы, как и выше, оцениваем позицию инвестора, владеющего в данный момент активом A_i , в единицах операционного денежного потока от этого актива.

В случае невыплаты дивидендов $D_i = 0$ (например, для актива A_0) формула приобретает вид:

$$\mathbf{E}(dF_{ij}) = F_{ij}r dt.$$

Преобразуя уравнения (5.16) для P_i и P_j с помощью формулы Ито, получаем, аналогично (5.25)–(5.27) следующее дифференциальное уравнение второго порядка для стоимости опциона $F_{ij} = F_{ij}(P_{ij})$ ³⁴:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 F_{ij}'' P_{ij}^2 + (\mu_j - \mu_i + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2) F_{ij}' P_{ij} + 1 = F_{ij}r, \quad (5.19)$$

где $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ji}^2 = \sigma_j^2 - 2\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sigma_i^2$. Подобное же выражение имеет место и для опциона F_{ji} :

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 F_{ji}'' P_{ji}^2 + \left(\mu_i - \mu_j + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2\right) F_{ji}' P_{ji} + 1 = F_{ji}r. \quad (5.20)$$

Оба уравнения имеют место, по крайней мере при, $P_{ij} \in [P_{ij*}, P_{ij}^*]$.

Наконец, по аналогии с выводами, представленными в п. 5.2, приходим к следующему результату.

Теорема 5.3. *Экономическая стоимость инвестиций F_{ij} в актив A_i с учетом возможности его продажи за A_j по цене спроса на A_i и, соответственно, стоимость инвестиций F_{ji} в актив A_j с учетом возможности его продажи за A_i по цене спроса на A_j , удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (5.19)–(5.20) с граничными условиями:*

$$\begin{aligned} F_{ij}(P_{ij*}) + P_{ij*}(1 + \Delta_{ij}^{(a)}) &= F_{ji}(1/P_{ij*}), \\ F_{ij}(P_{ij}^*) + P_{ij}^*(1 - \Delta_{ij}^{(b)}) &= F_{ji}(1/P_{ij}^*), \\ F_{ij}'(P_{ij*}) + 1 + \Delta_{ij}^{(a)} &= F_{ji}'(1/P_{ij*}), \\ F_{ij}'(P_{ij}^*) + 1 - \Delta_{ij}^{(b)} &= F_{ji}'(1/P_{ij}^*), \\ F_{ij}(0) = 1/r, \quad F_{ji}(0) &= 1/r \end{aligned} \quad (5.21)$$

с плавающими границами P_{ij} и P_{ij}^* .

³⁴ При этом используется тот факт, что F_{ij} зависит только от текущей цены активов, но не от момента времени.

Система дифференциальных уравнений (5.19)–(5.20) с граничными условиями (5.21) имеет единственное решение в виде пары чисел P_{ij*} и P_{ij}^* , удовлетворяющее неравенству $0 < P_* < P^* < +\infty$.

Доказательство данных утверждений, в точности воспроизводящее доказательство теоремы 5.1 и смежных с ней результатов, мы опустим.

Наконец, в полной аналогии с (5.12)–(5.13), можно показать, что дифференциальным уравнениям (5.19)–(5.20) с граничными условиями (5.21) *удовлетворяют функции*

$$\begin{aligned} F_{ij}(P_{ij}) &= BP_{ij}^{\beta_2(\mu_{ij})} + 1/r, \\ F_{ji}(P_{ij}) &= A/P_{ij}^{\beta_2(\mu_{ij})} + 1/r, \end{aligned}$$

где $\beta_2(\mu_{ij})$ и $\beta_2(\mu_{ji})$ — соответственно, *положительные* корни уравнений

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2\beta(\beta-1) + \mu_{ij}\beta - r = 0$$

и

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}^2\beta(\beta-1) + \mu_{ji}\beta - r = 0,$$

а A и B — некоторые константы. В свою очередь μ_{ij} и μ_{ji} имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \mu_j - \mu_i + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2, \\ \mu_{ji} &= \mu_i - \mu_j + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что, аналогично (5.10)–(5.11), последние утверждения имеют место лишь при следующем соотношении ставок доходностей:

$$r > \max\{\mu_{ij}, \mu_{ji}\}, \quad (5.22)$$

которое накладывает определенные ограничения на применимость модели. Подробнее это условие будет обсуждаться в следующем разделе.

5.5. Группировка активов РТС для статистического оценивания модели спредов в случае обмена

Как уже было отмечено, модель *bid-ask*-спредов для случая возможного обмена активов друг на друга была применена для оценки поведения

активов РТС на протяжении периода с ноября 1998 г. по апрель 2000 г. (*373 ежедневных данных*), т.е. когда на российском финансовом рынке практически отсутствовали альтернативные инструменты, за исключением иностранной валюты. Более того, рынок последней в предельной степени контролировался Центральным банком России как по доходности, так и по объему, что практически не позволяло использовать его для спекулятивных операций. Таким образом, оценивались только возможности спекулятивных операций по обмену фондовых активов (акций РТС) друг на друга. При этом наиболее ликвидные акции РТС, отвечавшие следующим условиям:

- наличие зарегистрированных системой РТС котировок на покупку и продажу в каждый из торговых дней;
- наличие сделок не реже, чем в каждый второй день торгов (в среднем за период),

исследовались отдельно по отраслям.

Период времени с ноября 1998 г. по апрель 2000 г. разбиению на меньшие временные интервалы не подвергался.

Изучались сектора *нефтегазовой промышленности* (7 акций), *энергетики* (7 акций), *связи* (9 акций) и агрегированный *сектор тяжелой промышленности* (включая металлургическую) и *транспорта* (10 акций). При этом проводилась оценка арбитражных возможностей как на рынках отдельных секторов, так и между секторами.

Для этого были построены средневзвешенные по капитализации активов РТС *индексы* каждого из четырех секторов (индексы строились лишь по тем акциям, которые были условно отнесены к соответствующему сектору), и затем произведена оценка внутриотраслевых спекулятивных возможностей, связанных с i -й акцией. Вычисления производились для относительных цен данной акции по отношению к индексу отрасли (при этом μ_i и μ_j , σ_i и σ_j означают, соответственно, среднюю норму капитальной доходности и ее вариацию для данной акции и отрасли в среднем). В случае же когда рассматривались межсекторные арбитражные возможности, величины μ_i , μ_j , σ_i и σ_j означали параметры индексов соответствующих секторов.

Оценивание параметров каждой i -й акции или отраслевого индекса производилось по формуле

$$\ln \frac{R_t^{(i)}}{P_{t-1}^{(i)}} = \left(\mu^{(i)} + \frac{\sigma^{(i)^2}}{2} \right) + \sigma^{(i)} \varepsilon_t^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

аналогичной формуле (5.14) в случае, когда поведение актива подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению (5.16).

В качестве параметра денежных потоков D_i , как и ранее, использовались данные о квартальной выручке фирм за текущий период (в расчете на 1 акцию). Квартальные денежные потоки делились на число торговых дней в периоде. Квартальные денежные потоки отраслей в целом рассчитывались как суммарные денежные потоки, отнесенные к общему количеству голосующих акций компаний, принадлежащих к данному сектору.

5.6. Результаты статистического оценивания модели с возможностью обмена фондовых активов

Для выполнения условия (5.22) для относительных цен акций отдельных секторов в качестве «целевой» нормы доходности r для каждого сектора использовалась наибольшая для отрасли норма индивидуальной доходности акции (а именно: величина 0.85% в день для нефтегазового сектора, зафиксированная для привилегированных акций НК Лукойл, величина 1.79% в день для сектора *промышленности и транспорта*, зафиксированная для привилегированных акций ОАО Аэрофлот, величина 1.86% в день для сектора *энергетики*, зафиксированная для обыкновенных акций ОАО Ленэнерго, и величина 3.09% в день для сектора связи, зафиксированная для обыкновенных акций ОАО ПТС).

5.6.1. Результаты статистического анализа арбитражных возможностей по обмену активов друг на друга

Как отмечалось, изучение арбитражных возможностей на рынке обменов российских акций друг на друга и соответствующих относительных их котировок на покупку и продажу проводилось отдельно для каждой из *четырех «отраслей» промышленности*, имеющих относительно ликвидные активы, и между этими отраслями. В качестве индикаторов поведения активов отраслей в целом принимались взвешенные по капитализации индексы тех акций отрасли, которые изучались в данной главе³⁵.

³⁵ При этом отметим, что такой выбор активов не позволяет оценить арбитражные возможности непосредственно для активов, использованных для его определения.

При этом важно отметить, что, в отличие от ситуации 1997 г. — первой половины 1998 г., проанализированной в первой части исследования, российский фондовый рынок на протяжении 1999 г. — первой половины 2000 г. имел значительно более низкую ликвидность. При этом исследование его *bid-ask-спредов* оказалось существенно легче: фактически все торги по (относительным) котировкам на продажу проводились в периоды падения цен соответствующих активов, а по котировкам на покупку — в периоды их роста. Поэтому, в частности, диаграммы, посвященные исследованию активов этого периода (см. П5.5), в отличие от диаграмм, приведенных в П5.3, не содержат рядов, показывающих относительные цены активов *bid* и *ask*: первые из них оказывались приблизительно равны средним ценам торгов в периоды их локальных максимумов, а вторые — соответственно, минимумов. На диаграммах П5.5 приведены лишь средние относительные цены торгов отдельными акциями по отношению к средним ценам активов соответствующих отраслей и теоретически вычисленные «верхние» и «нижние» значения относительных цен P_* и P^* , и колебания фактических относительных цен торгов изучались относительно этих уровней. Уровни P_* и P^* выбирались единственным образом для всего промежутка времени, поскольку серьезных изменений макроэкономической ситуации за соответствующий промежуток времени не произошло (парламентские и президентские выборы 1999–2000 гг. таковыми до апреля 2000 г. не считались, а рост внешнеторгового сальдо России и прибылей сырьевых компаний, имевший место на протяжении изучаемого периода, закладывался в цены активов постепенно).

Перейдем непосредственно к обсуждению результатов по отдельным отраслям. При этом важно отметить, что характер поведения относительных цен акций различных отраслей российской промышленности (по отношению к индексам соответствующих отраслей) сильно менялся от отрасли к отрасли.

Так, для компаний нефтегазового сектора (см. П5.3) оказалось крайне существенным различие между поведением соответствующих обыкновенных и привилегированных акций компаний.

Обыкновенные акции вели себя достаточно устойчиво по отношению к индексу отрасли — их колебания протекали практически для всех компаний в интервале между соответствующими «верхними» и «нижними» значениями относительных цен P_* и P^* , и лишь для Лукойла было характерно относительное падение цены обыкновенных акций. Это дает основание считать, что обыкновенные акции российского нефтегазового сектора,

если их цены и отклоняются от своих фундаментальных значений, *недооценены* (или переоценены, что автору кажется крайне маловероятным) в равной степени. Это обстоятельство, видимо, следует рассматривать как негативное с точки зрения перспектив российской нефтегазовой промышленности — инвесторы по-прежнему рассматривают российский нефтегазовый комплекс как единый экономический объект, т. е. ориентируются в основном на такие внешние по отношению к отдельным компаниям факторы, как мировые цены на углеводородное сырье или меры государственного регулирования, — а не как конкурентный рынок российских экономических субъектов. Кроме того, представляется особенно существенным, что обыкновенные акции российских нефтегазовых компаний постепенно приобретают все более и более спекулятивный характер с точки зрения инвесторов открытого российского фондового рынка, и потому подобное поведение их относительных цен могло явиться не более чем следствием их высокой корреляции на рынке между собой.

В свою очередь привилегированные акции нефтегазовых компаний, как видно из приведенных диаграмм, колебались большую часть времени *возле* своих «нижних» теоретических значений P^* , причем в начале и в конце изучавшегося периода они находились выше этих уровней. Это позволяет сделать вывод о том, что инвесторы на протяжении основной части изученного периода времени позитивно оценивали перспективы данных активов и старались приобретать их даже по ценам предложения.

Отметим, что активы большинства из нефтегазовых компаний относились к 1-й или 2-й группам ликвидности акций РТС (см. п. 5.3). Таким образом, рыночное поведение их активов *не сильно изменилось* по сравнению с предыдущим периодом.

Обыкновенные акции *секторов электросвязи и электроэнергетики* демонстрировали еще большую степень согласованности с теорией: *локальные максимумы* их относительных цен оказались вблизи соответствующих «верхних» значений относительных цен P^* , в то время как *локальные минимумы* большинства из них оказывались вблизи «нижних» значений P_* . Это отчетливо видно как на примере относительно низколиквидных акций, таких как, «Кубаньэлектросвязь» или «Уралсвязьинформ», так и на примере высоколиквидных, таких как МГТС или РАО Ростелеком. Еще более заметно этот факт проявляется для привилегированных акций телекоммуникационного сектора. Для сектора же электроэнергетики это наблюдение проявляется практически для всех акций, причем независимо от их индивидуального поведения, — а оно сильно отличается для

различных акций — от незначительных колебаний вдоль одного уровня для обыкновенных акций РАО ЕЭС до резкого падения акций «Иркутск-энерго».

Следует сделать заключение, что сектор телекоммуникаций выходит на *максимальный уровень* согласования с теоретическими выводами, которые делались в предположении эффективного поведения инвесторов на рынке. Видимо, это является следствием того, что только телекоммуникационный сектор, как известно, является в значительной степени инвестиционно привлекательным сектором открытого российского фондового рынка с точки зрения *стратегических*, а не спекулятивных инвестиций.

Что же касается сектора электроэнергетики, то подобное поведение его акций, на наш взгляд, представляет некоторую загадку. Возможно, причиной его является очень тесная связь практически всех компаний с РАО ЕЭС, для которого это поведение имеет место.

Наконец, для *сектора тяжелой промышленности и транспорта*, чьи акции демонстрировали относительно низкую ликвидность, было характерно очевидное притяжение «пику» относительных цен к «верхним», теоретическим уровням P^* и минимумов относительных цен — к «нижним» уровням P_* . В то же время совпадения соответствующих цен не наблюдалось.

Таким образом, хотя рыночное поведение активов этого сектора в 1999–2000 гг. по сравнению с предыдущими периодами несколько стабилизировалось, колебания сгладились, низколиквидные активы по-прежнему являются преимущественно спекулятивными. Наконец, межсекторный арбитраж оказался практически бесперспективным ввиду статистической незначимости различий в поведении индексов различных секторов.

Кейс 5.1. Торговля РАО ЕЭС в 1997–1998 гг.

Помимо экономического анализа поведения инвесторов на рынках активов различных секторов, техника *bid-ask*-спредов позволяет также оценивать возможности получения спекулятивной прибыли от торговых сделок на рынке.

Рассмотрим, насколько удачным было применение описанной в главе методики на практике реальных торгов в РТС акциями ОАО РАО ЕЭС частным инвестором NN в периоде 1997 г. — середина 1998 г.

Каждый раз NN приобретал акции РАО на все имеющиеся на его клиентском счете у брокера средства и продавал также весь портфель акций, причем он считал, что в случае продажи акций РАО вырученные средства

не будут вкладываться в иные активы, оставаясь на его клиентском счете до момента нового входа в активы компании. При этом NN следовал описанной выше методике выбора моментов входа и выхода с рынка активов РАО.

На начало 1997 г. инвестор имел капитал, предполагавшийся к инвестированию в акции компании, на уровне \$20 тыс. NN планировал независимо от состояния рынка ограничить горизонт своего инвестирования началом июня 1998 г., он считал необходимым 1 июня 2008 г. вывести средства из акций, рассчитывая использовать их на покупку автомобиля. NN должен был за совершение каждой сделки уплачивать комиссионные (брокеру, депозитарию, бирже) из расчета 0.5% от суммы сделки.

Таким образом, приобретя в начале января 1997 г. 199 тыс. акций по цене около \$0.1/шт., инвестор, следуя выбранной стратегии, реализовал их 8 июля того же года, когда фактическая цена рынка (см. первый график из П 5.4) достигла уровня верхней границы теоретических колебаний P^* , по цене спроса, которая составила на тот момент \$0,4356/шт. В результате сделки NN получил после удержания комиссионных на счет \$86250.97.

Акции были вновь приобретены 27 ноября 1997 г., когда цена акций в результате падения вышла на нижний уровень P_* . В данном случае акции были куплены по цене предложения — \$0.2244/шт. Было куплено 382 тыс. акций (на счете клиента осталось \$530.17).

Как можно увидеть из графика, в дальнейшем NN, следуя выбранной стратегии, не должен был продавать эти акции до момента своего ухода с рынка 1 июня. В самом деле, хотя 24 апреля 1998 г. котировки предложения акций РАО ЕЭС выходили на уровень верхней границы P^* , фактические котировки рынка (а он должен был ориентироваться на них), до этого уровня не поднимались. В прочие же дни и те и другие были ниже верхней границы, и инвестор не получал сигнала на продажу акций.

В конечном итоге последние были проданы 1 июня 2008 г. с некоторым убытком — по \$0.1623/шт. Окончательный результат инвестора таков: на момент ухода с рынка инвестор имел капитал, равный \$62218.78, получив, таким образом, прибыль \$42218.78 (весной следующего года ему придется еще уплатить налог 20%, или \$8443.75 по рублевому курсу начала июня 1998 г.).

Стоит отметить, что использование описанной стратегии оказалось заметно эффективнее использования простейшей методики *buy-and-hold*: со-

гласно последней, инвестор должен был бы, купив в начале января 1997 г. 199 тыс. акций, продержать их до момента закрытия своего портфеля в июне 1998 г. В этом случае его прибыль составила бы только \$12136.21 без учета налогов.

Задачи к главе 5

1. Объясните, почему никакой марковский момент (в частности, никакой фиксированный момент) не может рассматриваться как оптимальный для инвестирования средств, например ровно на 1 год.

Указание. Порассуждайте о том, что доходность инвестиций зависит от будущих событий. Также рекомендуем ответить на вопрос, может ли марковский момент считаться оптимальным при инвестировании на интервале, определяемом будущими событиями?

2. Сравните предположения гипотезы локальных ожиданий ЛЕН с гипотезой чистых ожиданий РЕН (1.15). Почему есть основания утверждать, что обе гипотезы базируются на единых предположениях эффективности рынка?

Указание. Заметьте, что при построении обеих гипотез доходность некоторого актива на определенном интервале времени сопоставляется с доходностью также доступных инвестору альтернативных инструментов. В условиях эффективности рынка (какой формы?) и отсутствия арбитражных ожиданий эти доходности должны быть равны.

3. Дайте экономическое истолкование равенств (5.4) и (5.8).

Указание. Обсудите вопрос об изменении инвестиционных возможностей инвестора при продаже рискованного актива и покупке безрискового, и наоборот.

4. Дайте экономическое истолкование равенств (5.5) и (5.9).

Ответ. При малых колебаниях цены актива вблизи точек P_* и P^* изменения капитала инвестора в рисковый и безрисковый активы будут сравнимы. Что это означает в терминах риска вложений?

5. Какой статистический метод оценивания параметров регрессии пригоден для анализа гипотезы поведения спредов (5.2)–(5.3)?

Ответ. Любой, применимый для оценки однопараметрической регрессии.

Приложение к главе 5

П 5.1. Математическое приложение: теоретическая оценка опционов на покупку актива по цене предложения и продажу по цене спроса

П 5.1.1. Вывод дифференциальных уравнений для ценности опционов

Ценность опциона F может быть найдена с помощью «гипотезы краткосрочных ожиданий» LEH (*Local Expectations Hypothesis* (см., напр.: [Ramaswamy, Sundaresan, 1986]):

$$\mathbf{E}(dF) = Frdt. \quad (5.23)$$

Точнее: *ожидаемая прибыль*, связанная с держанием этого опциона на протяжении достаточно *короткого* промежутка времени, должна равняться прибыли от *инвестирования* суммы его стоимости в альтернативные инструменты.³⁶

Ценность опциона зависит от *текущей* цены P и *не зависит* от момента времени: $F = F(P)$. Используя (5.1), запишем дифференциал Ито для величины F :

$$dF = \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F'' dt + \mu P F' dt + \sigma P F' dz.$$

Здесь все производные берутся по переменной P . Ожидаемая величина последнего выражения равна

$$\mathbf{E}(dF) = \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F'' dt + \mu P F' dt, \quad (5.24)$$

где $\mathbf{E}$ — оператор математического ожидания случайной величины по предыстории колебаний цены P .

Наконец, подставив (5.24) в (5.23), получаем (5.10)

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F'' + \mu P F' - rF = 0. \quad (5.25)$$

³⁶ Необходимо отметить, что, хотя F зависит от текущей рыночной цены актива A , из (5.23) *не следует*, что имеется возможность сформировать *даже воображаемый* арбитражный портфель из актива A и опциона F с *целью поддерживать* его на безрисковом уровне доходности лишь путем изменения пропорций составляющих. В частности, это невозможно уже потому, что в настоящей главе изучается ситуация, когда *не существует* активов, торгуемых по ценам фиксинга, а котировки *bid* и *ask* различны. Формула (5.23) показывает лишь то, что *средняя* норма доходности опциона должна иметь требуемый рынком уровень.

Аналогично, используя соответствующее уравнение ЛЕН для величины V , где 1 — денежный поток за период, имеем

$$\mathbf{E}(dV) + 1dt = Vr dt, \quad (5.26)$$

получаем дифференциальное уравнение (5.11):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V'' + \mu P V' - rV + 1 = 0. \quad (5.27)$$

П 5.1.2. Проверка корректности общих решений дифференциальных уравнений

Для проверки корректности решения уравнений (иначе говоря, проверки того факта, что (5.12) действительно удовлетворяет формулам (5.10)–(5.11)), достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F'' + \mu P F' - rF \\ &= A_1 \left[\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 (P^{\beta_1})'' + \mu P (P^{\beta_1})' - rP^{\beta_1} \right] + \\ &+ A_2 \left[\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 (P^{\beta_2})'' + \mu P (P^{\beta_2})' - rP^{\beta_2} \right] = \\ &= A_1 P^{\beta_1} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \beta_1 (\beta_1 - 1) + \mu \beta_1 - r \right) + \\ &+ A_2 P^{\beta_2} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \beta_2 (\beta_2 - 1) + \mu \beta_2 - r \right) = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V'' + \mu P V' - rV + 1 \\ &= B_1 \left[\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 (P^{\beta_1})'' + \mu P (P^{\beta_1})' - rP^{\beta_1} \right] + \\ &+ B_2 \left[\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 (P^{\beta_2})'' + \mu P (P^{\beta_2})' - rP^{\beta_2} \right] + \\ &+ [(1/r)'' + \mu P (1/r)'] + 1 = \\ &= B_1 P^{\beta_1} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \beta_1 (\beta_1 - 1) + \mu \beta_1 - r \right) + \\ &+ B_2 P^{\beta_2} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \beta_2 (\beta_2 - 1) + \mu \beta_2 - r \right) - 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (5.10) и (5.11) обращаются в тождества, что и требовалось доказать.

П 5.1.3. Доказательство теоремы 5.1

Для доказательства теоремы 5.1 заметим предварительно, что, поскольку корень β_1 отрицателен, а β_2 , соответственно, положителен, из (5.4), (5.5) и (5.12) следует, что $A_1 = 0$ и $B_1 = 0$.

С учетом последнего замечания из построенной модели *bid-ask*-спредов вытекает, что утверждение теоремы 5.1 эквивалентно следующему: *система уравнений*

$$\begin{aligned} F(P_*) + (1 + \Delta_a)P_* &= V(P_*), \\ F(P^*) + (1 - \Delta_b)P^* &= V(P^*), \\ F'(P_*) + 1 + \Delta_a &= V'(P_*), \\ F'(P^*) + 1 - \Delta_b &= V'(P^*), \end{aligned} \tag{5.28}$$

относительно переменных A, B, P_*, P^* , где

$$\begin{aligned} F(P) &= AP^{\beta_1}, \quad \beta_1 < 0, \\ V(P) &= BP^{\beta_2} + 1/r, \quad \beta_2 > 1, \end{aligned} \tag{5.29}$$

и $\Delta_a > 0, 0 < \Delta_b < 1, r > 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0 < P_* < P^* < +\infty$.

Иначе говоря, требуется доказать, что следующая система имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} AP_*^{\beta_1} + (1 + \Delta_a)P_* &= BP_*^{\beta_2} + 1/r, \\ AP_*^{\beta_1} + (1 - \Delta_a)P_* &= BP_*^{\beta_2} + 1/r, \\ A\beta_1 P_*^{\beta_1-1} + 1 + \Delta_a &= B\beta_2 P_*^{\beta_2-1} \\ A\beta_1 P_*^{\beta_1-1} + 1 - \Delta_a &= B\beta_2 P_*^{\beta_2-1}. \end{aligned}$$

Эквивалентная ей система имеет вид:

$$\begin{aligned} AP_*^{\beta_1} + (1 + \Delta_a)P_* &= BP_*^{\beta_2} + 1/r, \\ A\beta_1 P_*^{\beta_1} + (1 + \Delta_a)P_* &= B\beta_2 P_*^{\beta_2}, \\ AP_*^{\beta_1} + (1 - \Delta_b)P^* &= BP_*^{\beta_2} + 1/r \\ A\beta_1 P_*^{\beta_1} + (1 - \Delta_b)P^* &= B\beta_2 P_*^{\beta_2}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

После несложных преобразований получаем, что *первая пара* уравнений системы (5.30) *эквивалентна* в силу условий $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$ и $0 < P_* < P^* < \infty$ *системе*

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta_2/r + (1 + \Delta_a)P_*(1 - \beta_2)}{P_*^{\beta_1}(\beta_2 - \beta_1)}, \\ B &= \frac{\beta_1/r + (1 + \Delta_a)P_*(1 - \beta_1)}{P_*^{\beta_2}(\beta_2 - \beta_1)}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

а вторая пара — системе

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta_2/r + (1 - \Delta_b)P^*(1 - \beta_2)}{P^{*\beta_1}(\beta_2 - \beta_1)}, \\ B &= \frac{\beta_1/r + (1 - \Delta_b)P^*(1 - \beta_1)}{P^{*\beta_2}(\beta_2 - \beta_1)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Таким образом, система (5.28)—(5.29) *имеет искомое решение тогда и только тогда*, когда относительно переменных P_* , P^* , удовлетворяющих условию $0 < P_* < P^* < +\infty$, *имеет единственное решение следующая система двух уравнений:*

$$\begin{aligned} \frac{\beta_2/r + (1 + \Delta_a)P_*(1 - \beta_2)}{P_*^{\beta_1}(\beta_2 - \beta_1)} &= \frac{\beta_2/r + (1 - \Delta_b)P^*(1 - \beta_2)}{P^{*\beta_1}(\beta_2 - \beta_1)}, \\ \frac{\beta_1/r + (1 + \Delta_a)P_*(1 - \beta_1)}{P_*^{\beta_2}(\beta_2 - \beta_1)} &= \frac{\beta_1/r + (1 - \Delta_b)P^*(1 - \beta_1)}{P^{*\beta_2}(\beta_2 - \beta_1)}, \end{aligned}$$

соответствующих правым частям уравнений (5.31) и (5.32), или эквивалентная ей система

$$\begin{aligned} \left(\frac{P^*}{P_*}\right)^{\beta_1} &= \frac{\beta_2/r + (1 - \Delta_b)P^*(1 - \beta_2)}{\beta_2/r + (1 + \Delta_a)P_*(1 - \beta_2)}, \\ \left(\frac{P^*}{P_*}\right)^{\beta_2} &= \frac{\beta_1/r + (1 - \Delta_b)P^*(1 - \beta_1)}{\beta_1/r + (1 + \Delta_a)P_*(1 - \beta_1)}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Наконец, полагая в (5.33) $1/(rP_*) = \delta$, $P^*/P_* = \gamma$, получаем, что исходная задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда имеет *единственное решение*, относительно переменных $\delta > 0$, $\gamma > 1$, система

$$\begin{aligned} \gamma^{\beta_1} &= \frac{\beta_2\delta + (1 - \Delta_b)\gamma(1 - \beta_2)}{\beta_2\delta + (1 + \Delta_a)(1 - \beta_2)}, \\ \gamma^{\beta_2} &= \frac{\beta_2\delta + (1 - \Delta_b)\gamma(1 - \beta_1)}{\beta_1\delta + (1 + \Delta_a)(1 - \beta_1)}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Выражая из первого уравнения (5.34) $\delta = \delta_1(\gamma)$ и из второго $\delta = \delta_2(\gamma)$, находим, что обе эти функции непрерывны при $\gamma > 1$ и имеют вид

$$\begin{aligned}\delta_1(\gamma) &= \frac{(1 - \beta_2) ((1 - \Delta_b)\gamma - (1 + \Delta_a)\gamma^{\beta_1})}{\beta_2(\gamma^{\beta_1} - 1)}, \\ \delta_2(\gamma) &= \frac{(1 - \beta_1) ((1 - \Delta_b)\gamma - (1 + \Delta_a)\gamma^{\beta_2})}{\beta_1(\gamma^{\beta_2} - 1)},\end{aligned}\tag{5.35}$$

причем доказательство теоремы 5.1 будет завершено, если будет показано, что уравнение $\delta_1(\gamma) = \delta_2(\gamma)$ при $\gamma > 1$ имеет единственное решение, причем общее значение функций $\delta_1(\gamma)$ и $\delta_2(\gamma)$ в соответствующей точке будет положительно.

Напомним, что $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$, $\Delta_a > 0$, $0 < \Delta_b < 1$ (см. (5.28)–(5.29)). Как легко видеть, отсюда следует, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1+} (\delta_1(\gamma) - \delta_2(\gamma)) = -\infty,$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} (\delta_1(\gamma) - \delta_2(\gamma)) = +\infty,$$

причем разность функций $\delta_1(\gamma) - \delta_2(\gamma)$ непрерывна на интервале $(1; +\infty)$.

Более того, разность функций $\delta_1(\gamma)$ и $\delta_2(\gamma)$ строго возрастает. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned}\delta_1(\gamma) - \delta_2(\gamma) &= \\ &= (1 - \delta_b) \left[\frac{1 - \beta_2}{\beta_2} \frac{\gamma - \frac{1+\Delta_a}{1-\Delta_b}}{\gamma^{\beta_1} - 1} - \frac{1 - \beta_1}{\beta_1} \frac{\gamma - \frac{1+\Delta_a}{1-\Delta_b}}{\gamma^{\beta_2} - 1} \right] - \\ &\quad - (1 + \Delta_a) \left[\frac{1 - \beta_2}{\beta_2} - \frac{1 - \beta_1}{\beta_1} \right] = \\ &= (1 - \Delta_b) \left[\left(\frac{1 - \beta_2}{\beta_2} \frac{\gamma}{\gamma^{\beta_1} - 1} - \frac{1 - \beta_2}{\beta_2} \frac{\varphi}{\gamma^{\beta_1} - 1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1 - \beta_1}{\beta_1} \frac{\gamma}{\gamma^{\beta_2} - 1} - \frac{1 - \beta_1}{\beta_1} \frac{\varphi}{\gamma^{\beta_2} - 1} \right) \right] + \\ &\quad + (1 + \Delta_a) \left[\frac{1 - \beta_2}{\beta_2} - \frac{1 - \beta_1}{\beta_1} \right],\end{aligned}\tag{5.36}$$

причем множители перед квадратными скобками в (5.36) положительны, а $\varphi = \frac{1+\Delta_a}{1-\Delta_b} > 1$.

Оценим производную функции в первых квадратных скобках последнего равенства (5.36):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\left(\frac{1-\beta_2}{\beta_2} \frac{\gamma}{\gamma^{\beta_1}-1} - \frac{1-\beta_2}{\beta_2} \frac{\varphi}{\gamma^{\beta_1}-1} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{1-\beta_1}{\beta_1} \frac{\gamma}{\gamma^{\beta_2}-1} - \frac{1-\beta_1}{\beta_1} \frac{\varphi}{\gamma^{\beta_2}-1} \right) \right] = \\
& = \frac{1-\beta_2}{\beta_2} \frac{(1-\beta_1)\gamma^{\beta_1} + \beta_1\varphi\gamma^{\beta_1-1} - 1}{(\gamma^{\beta_1}-1)^2} - \\
& - \frac{1-\beta_1}{\beta_1} \frac{(1-\beta_2)\gamma^{\beta_2} + \beta_2\varphi\gamma^{\beta_2-1} - 1}{(\gamma^{\beta_2}-1)^2} > \\
& > \frac{1-\beta_1}{\beta_2} \frac{(1-\beta_1)\gamma^{\beta_1} + \beta_1\gamma^{\beta_1-1} - 1}{(\gamma^{\beta_1}-1)^2} - \\
& - \frac{1-\beta_1}{\beta_1} \frac{(1-\beta_2)\gamma^{\beta_2} + \beta_2\gamma^{\beta_2-1} - 1}{(\gamma^{\beta_2}-1)^2} = \\
& = \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{\beta_1\beta_2} \left[\frac{\beta_1}{1-\beta_1} \frac{\gamma^{\beta_1} - (1+\beta_1\gamma^{\beta_1-1}(\gamma-1))}{(\gamma^{\beta_1}-1)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\beta_2}{1-\beta_2} \frac{\gamma^{\beta_2} - (1+\beta_2\gamma^{\beta_2-1}(\gamma-1))}{(\gamma^{\beta_2}-1)^2} \right].
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Поскольку сомножитель перед квадратной скобкой в последней строке (5.37) положителен, то для доказательства возрастания разности $\delta_1(\gamma) - \delta_2(\gamma)$ достаточно показать, что при $\gamma > 1$ функция

$$R(\beta) = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\gamma^\beta - (1+\beta\gamma^{\beta-1}(\gamma-1))}{(\gamma^\beta-1)^2} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^\beta-1} \right)$$

является убывающей по β , по крайней мере на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$, причем $\lim_{\beta \rightarrow 0} R(\beta) > \lim_{\beta \rightarrow 1+} R(\beta)$.³⁷

В самом деле, как легко проверить,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} R(\beta) = \frac{\gamma \ln \gamma + \gamma - 1}{\gamma(\ln \gamma)^2} > \lim_{\beta \rightarrow 1+} R(\beta) = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Кроме того, функция является убывающей на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$, поскольку на каждом из них является произведением убываю-

³⁷ На самом деле функция $R(\beta)$ является целой, а ее сужение на вещественную ось — убывающей вещественной функцией.

щих по абсолютной величине (по переменной β) отрицательных функций $\frac{\beta}{1-\beta}$ и $\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma^\beta-1} \right)$.

Таким образом, доказано, что разность функций $\delta_1(\gamma) - \delta_2(\gamma)$ является непрерывной на интервале $(1; +\infty)$ возрастающей функцией, имеющей пределы разных знаков на концах интервала.

Таким образом, разность имеет единственный корень на этом интервале. Теорема 5.1 доказана полностью.

П 5.1.4. Схема доказательства теоремы 5.2

Теорема 5.2 доказывается аналогично теореме 5.1. Отметим только, что в данном случае вместо формул (5.32) для нахождения двух значимых констант можно использовать выражения

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta_2/r - (\beta_2 - \Delta_a)(P_*)^{\Delta_a}}{(\beta_2 - \beta_1)(P_*)^{\beta_1}}, \\ B &= \frac{\beta_1/r - (\beta_1 - \Delta_a)(P_*)^{\Delta_a}}{(\beta_2 - \beta_1)(P_*)^{\beta_2}}. \end{aligned}$$

Остальную же работу мы предлагаем провести внимательному читателю в качестве *упражнения*.

П 5.1.5. Решение модели для случая обмена активов друг на друга

Прежде чем непосредственно переходить к выводу формул (5.19)–(5.20), предварительно отметим, что при условии (5.16)–(5.17) для относительной цены P_{ij} имеет место выражение

$$dP_{ij} = P_{ij} \left((\mu_j - \mu_i + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2)dt + \sigma_i dw_i - \sigma_j dw_j \right), \quad (5.38)$$

где $\sigma_{ij}^2 = \sigma_j^2 - 2P_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sigma_i^2$.

Действительно, из (5.16) непосредственно вытекает равенство

$$d(\log P_{ij}) = d(\log P_j) - d(\log P_i) = (\mu_j - \mu_i)dt + \sigma_j dw_j - \sigma_i dw_i, \quad (5.39)$$

которое, в свою очередь, равносильно тому, что относительная цена P_{ij} актива A_j по отношению к A_i удовлетворяет стохастическому дифферен-

циальному уравнению (5.38). В самом деле, согласно формуле Ито, уравнение (5.38) равносильно

$$\begin{aligned}
 d(\log P_{ij}) &= \frac{d(\log P_{ij})}{dP_{ij}} P_{ij} \left((\mu_j - \mu_i + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2) dt + \sigma_j dw_j - \sigma_i dw_i \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{d^2(\log P_{ij})}{dP_{ij}^2} P_{ij}^2 \sigma_{ij}^2 dt = \\
 &= \frac{P_{ij}}{P_{ij}} \left((\mu_i - \mu_j + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2) dt + \sigma_j dw_j - \sigma_i dw_i \right) - \frac{1}{2} \frac{P_{ij}^2}{P_{ij}^2} \sigma_{ij}^2 dt = \\
 &= (\mu_j - \mu_i) dt + \sigma_j dw_j - \sigma_i dw_i,
 \end{aligned}$$

т. е. мы получаем (5.39) (использованы полные производные по переменной P_{ij} , ибо функция $\log P_{ij}$ от времени явно не зависит).

Наконец, из (5.38) аналогично (5.24)–(5.26) получаем (5.19) и (5.20). Например, для формулы (5.19) имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(dF_{ij}) &= \mathbf{E}(dF_{ij}(P_{ij})) = \\
 &= \mathbf{E} \left(\frac{dF_{ij}}{dP_{ij}} P_{ij} \left((\mu_j - \mu_i + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2) dt + \sigma_j dw_j - \sigma_i dw_i \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 F_{ij}}{dP_{ij}^2} P_{ij}^2 \sigma_{ij}^2 dt \right) = \\
 &= \mathbf{E} \left(F'_{ij} P_{ij} ((\mu_k - \mu_i + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^2) dt + \sigma_j dw_j - \sigma_i dw_i) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} F''_{ij} P_{ij}^2 \sigma_{ij}^2 dt \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{2} F''_{ij} P_{ij}^2 \sigma_{ij}^2 + F'_{ij} P_{ij} \mu_{ij} \right) dt,
 \end{aligned}$$

где символом $\mathbf{E}$ снова обозначен оператор математического ожидания по предыстории. Здесь вновь использован тот факт, что стоимость опциона на право обмена актива A_i на A_j по цене предложения последнего зависит лишь от текущей относительной стоимости активов и не зависит явно от момента времени.

Применяя теперь к последнему выражению формулу краткосрочных ожиданий в виде

$$\mathbf{E}(dF_{ij}) + 1dt = F_{ij} r dt$$

и избавляясь от знака дифференциала по времени, сразу приходим к (5.19).

6. Облигации с плавающим купоном: принципы ценообразования

Настоящая глава, в отличие от главы 1, посвящена изучению весьма специфического класса долговых инструментов — так называемых облигаций «с плавающим» купоном (иначе — «плавающих» облигаций, *floaters*). Вообще говоря, большинство облигационных выпусков предлагают купонный вид дохода инвестора, но постоянство купонной доходности во времени не является обязательным условием выпуска долговых инструментов. Кроме того, и на наиболее развитом американском рынке долговых инструментов, и на российском рынке большинство выпусков имеет *переменную* форму купона, хотя принципы его определения могут существенно отличаться от выпуска к выпуску. Облигации с плавающим купоном, как можно понять по названию, относятся к этому классу. Основные понятия теории облигаций см. в энциклопедическом справочнике [Фабоцци, 2008а, 2008б].

6.1. Облигации с плавающим купоном: определения и описательная статистика

Полагается, что облигация имеет *плавающий купон*, если изначально в момент выпуска облигации³⁸ определяется, что купонная доходность по облигации будет изменяться в определенные моменты времени, — с началом очередного купонного периода, — *вслед за колебаниями заранее определенной переменной* (обычно макроэкономической). Остальные правила обращения облигаций с плавающим купоном (правила налогообложения прибыли, очередности исполнения долговых требований в случае банкротства эмитента и т. д.) в основном такие же, как и для облигаций с постоянным купоном.

³⁸ На самом деле этот вопрос всегда решается еще раньше — при формировании проспекта эмиссии выпуска облигаций и его регистрации.

В абсолютном большинстве случаев очередная купонная ставка по таким облигациям *определяется на основании базовой ставки (base rate)* — текущей доходности одного из следующих инструментов:

- некоторого широко распространенного и относительно *ликвидного выпуска рыночных облигаций*³⁹;
- *усредненного показателя межбанковского рынка* (используются ставки LIBOR, EurIBOR, MosIBOR, MosPrime и подобные им индикаторы);
- макроэкономических показателей, — например, темпа инфляции за последний период (обычно той же длительности, что и купонный период по облигации — по версии того или иного органа, регулярно публикующего статистические данные).

При этом купон по плавающей облигации определяется как сумма базовой ставки и заранее определенной, фиксированной в момент эмиссии облигаций, *надбавки (markup)*. Часто величина этой надбавки (*премии за специфический риск* инвестирования в долговые активы соответствующего эмитента) не является постоянной, а убывает с каждым купонным периодом. Таким образом, облигации с плавающим купоном можно в определенной степени считать *производными инструментами* от величины базовой ставки.

Момент определения очередной купонной ставки обычно близок к дате начала соответствующего купонного периода, хотя наступает всегда *раньше* этой даты. Так, например, облигация Citicorp со сроком погашения в апреле 2009 г. имеет полугодовые купоны, погашаемые 15 апреля и 15 октября. Купонный доход, выплачиваемый, например, 15 апреля 2009 г., был определен на основе среднего арифметического доходности размещения 6-месячных Treasury Bills на аукционах, прошедших в период с 22 сентября по 5 октября 2008 г., т.е. за 2-недельный интервал времени, заканчивающийся за 10 дней до начала очередного купонного периода по облигации. Аналогично, купонный доход по купону, погашаемому 15 октября, определяется на основе среднего арифметического доходностей размещения 6-месячных Treasury Bills за период с 23 марта по 5 апреля того же года. Полученные средние доходности увеличиваются на величину надбавки (для Citicorp-2009 — 15 б. п., или 0.15%).

³⁹ Чаще всего такими инструментами выступают краткосрочные государственные облигации определенного выпуска; в США — 3- или 6-месячные Treasury bills, в России — облигации ОФЗ или Центрального банка.

Отметим, что облигации с плавающим купоном могут иметь ряд специфических свойств, таких, например, как наличие верхней x_u (*ceiling feature*) и/или нижней x_d (*floor feature*) границ колебания купонной доходности по облигации (чаще — только нижней). Например, если доходность инструмента, лежащего в основе определения доходности текущего купона, падает настолько, что даже с учетом надбавки становится ниже x_d , то эмитент выплачивает текущий купонный платеж по этой ставке. Другим примером может служить возможность введения «номинального якоря» $\underline{x}_d$ (*drop-lock feature*) для купонной доходности по облигации. Если текущая доходность базового инструмента упадет до уровня $\underline{x}_d$, то начиная с данного момента до момента погашения, независимо от дальнейших колебаний базовой ставки, купонная доходность облигации будет поддерживаться на уровне $\underline{x}_d$.

Исследования подобных корпоративных долговых инструментов США были проведены Рамасвами и Сандаресаном [Ramaswamy, Sundaresan, 1986]. При этом использовалась модель Кокса–Ингерсолла–Росса [Cox, Ingersoll, Ross, 1980], учитывающая при определении теоретической цены таких инструментов связь величины их купонов с базовой доходностью Treasury bills. Несмотря на то что было рассмотрено большое количество вариантов условий обращения облигаций с плавающим купоном (о важнейших из них будет сказано ниже), был сделан вывод о статистически значимой недооценке этих облигаций на биржевых торгах по сравнению с их теоретической ценой.

Исследования российских облигаций с переменным купоном почти неизвестны (упомянем лишь [Дорофеев, 2000; Окулов, 2001]). Причина этого кроется в относительной редкости этого инструмента на отечественном рынке (об этом будет сказано особо). В этих условиях оказывается, что наиболее известными примерами таких инструментов на отечественном рынке являются государственные облигации — облигации государственного сберзайма (ОГСЗ — как производные, в свою очередь, от ОФЗ; о них речь пойдет далее), а также субфедеральные облигации г. Санкт-Петербурга отдельных выпусков (например, RU24015GSP).

На самом деле сравнение теоретических результатов, полученных в отношении американских корпоративных облигаций, с оценками ОГСЗ и облигаций Санкт-Петербурга не может считаться вполне корректным. Прежде всего это связано с разной степенью ликвидности этих активов, а также с большим различием вариации доходности этих инструментов. Тем не менее в упомянутых выше работах показано, что общие зависимости,

обнаруженные Рамасвами и Сандаресаном, имеют место и на российском рынке: также было замечено свойство недооценки ОГСЗ и RU24015GSP на торгах, соответственно, ММВБ и СПВБ, по сравнению с теоретически найденным уровнем цены.

В данный момент в России государственных ценных бумаг с плавающим купоном нет. В США подобные государственные ценные бумаги также не представлены, однако корпоративные облигации такого типа на американском рынке — обычное явление.

В России также имеются несколько выпусков корпоративных облигаций с плавающим купоном. Отметим, например, рублевые облигации ЕБРР выпусков 1 и 2 и облигации 2-го выпуска Лебедянского ЭКЗ (использующие в качестве базовой 3-месячную ставку MosPrime на конец предыдущего квартала) и некоторые другие. На индексе потребительских цен (ИПЦ) ФСГС России (в то время — Госкомстата) были основаны купоны облигаций выпуска Вимм-Билль-Данн ПП-01, погашенного в апреле 2006 г. Впрочем, как можно судить по этому списку, подобные примеры пока на российском рынке можно считать скорее исключением, нежели правилом: только в данный момент всего обращается более 700 облигационных выпусков российских компаний (не считая еврооблигаций).

Причины того, что корпоративные облигации с плавающим купоном в России только начинают завоевывать популярность, тогда как, например, на американском рынке они — норма, кроются в существовании бизнес-идеи, лежащей в основе эмиссии таких долговых инструментов.

Дело в том, что плавающая структура купона, привязанного к некоторому индикатору стоимости инвестиционных ресурсов в экономике (а именно такую роль и играет *базовая ставка*) позволяет эмитенту изначально фиксировать *экономические* затраты по обслуживанию своих заимствований на весь срок их обращения, а инвестору, соответственно, — *реальную доходность* своих инвестиций. Подобные инструменты, в принципе, могли бы иметь место и на российском рынке, — но при выполнении следующего условия: эмитенты, *заинтересованные в хеджировании* своих процентных расходов, должны предлагать по своим долговым активам доходность, привлекательную для *инвесторов, заботящихся о реальной доходности* своих инвестиций.

Увы, на практике это условие пока не выполняется. Дело в том, что хеджирование затрат по обслуживанию долга против неблагоприятных изменений конъюнктуры процентных ставок может иметь смысл лишь для эмитентов, выпускающих крупные по объему займы на достаточно

длительные сроки, — т. е. для первого-второго «эшелонов» российских компаний⁴⁰. Однако доходность долговых инструментов таких эмитентов (как с фиксированной, так и с плавающей купонной ставкой) пока находилась ниже уровня инфляции.

Поэтому их активы могли представлять интерес только для инвесторов, интересующихся не *реальной* доходностью своих инвестиций, а лишь *номинальной*. Такими инвесторами, как правило, являются большинство крупных и средних российских банков из-за их способности привлекать финансовые ресурсы по еще более низким ставкам, естественно, также отрицательным *в реальном выражении*. В то же время достаточно крупные объемы эмиссии долговых инструментов эмитентов первого-второго эшелонов не позволяли более мелким инвесторам влиять на ценообразование этих инструментов.

В качестве гораздо более привлекательной альтернативы эмитенты выбирали другую технику определения *переменных купонов*⁴¹ — через их фиксацию, но не на весь период обращения облигаций, а лишь до ближайшей *оферты* (момента реализации предоставляемой инвесторам возможности на предъявление облигаций к погашению по номиналу). Купонная же доходность на следующие периоды определяется эмитентом незадолго до этого момента, — как и в случае облигаций с плавающим купоном, — но *без обязательной привязки* к какому-либо экономическому или финансовому индикатору. При этом эмитент сохраняет за собой право вновь выпустить на торги выкупленные по оферте облигации по рыночной цене, что фактически будет означать их повторный выпуск в обращение, но уже с известной купонной доходностью (и, возможно, с *дисконтом* или *премией* к номиналу).

6.2. Теоретические основы ценообразования на облигации с плавающим купоном

Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению конкретных примеров долговых инструментов с плавающим купоном, приведем некоторые теоретические рассуждения о ценообразовании на подобные ценные бумаги на эффективном рынке капитала без трения.

⁴⁰ Это наиболее крупные и устойчивые эмитенты с высоким кредитным рейтингом.

⁴¹ В дальнейшем мы будем использовать термин *плавающий купон* только для описанных выше ситуаций, когда купон определяется в зависимости от колебаний заданного макроэкономического индикатора; для всех прочих, имеющих непостоянную купонную ставку, будем использовать термин *переменный купон*.

Кокс, Ингерсолл и Росс [Cox, Ingersoll, Ross, 1980] с помощью несложного логического рассуждения относительно стратегии поведения инвесторов доказали следующую лемму.

Лемма 6.1. *Пусть рассматривается ценная бумага с плавающим годовым (для определенности) купоном. Предположим, что величина очередного купона устанавливается, исходя из аукционной ставки доходности к погашению годовой бескупонной облигации, выпущенной по номиналу в первый день соответствующего купонного периода и выплачивающей доход при погашении. Номинальные стоимости обеих облигаций равны, причем эмитент продолжает выпускать новые бескупонные облигации с тем же номиналом в начале каждого купонного периода рассматриваемой облигации. Все облигации предполагаются безрисковыми. Надбавка к доходности облигации с плавающим купоном не предполагается.*

Тогда в условиях совершенного рынка без трения в любой момент каждого годового купонного периода цены облигации с плавающим купоном и соответствующей бескупонной облигации будут совпадать.

Исходное доказательство леммы, построенное Коксом, Ингерсоллом и Россом, основывается на тождественности в конце каждого купонного периода денежных потоков, получаемых (и реинвестируемых) участником рынка в облигацию с плавающим купоном и в последовательную серию бескупонных облигаций. Мы это доказательство опускаем, рекомендуя читателю воспроизвести его в качестве полезного упражнения.

6.3. Сравнение доходностей плавающих облигаций и госбумаг: модель ценообразования на облигации с плавающим купоном

Как уже было отмечено, Рамасвами и Сандаресан [Ramaswamy, Sundaresan, 1986] провели исследование довольно большого количества американских корпоративных облигаций с плавающим купоном и лежащих в их основе государственных долговых инструментов и пришли к выводу о *статистически значимой недооценке* корпоративных облигаций по отношению к государственным на протяжении значительного периода жизни первых. Эту недооценку нельзя было объяснить разницей кредитного рейтинга инструментов.

Феномен требовал соответствующего теоретического обоснования, которое авторы упомянутой статьи попытались провести, используя модель

с непрерывным временем. В модели ставка доходности по государственным ценным бумагам являлась стохастическим процессом.

Однако, прежде чем переходить к выводу аналога формулы Рамасвами–Сандаресана, используемой в данной главе, обсудим его основные условия и теоретические предпосылки.

(A1) Как уже сказано выше, предполагается развитие процесса в *непрерывном времени*. Также предполагается отсутствие транзакционных издержек на рынке и налогов на доходы держателей облигаций. Последнее предположение обычно ограничительным не является. В самом деле, в основе подавляющего количества корпоративных облигаций с плавающим купоном (как в США, так и в других странах, включая Россию) лежат федеральные ценные бумаги, по которым доходы облагаются налогами *по той же предельной ставке*, что и по корпоративным. Потому при изучении *относительного спреда* (разницы) между их доходностями можно считать, что ни по тем ни по другим налоги не предусмотрены вовсе.

Условие отсутствия транзакционных издержек также не являлось ограничительным: их величины для корпоративных и государственных ценных бумаг отличаются очень незначительно. В данном контексте более важными представляются скорее такие факторы, как общие объемы рынка государственного и корпоративного долга, несопоставимость которых нередко порождает эффект сегментации инвестиционного сообщества, о чем будет сказано ниже.

(A2) Структура базовой спот-ставки государственных *бескупонных* ценных бумаг (лежащих в основе изучаемой облигации с плавающим купоном) определяется формулой, исследованной в [Cox, Ingersoll, Ross, 1980]:

$$dr = k(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz, \quad (6.1)$$

где r — ставка по государственным бескупонным облигациям, выпущенным в момент времени t , μ — долговременная «целевая» (ожидаемая)⁴² доходность гособлигаций (предполагается, что она задается экзогенно), z — стандартный винеровский процесс, а k и σ — коэффициенты адаптации текущей доходности по государственным бумагам.

По умолчанию μ , k и σ предполагаются положительными. В частности, поскольку k играет роль *средней скорости изменения* расхождения текущей доходности от величины μ , когда они отличаются на единицу,

⁴² При отсутствии случайных колебаний $dz \equiv 0$ ставка доходности постоянно равна μ при $r = \mu$, $dr = 0$. Более того, при $r < \mu$, $E(dr) > 0$, и наоборот.

условие $k > 0$ означает, что ставка доходности стремится к своему целевому значению.⁴³

Отметим, что использование именно формулы Кокса–Ингерсолла–Росса для возможности проведения дальнейшего анализа не критично, но технически удобно. Кроме того, проведенные статистические тесты не позволяют отвергнуть гипотезу о том, что фактическое поведение анализируемых ставок действительно отвечает этой формуле.

(A3) Предполагается, что номинал облигации с плавающим купоном равен 1, а купонный доход $x(t)$ по ней выплачивается непрерывно.

Величина текущего купона равна доходности государственных бескупонных ценных бумаг, *выпущенных в начале соответствующего квартала*:

$$x(t) = r \left(\left[\frac{t}{T} \right] \times T \right), \quad (6.2)$$

где T — число календарных дней в квартале.

(A4) Наконец, считается выполненной *слабая* форма эффективности рынка: *ожидаемая величина межвременной арбитражной прибыли* в любой момент времени равна нулю. С модельной точки зрения данное утверждение означает, что участник рынка, инвестируя в произвольный момент времени в облигацию с плавающим купоном сумму, равную текущей стоимости облигации, *ожидает* прибыль за малый промежуток времени, *равную* прибыли от вложения тех же средств в государственные бескупонные ценные бумаги (*Local Expectations Hypothesis, LEH*⁴⁴).

Пусть $F = F(r, x, \tau) = F(r, \tau)$ — цена облигации с плавающим купоном в произвольный момент времени $t = T - \tau$ купонного периода $[0, T]$ (предполагается, что до погашения купона осталось время τ). Здесь величины

⁴³ Отметим, что данный процесс несколько отличается от более популярного среди исследователей срединно-возвратного процесса Орнштейна–Уленбека, для которого локальная вариация неслучайна, но это отличие оправдывается экономической сущностью модели (см. далее).

Отметим также то обстоятельство, что для исследуемого процесса (в отличие от процесса Орнштейна–Уленбека) в любой момент времени вариация доходности по государственным ценным бумагам пропорциональна самому уровню доходности. Принято считать, что это свойство выполняется на практике — в силу того, что доходность r государственных бумаг является величиной, в какой-то мере зависящей от уровня инфляции, которая, как давно отмечалось, в свою очередь, стимулирует неопределенность на финансовых рынках.

⁴⁴ Эта гипотеза уже использовалась в главах 1 и 5, в частности, при нахождении справедливых уровней цен других инструментов (акций). Вообще, *LEH* может применяться в любой ситуации анализа рыночных активов, торгуемых *в непрерывном времени*, и таких, что их параметры отвечают уравнению некоторого *диффузионного процесса*.

$r = r(t)$ и $x = x(t) = r\left(\left[\frac{t}{T}\right] \times T\right)$ означают текущую доходность государственных бескупонных ценных бумаг и текущий купон по купонной облигации. В этих обозначениях утверждение гипотезы *LEH* выражается формулой

$$\mathbf{E}_t(dF) + xdt = Frdt, \quad (6.3)$$

где левая часть равенства означает ожидаемую за малый промежуток времени прибыль по корпоративной облигации, а правая часть — от вложения суммы, равной ее цене, в государственные ценные бумаги; $\mathbf{E}_t$ означает ожидание случайной величины в момент времени t .

Теорема 6.1. *При выполнении условий (A1)—(A4) функция $F = \mathbf{E}(F(r, \tau))$, означающая математическое ожидание цены облигации с плавающим купоном в соответствующий момент времени, должна удовлетворять уравнению⁴⁵*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r F_{rr} + k(\mu - r)F_r + r - rF = F_\tau \quad (6.4)$$

с граничными условиями

$$F(r, 0) = 1, \quad \forall \tau \in [0, T], \quad \forall r_0 = r(0). \quad (6.5)$$

Доказательство. Здесь мы вновь воспользуемся *формулой Ито* [Duffie, 1996, р. 91], позволяющей определить приращение ожидаемой стоимости облигации с плавающим купоном за малый промежуток времени как функцию текущей доходности бескупонных облигаций и момента времени:

$$\mathbf{E}_t(dF) = F_\tau \frac{d\tau}{dt} dt + F_r \mathbf{E}_t(dr) + \frac{1}{2} F_{rr} \mathbf{E}_t(dr)^2, \quad (6.6)$$

где через F_τ , F_r , F_{rr} обозначены первые и вторые производные по соответствующим переменным.

Поскольку $\frac{d\tau}{dt} = -1$, $x = r$ (последнее — в силу того, что r играет роль базовой ставки для определения купона x), то

$$\mathbf{E}_t(dr) = k(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}\mathbf{E}_t(dz) = k(\mu - r)dt,$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(dr)^2 &= k^2(\mu - r)^2(dt)^2 + 2\sigma\sqrt{r}k(\mu - r)dt \mathbf{E}_t(dz) + \\ &+ \sigma^2 r \mathbf{E}_t(dz)^2 = \sigma^2 r dt + o(dt). \end{aligned}$$

⁴⁵ Уравнение носит имя Колмогорова—Планка.

После подстановки (6.6) в (6.3) получаем

$$-F_\tau dt + F_r k(\mu - r)dt + \frac{1}{2}F_{rr}(\sigma^2 r dt + o(dt)) + r dt = F r dt. \quad (6.7)$$

Символ $o(dt)$ использован для обозначения величины старшего по отношению к dt порядка малости при $dt \rightarrow 0$. Отбрасывая в (6.7) такие члены, получаем уравнение (6.4).

Чтобы вывести первое равенство (6.5), отметим лишь, что это граничное условие означает, что в момент погашения цена облигации равна ее номиналу (хотя в этот момент инвестор и получает, кроме номинала, еще купонный доход *по ставке* $x = r$, но *за малый промежуток времени* до погашения *сумма* дохода пренебрежимо мала).

Отметим также, что вложение средств в облигацию с плавающим купоном (с постоянным реинвестированием купонных доходов) равносильно покупке в тот же момент бескупонной облигации с малым сроком до погашения с последующим реинвестированием полученных средств в такие же облигации в течение неограниченного промежутка времени. Второе равенство (6.5) означает, что приведенная стоимость будущих активов инвестора в случае постоянства базовой ставки равна инвестируемой сумме.⁴⁶ Теорема, таким образом, доказана полностью.

Большое значение для исследования соотношения между ценой облигации с плавающим купоном и лежащей в ее основе ценной бумаги играет учет специфических вариантов условий обращения облигации (см. выше).

Например, в случае облигации с фиксированной нижней границей купонной доходности на уровне x_d рассматривается дополнительное граничное условие

$$F(r, x, \tau) = F(r, x_d, \tau), \quad x < x_d, \quad (6.8)$$

а в случае облигации с фиксированной верхней границей доходности x_u — условие

$$F(r, x, \tau) = F(r, x_u, \tau), \quad x > x_u. \quad (6.9)$$

⁴⁶ Это же равенство можно доказать и более формально. В самом деле, в любой момент T в будущем инвестор, который *приобрел в начальный момент* на *единичную сумму* облигацию с плавающим купоном и *постоянно реинвестировал* полученные купонные платежи в такие же облигации, имеет капитал, равный $K = \exp(\int_0^T x dt)$, ибо за любой промежуток времени dt его капитал увеличивался согласно дифференциальному уравнению $dK = K x dt$, $K(0) = 1$, причем $x(t) = r(t) \equiv r_0$. Учитывая, что в произвольный момент времени T коэффициент дисконтирования к начальному моменту времени равен $\exp(-r_0 T)$, заключаем, что приведенная стоимость активов инвестора равна единице.

В случае же облигации с «номинальным якорем» для купонной доходности $\underline{x}_d$ имеет место условие

$$F(r, x, \tau) = F(r, \underline{x}_d, \tau_0), \quad \tau < \tau_0, \quad x(\tau_0) = \underline{x}_d. \quad (6.10)$$

Рамасвами и Сандаресан (Ramaswamy, Sundaresan, 1986) исследовали именно решения уравнения (6.4) с различными вариантами условий обращения американских плавающих корпоративных облигаций, вычисляя их с помощью сеточного метода. И, хотя вычисленные теоретические величины дисконта плавающих облигаций по сравнению с государственными бескупонными получались существенными, они не давали объяснения истинной величины фактического дисконта.

Причиной этого являлось игнорирование требуемой надбавки за риск корпоративной облигации по сравнению с безрисковой доходностью, а также отчасти компенсирующей ее величины *markup* (см. формулу (6.3)). Отсутствие такой надбавки означало бы, что фактически рассматривались облигации одного класса риска, а именно: *безрисковые*, причем доходность одной из них определялась как некое выражение от случайно колеблющейся, но безрисковой в любой момент времени доходности другой, т. е. определенная в *момент выпуска облигации* величина *markup* компенсировала бы требуемую надбавку за риск в любой момент жизни облигации.

Понятно, что подобное предположение теряет смысл в случае, когда имеют место существенные изменения макроэкономической ситуации, приводящие к заметным колебаниям базовой ставки. На данное логическое противоречие модели (A1)—(A4), примененной к корпоративным облигациям, обращали внимание еще сами ее авторы. Впрочем, в случае государственных плавающих облигаций данное противоречие не возникает, что несколько облегчает использование модели Рамасвами–Сандаресана для исследования, например, ОГСЗ (см. далее).

6.4. Оценка риска облигаций с плавающим купоном

Не теряя общности, будем в дальнейшем считать, что облигации с постоянным купоном и произвольные облигации с переменным купоном (независимо от схемы определения купонной ставки) одного эмитента с одинаковыми сроками погашения различаются только величиной процентного риска. Известно, что мерой процентного риска облигации являются коэффициент модифицированной дюрации (*duration*) и коэффи-

циент выпуклости (*convexity*). В данном анализе мы ограничимся только рассмотрением модифицированной дюрации D_M , которая показывает, насколько изменится цена облигации при небольших изменениях процентных ставок. Математически это записывается следующим образом:

$$D_M = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (6.11)$$

где $\frac{\partial P}{\partial r}$ — частная производная от цены облигации по процентной ставке.

Отметим, что спустя время t ($0 < t < 1$, где 1 — момент окончания купонного периода облигации с плавающим купоном) после размещения теоретическая «грязная» цена облигации с плавающим купоном будет определяться следующим соотношением:

$$P_t = \frac{P_0 + C_1}{(1 + r_{t,1})^{1-t}}, \quad (6.12)$$

где $r_{t,1}$ — процентная ставка, сложившаяся в момент времени t по дисконтным облигациям с погашением в момент $t = 1$.

Продифференцировав (6.12) по r и вычислив D_M , из уравнения (6.11) окончательно получим

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{1-t}{(1+r_{t,1})^{-1}} \Delta R.$$

Таким образом, процентный риск облигации с плавающим купоном максимален сразу после размещения ($t \rightarrow 0$) и практически сводится к нулю к концу первого купонного периода ($t \rightarrow 1$). Из последнего соотношения видно, что теоретически процентный риск этой облигации эквивалентен рискованности обычной дисконтной облигации с погашением в момент выплаты первого купона. Это и понятно, так как теоретически в момент определения величины второго купона ожидаемая цена облигации должна стать равной номиналу. Если сравнивать величины модифицированной дюрации для облигации с плавающим купоном и для обычной купонной облигации с тем же сроком погашения и фиксированной купонной доходностью, можно заметить, что уровень риска последней в несколько раз больше и разница между ними тем больше, чем меньше купон и больше срок погашения. Это рассуждение еще раз показывает, что теоретическая цена облигации с плавающим купоном должна быть близка к номиналу в начале любого купонного периода. В промежутке между купонными выплатами теоретически «грязная» цена облигации должна

колебаться синхронно с изменением цены дисконтной облигации с погашением в ближайшую дату купонной выплаты.

Такой инструмент должен быть особенно интересен инвесторам с неопределенным горизонтом инвестирования, которые жестко контролируют свои риски. Действительно, альтернативой вложения в эти облигации является периодическое реинвестирование в короткие дисконтные бумаги, имеющие наименьшие риски, но издержки реинвестирования способны заметно снизить доходность инвестиций.

6.5. Облигации Государственного сберегательного займа — первый опыт российских долговых производных бумаг

6.5.1. Условия обращения

Облигации ГСЗ (ОГСЗ) появились в бумажной форме согласно Постановлению Правительства РФ от 10.08.95 № 812 «О Генеральных условиях выпуска и обращения ОГСЗ Российской Федерации».

Облигации имели следующие основные параметры:

- срок обращения 1 год, эмиссия осуществлялась от имени Минфина РФ;
- являлись документарными ценными бумагами на предъявителя; их владельцами могли быть как юридические, так и физические лица (как резиденты, так и нерезиденты РФ);
- номинальная стоимость облигаций составляла 100 тыс. руб.⁴⁷ и 500 тыс. руб.; облигации имели 4 квартальных купона (более поздние выпуски — только 500 тыс. руб. и 2 полугодовых купона);
- первоначально эмиссия производилась Минфином в пользу Сберегательного банка и других уполномоченных банков и финансовых учреждений. Компании, участвовавшие в первоначальном размещении облигаций, были обязаны в течение 60 дней с момента начала выпуска продать по рыночным ценам не менее 90% купленных ими у эмитента облигаций;
- процентный доход определялся эмитентом (МФ России) на каждый купонный период и равнялся последней официально объявленной купонной ставке по облигациям федеральных займов (ОФЗ) с переменным купоном. Процентный доход публично объявлялся за неделю до начала купонного периода по облигации Сберзайма.

⁴⁷ Речь идет о неденоминированных рублях.

6.6. Статистика ценообразования на ОГСЗ

Как уже было сказано выше, модель Рамасвами и Сандаресана будет применена для изучения одного из наиболее распространенных видов российских облигаций с плавающим купоном — облигаций ОГСЗ. Исследование основано на ценах сделок Московской Межбанковской валютной биржи на ОГСЗ с учетом доходностей к погашению сделок по ОФЗ на той же бирже за период с 8 августа по 30 октября 1997 г. И те и другие облигации обладали сравнительно высокой ликвидностью и, кроме того, не имели специфического риска, поскольку эмитентом обоих типов облигаций являлось Министерство финансов РФ.

Изучались ОГСЗ с X по XV серию: серия X была выпущена номиналом в 100 тыс. руб. и 500 тыс. руб. и имела квартальные купоны, остальные имели номинал 500 тыс. руб. и полугодовые купоны. Доходности всех облигаций к погашению вычислялись по средневзвешенным ценам сделок на ММВБ за день.

При этом сперва оценивались параметры модели (6.1) Кокса–Ингерсолла–Росса в отношении базовых ставок ОФЗ, а затем численно решалось уравнение Колмогорова–Планка (6.4) (для решения уравнения может быть использован пакет *Matlab* версии 7.0 и выше). Наконец, полученные решения («теоретические» цены ОГСЗ) подвергались сравнению с фактическими котировками облигаций на бирже с целью получения наглядных выводов о наличии их недооценки.

Доходности к погашению сделок по ОФЗ взвешивались за каждый рабочий день биржи с учетом объемов сделок по различным их выпускам. Цель произведенных вычислений — определение параметров k , μ и σ в дискретном уравнении Ингерсолла–Росса (аналоге (6.1)):

$$\Delta r_t = k(\mu - r_{t-1}) + \sigma\sqrt{r_{t-1}}\varepsilon_t, \quad (6.13)$$

где $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$, а ε_t — гауссовский стандартный белый шум; время измеряется в днях.

Заметим, что из уравнения (6.13) следует, что величины

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r_t - k(\mu - r_{t-1})}{\sqrt{r_{t-1}}}$$

образуют белый шум с дисперсией σ^2 (которая сама также подлежит оценке). Таким образом, минимизация средней дисперсии величины ε_t как функции параметров k и μ может быть положена в основу нахождения

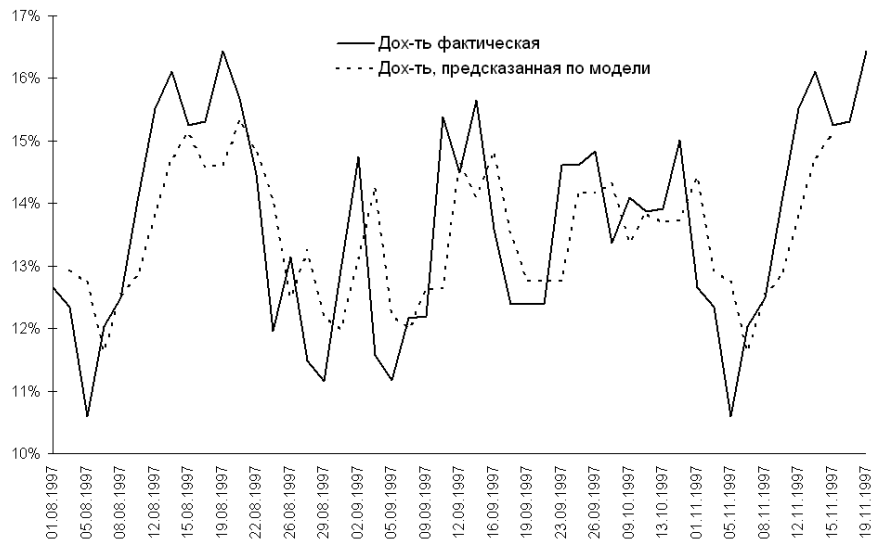


Рис. 6.1. Фактическая доходность ОФЗ и доходность, предсказанная по модели $r(t) = r(t-1) + k(\mu - r(t-1))$, $k = 0.3678$, $\mu = 0.1341$

оценок k и μ этих параметров, а также параметра $\hat{\sigma}^2$ как *наименьшего значения* этой дисперсии. При этом данный подход может быть признан осмысленным только в случае, если с достаточной степенью значимости для величин ε_t , рассчитанных при найденных значениях параметров как неслучайных константах, нельзя будет отвергнуть гипотезу белого шума.

С 5%-м уровнем значимости эти параметры оказались равными

$$\hat{k} = 0.3678, \quad \hat{\mu} = 0.1341, \quad \hat{\sigma}^2 = 0.0011, \quad (6.14)$$

причем уравнение в целом оказалось значимым на уровне 1% ($F = 92.323$; уровень определенности $R^2 = 0.8183$), а гипотеза белого шума была подтверждена с помощью тестов Дурбина–Уотсона и χ^2 . Доверительные интервалы для параметров k и μ составили 7% и 4%, что считается вполне удовлетворительным. Вычисления проводились с помощью пакетов MS EXCEL и STATISTICA 6.0.

Приведенные вычисления показывают, что найденные оценки параметров k и μ , а также параметра $\hat{\sigma}^2$ могут использоваться при дальнейших вычислениях (рис. 6.1).

Мы, как и раньше, считали выполненной гипотезу локального арбитража

$$\mathbf{E}_t(dF) + x(t)dt = Fr(t)dt,$$

а также формулу, определяющую купонную доходность на протяжении квартального купонного периода ($T = 91$):

$$x(t) = r \left(\left[\frac{t}{91} \right] \times 91 \right).$$

Таким образом, функция $F = \mathbf{E}(F(r, x, \tau)) = \mathbf{E}(F(r, \tau))$ математического ожидания цены облигации Государственного сберегательного займа должна удовлетворять уравнению Колмогорова–Планка

$$\frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 r F_{rr} + \hat{k}(\hat{\mu} - r) F_r + r - rF = F_\tau \quad (6.15)$$

с граничными условиями

$$F(r_0, \tau) = 1, \quad \forall \tau \in [0, 91], \quad r_0 = r(0), \quad (6.16)$$

причем численное решение этого уравнения возможно получить с помощью различных программных средств вычислительной математики, реализующих сеточный метод. Наиболее удобны, как представляется, современные версии пакета **Matlab** (версии 7.0 и выше). Краткое описание решения см. в Приложении 6.1. Там же на рис. 6.2–6.5 приведены результаты вычислений, где отражены цены облигаций ОГСЗ соответствующих серий в процентах от номинала. Теоретическая цена определялась из решения уравнения (6.15) с учетом фактического периода, оставшегося до погашения облигации и средневзвешенной доходности ОФЗ, рассматриваемой как рыночная.

В результате анализа было показано, что на российском рынке *теоретические* цены облигаций Государственного сберегательного займа в большинстве случаев значимо (в среднем на 7–9%) превосходили фактические (рис. 6.2–6.3). Имелись и *исключения*: так, фактические котировки ОГ СЗ XII и XIII серий на протяжении длительного периода оставались на одном уровне, даже слегка опережая теоретические цены, и лишь после наступления во второй половине октября 1997 г. даты выплаты очередного купона резко отстали от них (рис. 6.4–6.5).

Такое отличие в ценах не могло быть объяснено *погрешностью* допущения (6.2) о равенстве купона и фактической доходности ОФЗ к погашению, сделанного при вычислении теоретической цены.

Вероятное объяснение обнаруженного отличия фактических цен облигаций, например серии X, от теоретических заключалось в том, что в [Дорофеев, 2000] сравнивались биржевые цены облигаций, существовавших в *бездокументарной* (ОФЗ) и *документарной* (ОГСЗ) форме, что, очевидно, отражалось на разнице трансакционных издержек при операциях с теми или иными облигациями. Кроме того, облигации Федерального займа были предназначены прежде всего для размещения среди *юридических лиц* — агентов биржевого рынка (в том числе опосредованно — среди нерезидентов), в то время как ОГСЗ — преимущественно среди *физических лиц* и лишь тех институциональных инвесторов, кто работал с *розничными* финансовыми инструментами. Таким образом, операторами ОФЗ являлись в основном агенты, обладавшие большим количеством альтернативных возможностей инвестирования.

Следовательно, обращение ОГСЗ предполагало большие трансакционные издержки, и, кроме того, к инвестициям в эти облигации было допущено большее количество мелких инвесторов и инвесторов-нерезидентов, в том числе с относительно низкими требованиями к доходности безрисковых облигаций. Отметим, что подобный дисконт при наличии значительной доли мелких инвесторов в определенный вид ценных бумаг отмечался и в работах иностранных исследователей. Так, например, в [Chan, Lakonishok, 1997] отмечено, что на NYSE, где присутствует большая доля мелких инвесторов, наблюдается недооценка акций крупнейших компаний (т.е. тех, чьи акции они и предпочитают, — в силу большей освещенности финансового состояния крупных корпораций в СМИ) по сравнению с теми же акциями в сети NASDAQ, где в основном оперируют крупные инвестиционные институты.

6.7. Корпоративные облигации с плавающим купоном

В заключение отметим, что, как мы уже говорили в начале главы, в настоящее время на российском фондовом рынке появились и корпоративные облигации с плавающим купоном, хотя такие примеры пока можно считать скорее исключением, нежели правилом.

«Пионерами» в этом вопросе выступили ОАО Вимм-Билль-Данн Продукты Питания и ИК Тройка-Диалог, осуществившие в апреле 2003 г. погашенный в 2006 г. выпуск Вимм-Билль-Данн ПП-01. Доходность купонов по этому выпуску определялась на основании индекса потребительских

цен (ИПЦ) ГКС России. Впрочем, этот выпуск не привлек к себе большого внимания инвестиционного сообщества из-за его низкой ликвидности. Более активно обращаются в настоящее время пятилетние рублевые облигации ЕБРР 1-го и 2-го выпусков, использующие в качестве базовой 3-месячную ставку MosPrime на конец предыдущего квартала.

Здесь параметры дискретного уравнения Ингерсолла–Росса для базовой ставки MosPrime с 5%-м уровнем значимости оказались равными $\hat{k} = 0.1126$, $\hat{\mu} = 0.0493$, $\hat{\sigma}^2 = 0.0047$, уравнение было значимым на уровне 5% ($F = 1.2371$; уровень определенности $R^2 = 0.6824$), гипотеза белого шума вновь была подтверждена с помощью тестов Дурбина–Уотсона и χ^2 . Доверительные интервалы для параметров k и μ составили 9% и 8%.

При этом оказалось, что облигации Европейского Банка Реконструкции и Развития двух выпусков с купоном, зависящим от ставки MosPrime, демонстрируют менее предсказуемую динамику. Так, облигации 1-го выпуска, присутствующие на рынке с августа 2005 г., сперва были значимо переоценены рынком (рис. 6.6) и лишь с апреля 2006 г. начали торговаться примерно на теоретически обоснованном уровне, да и то лишь в результате стабилизации базовой ставки MosPrime вблизи среднесрочного среднего значения около 5%.

Облигации же 2-го выпуска, появившиеся на рынке летом 2005 г., оставались устойчиво недооцененными (рис. 6.7) до конца 2006 г.

Причину столь противоречивого поведения облигаций банка еще предстоит проанализировать, хотя в обоих случаях бросается в глаза вялая динамика рыночных котировок облигаций Европейского банка, существенно уступающая динамике их теоретической цены. Возможно, в этом и кроется разгадка: с учетом того, что доходность к погашению обоих выпусков облигаций банка остается на уровне не выше 5–6% годовых, последние представляют интерес лишь для стратегических инвесторов, которые, в свою очередь, мало заботятся о реализации арбитражных возможностей, возникающих при неадекватной оценке облигаций рынком.

Кейс 6.1. Торговля облигациями ЕБРР (2005–2006 гг.)

Посмотрим, как дилер крупного банка мог использовать данное явление несовершенства рынка корпоративных долговых инструментов 2005–2006 гг. для извлечения прибыли. Отметим, что в этот период на рынке отсутствовали производные инструменты на ставку MosPrime, но этот факт на самом деле не мог повлиять на схему операций инвестора.

Ситуация рассматривается на примере входившего в первую «двадцатку» российских банков ОАО «Крупный Банк» (КБ), который был в состоянии привлекать средства с межбанковского рынка и кредитовать более мелкие банки практически по ставке MosPrime⁴⁸. Ежедневные объемы сделок КБ по межбанковскому кредитованию сроком на 1–3 месяца⁴⁹ колебались от 1 млрд до 7–8 млрд руб. и более, что позволяло рынку рассматривать ставки КБ как индикативные.

В то же время объемы дилерских операций КБ на рынке корпоративных облигаций были много меньше (не более 100–200 млн руб. в день без учета «стратегических» вложений в такие «голубые фишки», как облигации Газпрома, РАО ЕЭС и некоторых других эмитентов, в число которых ЕБРР не входил из-за относительно низкой ликвидности его бумаг).

Облигации выпуска ЕБРР-1 были выпущены в обращение в середине мая 2005 г., купонная ставка выпуска ЕБРР-1 определялась как ставка MosPrime на последний рабочий день предыдущего купонного периода. Дилер банка КБ не участвовал в первичном размещении облигаций ЕБРР-1 и на протяжении всего 2005 г. не покупал их в портфель банка, расценивая облигации, торговавшиеся вблизи номинала, как переоцененные: ставка MosPrime на протяжении этого периода была ниже доходности уже упомянутых «голубых фишек», бизнес-риск которых в тот период расценивался, как и риск ЕБРР, как пренебрежимо малый. Соответственно, дилер расценивал справедливую доходность по облигациям ЕБРР-1 выше купона по этому выпуску, а цену — ниже номинала. Это соответствовало теоретическому графику рис. 6.6.

⁴⁸ Ставка MosPrime рассчитывается путем усреднения обязательных котировок 3-месячных МБК 20 крупнейших банков. Обычно эти ставки мало отличаются для всех этих банков, и с небольшой долей условности можно считать, что КБ имел возможность привлекать кредиты МБК и кредитовать другие банки по этой ставке.

⁴⁹ Ставки МБК на сроки от 1 до 3 месяцев в период 2005–2006 гг. практически не отличались.

Ситуация изменилась в конце декабря 2005 г. — январе 2006 г., когда вследствие массированных интервенций Пенсионного фонда общий уровень ставок по облигациям наиболее устойчивых эмитентов с длинной дюрацией⁵⁰ снизился и установился даже ниже ставки краткосрочного межбанковского кредитования MosPrime. При этом рыночная цена этого выпуска, не отличавшегося большой ликвидностью, оставалась вблизи номинала.

Таким образом, дилер получал возможность, продав часть переоцененного портфеля, например облигаций Газпрома, приобрести облигации ЕБРР-1, которые практически на протяжении всего первого полугодия 2006 г. приносили большую доходность при сравнимом риске.

Облигации были проданы в середине августа 2006 г., когда их цена вновь вышла на справедливый уровень номинала.

Кейс 6.2. Плавающие облигации г. Санкт-Петербурга

Помимо ОГСЗ, в апреле 2001 г. на Санкт-Петербургской валютной бирже (СПВБ) появился еще один новый инструмент с плавающим купоном — выпущенные Комитетом финансов Администрации Санкт-Петербурга облигации выпуска RU24015GSP. Последующие купонные выплаты в момент размещения определены не были, инвесторам предлагалась только методика их расчета. Так, например, размер второго купона был известен лишь за неделю до окончания первого купонного периода, и его величина будет определяться сложившейся к тому времени рыночной доходностью дисконтных облигаций Санкт-Петербурга со сроками погашения, близкими к длительности предстоящего купонного периода. Более точно, по условиям выпуска купоны облигаций RU24015GSP определялись усредненной доходностью базовых выборок из городских облигаций серий XXI и XXV, имеющих близкие к рассматриваемому купону сроки погашения, и облигаций серии XXIV, имеющих близкие сроки погашения купонов. При определении очередного купона базовая выборка приводилась к гипотетической дисконтной облигации со сроком погашения, равным купонному периоду⁵¹.

⁵⁰ Выпуск ЕБРР-1 погашается в мае 2010 г.

⁵¹ Точная методика расчета доходности купона в данном случае выходит за рамки нашего изложения и, в принципе, несущественна для понимания материала главы. Мы

Первые же недели обращения этого инструмента показали (см.: [Окулов, 2001]), что инвесторы относились к нему с недоверием. Размещение облигаций RU24015GSP прошло по цене 92% от номинала при полугодовой купонной ставке в 17.9% годовых, что свидетельствовало о значительной премии (по доходности) инвесторам, рискнувшим приобрести эту бумагу. Объемы сделок были невелики, цена после первичного размещения заметно снизилась, хотя ситуация на рынке была благоприятной, и цены традиционных типов облигаций (с фиксированным купоном) показывали устойчивый рост.

Таким образом, и в данном случае можно было говорить о недооценке инструмента с плавающей доходностью. Складывалось такое впечатление, что инвесторы не понимали всех достоинств нового инструмента. Отметим, впрочем, что справочно в торговой системе СПВБ указывалась лишь доходность облигации к погашению очередного купона, — бессмысленная по существу цифра, которая не столько привлекала, сколько отпугивала инвесторов. По всей видимости, аналитики эмитента и биржи просто использовали аналогию с другими облигациями города серии XXIV, хотя новый инструмент принципиально от них отличался.

Задачи к главе 6

1. Проверьте утверждение леммы 6.1.

Указание. Убедитесь, что утверждение леммы в точности соответствует гипотезе чистых ожиданий *РЕН* (1.16).

2. Представьте себе, что имеются две облигации одного эмитента с переменным купоном. Одна из них — плавающая; квартальный купон по ней устанавливается, для определенности, на основе 3-месячной ставки T-bills за 10 дней до начала очередного купонного периода с надбавкой 300 б. п.⁵² По второй облигации в конце каждого купонного периода имеет место оферта инвестору на предъявление облигаций к выкупу эмитентом по номиналу. Купонная доходность по второй облигации на каждый следующий купонный период определяется также за 10 дней до окончания купонного периода; эмитент устанавливает ее также на уровне MosPrime+300 б. п. Цены какой облигации будут более точно следовать уравнению (6.3)? Почему?

Указание. Сопоставьте инвестиции в обе облигации с инвестициями в бес-

ее опускаем.

⁵² Каков в этом случае будет купон при ставке T-Bills, скажем, на уровне 9.18%?

купонные казначейские бумаги. Как следует учитывать тот факт, что по второй облигации предлагаются оферты?

3. Предположим, что эмитент плавающей облигации, «привязанной» к ставке межбанковского кредита, столкнулся со значительным ростом этой ставки (что на самом деле произошло в сентябре — октябре 2008 г.). Следует ли ему пытаться хеджировать рост своих процентных расходов по облигации, и если да, то какие инструменты он мог бы для этого применить?

Указание. На рынке присутствуют инструменты типа свопов плавающих долговых ставок против фиксированных. Однако воспользоваться ими в период нестабильности рынка обычно бывает затруднительно из-за сужения рынка таких инструментов. Почему это происходит?

4. Как изменится уравнение Колмогорова–Планка (6.4), если предположить, что вместо (6.1) базовая ставка будет удовлетворять, например, уравнению $dr = \mu dt + \sigma dz$? Как изменятся при этом граничные условия (6.5)?

Указание. Для вывода уравнения Колмогорова–Планка повторите выкладки (6.6)—(6.7). Граничные условия не изменятся. Попробуйте самостоятельно численно решить это уравнение, используя пакет Matlab.

Приложение к главе 6

П 6.1. Численное решение уравнений в пакете Matlab 7.0 и графики

Прежде всего отметим, что уравнение (6.15) имеет вид параболического уравнения второго порядка. Пакет **Matlab** (версии 7.0 и выше) имеет развитый и наглядный графический интерфейс **PDE Toolbox** для решения уравнений второго порядка (как параболических, так и эллиптических, и гиперболических). Данное приложение пакета вызывается командой **pdetool** в командном окне **Matlab**.

Интерфейс приложения **PDE Toolbox** содержит специальные примитивы для построения:

- (1) **область изменения аргументов** r и τ функции F — решения уравнения. Используется команда **Options ► Axes Limits (Настройка ► Пределы по осям) ► [0 83] по оси X** (в рассматриваемом интервале времени по облигации ОГСЗ серии X с 8 августа по 30 октября 1997 г. — 84 дня) и **[0 8] по оси Y** (за этот период ставка r не поднималась выше 7.5% год);
- (2) **рисование поля изменения аргументов** r и τ . Используется команда **Draw ► Rectangle ► Object Dialog (Рисование ► Режим рисования ► Вызов диалогового окна) ► [0 0 83 8]**;
- (3) **ввод типа уравнения и его коэффициентов**. Используется команда **PDE ► PDE Specification ► Parabolic ► Ввод параметров**:
 - $c = 0.0011/2 \times y$
(соответствует главному коэффициенту (6.15) при значении $\hat{\sigma}^2 = 0.0011$ (см. (6.14));
 - $d = 0.3678 \times (0.1341 - y)$
(соответствует коэффициенту (6.15) при F при значениях $\hat{k} = 0.3678$, $\hat{\mu} = 0.1341$ (см. (6.14));
 - $e = -1$
(соответствует коэффициенту (6.15) при F при переносе этого члена в левую часть уравнения);
 - $g = -y$
(соответствует коэффициенту (6.15) при F);
 - $f = -y$
(соответствует свободному члену (6.15) при переносе этого члена в правую часть уравнения);

- (4) *ввод граничных условий уравнения*. Используется команда *Boundary ► Boundary Mode* (Граничные условия ► Задание граничных условий) ► *Neumann ► Ввод параметров*:

- $r_0 = 0.0875$ (начальная ставка r_0)
- $q = 1$ (соответствует условию (6.16)).

Наконец, следует выбрать пункт меню *Solve* для получения графического вида решения. Имеется также функция *Plot* для построения графика решения как функции от одного из параметров при некоторых фиксированных переменных.

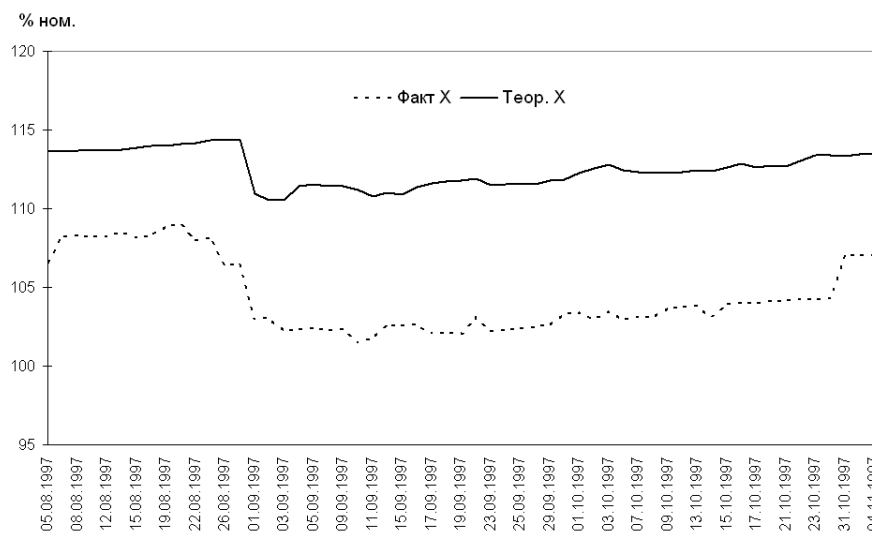


Рис. 6.2. Теоретические и фактические цены ОГСЗ серии X на ММВБ

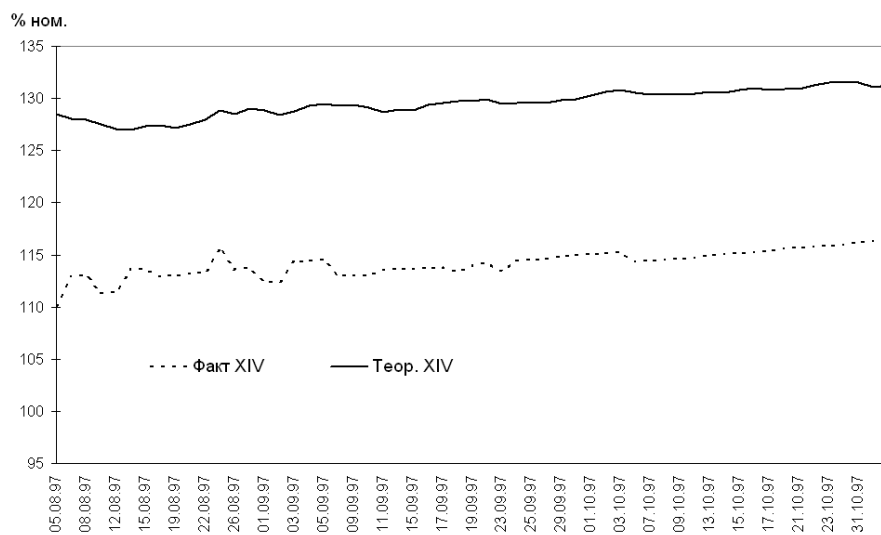


Рис. 6.3. Теоретические и фактические цены ОГСЗ серии XIV на ММВБ

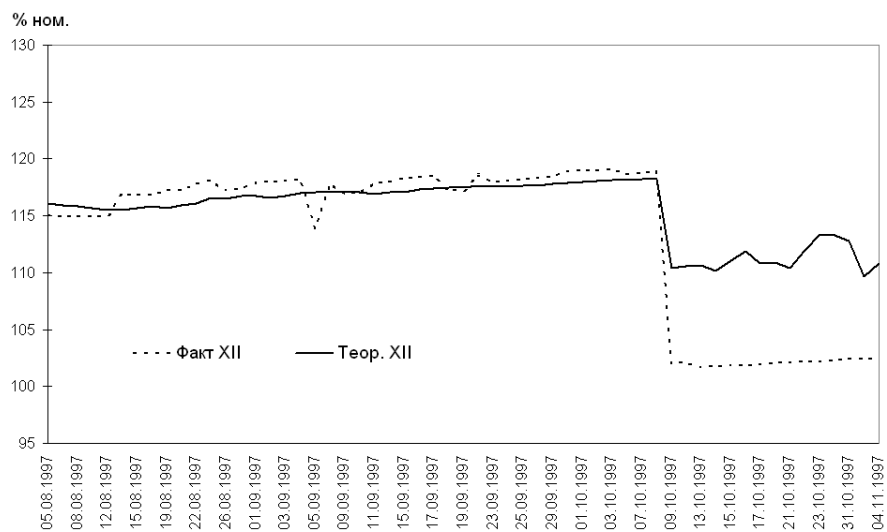


Рис. 6.4. Теоретические и фактические цены ОГСЗ серии XII на ММВБ

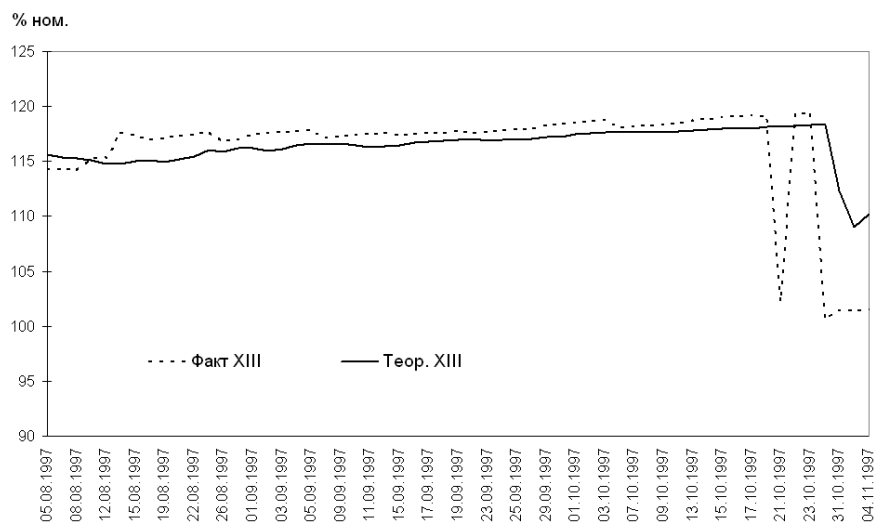


Рис. 6.5. Теоретические и фактические цены ОГСЗ серии XIII на ММВБ

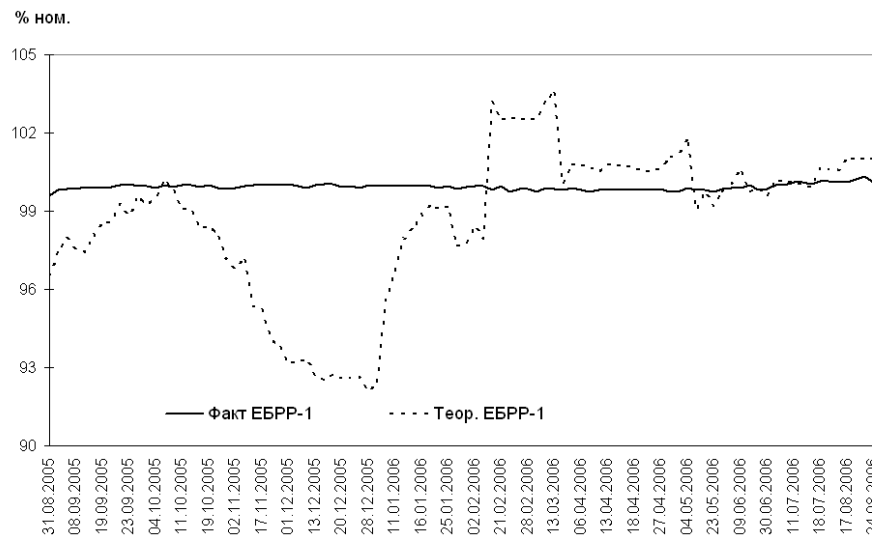


Рис. 6.6. Теоретические и фактические цены ММВБ на облигации ЕБРР-1

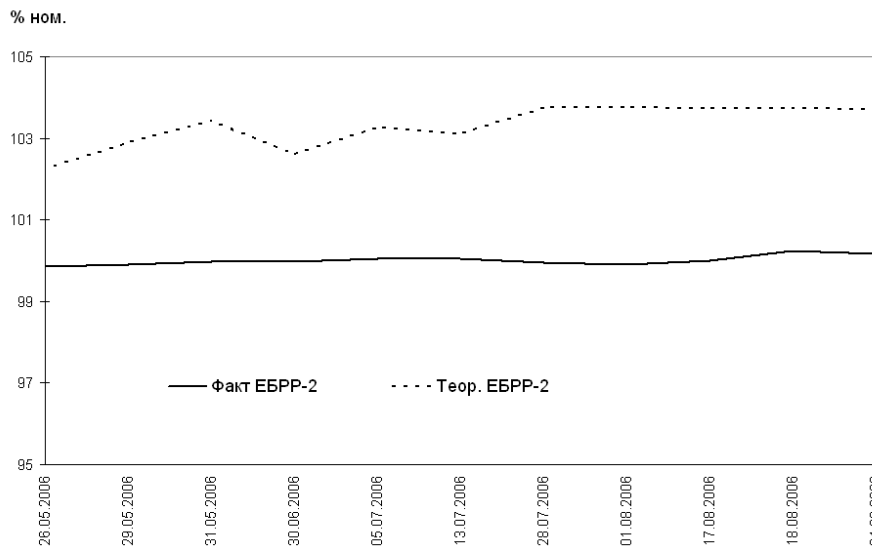


Рис. 6.7. Теоретические и фактические цены ММВБ на облигации ЕБРР-2

7. Влияние мониторинга инвестиций со стороны крупного собственника

Проблематика *корпоративного управления*, т.е. того, как устроена власть в компании, является одним из наиболее существенным фактором при ее оценивании. В данной главе мы рассмотрим частную ситуацию корпоративного управления, когда в компании имеется один (для определенности) относительно крупный собственник-аутсайдер, не аффилированный с менеджментом компании, но способный при определенных условиях осуществлять эффективный мониторинг действий последнего.

Как показывают многие эмпирические (см. [Shleifer, Vishny, 1986; Shleifer, Vishny, 1997, Maug, 1998]) и модельные исследования [DeMarzo, 1993; Myers, 2000; Bebchuk, Neeman, 2007], наличие такого собственника в давно существующей компании (проекте) является общественным благом для всех миноритариев компании, поскольку последний способен, действуя в собственных интересах, одновременно защищать права прочих мелких акционеров. Мы построим модель, описывающую эту ситуацию для вновь зарождающейся компании, — точнее, компании, выходящей на рынок через IPO. Есть основания полагать, что для анализа корпоративного управления в российских компаниях в последние годы наиболее важен именно этот случай.

7.1. Предпосылки модели

В период с 2003 г. по 2007 г. на быстрорастущем рынке более 25 российских компаний смогли скачкообразно нарастить свою капитализацию, осуществив *первичные размещения (Initial Public Offering, IPO) акций*. Эта процедура позволяет прежним собственникам компании привлечь в компанию значительные средства сторонних акционеров, что дает возможность рассчитывать на ускорение ее роста при одновременном снижении доли долга в пассивах. При этом они оставляют за собой выбор

доли акций компании, направляемых на публичное размещение (обычно технически проводится в форме аукциона), и контролируют — через андеррайтера — величину пакетов, распространяемых среди отдельных инвесторов. Компания также получает публичный статус (*publicly held*); в дальнейшем ее акции обращаются (имеют *free float*) на бирже среди неограниченного круга инвесторов.

Если быть точным, то под данным термином чаще понимается процедура первичного вывода на открытый рынок (обычно через биржу) акций вновь созданной открытой акционерной компании (не имевшей до этого статуса открытого акционерного общества) с продажей выпущенных акций неограниченному кругу инвесторов. В дальнейшем мы будем называть подобные первичные размещения IPO первого рода.

К IPO второго рода мы будем относить выход ранее открытого, но имевшего ограниченный круг собственников общества на публичный рынок. Именно IPO второго рода, как показала практика, получили преимущественное распространение в России, хотя к 2007 г. активность стали показывать и компании, осуществившие «классические» IPO первого рода. Так, если до конца 2006 г. к первому роду можно было отнести, пожалуй, только IPO «Роснефти» (да и то — лишь потому, что компания перед ним произвела переход на единую акцию со всеми своими дочерними структурами), то в 2007 г. таких компаний было уже несколько. Отметим достаточно крупные публичные размещения строительных компаний «Группа ЛСР» и «Группа ПИК», вывод на рынок акций мясоперерабатывающего холдинга «Черкизово» и некоторые другие.

При этом российские компании до настоящего времени предпочитают проводить свои IPO в виде *американских*, *ADR* или *глобальных депозитарных расписок*, *GDR* на зарубежных биржах (в основном в Нью-Йорке и особенно — в Лондоне), в то время как на российских биржах аукционы IPO (и первого, и второго рода) стали нормой лишь в 2006 г. — с принятием директивы ФСФР, запрещающей новые выпуски акций российских компаний на зарубежных биржах без одновременного их обращения в России. Впрочем, хотя в прошлом году все вновь выходящие со своими акциями на рынок компании выполняли это решение, «целевой аудиторией» IPO по-прежнему оставались внешние рынки, обладавшие много большим, нежели российский, инвестиционным потенциалом. На внутреннем же рынке абсолютное большинство IPO (за исключением, пожалуй, размещений акций государственных «Роснефти», «ВТБ» и в некоторой степени «Сбербанка») проходили среди ограниченного числа круп-

ных институциональных инвесторов (преимущественно паевых фондов), без участия «рядовых» частных инвесторов.

Очевидно, IPO проводятся практически всегда таким образом, чтобы прежние акционеры компании имели возможность сохранить крупные (обычно контрольные) пакеты акций. Таким образом, если условно отождествлять узкий круг собственников, контролировавших фирму до IPO (как первого, так и второго рода) с ее менеджментом, организующим непосредственно процедуру сделки, то без большой потери общности можно считать, что последний выбирает структуру миноритарной собственности, оптимальную с точки зрения его контроля над компанией уже после привлечения дополнительного финансирования.

Относительная же пассивность мелких российских инвесторов на большинстве внутренних IPO может, вероятно, объясняться тем, что они не заинтересованы инвестировать свои средства в акции вновь выходящих на рынок компаний до тех пор, пока не станет известно, что у них есть хотя бы несколько крупных стратегических акционеров, на поведение которых в дальнейшем можно будет ориентироваться, и пока не сформируется положительное общественное мнение о менеджменте этих компаний. Вопреки многим публикациям можно утверждать, что недостаток свободных денежных средств у большинства российских граждан лишь отчасти может являться причиной слабого спроса этой группы инвесторов на IPO: этот тезис подтверждается тем, что отдельные граждане активно инвестируют в банковские депозиты и недвижимость, а также в ликвидные акции на вторичном рынке, если те уже успели доказать свой потенциал к росту. Таким образом, слабый спрос можно истолковать только как проявление повышенной несклонности к риску инвестиций в активы вновь вышедших на рынок компаний до тех пор, пока не появятся достоверные данные об инвестиционной политике менеджмента и его отношении к миноритариям. При этом получение подобной информации (иначе как через прессу) для миноритариев невозможно в силу затратности организации эффективного регулярного внешнего мониторинга поведения менеджмента (аудиторские компании, очевидно, далеко не всегда способны обеспечить достаточную объективность и своевременность подобного контроля).

Однако, и это подтверждается большим количеством публикаций (см., напр.: [Shleifer, Vishny, 1986, 1997; Bebchuk, Neeman, 2007; Helland, Sykuta, 2005]), внешний контроль (мониторинг) может быть эффективно организован силами одного или нескольких относительно крупных акционеров, которые, с одной стороны, могут обладать достаточными ресурсами для

проведения действительно эффективного мониторинга, а с другой — по-нуждать менеджмент к исправлению ситуации в случае обнаружения его ошибок (сознательных или бессознательных).

Мы предполагаем, что действующими лицами, участвующими в решении агентской проблемы, являются контролирующий акционер, миноритарные акционеры и топ-менеджеры. Для определенности будем считать контролирующего акционера *единственным*, хотя случай наличия нескольких контролирующих акционеров не менее интересен. Тем не менее модель для случая нескольких акционеров выглядит более сложной, и мы оставляем ее за рамками данного издания. Также мы не будем рассматривать вариант *блефа* со стороны контролирующего инвестора, когда он требует от менеджера «отступных», будто бы нарушения со стороны последнего были выявлены, хотя на самом деле мониторинг вовсе не проводился.

Экономическая идея привлечения к мониторингу крупного участника IPO заключается в том, что крупный внешний собственник, ориентирующийся на максимизацию собственного капитала, а значит, готовый добиваться эффективности управления собственными средствами, инвестированными в компанию, автоматически становится также и гарантом эффективности управления средствами прочих миноритариев [Agrawal, Mandelker, 1990; Becht, 1999; Himmelberg et al., 2002; Hirshleifer, Thakor, 1998]. При этом эффективный мониторинг должен воспрепятствовать извлечению менеджментом частных выгод (*private benefits*) из управления денежными потоками компании. Если миноритарии посчитают, что этот факт снижает риск их инвестирования в компанию до приемлемых уровней, то оптимальным для них станет решение принять участие в IPO. При этом цена привлечения их средств через IPO может существенно снизиться, что сделает публичные эмиссии доступным средством привлечения финансирования.

Стоит особо отметить важность того, чтобы осуществляющий мониторинг акционер оказался достаточно крупным: иначе его влияния (*voting rights*) может оказаться недостаточно для внесудебного принуждения менеджмента (М) к возврату активов в фирму, если будет обнаружено неэффективное управление последними (в модели будет предполагаться, что менеджмент добивался частных выгод)⁵³. При этом под «возвратом» ак-

⁵³ Судебные издержки (в том числе альтернативные — из-за значительной потери времени для реализации проекта), как правило, считаются существенно большими для всех участников проекта, что приводит к невозможности удовлетворительного восста-

тивов будем понимать эффективную реализацию изначально запланированных инвестиций (ради которых и привлекались средства в ходе IPO), с дальнейшим пропорциональным распределением прибыли между собственниками. В частности, в данной главе будет изучен вопрос о минимальной доле собственности, которая должна принадлежать контролирующему акционеру, чтобы он мог эффективно выполнять свои функции.

В то же время мы, следуя [Bebchuk, 1999; Bebchuk, Neeman, 2007], будем считать, что контролирующий акционер — в дальнейшем мы будем обозначать его **C**, — как и большинство миноритариев, является портфельным инвестором и потому не заинтересован в получении особо значительной доли в капитале компании, поскольку это потребует масштабных инвестиций и приведет к снижению степени диверсификации портфеля его активов. Поэтому для компании, осуществляющей IPO и соглашающейся с необходимостью мониторинга, оказывается неоптимальным привлечение одного крупного собственника без «*миноритарного дополнения*» (**S**).

Однако **C**, если он получит в ходе своего мониторинга эксклюзивную информацию о том, что действия менеджмента на самом деле шли вразрез с интересами большинства собственников компании, может в ущерб иным акционерам вступить с последним в сговор (*collusion*), рассчитывая получить часть прибыли менеджмента. Потому миноритарии, параллельно с привлечением в ходе IPO контролирующего собственника, должны получить убедительные аргументы в пользу того, что рациональным поведением последнего будет добросовестное проведение мониторинга, — а не вступление в сговор с менеджментом.

Предлагаемая ниже модель лежит в русле работ [Becht, 1999; Bebchuk, 1999; Bebchuk, Neeman, 2007; Himmelberg et al., 2002]. Наиболее близкая к нашей модель была построена в [Stepanov, 2002], где, однако, не учитываются доли инвестиций различных участников IPO в проект. Представляется, что это привело к неправдоподобным результатам: в частности, утверждается, что при определенных условиях контролирующий собственник, выявив нарушения, отказывается от сговора с менеджментом и добивается возврата активов в фирму для их справедливого распределения. Легко понять, что такой исход хуже и для менеджера, и для этого акционера, нежели сговор, заканчивающийся получением менеджером малой, но положительной частной выгоды (*сверх его «законной» пропорциональной доли*) с передачей остатка акционеру.

новления активов акционеров путем предъявления к менеджменту судебных исков.

Ниже мы построим математическую модель, в результате решения которой будет показано, что при естественных предположениях возможны лишь два исхода возникающей экономической игры: либо крупный собственник вовсе отказывается от мониторинга, либо он, став контролирующим, идет (в случае выявления оппортунистического поведения менеджмента) на заключение сговора.

При этом вторая возможность, как это ни кажется парадоксальным, оставляет шансы на привлечение инвестиций через IPO. Если в терминах теории игр сговор контролирующего собственника с менеджментом является не чистой, а лишь смешанной стратегией⁵⁴, то миноритарии с положительной, хотя и меньшей единицы вероятностью получают защиту своих инвестиций. В этом случае — особенно при относительно малом объеме активов, которые менеджмент будет способен эффективно вывести из компании — привлечение инвестиций в проект будет вполне возможным. Тем не менее и при таких условиях сговор менеджмента и контролирующего собственника также полностью *не исключается*.

7.2. Описание модели

Теперь перейдем к более строгой формулировке гипотез и результатов анализа модели.

Период 0. Будем считать, что менеджер **М** объявляет, что компания планирует провести IPO с целью привлечения средств в объеме I для реализации инвестиций в некоторый проект. Предполагается, что в IPO примут участие (единственный) крупный инвестор **С** и множество идентичных «миноритариев» **S**.

Также объявляются доли собственности компании $\alpha_M, \alpha_C, \alpha_S, \alpha_M + \alpha_C + \alpha_S = 1$, которые получают в случае успеха IPO, соответственно, менеджер **М**, выделенный акционер **С** и миноритарии **S**.

При этом будем считать, что **С** и **S**, в отличие от **М**, избегают риск, а менеджер риск-нейтрален⁵⁵.

⁵⁴ Это означает, что в результате сговора ожидаемый выигрыш крупного собственника будет равен ожидаемому выигрышу при отказе от сговора.

⁵⁵ Функция полезности всех трех участников игры возрастает по величине полученной прибыли, — в том числе, возможно, и в результате присвоения части выведенных активов, — но для двух первых она убывает по вариации прибыли, а у последнего от вариации не зависит.

Более точно: будем считать, что если $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ и отдельный миноритарий s получают, соответственно, прибыль R_M , R_C , R_s , то их полезности будут следующими ($k > 0$):

$$U_M = \mathbf{E}(R_M), \quad U_C = \mathbf{E}(R_C) - k\mathbf{D}(R_C), \quad U_s = \mathbf{E}(R_s) - k\mathbf{D}(R_s).$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ обозначают математическое ожидание и дисперсию соответствующих случайных величин.

В частности, при справедливом — пропорциональном — распределении некоторой прибыли Π от проекта участники получают следующие полезности:

$$\begin{aligned} U_M &= \alpha_M \Pi, \\ U_C &= \alpha_C \Pi - k\alpha_C^2 \sigma^2, \\ U_s &= \alpha_s \Pi - k\alpha_s^2 \sigma^2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

При этом, поскольку для каждого миноритария выполнено неравенство $\alpha_s \ll \alpha_S$, мы без большой потери общности будем считать, что и каждый миноритарий, и вся группа $\mathbf{S}$ в целом риск-нейтральны:

$$\begin{aligned} U_s &= \alpha_s \Pi + o(\alpha_s), \\ U_S &= \sum_s U_s = \sum_s (\alpha_s \Pi + o(\alpha_s)) = \alpha_S \Pi + o(\alpha_S). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Помимо долей собственности, в начальный период также становится известно, что в случае осуществления проекта будет немедленно получена случайная прибыль P , удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{E}(P) = \Pi > I, \quad \mathbf{D}(P) = \sigma^2. \quad (7.3)$$

Наконец, с самого начала всем игрокам известна оценка c потенциальных затрат контролирующего инвестора на проведение мониторинга (в случае, если он примет такое решение), а также возможные чрезвычайные затраты фирмы m , связанные с принуждением менеджера к возврату активов в фирму, если он выведет активы, и это будет обнаружено и обнародовано контролирующим собственником. Обе величины являются фиксированными (неслучайными), но если затраты c в полной мере ложатся на контролирующего собственника, то m относятся на прибыль фирмы в целом и распределяются между акционерами пропорционально долям собственности.

Период 1. Крупный инвестор $\mathbf{C}$ и миноритарное дополнение $\mathbf{S}$ принимают свои решения о том, участвовать ли им в IPO. Они это делают независимо друг от друга, при этом, в силу предполагаемой идентичности

между собой всех миноритариев, последние принимают решение единодушно.

В случае одновременного положительного решения **C** и **S** происходит IPO. Менеджер **M** привлекает средства I , которые инвестируются участниками IPO пропорционально своим долям в проекте

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{\alpha_C}{\alpha_C + \alpha_S} I, \\ I_S &= \frac{\alpha_S}{\alpha_C + \alpha_S} I. \end{aligned} \quad (7.4)$$

В случае же отказа кого-либо из инвесторов от IPO инвестиции в проект становятся невозможны, и игра заканчивается.

Период 2 (*продолжение игры в случае осуществления IPO в первом периоде*). Менеджер **M**, получив средства на реализацию проекта, принимает решение о том, осуществлять ли его на самом деле или выводить (присваивать) полученные активы. Будем считать, не умаляя общности, что во втором случае выводятся все средства I , хотя из-за трансакционных издержек средства, которыми он реально будет располагать в своих интересах, окажутся меньше: $C < I$.

В дальнейшем мы будем также считать выполненным неравенство

$$C \geq \alpha_M \Pi,$$

означающее, что тривиальный вариант пропорционального распределения прибыли не является для менеджера оптимальным *a priori*.

Одновременно с тем, как менеджер в *периоде 2* принимает решение о выводе активов, крупный инвестор **C** независимо принимает собственное решение, запускать ли процедуру мониторинга его деятельности — с целью выявления этого факта.

В случае осуществления соответствующих затрат c (см. описание *периода 0*), **C** немедленно получает достоверную информацию либо о том, что проект фактически осуществлен, либо о том, что **M** пошел на присвоение средств⁵⁶.

Период 3. Если **C** принял решение проводить мониторинг, он, как отмечалось, получает достоверную информацию о положении в компании.

⁵⁶ В [Stepanov, 2002] предполагается, что с некоторой вероятностью контролирующий собственник получает ложные данные. Ослабление этого предположения на самом деле не влияет на результат анализа.

Если при этом **С** смог лишь выявить, что **М** осуществил проект, *период 3*, очевидно, оказывается заключительным. Выигрыши в данном случае соответствуют (7.1) с учетом затрат на мониторинг, и равны, соответственно:

$$\begin{aligned} U_M &= \alpha_M \Pi, \\ U_C &= \alpha_C \Pi - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c, \\ U_S &= \alpha_S \Pi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Если инвестор **С** отказался от мониторинга, то в этом периоде происходит непосредственное распределение выигрышей:

- 3.1. Если оказывается, что **М** вывел активы, то выигрыш получает только он:

$$U_M = C, \quad U_C = U_S = 0. \quad (7.6)$$

- 3.2. Если же выясняется, что проект на самом деле был осуществлен, все игроки получают пропорциональные доли прибыли. В этом случае выигрыши окажутся следующими:

$$\begin{aligned} U_M &= \alpha_M \Pi, \\ U_C &= \alpha_C \Pi - k\alpha_C^2 \sigma^2, \\ U_S &= \alpha_S \Pi. \end{aligned} \quad (7.7)$$

В этом случае, очевидно, игра также заканчивается.

Период 4 (*игра продолжается, только если С провел мониторинг и выявил вывод активов*). В случае выявления присвоения менеджером **М** активов **С** может принять одно из трех решений:

- 4.1. Обратиться к **М** с предложением о вступлении в стовор и о распределении общего выигрыша коалиции в сумме⁵⁷ $U_M + U_C = -c$.
 4.2. Публично осудить действия менеджера **М** и потребовать возместить выведенные активы I и реализовать проект. Принуждение сопряжено с осуществлением известных всем участникам затрат m , которые относятся на чрезвычайные расходы фирмы и снижают прибыль от проекта. В этом случае *период 4* становится последним периодом игры; выигрыши участников при этом таковы:

$$\begin{aligned} U_M &= C + \alpha_M(\Pi - m) - I, \\ U_C &= \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c, \\ U_S &= \alpha_S(\Pi - m). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Здесь мы учитывали, что $\mathbf{E}(P - m) = \Pi - m$, $\mathbf{D}(P - m) = \sigma^2$.

⁵⁷ Предполагается, что затраты на проведение мониторинга в данном случае будут возмещены **С** из суммарного выигрыша коалиции. Это допущение несущественно и может быть легко снято.

4.3. «Закрывать глаза» на обнаруженный факт вывода активов. В этом случае *период 4* также становится последним периодом игры, выигрыши при этом таковы:

$$U_M = C, U_C = -c, U_S = 0. \quad (7.9)$$

Отметим, что, согласно предложению 8.1, последний вариант поведения **С** на практике оказывается невозможным.

Период 5 (*наступает только при условии, что С предложил М вступление в сговор; период во всех случаях является последним*). Получив предложение вступить в сговор, **М** может принять одно из двух решений:

- 5.1. Принять условия **С** распределения выигрыша коалиции и вступить с ним в сговор.
- 5.2. Отказаться от вступления в сговор на условиях **С** и добровольно возместить выведенные средства. В последнем случае выигрыши игроков определяются формулами:

$$\begin{aligned} U_M &= C + \alpha_M \Pi - I, \\ U_C &= \alpha_C \Pi - k\alpha_B^2 \sigma^2 - c, \\ U_S &= \alpha_S \Pi. \end{aligned} \quad (7.10)$$

7.3. Анализ исходов игры

7.3.1. Дополнительные предположения и промежуточные результаты

Предложение 7.1. *Скрытие С в периоде 4 выявленных нарушений (вывода активов менеджером М) не является оптимальным без выдвижения предложения о вступлении в сговор.*

Доказательство предлагается читателям в качестве упражнения.

Предложение 7.2. *Заключение сговора в периоде 5 возможно тогда и только тогда, когда доля С при распределении коалиционного выигрыша удовлетворяет двойному неравенству*

$$\alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c \leq U_C \leq I - \alpha_M \Pi - c. \quad (7.11)$$

Доля М в этом случае лежит в интервале

$$C + \alpha_M \Pi - I \leq U_M \leq C - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2 \sigma^2. \quad (7.12)$$

Доказательство. В случае наступления *периода 5* (выявления факта вывода активов и получения предложения **C** о вступлении в сговор с целью сокрытия этого факта) **M** имеет выбор из двух вариантов: вступление в коалицию или добровольный возврат активов и пропорциональное распределение средств среди всех акционеров.

Во втором случае выигрыш **M**, согласно (7.10), будет равен $U_M = C + \alpha_M \Pi - I$. Соответственно, вступление в сговор может быть оптимальным для **M** тогда и только тогда, когда его доля выигрыша в случае распределения коалиционного дохода будет не менее этой величины. Это замечание и доказывает левую часть неравенства (7.12).

Однако в *периоде 5* **C** также имеет только два варианта выбора: вступление в сговор и принуждение **M** к возврату активов. Второй вариант (см. (7.8)) приносит **C** выигрыш, равный

$$U_C = \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2 - c.$$

Следовательно, **C** в *периоде 4* должен будет выдвинуть такие условия раздела коалиционного выигрыша $U_M + U_C = C - c$, которые обеспечивали бы ему получение доли, не меньшей представленной величины.

Соответственно, для **M** в этом случае получаем соотношение

$$U_M = (C - c) - U_C \leq (C - c) - (\alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2 - c),$$

что и доказывает правую часть (7.12).

Неравенства (7.11) являются прямыми следствиями (7.12) и равенства $U_M + U_C = C - c$, имеющего место в случае сговора.

В дальнейшем мы рассмотрим два следующих варианта возможного влияния на результат переговоров о коалиции⁵⁸:

- сначала предположим, что сильной позицией обладает **менеджер M**. В этом случае, согласно предложению 7.2, игроки получают выигрыши

$$\begin{aligned} U_M &= C - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2, \\ U_C &= \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2 - c, \\ U_S &= 0; \end{aligned} \tag{7.13}$$

⁵⁸ Наличие *сильной позиции (bargaining power)* на переговорах — способность благодаря внеэкономическим рычагам давления добиться для себя при распределении коалиционного выигрыша наилучшего индивидуального результата (наибольшей доли коалиционного выигрыша). При этом имеется в виду, что даже при наличии у игрока *bargaining power* его требование еще большей доли разрушит коалицию, так как вступление в нее перестанет быть оптимальным для его партнера по сговору.

- аналогично, если сильной переговорной позицией обладает *контролирующий собственник С*, то выигрыши игроков равны

$$\begin{aligned} U_M &= \alpha_M \Pi + C - I, \\ U_C &= I - c - \alpha_M \Pi, \\ U_S &= 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Окончательно, в табл. 7.1 сведены данные о выигрышах игроков **С** и **М** при различных вариантах выбора ими своих стратегий (для первого — осуществлять или не осуществлять мониторинг, для второго — выводить или не выводить активы).

7.3.2. Невозможность решения игры в чистых стратегиях

Теперь покажем, что хотя описанная матричная игра, в принципе, может иметь *решения в чистых стратегиях*⁵⁹, такие решения окажутся «тривиальными» в том смысле, что они будут соответствовать ситуации, когда либо контролирующий собственник **С**, либо миноритарии **С** (либо и те и другие) откажутся от участия в IPO, и, соответственно, проект не будет реализован.

Тем не менее окажется, что решения игры могут быть найдены в терминах *смешанных стратегий*.⁶⁰

В свою очередь, теоремы 7.1—7.3 говорят о невозможности «содержательных» решений игры в чистых стратегиях. Их доказательству мы предположим следующее простое утверждение, доказательство которого мы предложим читателям.

⁵⁹ Случай, когда для одного или нескольких игроков является оптимальным *выбор одной и только одной из доступных для них стратегий*: какие бы стратегии ни выбирали иные игроки, выигрыш игрока, выбравшего чистую стратегию, окажется не меньше его выигрыша при *выборе любой другой его стратегии, но при том же выборе стратегий других игроков*.

⁶⁰ Случай, когда для одного или нескольких игроков является оптимальным *выбор той или иной его стратегии с некоторой фиксированной вероятностью*: какие бы стратегии ни выбирали иные игроки, *ожидаемый* выигрыш игрока, выбравшего смешанную стратегию, окажется не меньше его выигрыша при *выборе им своих стратегий с любой другой фиксированной вероятностью, но при том же выборе стратегий других игроков*. Отметим, что чистая стратегия игрока может рассматриваться как частный случай смешанной при фиксации им вероятности выбора этой стратегии, равной 1, и при нулевой вероятности выбора прочих стратегий.

Таблица 7.1

Распределение выигрышей С и М

При наличии сильной переговорной позиции у С		
Стратегии С	Стратегии М	
	Не выводить активы, реализовывать проект (стратегия I)	Выводить активы (стратегия II)
Не осуществлять мониторинг (стратегия 1)	Выигрыш С: $U_C(1, I) = \alpha_C \Pi - k\alpha_C^2 \sigma^2$ Выигрыш М: $U_M(1, I) = \alpha_M \Pi$	Выигрыш С: $U_C(1, II) = 0$ Выигрыш М: $U_M(1, II) = C$
Осуществлять мониторинг (стратегия 2)	Выигрыш С: $U_C(2, I) = \alpha_C \Pi - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c$ Выигрыш М: $U_M(2, I) = \alpha_M \Pi$	Выигрыш С: $U_C(2, II) = I - \alpha_M \Pi - c$ Выигрыш М: $U_M(2, II) = C + \alpha_M \Pi - I$
При наличии сильной переговорной позиции у М		
Стратегии С	Стратегии М	
	Не выводить активы, реализовывать проект (стратегия I)	Выводить активы (стратегия II)
Не осуществлять мониторинг (стратегия 1)	Выигрыш С: $U_C(1, I) = \alpha_C \Pi - k\alpha_C^2 \sigma^2$ Выигрыш М: $U_M(1, I) = \alpha_M \Pi$	Выигрыш С: $U_C(1, II) = 0$ Выигрыш М: $U_M(1, II) = C$
Осуществлять мониторинг (стратегия 2)	Выигрыш С: $U_C(2, I) = \alpha_C \Pi - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c$ Выигрыш М: $U_M(2, I) = \alpha_M \Pi$	Выигрыш С: $U_C(2, II) = \alpha_C (\Pi - m) - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c$ Выигрыш М: $U_M(2, II) = C - \alpha_C (\Pi - m) + k\alpha_C^2 \sigma^2$

Предложение 7.3. В обозначениях табл. 7.1 имеем:

1. Выбор **С** чистой стратегии 1 (не проводить мониторинг) будет оптимальным тогда и только тогда, когда вероятности q выбора **М** стратегии I (не выводить активы, реализовывать проект) удовлетворяет неравенству:

$$q(U_C(1, I) - U_C(2, I)) + (1 - q)(U_C(1, II) - U_C(2, II)) \geq 0. \quad (7.15)$$

В свою очередь, чистая стратегия 2 (осуществлять мониторинг) будет оптимальной тогда и только тогда, когда выполнено неравенство, противоположное (7.15). В случае равенства оптимальной для **С** будет его произвольная смешанная стратегия.

2. Выбор **М** чистой стратегии I (не выводить активы, реализовывать проект) будет оптимальным тогда и только тогда, когда вероятность p выбора **С** стратегии I (не проводить мониторинг) удовлетворяет неравенству

$$p(U_M(1, I) - U_M(1, II)) + (1 - p)(U_M(2, I) - U_M(2, II)) \geq 0. \quad (7.16)$$

Чистая стратегия II (выводить активы) будет оптимальной тогда и только тогда, когда выполнено неравенство, противоположное (7.16). В случае равенства оптимальной для **М** будет его произвольная его смешанная стратегия.

Доказательство предоставляется читателям в качестве упражнения.

Теперь сформулируем и докажем ряд теорем, описывающих решение нашей модели.

Теорема 7.1. При наличии у **С** сильной переговорной позиции выбор чистой стратегии 2 (проводить мониторинг) для него невозможен (не оптимален).

Доказательство. Прежде всего заметим, что, согласно второй части предложения 7.3, условие выбора **М** чистой стратегии I (не выводить активы, реализовывать проект) при некоторой заданной вероятности p выбора **С** стратегии 1 (не осуществлять мониторинг) выражается неравенством

$$p(\alpha_M II - C) + (1 - p)(I - C) \geq 0. \quad (7.17)$$

Данное неравенство выполнено, в частности, при $p = 0$ (что равносильно выбору **С** чистой стратегии 2): в этом случае (7.17) обращается в верное неравенство $I - C > 0$.

Соответственно, если предположить, что при наличии у **С** сильной переговорной позиции он выбирает чистую стратегию 2, то **М** в этом случае выберет чистую стратегию I ($q = 1$).

Аналогично, используя первую часть предложения 7.3, обнаруживаем, что при наличии у **С** сильной переговорной позиции выбор им чистой стратегии 2 ($p = 0$) возможен тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$qc + (1 - q)(\alpha_M \Pi + c - I) \leq 0. \quad (7.18)$$

Окончательно, подставляя равенство $q = 1$, соответствующее выбору **М** чистой стратегии I (которое, как было показано, единственно возможно в предположении выбора **С** чистой стратегии 2 при наличии у него сильной позиции), в (7.18) и проводя преобразования, приходим к ложному неравенству $c \leq 0$.

Полученное противоречие и означает, что сделанное предположение о выборе **С** чистой стратегии 2 неверно.

Прежде чем переходить к формулировке теоремы 7.2, сформулируем и докажем еще два предложения.

Предложение 7.4. *При наличии у **М** сильной переговорной позиции выбор **С** чистой стратегии 2 (осуществлять мониторинг) возможен тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

$$U_M(2, II) = C - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2 \geq U_M(2, I) = \alpha_m \Pi, \quad (7.19)$$

$$U_C(2, II) = \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2 - c \geq U_C(1, II) = 0. \quad (7.20)$$

Доказательство. Согласно предложению 7.3, выбор **С** чистой стратегии 2 (вероятность $p = 0$) в условиях теоремы 7.2 возможен тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$qc + (1 - q)(c - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2) \leq 0. \quad (7.21)$$

Проанализировав условие выбора **М** чистой стратегии I (не выводимь активы), имеющее вид

$$p(\alpha_M \Pi - C) + (1 - p)(\alpha_M \Pi - C + \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2) \geq 0, \quad (7.22)$$

получаем, что при $p = 0$ оно обращается в неравенство

$$\alpha_M \Pi - C + \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2 \geq 0.$$

Заметим, что последнее неравенство не может быть выполнено. В самом деле, если оно выполнено, то при $p = 0$ неравенство (7.22) окажется верным, а это, согласно предложению 7.3, равносильно тому, что **М** выбирает чистую стратегию I ($q = 1$). Однако при $q = 1$ (7.21), в свою очередь, превращается в ложное неравенство $c \leq 0$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\alpha_M \Pi - C + \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2 \sigma^2 < 0,$$

таким образом, неравенство (7.19) доказано.

Наконец, мы видим, что в силу (7.19) при $p = 0$ неравенство (7.22) не выполнено, что, как уже отмечалось, равносильно тому, что **М** выбирает чистую стратегию Π (*выводит активы*), т. е. имеет место равенство $q = 0$. Доказательство предложения 7.4 завершает замечание, что при $q = 0$ неравенство (7.21) выполнено (а это, как отмечалось, есть необходимое и достаточное условие $p = 0$) тогда и только тогда, когда

$$\alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c \geq 0,$$

таким образом, при выполнении неравенства (7.20).

Предложение 7.5. *При наличии у **М** сильной позиции выбор **С** чистой стратегии 2 (проводить мониторинг) возможен тогда и только тогда, когда*

$$U_C(2, II) = \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2 \sigma^2 - c \geq I.$$

Доказательство. Заметим, что неравенство (7.19), которое согласно предыдущему предложению выполняется при наличии у **М** сильной позиции, означает оптимальность для **М** стратегии II (выводить активы).

Следовательно, при выборе **С** чистой стратегии 2 и наличии у **М** сильной переговорной позиции происходит сговор, и реализуется система выигрышей (7.13), ибо по предложению 7.2 условием сговора является неравенство

$$C + \alpha_M \Pi - I \leq U_M \leq C - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2 \sigma^2.$$

Последнее неравенство действительно выполнено в силу (7.19) и того факта, что $C - I < 0$.

Однако в случае сговора $U_S = 0$. Следовательно, если инвестиции в проект осуществлены (а это есть условие наступления *периода 5*, о событиях которого и идет речь), инвестиции в проект со стороны миноритариев не будут осуществляться. Иначе говоря, в обозначениях (7.4) имеем:

$$I_C = I, \quad I_S = 0.$$

Но в этом случае **С** будет участвовать в проекте тогда и только тогда, когда его выигрыш окажется не менее инвестированной суммы:

$$U_C(2, II) = \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2 - c \geq I_C = I,$$

что и завершает доказательство предложения.

Теорема 7.2. *При наличии сильной переговорной позиции у **М** выбор **С** чистой стратегии 2 (проводить мониторинг) невозможен.*

Доказательство. Если инвестиции в проект были осуществлены, а **С** выбрал чистую стратегию 2 (проводить мониторинг), то, в силу предложения 7.4, имеет место

$$U_M(2, II) = C - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2 \geq U_M(2, I) = \alpha_M\Pi. \quad (7.23)$$

Аналогично, согласно предложению 7.5, имеем

$$U_C(2, II) = \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2 - c \geq I. \quad (7.24)$$

Однако (7.23) влечет

$$C - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2 \geq \alpha_M\Pi > 0,$$

а (7.24) —

$$C - \alpha_C(\Pi - m) + k\alpha_C^2\sigma^2 = C - (\alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2 - c) - c \leq B - I - c < 0,$$

так как $C < I$.

Полученное противоречие и доказывает невозможность выбора **С** чистой стратегии 2.

Теорема 7.3. *Независимо от того, кто из участников переговоров о сговоре имеет более сильную позицию, невозможен выбор **С** чистой стратегии 1 (отказаться от мониторинга).*

Доказательство. Заметим, что при выборе **С** чистой стратегии 1 (отказаться от мониторинга, $p = 1$), условие выбора **М** чистой стратегии I (не выводить активы) имеет следующий вид:

— при наличии переговорной силы у **С** (см. также (7.17)):

$$p(\alpha_M\Pi - C) + (1 - p)(I - C) \geq 0;$$

— при наличии переговорной силы у **М**:

$$p(\alpha_M\Pi - C) + (1 - p)(\alpha_M\Pi - C + \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2) \geq 0,$$

(см. неравенство (7.22)).

Если **С** выбирает чистую стратегию 1 (отказаться от мониторинга, $p = 1$), то оба эти неравенства обращаются в ложное $\alpha_M\Pi - C \geq 0$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

7.3.3. Решения игры в смешанных стратегиях и оптимальный выбор доли собственности менеджера

Мы только что доказали, что рассматриваемая игра, если и может иметь решения в чистых стратегиях, то лишь в тривиальных случаях отказа от проекта. Следовательно, осуществление проекта в схеме мониторинга, если оно вообще возможно, будет иметь место лишь в случае, когда и крупный инвестор **С**, и менеджер **М** выберут смешанные стратегии. Этот вывод наиболее существенным образом отличает результаты данной главы от выводов статьи [Stepanov, 2002], согласно которым возможно «содержательное» решение игры в чистых стратегиях. Как представляется, решение в смешанных стратегиях лучше согласуется с эмпирическими результатами (см., в частности: [Himmelberg et al., 2002; Defond, Hung, 2004; Shleifer, Wolfenzon, 2003]).

Центральным результатом, описывающим существование и свойства решения рассматриваемой модели, является теорема 7.4.

Теорема 7.4. *При наличии у **С** переговорной силы решение игры в отношении низкорискового проекта ($\Pi/(k\sigma^2) \gg 1$) в смешанных стратегиях существует тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$(I - c)\Pi \geq I^2. \quad (7.25)$$

Если это условие выполняется, то доля собственности менеджера может принимать любое значение в интервале

$$0 \leq \alpha_M < \frac{\Pi - c - \sqrt{(\Pi + c - 2I)^2 + 4cI}}{2\Pi}. \quad (7.26)$$

*В этом случае ожидаемая прибыль менеджера **М** оказывается равной его доле прибыли при пропорциональном распределении дохода в случае осуществления проекта*

$$EU_M = \alpha_M \Pi.$$

Доказательство. Согласно предложению 7.3, при наличии переговорной силы у **С** выбор смешанной стратегии **С** и **М** возможен тогда и только тогда, когда одновременно выполнены уравнения

$$qc + (1 - q)(\alpha_M \Pi + c - I) = 0$$

и

$$p(\alpha_M \Pi - C) + (1 - p)(I - C) = 0.$$

Решением этой системы уравнений является пара

$$q = \frac{I - \alpha_M \Pi - c}{I - \alpha_M \Pi}, \quad p = \frac{I - C}{I - \alpha_M \Pi}.$$

Заметим при этом, что величина q удовлетворяет условию вероятности $q \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$0 < \alpha_M \leq (I - c)/\Pi. \quad (7.27)$$

Согласно данным таблицы 7.1, ожидаемые выигрыши игроков при этом будут определяться следующими равенствами:

$$\mathbf{E}U_M = \alpha_M \Pi, \quad (7.28)$$

$$\mathbf{E}U_C = \frac{I - \alpha_M \Pi - c}{I - \alpha_M \Pi} (\alpha_C \Pi - k \alpha_C^2 \sigma^2). \quad (7.29)$$

Выясним условия существования такого $\alpha_C > 0$, при котором выигрыш **C** (7.29) окажется не меньше инвестированной им суммы:

$$\mathbf{E}U_C = \frac{I - \alpha_M \Pi - c}{I - \alpha_M \Pi} (\alpha_C \Pi - k \alpha_C^2 \sigma^2) \geq \frac{\alpha_C}{\alpha_C + \alpha_S} I = \frac{\alpha_C}{1 - \alpha_M} I. \quad (7.30)$$

Данное условие является необходимым и достаточным для его участия в проекте.

Так как по условию $\alpha_C < 1 \ll \Pi/(k\sigma^2)$, то после преобразований (7.30) приходим к следующему необходимому и достаточному условию участия **C** в проекте:

$$\begin{aligned} \frac{I - \alpha_M \Pi - c}{I - \alpha_M \Pi} \Pi &\geq \frac{1}{1 - \alpha_M} I \iff \\ \iff \alpha_M^2 \Pi^2 - \alpha_M \Pi(\Pi - c) + (I - c)\Pi - I^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Рассмотрим входящую в условие (7.31) квадратичную функцию

$$Q(\alpha_M) = \alpha_M^2 \Pi^2 - \alpha_M \Pi(\Pi - c) + (I - c)\Pi - I^2.$$

Можно проверить, используя свойства квадратного трехчлена, что

$$Q\left(\frac{I - c}{\Pi}\right) < 0 \quad \text{и} \quad Q(0) \geq 0 \iff (I - c)\Pi \geq I^2. \quad (7.32)$$

Отметим, что (7.31) означает, что участие **С** в проекте возможно тогда и только тогда, когда на интервале (7.27) существует α_M , удовлетворяющее $Q(\alpha_M) \geq 0$.

Остается учесть, что, поскольку старший коэффициент трехчлена $Q(\alpha_M)$ положительный, последнее условие, в силу (7.32), выполнено тогда и только тогда, когда $(I - c)\Pi \geq I^2$. Таким образом, (7.25) доказано.

При этом легко проверить, что

$$\bar{\alpha}_M = \frac{\Pi - c - \sqrt{(\Pi - c)^2 - 4((I - c)\Pi - I^2)}}{2\Pi}$$

— меньший из двух действительных корней трехчлена $Q(\alpha_M)$. При $(I - c)\Pi \geq I^2$, он, согласно (7.32), удовлетворяет условию

$$0 \leq \bar{\alpha}_M < \frac{I - c}{\Pi}.$$

Следовательно, на этом интервале

$$Q(\alpha_M) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_M \leq \bar{\alpha}_M,$$

что и завершает доказательство (7.26).

В данной главе была рассмотрена модель игры контролирующего собственника **С** и менеджера **М** при разделе частных выгод менеджмента, готового произвести вывод активов. Построенная модель дает общее решение вопроса о возможности вступления контролирующего собственника в сговор с менеджером и, следовательно, о заинтересованности миноритариев в осуществлении капиталовложений в проекты.

Оказалось, что чистая стратегия проведения мониторинга не будет выбрана **С** ни при каких естественных соотношениях параметров модели (наибольшее внимание уделялось соотношению ожидаемой прибыли от проекта Π , величины перераспределяемых частных выгод C и затрат на мониторинг c и на принуждение менеджера к возврату активов m), однако смешанная стратегия может быть реализована.

Из этого следует, что техника обеспечения привлечения финансирования через IPO с помощью мониторинга проекта со стороны крупного инвестора действенна, хотя и не совершенна: ожидаемый выигрыш менеджера (а значит, и контролирующего собственника) в случае проведения мониторинга или отказа от него оказываются равными. Соответственно, риск вывода активов таким образом полностью не устраняется.

Задачи к главе 7

1. Докажите предложение 7.1.

Указание. Для доказательства достаточно заметить, что выигрыш **C**, в случае выявления вывода активов и сокрытия им этого факта (согласно (7.9) имеем $U_C = -c$), не превосходит как величину его выигрыша при произвольном разделе коалиционной прибыли $U_M + U_C = C - c$ (случай принятия менеджером **M** предложения **C** о сговоре), так и величину выигрыша

$$U_C = \alpha_C(\Pi - m) - k\alpha_C^2\sigma^2 - c$$

в случае отказа **M** от такого предложения.

2. Докажите предложение 7.3.

Указание. Для доказательства достаточно заметить, что в случае выбора **C** смешанной стратегии, предполагающей отказ от мониторинга с произвольной вероятностью p , и выбора **M** смешанной стратегии, предполагающей отказ вывода активов с вероятностью q , ожидаемый выигрыш, например **C**, равен

$$p(qU_C(1, I) + (1 - q)U_C(1, II)) + (1 - p)(qU_C(2, I) + (1 - q)U_C(2, II)).$$

После этого остается учесть, что при фиксированном q приведенное выражение является убывающей линейной функцией от p тогда и только тогда, когда выполнено условие первой части предложения 7.3:

$$q(U_C(1, I) - U_C(2, I)) + (1 - q)(U_C(1, II) - U_C(2, II)) \geq 0.$$

В этом случае функция достигает своего максимума при $p = 1$. (Почему это означает, что чистая стратегия 1 оптимальна для **C**?) Функция является возрастающей (максимум при $p = 0$) тогда и только тогда, когда

$$q(U_C(1, I) - U_C(2, I)) + (1 - q)(U_C(1, II) - U_C(2, II)) \geq 0,$$

а при равенстве нулю последнего выражения — функция постоянна. (Что это означает в терминах смешанных стратегий **C**?)

3. Почему высокорискованные проекты редко осуществляется посредством привлечения внешнего финансирования?

Указание. Предположите, что $\Pi/(k\sigma^2) \ll 1$ и убедитесь, что выводы теоремы 7.4 в этом случае оказываются неверны.

4. Попытайтесь дать экономическую интерпретацию выведенному условию (7.25) осуществимости IPO: $(I - c)\Pi \geq I^2$.

Указание. Заметьте, что это условие эквивалентно $(\Pi - I)/(\Pi) \geq c/I$.

8. Методология вычисления ценности под риском VaR

Основным подходом, принятым в финансах для измерения риска, является его моделирование с помощью дисперсии, или вариации. Этим подходом мы пользовались всюду выше. Этот подход является основным для теории финансов. Однако в некоторых прикладных задачах целесообразно рассмотреть и другие подходы к моделированию риска. Во многих случаях для аналитика важна прежде всего опасность потерь, которые могут возникнуть в деятельности компании, прежде всего — банка или другого финансового института, в течение определенного периода времени.

В первой половине 1990-х годов подходящая риск-метрика была введена аналитиками компании J. P. Morgan. Она получила наименование Value at Risk, сокращенно — **VaR**. По-русски этот термин обычно переводят как «стоимость под риском», что мы в соответствии с принятым переводом слова value как ценность, называем «ценность под риском». Настоящая глава представляет собой введение в методы вычисления и применения **VaR**. В нашем изложении мы в значительной мере следуем монографии [Jorion, 2001] (более элементарное изложение см. в [Best, 1998]). На русском языке простейшее определение и ряд применений **VaR** можно прочесть в книге [Рогов, 2001].

8.1. Модель оценивания возможных потерь

8.1.1. Определение Value at Risk

Предположим, что компания имеет портфель активов (в частности, это может быть один актив), который в каждом периоде может принести либо прибыли, либо потери. Методология **VaR** сосредоточена на абсолютной денежной величине потерь.

Для получения количественной меры **VaR**⁶¹ задают

- *доверительную вероятность* α (как правило, не менее 0.9; в некоторых случаях, в частности для банковского бизнеса, эта величина может задаваться нормативно);
- *промежуток времени* длины T , соответствующий периоду образования возможных потерь.

По определению VaR_α есть наименьшее число l , такое, что вероятность того, что потери за период T будут больше, чем l , не превосходят $1 - \alpha$. Приведем теперь более аккуратную математическую запись. Обозначим через L абсолютную величину потерь, являющуюся случайной величиной с функций вероятностного распределения F_L . Тогда вышеприведенное определение записывается следующим образом:

$$VaR_\alpha = \inf\{l : Prob(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l : F_L(l) \geq \alpha\}. \quad (8.1)$$

Таким образом, VaR_α представляет собой квантиль порядка α распределения потерь.

В соответствии с тем, что VaR определяется как сумма денег, которой инвестор должен располагать, чтобы с определенной доверительной вероятностью ее хватило для покрытия возможных потерь, понесенных в периоде T , от рискованной операции, естественно брать длину этого периода равной промежутку времени, в течение которого инвестор может организовать покрытие указанного убытка.

Пример. Предположим, что инвестор решил купить 1 тыс. акций компании ABC по цене 2 руб. за акцию. Он вкладывает имеющиеся у него 500 руб., и еще 1 тыс. 500 руб. он планирует взять в долг на 1 месяц. Будем считать, что потеря собственных денег инвестора не волнует, важнее всего вернуть долг. Какова степень риска? Если инвестор уверен, что акции ABC будут стоить через 1 месяц не менее 1.5 руб., то он в любом случае сможет расплатиться по долгу, продав через месяц акции. Уровень риска приемлем, и, вообще говоря, нет нужды заботиться, каким числом он выражается (естественно, при условии, что у инвестора нет альтернативных способов вложения денег). Сложнее, если есть опасения, что через месяц акции могут стоить и менее 1 руб. В этом случае не исключена вероятность, что инвестор не сможет расплатиться по долгу. Здесь уже нужно оценивать степень риска. Предположим, инвестор уверен, что с вероятностью 95% акции будут стоить не менее 1.6 руб. Это значит, что с вероятностью 95% он не понесет убытков больше, чем на 400 руб. ($VaR_{0.95} = -400$ руб.).

⁶¹ Мы зарезервируем обозначения **VaR** для самого понятия, а соответствующую количественную меру будем обозначать VaR .

Эти 400 руб. можно покрыть из собственных средств, поэтому уровень риска для данного инвестора приемлем. Но если с вероятностью 95% акции будут стоить не менее 1.4 руб., т.е. $VaR_{0.95} = -600$ руб., то это уже неприемлемый риск.

Конечно, цифра 95% — достаточно условная. Если инвестор очень осторожный человек, то он может установить для себя более высокий доверительный уровень, например 99%. Важно отметить три обстоятельства:

- во-первых, необходимо определить доверительный уровень вероятности;
- во-вторых, необходимо определить временной промежуток, на котором оценивается уровень риска;
- в-третьих, необходимо оценить максимально возможные потери (за этот период) на данном доверительном уровне.

Методология **VaR** стала стандартом де-факто для оценки риска в практике работы многих финансовых институтов и одним из основных методов, которые часто используют регулирующие организации. Это вызвано, во-первых, тем, что **VaR** дает понятную, часто выраженную в денежных единицах меру риска; во-вторых, тем, что **VaR** можно использовать для описания рыночного риска, связанного с любыми финансовыми инструментами. Кроме того, используя идеологию **VaR**, можно легко сформулировать требования к собственному капиталу финансовых учреждений, к их резервному капиталу, и, таким образом, легко контролировать финансовую устойчивость банков, хедж-фондов, страховых компаний. Так, например, требования к банкам по собственному капиталу почти всегда и во всех странах определяются на основе соотношения между значениями **VaR** портфеля рискованных активов банка и размером собственного капитала банка. Последнее время методологию **VaR** начинают применять и компании нефинансового сектора, поскольку современные компании стараются активно использовать широкие возможности финансовых рынков для снижения стоимости финансирования своей деятельности.

Однако неверно было бы говорить об универсальности и абсолютной применимости метода **VaR** к оценке любого риска. Мера **VaR** не дает единой, универсальной оценки риска, она не может дать оценки стратегических рисков, риска ликвидности, риска дефолта и пр. Метод **VaR** можно применить только там, где есть возможность тем или иным способом количественно оценить распределение возможных результатов. И наконец, следует признать, что **VaR** в определенной степени основан на интуи-

тивных понятиях, и пока теоретически не доказано, что **VaR** является адекватной оценкой риска на финансовом рынке.

При обосновании выбора той или иной меры риска важно, чтобы предложенная мера была *когерентной*. Мера риска называется когерентной, если она удовлетворяет следующим трем разумным условиям [Artzner et al., 1999]:

- условию однородности — увеличение портфеля в k раз увеличивает риск портфеля также в k раз;
- условию трансляции — добавление к портфелю безрискового инструмента не меняет риск портфеля. Это условие можно сформулировать следующим образом: изменение структуры портфеля путем замещения рискованных активов безрисковым активом на сумму S уменьшает риск этого портфеля на ту же величину S ;
- условию субаддитивности — риск портфеля не должен превышать суммы рисков составляющих частей портфеля.

К сожалению, **VaR** не всегда удовлетворяет третьему условию, следовательно, **VaR** не является когерентной мерой риска. Поэтому на основе **VaR** были предложены другие (когерентные) меры риска, например, риск как математическое ожидание отсеченного на уровне **VaR** распределения доходности (expected shortfall, **ESF**). Эта мера риска показывает, каких убытков следует ожидать в случае, если реализуется маловероятный катастрофический для портфеля сценарий развития событий.

Однако в том случае, если распределение доходности (цены) любой части портфеля подчиняется нормальному закону распределения, мера **VaR** удовлетворяет всем перечисленным условиям, т. е. является когерентной. Поскольку, как будет показано ниже, доходность многих важных финансовых активов подчиняется нормальному закону, мера **VaR** является простым и очень полезным инструментом оценивания риска.

8.1.2. Простейшие приемы вычисления VaR

Начнем с рассмотрения того, как вычислить *VaR* в простейшем случае одного актива. В соответствии с основной идеей **VaR**, изложенной выше, нужно определить, каковы как минимум могут быть потери (убытки) за неделю с вероятностью 5%. Или, иначе, с вероятностью 95% каким убытком можно будет ограничиться через неделю? Период в одну неделю взят для примера, с таким же успехом можно рассматривать период в один день, один месяц и т.п. Сразу же заметим, что абсолютные значения прибыли и убытка однозначно связаны с доходностью. Если инве-

стирована сумма 2 тыс. руб. и в следующем периоде получена доходность -10% , то убыток составит, очевидно, 200 руб. Поэтому в данном разделе при вычислении VaR для рассматриваемого актива будем использовать функцию распределения вероятности будущей доходности, а не функцию распределения вероятности для будущей цены актива. Таким образом, VaR определяется как минимальная доходность за неделю, которая будет превышена с вероятностью 95% .

По математической сути, VaR — это квантиль порядка 0.05 распределения вероятности будущей доходности в следующем периоде (определение квантиля см. в Приложении 8.2). Истинное распределение будущей (через неделю) доходности неизвестно, однако можно предположить, что оно должно совпадать с эмпирическим распределением недельной доходности, полученным при анализе прошедшего временного промежутка (скажем, за последние полгода). Поэтому VaR можно вычислить как квантиль эмпирического распределения недельной доходности, полученного из прошлых (за последние полгода) данных. Поскольку точно определить квантиль нужного порядка по эмпирическому (дискретному) распределению доходности часто не представляется возможным, то целесообразно воспользоваться аппроксимирующим нормальным распределением, оно непрерывно и для него легко по таблицам определить квантиль любого порядка.

Оценкой на уровне $Prob$ риска инвестирования средств на некоторый период в финансовый актив, для которого известно эмпирическое распределение доходности $f(FR)$ за этот период, является такое значение доходности VaR_α , что вероятность в следующем периоде получить доходность меньше VaR_α равна $(1 - \alpha)$:

$$1 - \alpha = \int_0^{VaR_\alpha} f(R) dR.$$

В случае нормального распределения с плотностью $N(R)$ формула (8.1) переписывается в виде:

$$1 - \alpha = \int_0^{VaR_\alpha} N(R) dR,$$

Из этих формул с формулами, приведенными в Приложении 8.2, ясно, что VaR_α является квантилем распределения порядка $(1 - \alpha)$. В первом случае это квантиль эмпирического распределения $f(R)$, во втором — квантиль нормального распределения $N(R)$.

Существует ли связь между двумя оценками рискованности актива — дисперсией доходности и VaR ? Для нормального распределения вероятности эта связь однозначна. Любой квантиль нормального распределения можно выразить через математическое ожидание и дисперсию. Действительно, ведь нормальные распределения полностью описываются своими двумя низшими моментами. Не приводя общей формулы, ограничимся двумя важными частными случаями:

$$VaR_{0.95} = a - 1.645\sqrt{\sigma}, \quad VaR_{0.99} = a - 2.326\sqrt{\sigma}.$$

Если же распределение вероятности будущих доходностей не является нормальным, то однозначной связи между дисперсией и VaR не существует. Для большинства часто встречающихся распределений чем больше дисперсия, тем меньше квантиль распределения (т.е. VaR). Однако, если сравниваются два актива, у которых формы распределений доходности сильно различаются, то может оказаться, что для распределения с большей дисперсией какие-то квантили окажутся не меньше, а больше (т.е. возникнет парадоксальная ситуация — использование меры риска «дисперсия» дает преимущество одному активу, а использование меры риска **VaR** — другому). В этом случае здравый смысл подсказывает, что оценка риска методом **VaR** скорее позволит избежать убытков и неприятностей.

Можно применить понятие **VaR** как к доходности R , так и к текущей цене P рискованного актива. Обозначим через $VaR(R)$ и $VaR(P)$ соответствующие величины. Тогда очевидно имеем:

$$VaR_{\alpha}(R) = P \cdot VaR_{\alpha}(P). \quad (8.2)$$

Эта формула подразумевает, что опасность оценивается относительно будущей ценности актива, так как оцениваемое сейчас распределение будущей доходности включает и величину ожидаемой доходности. Однако можно оценивать не распределение будущей доходности актива, а распределение самой ценности актива, например, по историческим ценам на актив. В этом случае опасность будет заключаться в снижении в будущем цен, и, используя концепцию VaR , можно оценить риск актива в денежном выражении как максимальное с доверительной вероятностью α снижение относительно текущей цены P :

$$VaR_{\alpha} = S_{(1-\alpha)} - P, \quad (8.3)$$

где $S_{(1-\alpha)}$ — квантиль распределения цены актива на уровне $(1 - \alpha)$.

Очевидно, что такая оценка риска более консервативна, но во многих случаях она может оказаться единственно возможной, например, если цена актива жестко определяется факторами, которые лучше прогнозируются, чем сама цена актива, или если только по факторам есть исторические данные. Это в полной мере относится к оценке риска производных финансовых инструментов, особенно если оценка производится на длинных горизонтах. Вместе с тем цена таких важных активов, как облигации, полностью определяется процентными ставками, по которым существует подробная история, поэтому можно с уверенностью прогнозировать будущее распределение цены облигаций, и последняя формула может быть использована не для текущих, а для будущих цен:

$$VaR_{Prob} = VaR_{Prob}(P) = S_{(1-Prob)} - \mathbf{E}(P), \quad (8.4)$$

где $\mathbf{E}(P)$ — ожидаемая (с учетом будущего распределения) цена.

Повторим еще раз алгоритм оценки риска методом **VaR** на рецептурном уровне так, как он будет использоваться в дальнейшем. Итак, необходимо оценить риск вложения средств на период T в некоторый актив (или портфель активов), при этом особенно важно ограничить потери, например в 95% возможных случаев. Если будет найден уровень потерь, которым можно ограничиться в 95% возможных случаев, то этот уровень и есть риск вложений в этот актив. Последовательность действий по оценке риска актива методом **VaR** такова:

- в качестве исходных данных используется последовательность цен на данный актив за некоторый, достаточно большой промежуток времени (много больший, чем период T , на котором оцениваем риск);
- вычисляется ряд доходностей за период T , которые наблюдались в анализируемом периоде времени;
- по этому ряду доходностей вычисляются среднее значение и дисперсия доходности;
- строится нормальное распределение, математическое ожидание и дисперсия которого равны среднему значению и дисперсии, вычисленным по ряду доходностей за период T в анализируемом промежутке времени;
- вычисляется квантиль порядка 0.05 этого нормального распределения. Этот квантиль и будет оценкой риска (по доходности) вложений в актив на период T (VaR по доходности);
- чтобы оценить риск в денежном выражении, полученный квантиль нужно умножить на сумму денег, вложенных в актив.

Что делать в том случае, если распределение доходности в анализируемом промежутке времени не похоже на нормальное, т.е. тест на нормальность не проходит? Нужно повторить первые два пункта из предыдущего рецепта, затем построить эмпирическое распределение доходности и накопленную вероятность эмпирического распределения, затем непосредственно по кривой накопленной вероятности определить квантиль нужного порядка (в данном случае 0.05). Если нужный квантиль определить не удастся, то для его вычисления можно использовать процедуру интерполяции. Таким образом будет определена VaR по доходности, далее можно вычислить VaR в денежном выражении.

Наглядно на графике это выглядит следующим образом (рис. 8.1). Отмечаем на оси ординат графика накопленной вероятности требуемый уровень (например, 5%), тем самым задавая для VaR доверительный уровень в 95%. Затем ищем точку на кривой функции накопленной вероятности, отвечающей этому требуемому уровню в 5%. Абсцисса найденной точки даст значение минимальной доходности, которая будет получена с вероятностью 95%. Это и есть искомое значение VaR . Для вычисления VaR по нормальному распределению вероятности средствами Excel удобно использовать встроенную функцию НОРМОБР. Рассмотрим два различных актива с разной изменчивостью доходности. Кривые нормального распределения вероятности будущих в следующем периоде доходностей и кривые накопленной вероятности для этих активов представлены на рис. 8.2. Видно, что чем больше изменчивость доходности актива, тем меньше значение VaR . Таким образом, можно поверить, что VaR является приемлемой характеристикой рискованности актива. Отметим некоторые свойства VaR (рис. 8.3):

- VaR , как правило, отрицательна по величине;
- чем выше требуемый доверительный уровень вероятности, тем меньше значение VaR ;
- чем длиннее период, на который вкладываются средства, тем меньше значение VaR .

8.2. Оценка рискованности портфеля активов

8.2.1. Корреляция доходностей активов

До сих пор рассматривался единственный изолированный актив. Как изменится риск, если средства будут вложены не в один, а в несколько оди-

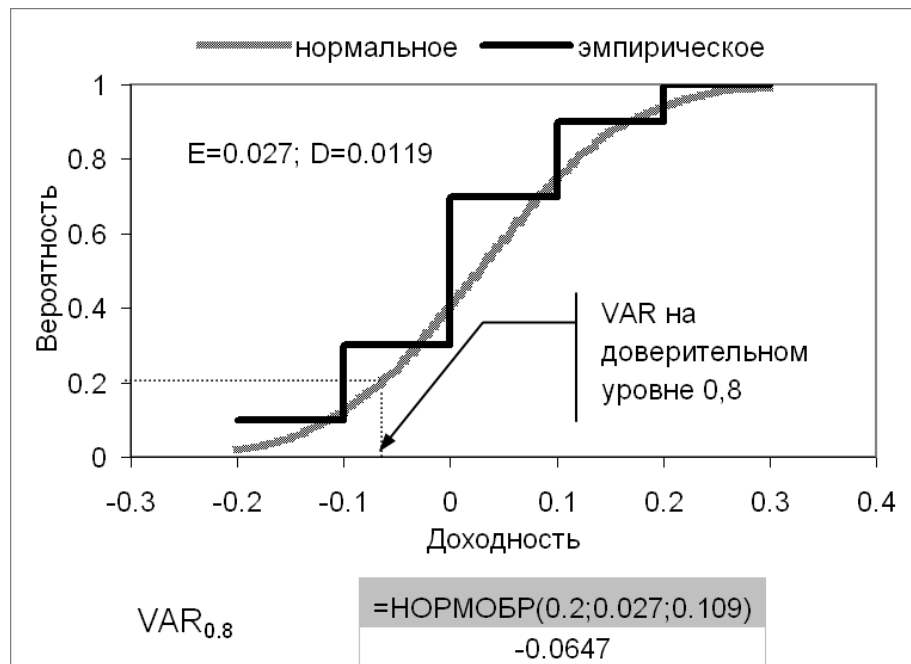


Рис. 8.1. Вычисление VaR

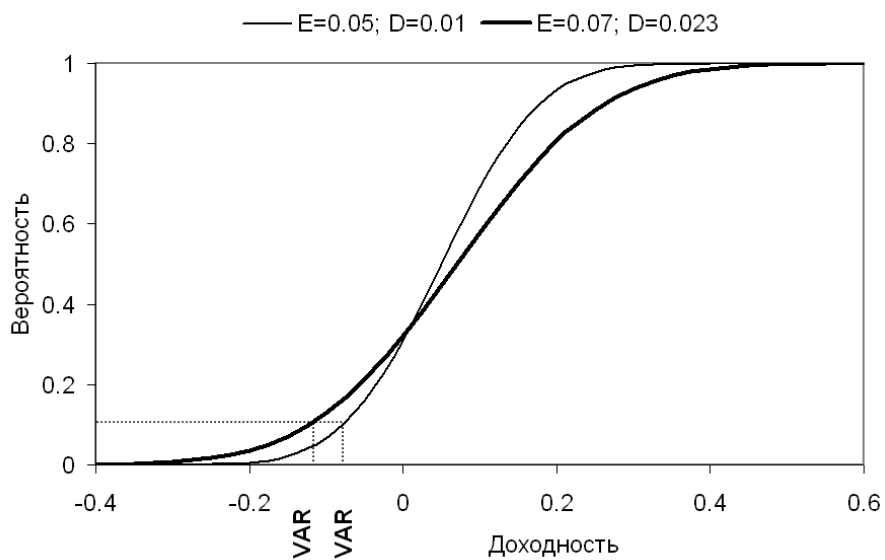


Рис. 8.2. Сравнение VaR для двух разных активов

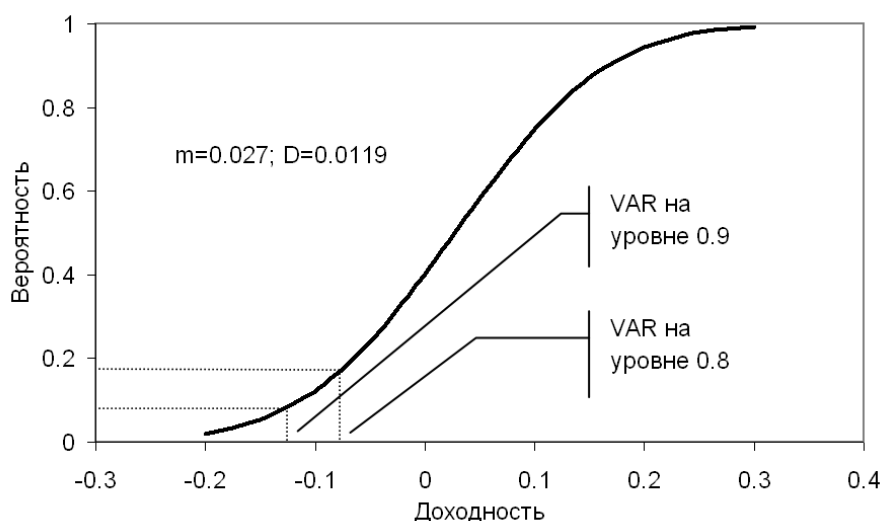


Рис. 8.3. VaR на разных доверительных уровнях

наковых по своей природе активов (например, акций). Теперь доходность и риск портфеля активов будут определяться несколькими случайными величинами (по числу активов), и распределение доходности портфеля будет многомерным. Описание такого распределения, даже нормального, представляет большие сложности. Поэтому для анализа доходности портфеля, в частности для описания изменчивости доходности, на практике используется совершенно иной подход. Рассмотрим для начала простой пример. На рис. 8.4 представлена динамика цен трех активов A1, A2 и A3. Сформируем из этих активов два разных портфеля, каждый из которых включает по два актива (в каждом портфеле средства в оба актива вложены поровну). Можно рассчитать дневные доходности всех активов по отдельности и каждого из портфелей. Эти данные также представлены на рис. 8.4.

Видно, что, хотя дисперсия доходности всех активов примерно одинакова, изменчивость доходности первого портфеля, состоящего из активов A1 и A2, значительно выше, чем у второго портфеля, который включает активы A1 и A3. Более того, видно, что изменчивость доходности второго портфеля ниже, чем каждого из активов в отдельности. Очевидно, это связано с тем, что доходности активов в первом портфеле менялись синхронно, а доходности активов во втором портфеле менялись в проти-

воположных направлениях. Таким образом, изменчивость доходности и, следовательно, риск портфеля зависят от согласованности (коррелированности) изменений доходности активов в портфеле. Мерой этой согласованности является коэффициент корреляции. Именно разный коэффициент корреляции доходности активов в рассмотренных портфелях приводит к разной степени риска. Для вычисления коэффициента корреляции и ковариации в пакете Excel используются встроенные функции КОРРЕЛ и КОВАР.

По данным рис. 8.4 можно рассчитать, что коэффициент корреляции доходности активов в первом портфеле близок к $+1$, а во втором портфеле близок к -1 . Заметим, однако, что такие экстремальные значения почти не встречаются на практике.

В рассмотренном примере портфели состояли из равных долей активов. Интуитивно ясно, что если доля одного из активов в портфеле будет меняться, то изменится и риск портфеля. Действительно, если во втором портфеле доля одного из активов ($A1$) будет очень мала, то риск портфеля будет полностью определяться риском актива $A3$. Интуитивно также ясно, что чем больше риск отдельных активов, тем больше риск портфеля (при прочих равных условиях). Таким образом, изменчивость доходности портфеля (риск портфеля) определяется тремя факторами:

- изменчивостью доходности (рисками) отдельных активов, составляющих портфель;
- коэффициентами корреляции доходности отдельных активов;
- пропорцией, в которой отдельные активы составляют портфель.

Напомним, что математическое ожидание суммы двух случайных величин, взятых с разными весами, выражается следующим образом:

$$\mathbf{E}(\omega_X X + \omega_Y Y) = \omega_X \mathbf{E}(X) + \omega_Y \mathbf{E}(Y), \quad (8.5)$$

а дисперсия суммы двух случайных величин, взятых с разными весами (долями), может быть выражена следующим образом:

$$\mathbf{D}(\omega_X X + \omega_Y Y) = \omega_X^2 \mathbf{D}(X) + \omega_Y^2 \mathbf{D}(Y) + 2\omega_X \omega_Y \rho_{X,Y} \sqrt{\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)}, \quad (8.6)$$

где ω_X и ω_Y — веса случайных величин X и Y , так, что $\omega_X + \omega_Y = 1$.

Эти формулы полностью применимы к математическому ожиданию и дисперсии доходности портфеля, состоящего из двух активов, причем в качестве веса ω_X случайной величины X принимается доля средств, вложенных в актив X , а в качестве ω_Y — доля средств, вложенных в актив Y .

	A	B	C	D	E	F
1	Дата	Цена актива A1	Цена актива A2	Цена актива A3	Цена 1-го портфеля (A1+A2)	Цена 2-ого портфеля (A1+A3)
2	05.07.2000	100.00	100.00	25.00	200.00	200.00
3	06.07.2000	102.00	101.80	24.58	203.80	200.30
4	07.07.2000	108.08	107.40	23.47	215.48	201.98
5	08.07.2000	131.83	127.80	19.95	259.64	211.83
6	09.07.2000	112.08	108.08	24.34	218.16	209.43
7	12.07.2000	124.42	118.81	21.68	243.22	211.08
8	13.07.2000	140.58	135.44	19.08	276.02	216.83
9	14.07.2000	129.33	124.61	20.78	253.94	212.44
10	15.07.2000	129.50	124.36	20.88	253.86	213.02
11	16.07.2000	121.58	118.14	22.55	239.72	211.79
12	18.07.2000	124.00	121.68	22.21	245.68	212.85
13						
14	Дата	Доходность актива A1	Доходность актива A2	Доходность актива A3	Доходность портфеля 1	Доходность портфеля 2
15	06.07.2000	=+B3/B2-1 0.020	=+C3/C2-1 0.018	=+D3/D2-1 -0.017	=+E3/E2-1 0.019	=+F3/F2-1 0.002
16	07.07.2000	=+B4/B3-1 0.080	=+C4/C3-1 0.055	=+D4/D3-1 -0.045	=+E4/E3-1 0.057	=+F4/F3-1 0.007
17	08.07.2000	0.220	0.190	-0.150	0.205	0.035
18	09.07.2000	-0.150	-0.170	0.220	-0.160	0.035
19	12.07.2000	0.110	0.120	-0.110	0.115	0.000
20	13.07.2000	0.130	0.140	-0.120	0.135	0.005
21	14.07.2000	-0.080	-0.080	0.090	-0.080	0.005
22	15.07.2000	0.001	-0.002	0.005	0.000	0.003
23	16.07.2000	-0.081	-0.050	0.080	-0.056	0.009
24	18.07.2000	=+B12/B11-1 0.020	=+C12/C11-1 0.030	=+D12/D11-1 -0.015	=+E12/E11-1 0.025	=+F12/F11-1 0.002
25						
26	Среднее значение	=CP3НАЧ (B15:B24) 0.027	=CP3НАЧ (C15:C24) 0.025	=CP3НАЧ (D15:D24) -0.008	=CP3НАЧ (E15:E24) 0.026	=CP3НАЧ (F15:F24) 0.010
27						
28	Дисперсия	=ДИСП(B15:B24) 0.0119	=ДИСП(C15:C24) 0.0118	=ДИСП(D15:D24) 0.0127	=ДИСП(E15:E24) 0.0118	=ДИСП(F15:F24) 0.0002
29						
30	Кoeffициент корреляции				=КОРРЕЛ (B16:B25;C16:C25) 0.992	=КОРРЕЛ (B16:B25;D16:D25) -0.972

Рис. 8.4. Корреляция доходностей активов и ее влияние на риск портфеля

Отметим, что чисто формально одна из величин ω_X или ω_Y может быть отрицательной. Отрицательное значение, например ω_X , с экономической точки зрения означает, что инвестор «занял» на рынке актив X (на сумму ω_X в относительных единицах) и продал его с обязательством выкупить и вернуть в следующем периоде. Такая операция называется короткой продажей или, иначе, — говорят, что инвестор находится в короткой позиции по активу X . На вырученные от продажи деньги и на собственные деньги инвестор, естественно, покупает актив Y (занимает длинную позицию). В сумме по-прежнему $\omega_X + \omega_Y = 1$. Короткие продажи в реальной жизни доступны далеко не всем инвесторам, и если на рынке эта возможность отсутствует, то необходимо наложить дополнительные условия $\omega_X > 0$, $\omega_Y > 0$.

Подчеркнем очень важный момент. Если на параметры распределения доходности активов (математическое ожидание и дисперсию) инвестор никак повлиять не в силах, как и на коэффициент корреляции, то распределить свои средства по активам, т. е. сформировать портфель, он может по-разному. Первым делом напрашивается мысль распределить средства так, чтобы минимизировать риск (дисперсию доходности) портфеля. Эту задачу нетрудно решить аналитически, полученный портфель называется глобально минимальным по дисперсии. Однако ожидаемая в следующем периоде доходность такого портфеля может оказаться малой, и это не устроит инвестора. Поэтому чаще поступают другим образом. Можно задать требуемую доходность и затем минимизировать уровень риска (оптимизация портфеля по уровню риска), а можно наоборот, задать допустимый уровень риска и максимизировать доходность портфеля (оптимизация портфеля по уровню доходности). Соответствующие решения для двух активов легко получить в аналитическом виде, но они здесь выписаны не будут, так как, во-первых, выражения достаточно громоздки; во-вторых, инвестор никогда не ограничивается двумя активами. Оптимизацию же портфеля, состоящего из многих активов, удобнее решать численно, и пакет Excel предоставляет для этого хорошие возможности.

8.2.2. Диверсификация портфеля

В предыдущем разделе отмечалось, что дисперсия доходности отражает как рыночный, так и специфический риск актива. Предположим для начала, что у нас есть два очень похожих актива с близкими по величине дисперсиями доходности (например, акции двух, примерно одинаковых, компаний из одной отрасли). Предположим также, что рыноч-

ный риск отсутствует, т. е. дисперсии доходности этих активов отражают только специфические риски активов. Следовательно, коэффициент корреляции двух случайных величин, доходностей этих активов, равен нулю (этот вывод можно обосновать, а можно считать определением специфического риска). Если средства инвестора вложены поровну в оба актива, $\omega_X = \omega_Y = 1/2$, то из формулы (8.6) нетрудно получить, что при одинаковой дисперсии активов дисперсия доходности портфеля равна:

$$\mathbf{D}(1/2X + 1/2Y) = 1/4\mathbf{D}(X) + 1/4\mathbf{D}(Y) = 1/2\mathbf{D}(X) = 1/2\mathbf{D}(Y).$$

Из этого простого примера видно, что, сформировав портфель из двух активов, можно вдвое уменьшить его специфический риск по сравнению с изолированными активами в отдельности. Это и понятно, — если что случится с акциями одной компании (например, пожар на заводе вызовет резкое снижение цены акций), то инвестор не потерпит очень больших убытков, так как в акции этой компании вложена лишь половина средств. Добавление большего числа активов в портфель приводит к еще большему снижению риска. Подчеркнем, что это справедливо только в случае близких к нулю коэффициентов корреляции доходностей активов. Таким образом, вкладывая средства не в один, а в несколько активов, можно нивелировать, уничтожить влияние специфического риска активов на риск портфеля. Эта процедура называется диверсификацией портфеля и есть не что иное, как научное отражение широко известного правила «не класть яйца в одну корзину». Эмпирические исследования показывают, что для того, чтобы практически полностью уничтожить влияние специфических рисков, достаточно ограничиться портфелем из десятка активов.

Какие активы необходимо выбрать, чтобы провести эффективную диверсификацию портфеля, и какую долю средств нужно вложить в каждый из выбранных активов? Можно случайным образом взять десяток активов, обращающихся на рынке, и вложить средства поровну в каждый из них (этот метод получил название наивной диверсификации). Можно целенаправленно выбрать несколько отраслей экономики и из каждой отрасли выбрать по несколько компаний; очевидно, таким образом можно избавиться не только от специфического риска активов, но и от специфического отраслевого риска. Однако более эффективным методом является диверсификация, при которой не только уничтожаются специфические риски, но и минимизируется рыночный риск портфеля (диверсификация по Марковицу). Суть ее заключается в том, что можно снизить рыночный

риск портфеля, используя активы с отличными от единицы коэффициентами корреляции, если правильно распределить средства между активами в портфеле. Но, снижая рыночный риск портфеля, мы тем самым снижаем и доходность портфеля, поэтому диверсификация по Марковицу неотделима от проблемы оптимизации портфеля по критерию «риск-доходность».

Рассмотрим, как можно вычислить риск портфеля, состоящего более чем из двух активов.

8.2.3. Ожидаемая доходность и дисперсия портфеля

Формулу, аналогичную той, которая выписана в формуле (8.6), можно вывести для случая произвольного количества активов, однако она получается весьма громоздкой даже в случае трех активов, не говоря уже об их большем числе. Для того чтобы упростить вид формул, будем использовать матрицы и матричную алгебру, которые введены в математике для эффективной работы с системой одинаковых по структуре уравнений.

Использование матриц дает компактную форму записи уравнений в финансовой теории, особенно в теории портфеля. Рассмотрим портфель P , состоящий из N активов, распределение доходности каждого из которых описывается математическим ожиданием доходности $\mathbf{E}_i$ и дисперсией доходности $\mathbf{D}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Пусть ω_i — доля денежных средств, инвестированная в актив i , так что, $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_N = 1$, причем некоторые из слагаемых могут быть отрицательными (возможность коротких продаж). Образует матрицы — столбцы $\mathbf{E}(N \times 1)$, $\mathbf{D}(N \times 1)$ и $\omega(N \times 1)$. Попарно для всех активов вычислим коэффициенты корреляции доходности (или ковариацию) и образуем так называемую ковариационную матрицу доходности $\Omega(N \times N)$ с элементами $\Omega_{ij} = \rho_{ij}(\mathbf{D}_i \mathbf{D}_j)^{1/2}$. Очевидно, что диагональные элементы ковариационной матрицы есть дисперсии доходности активов: $\Omega_{ii} = \mathbf{D}_i$. Очевидно также, что элементы, симметричные относительно диагонали: $\Omega_{ji} = \Omega_{ij}$.

Используя эту технику, можно записать компактные выражения для математического ожидания доходности портфеля $\mathbf{E}_P$ и дисперсии доходности портфеля $\mathbf{D}_P$:

$$\mathbf{E}_P = \omega' \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}_P = \omega' \Omega \omega. \quad (8.7)$$

Величины $\mathbf{E}_P$ и $\mathbf{D}_P$ есть просто числа, следовательно, распределение доходности портфеля описывается всего двумя параметрами, как и в случае с единственным активом.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Ожидаемая доходность	Дисперсия доходности	Ковариационная матрица			Доля средств (1 портфель)	Доля средств (2 портфель)
2	1-й актив	0.030	0.008	0.0080	0.0075	0.0042	0.400	0.300
3	2-й актив	0.040	0.011	0.0075	0.0110	0.0041	0.200	0.400
4	3-й актив	0.020	0.006	0.0042	0.0041	0.0060	0.400	0.300
5								
6	Вспомогательные матрицы для 1-го портфеля		0.400	0.200	0.400			
7							{=ТРАНСП(G2:G4)}	
8			0.00636	0.00683	0.00488			
9							{=МУМНОЖ(C6:E6;D2:F4)}	
10	Вспомогательные матрицы для 2-го портфеля		0.300	0.400	0.300			
11							{=ТРАНСП(H2:H4)}	
12			0.007	0.00787	0.00467			
13							{=МУМНОЖ(C10:E10;D2:F4)}	
14	Ожидаемая доходность 1-го		0.028				{=МУМНОЖ(C6:E6;B2:B4)}	
15	Дисперсия доходности 1-го		0.006				{=МУМНОЖ(C8:E8;G2:G4)}	
16							{=МУМНОЖ(C10:E10;B2:B4)}	
17	Ожидаемая доходность 2-го		0.031				{=МУМНОЖ(C12:E12;H2:H4)}	
18	Дисперсия доходности 2-го		0.007					
19								

Рис. 8.5. Вычисление параметров доходности портфеля из трех активов. Влияние структуры портфеля на доходность и риск

Теперь можно применить эти формулы для оценки параметров доходности имеющегося портфеля. Можно даже варьировать активы в портфеле и долю средств, вкладываемую в каждый актив, чтобы получить более приемлемые результаты по ожидаемой доходности и риску. Однако простой перебор вариантов очень утомителен и может использоваться только в случае, когда число доступных альтернатив невелико (например, когда рассматривается портфель крупных инвестиционных проектов). Тогда вариантов перебора сравнительно немного и их все можно просчитать. Пример таких расчетов в пакете Excel приведен на рис. 8.5. Пусть стандартный лот активов A1, A2 и A3 стоит, соответственно, 5 тыс. руб., 10 тыс. руб. и 50 тыс. руб. Тогда, имея 50 тыс. руб., можно, например, сформировать такие портфели: первый состоит из 1 лота актива A2, 4 лотов A1 и 4 лотов A3, а второй портфель состоит из 2 лотов A2, 3 лотов A1 и 3 лотов A3. Как показывают результаты расчетов, второй портфель имеет более высокую доходность и несколько более высокий риск. Можно ли позволить себе рискнуть выбрать второй портфель? Хороший ответ

на этот вопрос дает **VaR**, но прежде чем приступить к вычислению VaR , проясним важный момент, — откуда брать данные по отдельным активам для расчета доходности портфеля?

На развитых рынках существует обширная информационная поддержка мелких и средних инвесторов, в сети Интернет публикуются таблицы, из которых можно почерпнуть данные по дисперсии доходности и коэффициентам корреляции доходности различных активов. Другой способ: можно использовать исторические данные по ценам активов (они доступны в Интернете), на их основе рассчитать временные ряды доходности (см. п. 8.3) и определить математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты корреляции. Затем по формулам (8.7) вычислить параметры доходности портфеля. Этот метод получил название исторического метода. Существует еще стохастический метод, или метод Монте-Карло, когда временные ряды цен на активы искусственно синтезируются на компьютере, а затем по этим ценам вычисляются распределение доходности и его параметры. Этот способ сложен, но он особенно эффективен в случае сложных по структуре портфелей, включающих производные инструменты.

8.2.4. Диверсифицированный и недиверсифицированный VaR портфеля

Если портфель состоит из нескольких активов, распределение доходности каждого из которых близко к нормальному, то распределение доходности портфеля также будет нормальным. Более того, оно будет достаточно близко к нормальному, даже если доходности отдельных активов и не подчиняются нормальному распределению, но этих активов в портфеле много и коэффициенты корреляции малы по абсолютной величине. (Это утверждение основано на выводах так называемой центральной предельной теоремы). Значит, зная математическое ожидание и дисперсию доходности портфеля, можно построить нормальное распределение, определить квантиль любого порядка и, таким образом, оценить уровень риска методом **VaR** на любом доверительном уровне. В частности, на уровне значимости 95%

$$VaR_{0.95} = E_P - 1.645\sqrt{D_P},$$

на уровне 99% — $VaR_{0.99} = E_P - 2.326\sqrt{D_P}$.

Если, воспользовавшись формулами (8.7), подставить в них определенные по таблицам или из исторических данных значения элементов матриц **E**, **D** и **Ω**, а затем использовать значения E_P и D_P для вычис-

ления VaR , то определенный таким образом VaR иногда называют диверсифицированным значением **VaR**. Важно подчеркнуть, что для расчета диверсифицированного VaR используется ковариационная матрица, а значит, учитывается, что коэффициенты корреляции доходностей разных пар активов различны. Однако некоторые аналитики считают, что диверсифицированное значение **VaR** не отражает некоторых рисков, в частности риска, связанного с обвалом рынка. Шоковые обвалы рынка, когда фондовый индекс в течение короткого периода падает на 10% и более, случаются довольно редко, но при этом практически все активы, обращающиеся на рынке, падают в цене синхронно и примерно одинаково, т. е. ведут себя так, как будто коэффициент корреляции доходности для всех активов близок к единице. Поэтому, если инвестор хочет перестраховаться и учесть возможность шоковых обвалов, необходимо при вычислении D_p по формуле (8.7) положить, что все элементы корреляционной матрицы равны единице. Если потом для построения нормального распределения и вычисления **VaR** используется такой подход к оценке D_p , то определенный таким образом VaR иногда называют недиверсифицированным значением **VaR**. Пример вычисления диверсифицированного и недиверсифицированного значений VaR представлен на рис. 8.6. Данные те же, что и на рис. 8.5, рассматривается первый портфель. Диверсифицированное значение VaR показывает, что в обычных рыночных условиях с вероятностью 95% убыток не превысит 9.8%. Диверсификация портфеля привела к тому, что риск портфеля не выше риска актива A3 (наименее рискованного из всех), зато доходность портфеля значительно выше, чем актива A3. Однако, если пользоваться недиверсифицированным значением VaR , то прогнозируемые возможные убытки примерно находятся на уровне 11.8%. Этот риск совпадает с риском актива A3, но доходность чистого актива A3 несколько выше, чем портфеля. Может быть, тогда не стоит формировать диверсифицированный портфель, а все средства вложить в актив A3? Заметим, что такой результат получился, потому что в портфеле присутствовал очень рискованный актив A2.

8.3. Методы вычисления VaR

для различных активов

8.3.1. Общие принципы

Нами были рассмотрены общие подходы к оценке рискованности портфеля ценных бумаг и некоторые практические аспекты оценки риска про-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Ожидаемая доходность	Дисперсия доходности	Ковариационная матрица			Ковариационная матрица (все коэффициенты корреляции =1)			Доля средств в портфеле
2	1 актив	0.030	0.008	0.0080	0.0075	0.0042	0.0080	0.0094	0.0069	0.40
3	2 актив	0.040	0.011	0.0075	0.0110	0.0041	0.0094	0.0110	0.0081	0.20
4	3 актив	0.020	0.006	0.0042	0.0041	0.0060	0.0069	0.0081	0.0060	0.40
5										
6										
7	Расчет диверсифицированного VaR									
8	Вспомогательные матрицы		0.400	0.200	0.400					
9							{=ТРАНСП(J2:J4)}			
10			0.00636	0.00683	0.00488					
11							{=МУМНОЖ(C8:E8;D2:F4)}			
12	Ожидаемая доходность		0.028				{=МУМНОЖ(C8:E8;B2:B4)}			
13	Дисперсия доходности		0.006				{=МУМНОЖ(C10:E10;J2:J4)}			
14	VaR на уровне 95%		=C12-1,645*КОРЕНЬ(C13)							
15			-9.8%							
16										
17	Расчет недиверсифицированного VaR									
18	Вспомогательные матрицы		0.400	0.200	0.400					
19							{=ТРАНСП(J2:J4)}			
20			0.0078	0.0092	0.0068					
21							{=МУМНОЖ(C18:E18;G2:I4)}			
22	Ожидаемая доходность		0.028				{=МУМНОЖ(C18:E18;B2:B4)}			
23	Дисперсия доходности		0.008				{=МУМНОЖ(C20:E20;J2:J4)}			
24	VaR на уровне 95%		=C22-1,645*КОРЕНЬ(C23)							
25			-11.6%							

Рис. 8.6. Диверсифицированный и недиверсифицированный VaR портфеля из трех активов

стных портфелей историческим способом. При этом предполагалось, что всегда существует «нужная» история цен на все активы в портфеле. Однако в действительности, несмотря на все многообразие рыночной информации, «нужной» истории может не существовать — если, например, имеющиеся исторические ряды слишком короткие или нет рядов с нужным интервалом между данными. Можно попытаться синтезировать эту историю, используя доступную информацию или модельные представления о динамике цен. Простые методы для реализации такого подхода описаны далее. Кроме того, «нужной» истории может не быть просто потому, что такого инструмента ранее на рынке не было, — например, это касается внебиржевых форвардов и опционов, создающихся решением сторон

сделки, или биржевых производных инструментов, которые запускаются решением биржи ⁶².

В этом случае не остается ничего иного, как использовать некоторые модельные представления, связывающие в произвольный момент времени цену инструмента и значения каких-то факторов (возможно, макроэкономических или финансовых), по которым история существует. В полной мере этот подход реализуется и для таких простых инструментов, как облигации, также имеющих ограниченный срок «существования». Наконец, в последнем разделе главы на простом примере рассмотрен имитационный способ оценивания риска. Реальные инвестиционные портфели крупных инвесторов имеют столь сложную структуру, что зачастую не представляется возможным оценить уровень риска портфеля, применяя простые модели в сочетании с историческим способом оценки. Однако практическая важность имитационного моделирования состоит не столько в том, что такой способ легче осуществить для сложных портфелей, сколько в том, что процесс имитационного моделирования позволяет включать в рассмотрение такие риски, по которым истории вообще не было, например специфические риски дефолта, риски шоковых обвалов рынка, риски потери ликвидности. Учет таких рисков может оказаться гораздо важнее, чем риски «спокойных» периодов, особенно для инвесторов с длинными горизонтами инвестирования.

8.3.2. Интерполяция данных в методе дисперсии-ковариации

Прежде чем перейти к вычислению **VaR** для портфелей из конкретных активов, проанализируем особенности применения метода дисперсии-ковариации для оценки риска портфеля. Суть метода заключается в том, что для расчета параметров доходности портфеля используются имеющиеся табличные данные по ожидаемой доходности, дисперсии и ковариации различных активов, входящих в портфель. Однако может оказаться так, что табличные данные составлены для периодов, отличающихся от того, на котором оценивается риск портфеля. В этом случае, чтобы произвести оценку на основании имеющихся данных, придется применить процедуру интерполяции.

Пример. Пусть инвестор решил вложить средства в некий актив сроком на 3 недели и хотел бы оценить ожидаемую доходность и риск. У него есть данные по распределению недельной доходности этого актива и распределению месячной доходности (рис. 8.7). Можно ли на основании этих дан-

⁶² Классическим учебником по производным ценным бумагам является [Халл, 2007].

	A	B	C	D
1	Пример интерполяции данных			
2			Периодов	
3	Ожидаемая доходность	недельная	1	0.030
4		месячная	4	0.100
5		за 3 недели	3	=D3+(D4-D3)*(C5-C3)/(C4-C3)
6				0.077
7	Дисперсия доходности	недельная	1	0.00060
8		месячная	4	0.00120
9		за 3 недели	3	=D7+(D8-D7)*(C9-C7)/(C8-C7)
				0.0010

Рис. 8.7. Пример интерполяции данных

ных определить параметры распределения доходности на период 3 недели? Разумно предположить, что параметры доходности при вложении на 3 недели будут представлять нечто среднее между параметрами недельной и месячной доходности. Это размытое «нечто среднее» в математике называется интерполированным значением. Процедура интерполяции заключается в оценке значения неизвестной функции в любой точке внутри заданного интервала, если заданы значения функции на концах этого интервала. Идея заключается в том, что неизвестную функцию заменяют на заданном интервале некоторой простой аналитической функцией, чаще всего линейной функцией (линейная интерполяция). Параметры линейной функции определяют, исходя из известных значений на концах интервала. Эта замена будет тем лучше (ошибка интерполяции тем меньше), чем уже интервал и чем меньше разница между значениями функции на концах интервала.

Определение 8.1. *Линейная интерполяция функции $f(X)$ в точке X^* по известным значениям функции в точках X_1 и X_2 описывается формулой:*

$$f(X^*) = f(X_1) + \frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1}(X^* - X_1). \quad (8.8)$$

Пример вычислений в пакете Excel представлен на рис. 8.7. Использована формула (8.8), в которой в роли переменной X выступает число периодов: $X_1 = 1$, $X_2 = 4$, $X^* = 3$.

Это простейшая и несколько искусственная ситуация. Однако метод дисперсии-ковариации и интерполяция данных широко применяются при анализе портфеля облигаций. Например, инвестор решил вложить средства в облигации на срок 4 месяца 20 дней. Государственные облигации —

это, пожалуй, тот инструмент, для которого существуют наиболее обширные и подробные таблицы параметров доходности. Однако облигации со сроком погашения 4 месяца 20 дней в данный момент на рынке может не существовать, и параметров ее доходности никто не знает. Наиболее приемлемы для инвестора в этой ситуации имеющиеся на рынке облигации с близкими сроками погашения (например, 4 месяца и 5 месяцев). Вот в этой ситуации можно применить процедуру интерполяции для оценки доходности гипотетической облигации с тем же сроком погашения 4.67 месяца. Подробнее об особенностях оценивания доходности и риска портфеля облигаций будет рассказано ниже.

Процедура интерполяции эффективна и во многих других случаях при анализе данных с финансовых рынков. Например, ее можно применить для оценки квантиля нужного порядка непосредственно из эмпирического распределения доходности актива. Ниже в разделе «Риск инвестирования в облигацию» рассматривается численный пример с использованием такого подхода.

Часто исторические оценки ожидаемой доходности и дисперсии можно получить только для нескольких фиксированных горизонтов инвестирования (как правило, коротких). Но на практике горизонт может составлять годы, и оценить историческим способом ожидаемую доходность и риск на таком длинном периоде не представляется возможным. Чтобы иметь возможность сделать такие оценки, необходимо привлечь какие-то модельные представления о движении цен активов во времени.

Наиболее простая и правдоподобная модель заключается в следующем: изменение во времени логарифма цены любого капитального актива представляет собой *случайное блуждание с трендом* (*random walk with drift*)⁶³. Это означает, что значение логарифма цены в следующем (очень коротком) периоде будет равно значению логарифма цены в предыдущем периоде плюс некоторая постоянная добавка m плюс некоторая случайная добавка ε :

$$p_t = p_{t-1} + m + \varepsilon_t.$$

Предполагается, что математическое ожидание случайной добавки равно нулю, величина и знак добавки никак не коррелированы с предыдущими периодами, дисперсия постоянна:

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathbf{D}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = 0 \quad \forall s.$$

⁶³ Такое представление абсолютно неприменимо к облигациям и ко многим производным инструментам.

Значение гарантированной добавки m есть не что иное, как ожидаемая доходность за период (в предположении, что доходность эта мала, или в предположении, что это доходность за достаточно малый временной период). Действительно, вычисляя условное математическое ожидание логарифма цены в следующем периоде, получим

$$\mathbf{E}(p_{t+1}) = p_t + m,$$

откуда

$$m = \mathbf{E}(p_{t+1} - p_t) = \mathbf{E}\left(\log \frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \approx \mathbf{E}\left(\frac{\Delta P}{P_t}\right),$$

где ΔP — изменение цены.

Оценкой m может служить среднее значение доходности за период в прошлом.

Таким образом, модель случайного блуждания с трендом достаточно хорошо описывает все особенности рыночного поведения цены такого важного актива, как бездивидендная акция. Исходный ряд цен на акцию нестационарен, но его первая разность стационарна и экономическая сущность дифференцированного ряда очень прозрачна — это не что иное, как ряд доходностей.

В курсе финансовых временных рядов доказывалось, что *прогноз* (*forecast*) логарифма цены на h -периодов вперед в такой модели (т. е. ожидаемое значение логарифма цены в h -периоде) равен

$$\mathbf{E}(p_{t+h}) = p_t + hm.$$

Таким образом, видно, что ожидаемая доходность растет линейно с увеличением инвестиционного горизонта, и это очень важный модельный результат. Естественно, поскольку p_t — величина случайная, прогноз, скорее всего, разойдется с действительностью. Ошибка прогноза будет равна

$$e_h = p_{t+h} - \mathbf{E}(p_{t+h}).$$

В курсе финансовых временных рядов доказывалось, что математическое ожидание ошибки прогноза равно нулю, а дисперсия ошибки, т. е. неопределенность результата по сравнению с ожидавшимся значением, равна

$$\mathbf{D}(e_h) = h\sigma_\varepsilon^2 \quad \mathbf{s}(e_h) = \sqrt{h}\sigma_\varepsilon.$$

Следовательно, неопределенность будущей цены так же, как и ожидаемая доходность, растет с увеличением инвестиционного горизонта. Из

последнего соотношения видно, что дисперсия логарифма цены растет линейно, но стандартное отклонение цены от ожидаемого значения (и квантиль вероятностного распределения логарифма цены) растет как корень квадратный из длины инвестиционного горизонта, и это второй очень важный модельный результат.

Из этого модельного представления движения цены актива можно оценивать уровень ожидаемой доходности и рискованности актива и портфеля на любых сколь угодно длинных горизонтах.

8.3.3. Вычисление VaR портфеля акций

Рассмотрим процедуру оценивания риска портфеля, состоящего из обыкновенных и привилегированных акций корпоративных предприятий. Высоко ликвидные акции являются как раз теми активами, распределение доходности которых на большом промежутке времени достаточно хорошо описывается нормальным распределением. Поэтому все рассмотренные в главе 8 методы оценки риска и меры риска (дисперсия, **VaR**) полностью применимы к акциям и портфелям акций. Отметим только некоторые технические особенности использования исторического метода. Напомним, исторический метод оценки риска подразумевает анализ временного ряда цен на акции — вычисление доходности, построение распределения доходности, оценку параметров распределения (ожидаемая доходность и дисперсия), замену эмпирического распределения на нормальное; вычисление квантиля требуемого порядка (*VaR*).

Во-первых, на каком временном промежутке следует оценивать параметры распределения доходности? Очевидно, что анализируемый временной промежуток должен быть намного больше, чем период, на котором оценивается риск (период, на который инвестируются средства). Обычно, если вычисляются параметры дневной или недельной доходности, то анализируемый временной промежуток должен составлять не менее года. Во-вторых, если торги по акциям проходят на разных биржах (торговых площадках), анализировать необходимо данные, полученные с площадки, на которой наблюдается максимальный объем сделок с данными акциями. В-третьих, если на период владения акциями приходится закрытие реестра акционеров, то предстоящая выплата дивидендов должна отдельно учитываться при оценке доходности. Кроме того, обычно сразу после закрытия реестра цена акции падает, и этот факт тоже нужно учитывать при оценке риска краткосрочных спекуляций.

8.3.4. Вычисление VaR портфеля облигаций

Инвестиции в облигации (*bonds*) считаются менее рискованными и, соответственно, менее доходными способами вложения денег, чем инвестиции в другие финансовые инструменты. Ценообразование на большинство типов облигаций достаточно хорошо изучено, следовательно, можно говорить о высокой степени предсказуемости этого сегмента рынка.

Облигация — это обязательство эмитента выплатить определенные суммы денег в определенные моменты времени (купонные платежи) и номинальную стоимость облигации (*par value*) в день ее погашения. Если купонные платежи не предусмотрены, то такая облигация называется дисконтной (*discount bonds*). Купонные платежи (*coupons*) могут быть постоянными или переменными. Некоторые облигации содержат внутренний опцион (право эмитента или владельца облигации на какое-либо действие), например, эмитент может оставить за собой право на досрочное погашение облигации. Конвертируемые корпоративные облигации — еще один яркий пример облигаций с внутренним опционом.

Начнем рассмотрение с самого простого случая — с дисконтной государственной облигации. Какова степень риска при вложении средств в этот инструмент? Очевидно, что если средства инвестируются, например, на 1 месяц, и при этом покупается дисконтная облигация, до погашения которой остается ровно 1 месяц, то нет никакого риска, кроме риска дефолта. Действительно, через 1 месяц инвестор получит в той же самой валюте номинальную стоимость этой облигации, не больше и не меньше. Однако, если покупается облигация, до погашения которой остается больше месяца, то уже нельзя знать точно, за какую цену ее можно будет продать на вторичном рынке через 1 месяц. Инвестор сталкивается с риском изменения процентных ставок (почему он так называется, станет ясно ниже).

Пример. Инвестируются средства на 30 дней, для чего покупается за 943.40 руб. государственная облигация номиналом 1 тыс. руб., которая будет погашена через 90 дней. Нетрудно подсчитать, что если облигация удерживается до погашения, то доходность этой операции составляет 6.0%:

$$(1000 - 943.40)/943.40 = 0.060.$$

В этом случае говорят, что доходность облигации к погашению (*yield to maturity*) составляет 6.0%, или 24.3% в пересчете на год (365 дней) по простым процентам:

$$[(1000 - 943.40)/943.40] \cdot (365/90) = 0.243.$$

Общепринятый термин для ожидаемой доходности на рынке облигаций — «процентная ставка» (*interest rate*). В данном случае процентная ставка равна 24.3% или 0.243. Итак, инвестируя в облигацию средства на месяц, инвестор ожидает получить доходность в 24.3% годовых⁶⁴, или — в пересчете на 30 дней по простым процентам — примерно 0.02 (2.0%):

$$0.243 \cdot 30/365 = 0.020, \text{ или } ((1000 - 943.40)/943.40) \cdot (30/90) = 0.020.$$

Такую доходность инвестор получит только в том случае, если ситуация на рынке облигаций не изменится, т. е. и в будущем инвестиции в подобные облигации будут иметь доходность в 24.3% годовых (инвестор прогнозирует, что процентные ставки на рынке не изменятся). В этом случае через 30 дней облигация будет стоить 961.54 руб., что нетрудно проверить:

$$((1000 - 961.54)/961.54) \cdot (365/60) = 0.243.$$

Однако ожидания участников рынка по поводу стоимости денег за тот месяц, в течение которого инвестор владеет облигацией, могут измениться. Соответственно, доходность государственных ценных бумаг может увеличиться или уменьшиться. Предположим, что в стране ожидается некоторое увеличение темпа инфляции, значит, инвесторы будут требовать большую доходность и процентные ставки возрастут. Пусть через месяц процентная ставка по государственным ценным бумагам изменится и составит 28.0% годовых. Это значит, что доходность облигации, до погашения которой остается 60 дней, составит примерно:

$$0.280 \cdot 60/365 = 0.0460 \text{ или } 4.6\%.$$

Соответственно, цена такой облигации будет равна 956.00 руб., что нетрудно проверить:

$$((1000 - 956.00)/956.00) \cdot (365/60) = 0.280.$$

Таким образом, облигацию инвестор сможет продать только за 956.00 руб. вместо ожидавшихся 961.54 руб., т. е. получит доход 16.01 руб. вместо 18.14 руб. Риск налицо. Ситуация будет еще хуже, если средства на 1 месяц были бы вложены в облигацию со сроком до погашения не 90 дней, а 365 дней. В этом случае при увеличении процентной ставки на рынке инвестор не только не получит ожидаемого дохода, но и может потерпеть прямые убытки. Значит, риск зависит от того, на какой срок и в какую облигацию инвестированы средства.

Это простейший случай, в котором можно ограничиться очень грубыми, ориентировочными подсчетами. Чтобы перейти к более реальным

⁶⁴ Для простоты полагаем, что кривая доходности имеет плоскую форму (см. главу 1). Это означает, что процентные ставки на разные сроки одинаковы.

ситуациям, рассмотрим, как образуется цена облигации и от чего она зависит.

8.3.5. Ценообразование на облигации

Для начала несколько замечаний. Во-первых, по сложившейся практике, участники рынка облигаций оперируют не абсолютными значениями цен, а относительными ценами, выраженными в процентном отношении к номиналу облигации. Так, в предыдущем примере цена облигации будет не 943.40 руб., а 94.34% или просто 94.34. В теоретических работах по финансам часто относительную цену не выражают в процентах, соответственно, для теоретика цена будет 0.9434 руб.

Во-вторых, на рынке облигаций всегда предполагается возможность реинвестирования средств и полученного дохода, поэтому почти всегда вычисления проводятся по правилу сложных процентов. Это громоздко и неудобно, так что теоретики для компактности и простоты формул часто оперируют не самими ценами (относительными), а их логарифмами; такой переход дает возможность производить вычисления по правилам простых процентов, что очень облегчает теоретикам жизнь. Эти различия в подсчетах по простым и сложным процентам часто становятся источником путаницы, особенно если результаты расчетов получены из разных источников (к тому же на некоторых рынках принято считать, что в году 360 дней). Общим правилом для инвестора должно стать следующее: если не указаны расчетные формулы, то верить можно только биржевым данным о ценах реальных сделок.

Третья особенность рынка облигаций заключается в том, что на рынке не существует одной-единственной процентной ставки. Можно утверждать, что поскольку не существует двух полностью идентичных выпусков облигаций, то для каждого выпуска облигаций существует своя процентная ставка. Остановимся на этом моменте подробнее, для чего кратко рассмотрим ценообразование на облигации. Возьмем дисконтные государственные облигации. Они не имеют купонных платежей, их цена всегда ниже номинала. В каждый фиксированный день на рынке обращается множество различных дисконтных облигаций, отличающихся датой погашения. Каждая из них торгуется по своей цене, которая определяется временем до погашения (числом периодов — лет, месяцев или дней) T и процентной ставкой R_T , отражающей представления участников рынка о цене денег.

Если 100 — это относительная величина номинала, R_T ⁶⁵ — годовая процентная ставка и T — число дней до погашения, то

$$P = 100/(1 + R_T)^{T/365}. \quad (8.9)$$

Для теоретического исследования ту же формулу удобно переписать применив к обеим частям операцию логарифмирования:

$$p = -(T/365)r_T, \quad (8.10)$$

где $p = \log(P)$, $r_T = \log(1 + R_T)$.

Эта совокупность процентных ставок R_T в зависимости от времени до погашения T образует так называемую кривую спот-ставок, или кривую доходности (*yield curve*) (см. главу 1). Все агентства, поставляющие финансовую информацию с рынков развитых стран, приводят цифры кривой доходности на первой полосе.

Рассмотрим теперь ценообразование на купонные облигации. Прежде всего отметим, что любую купонную облигацию с фиксированными купонными платежами можно рассматривать как совокупность виртуальных дисконтных облигаций с номиналами, равными денежным платежам по облигации. Такое представление получило название «обдирание облигации», а весь набор полученных виртуальных дисконтных облигаций называют «ободранными облигациями», или стрипами (*strips*). Пусть выпущена купонная облигация с погашением через 3 года. Ежегодные купонные платежи составляют 10, 8 и 6 от номинала в первый, второй и третий год, соответственно. В третий год, кроме того, выплачивается номинал 100. Эту облигацию можно представить в виде набора из трех дисконтных облигаций: облигация номиналом 10 с погашением через 1 год; облигация номиналом 8 с погашением через 2 года; облигация номиналом 106 с погашением через 3 года. Цена рассматриваемой купонной облигации на совершенном рынке будет равна сумме цен всех ободранных облигаций:

$$P = 10/(1 + R_1) + 8/(1 + R_2)^2 + 106/(1 + R_3)^3,$$

где R_i ($i = 1, 2, 3$) — годовая процентная ставка на 1, 2 и 3 года, соответственно.

⁶⁵ Вопросы процентных вычислений подробно рассмотрены в пособии [Бухвалов, Бухвалова, 2009].

В общем виде формула цены купонной облигации в момент времени t выглядит следующим образом

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_{T_i}}{(1 + R_{T_i})^{T_i - t}} + \frac{100 + C_{T_n}}{(1 + R_{T_n})^{T_n - t}} = \sum_{i=1}^n \frac{CF_{T_i}}{(1 + R_{T_i})^{T_i - t}}, \quad (8.11)$$

где C_{T_i} — купон, выплачиваемый в момент T_i , $(T_i - t)$ — срок до i -го платежа по облигации, R_{T_i} — годовая процентная ставка на срок $(T_i - t)$, CF_{T_i} — размер i -го платежа, $(T_n - t)$ — срок до погашения облигации.

Часто эмитент предлагает полугодовой купонный период. В этом случае формула (8.11) останется справедливой, если все процентные ставки будут выражены не в годовом, а в полугодовом исчислении. Отметим, что на практике все же предпочитают работать с процентными ставками в годовом исчислении, тогда формула цены (8.11) несколько меняется. Из формул (8.9) и (8.11) видно, что чем выше процентная ставка и чем больше срок до погашения облигации, тем ниже ее цена. Из (8.11) также ясно, что чем больше купон и чем чаще он выплачивается, тем выше цена купонной облигации, — она вполне может быть выше номинала. Цена (8.11) есть не что иное, как сегодняшняя ценность (*present value*) всех будущих потоков платежей по облигации.

Особенность сделок с купонной облигацией заключается в том, что при продаже этой ценной бумаги на вторичном рынке покупатель должен выплатить продавцу часть купонного платежа, «накопившегося» у продавца за время владения облигацией, так называемый *накопленный купонный доход* (AI). Рассчитывается он из условия, что купонный платеж начисляется равномерно и ежедневно, включая выходные и праздничные дни. Таким образом, реальную цену сделки на рынке с купонной облигацией можно представить в виде суммы AI и так называемой чистой цены P_0 облигации:

$$P(t) = AI + P_0 = \frac{C_{T_i}}{T_i - T_{i-1}}(t - T_{i-1}) + P_0.$$

Поэтому цена (8.11) иногда называется «грязной» ценой облигации. Это не просто вопрос терминологии. Дело в том, что накопленный купонный доход выплачивается всегда, его величина для данной облигации зависит только от времени владения облигацией и не зависит от изменения процентных ставок на рынке. Можно считать, что AI не имеет никакого риска (даже риска дефолта). Риск изменения процентных ставок подвержена только «чистая» цена облигации. Различие становится очень

важным, если учитывать налоги (они могут быть разными для купонного дохода и для дохода от прироста капитала) и оптимизировать портфель облигаций по критерию «посленалоговая прибыль — риск». Для простоты будем оперировать только «грязными» ценами, пренебрегая нюансами налогообложения.

Итак, чтобы определить цену купонной облигации, необходимо знать кривую спот-ставок. Однако, поскольку дисконтных облигаций с длительными сроками до погашения (более года) на рынке мало, точно установить R_i на срок более 1 года затруднительно, поэтому процентные ставки кривой доходности на длительные сроки определяют из самосогласованного решения большого числа уравнений типа (8.11). Однако часто используют упрощенный подход, считая, что цена купонной облигации определяется так называемой внутренней нормой доходности IRR (*internal rate of return*) потока платежей. Это некоторая усредненная процентная ставка, относительно которой предполагается, что она будет действовать на протяжении всего срока обращения облигации. Ее можно вывести из следующего очевидного равенства:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{CF_{T_i}}{(1 + IRR)^{T_i - t}}. \quad (8.12)$$

Подчеркнем, что различие в формулах (8.11) и (8.12) носит принципиальный характер. Формула (8.11) свидетельствует о том, что мы можем определить справедливую цену купонной облигации, если знаем набор соответствующих процентных ставок (наблюдая за рыночной ценой других облигаций). Формула (8.12) принимает рыночную цену купонной облигации как истину в последней инстанции, а внутренняя ставка доходности является только удобным отражением этой цены, очень похожим на процентную ставку. Тем не менее и этот подход может быть полезным при оценке риска инвестирования в купонную облигацию. Для вычисления IRR в пакете Excel предусмотрена встроенная функция `ВНДОХ(...)`. В качестве аргументов этой функции необходимо использовать все денежные потоки, связанные с облигацией: `ВНДОХ(-P; CF1; CF2; ...; CFn)`. Функция `ВНДОХ(...)` будет использована в дальнейшем примере на рис. 8.12.

Последнее, о чем необходимо сказать, рассматривая ценообразование на рынке облигаций, это то, что цены негосударственных облигаций (муниципальных, корпоративных) всегда ниже, чем государственных ценных бумаг. Тем не менее в основу определения цены на эти облигации также положена кривая доходности по государственным обязательствам. Отра-

жая риск дефолта и частично риск ликвидности негосударственных ценных бумаг, участники рынка просто прибавляют некоторую премию к соответствующей процентной ставке по государственным облигациям. Так, если на кривой доходности процентная ставка на 1 год равна 5%, то процентная ставка по облигациям крупной корпорации на тот же срок может составлять 6%, а средней корпорации — 8%. О величине этой премии можно судить по рейтингам (*bond ratings*), который присваивают заемщикам ведущие рейтинговые агентства.

8.4. Риск инвестирования в облигацию

Теперь перейдем к риску. Риск на рынке облигаций связан, главным образом, с неопределенностью по поводу будущей цены денег, т. е. с неопределенностью будущих процентных ставок. Отражая переменчивые ожидания экономических агентов, процентные ставки постоянно меняются во времени. Динамике процентных ставок посвящено множество теоретических работ. Некоторые из теоретических моделей позволяют с той или иной степенью достоверности предсказать будущие процентные ставки, но эти модели здесь не рассматриваются. Будем считать будущую процентную ставку случайной величиной, параметры распределения которой можно найти, используя уже рассмотренный ранее исторический метод. Отличие заключается в том, что раньше оценивались параметры распределения доходности актива, используя историю цены на этот актив. Затем вычислялся нужный квантиль распределения и **VaR** портфеля. Теперь нужно будет оценивать параметры распределения процентной ставки, используя историю самой процентной ставки. Во-первых, для рынка облигаций она более доступна, чем цены реальных сделок с облигациями; во-вторых, облигации, риск которой нужно оценить, раньше вообще могло на рынке не существовать, соответственно, не было и истории цен на нее. Заметим, что если нет исторических данных по процентным ставкам, то самостоятельное построение этих временных рядов потребует много кропотливого труда даже в самых простых случаях. В общем же случае нужно будет построить множество кривых доходностей, из которых посредством интерполирования получить интересующие процентные ставки.

Еще одно важное отличие от использовавшегося ранее исторического метода заключается в том, что среднее значение процентной ставки в прошлом не играет существенной роли для оценки риска. Участники рын-

ка облигаций обычно полагают ожидаемые в будущем процентные ставки равными текущим ставкам, эти ставки их устраивают, поэтому они и покупают облигации. В большей степени их интересует изменчивость процентных ставок и связанный с этим риск инвестиций в облигации. Поэтому основные параметры, оцениваемые с помощью исторического метода, — дисперсия или стандартное отклонение процентных ставок. Оба этих параметра показывают, насколько волатильными были процентные ставки в прошлом. Далее делается предположение, что и в будущем изменчивость процентных ставок будет такой же.

Вообще говоря, вовсе не факт, что полученное из исторических данных эмпирическое распределение процентной ставки будет нормальным. Стоит ли его заменять нормальным распределением, — это большой вопрос, возможно, лучше будет воспользоваться методом интерполяции данных эмпирического распределения, чтобы определить квантиль требуемого порядка. Эта процедура будет обсуждаться ниже. Отметим только очень важный момент. Если раньше необходимо было интересоваться минимальной доходностью и искать квантиль низкого порядка (0.01 или 0.05), то теперь нужно интересоваться максимальной возможной процентной ставкой, поэтому нужно искать квантиль высокого порядка (0.95 или 0.99). Это и понятно, ведь если нужно знать уровень потерь, то это можно сделать, если определить минимально допустимую цену в будущем, а поскольку цена облигации и процентные ставки находятся в обратной зависимости, необходимо определить максимально допустимые процентные ставки.

Последовательность действий такова:

- вычислить ожидаемое значение цены облигации, предполагая, что кривая доходности останется неизменной (если оценивается риск корпоративных облигаций, то делается дополнительное предположение, что кредитный рейтинг эмитента и премия за кредитный риск по облигации останутся на том же уровне);
- по прошлым данным построить распределение процентной ставки;
- определить квантиль требуемого порядка (например, 0.95);
- вычислить максимальное отклонение процентной ставки от среднего значения;
- считая, что в будущем процентные ставки могут отклоняться от текущего значения на такую же величину, вычислить максимальную процентную ставку и минимальную цену облигации в будущем.

Пример. Инвестор вкладывает 100 тыс. руб. в государственные облигации сроком на 1 месяц. У него есть выбор — вложить деньги в дисконтные облигации со сроком до погашения 3 месяца (в данный момент процентная ставка по трехмесячным облигациям составляет 14% годовых) и 12 месяцев (процентная ставка на этот срок равна 21%). В первом случае инвестора интересует максимальное изменение в будущем процентной ставки сроком на 2 месяца, потому что через месяц он будет продавать на вторичном рынке свои облигации, до погашения которых осталось именно 2 месяца. Во втором случае инвестора, очевидно, должна интересовать будущая процентная ставка сроком на 11 месяцев. В левой части рис. 8.8 представлен ряд наблюдавшихся за последний год процентных ставок сроком на 2 месяца и 11 месяцев. (Если бы данных по ставке на 11 месяцев не было, то можно было бы воспользоваться процедурой интерполяции, используя данные по ставкам, например, на 6 и 12 месяцев). На этом же рисунке вычислены средние значения (математические ожидания) и стандартные (среднеквадратические) отклонения процентных ставок. Зная теперь параметры эмпирических распределений, можно произвести замену этих распределений на нормальные и вычислить квантили распределений, скажем, порядка 0.9 (правая часть рисунка рис. 8.8). Это значит, что для вычисления VaR используется доверительный уровень 90%. Далее легко вычислить наблюдавшееся за последний год максимальное изменение процентных ставок с доверительной вероятностью 90%. Используя формулу (8.9), вычислим текущие и ожидаемые цены облигаций (считая, что через месяц ставки не изменятся), а также минимальные уровни цен облигаций, которые с вероятностью 90% будут превышены. При расчете минимальной цены предполагается, что ожидаемая ставка с вероятностью 90% не повысится более чем на величину наблюдавшегося максимального изменения процентных ставок. Исходя из определения **VaR**, можно оценить на доверительном уровне 90% риск при вложении средств в одну облигацию как разницу между минимальным уровнем цены на облигацию и ожидаемой ценой на нее. VaR портфеля из одинаковых облигаций можно получить, умножая VaR одной облигации на число облигаций в портфеле. На 100 тыс. руб. можно купить 1033 трехмесячных облигаций, и VaR портфеля будет равен — 122.79 руб. Аналогично, можно купить 1210 облигаций со сроком погашения 1 год, и VaR портфеля будет равен 616.45 руб. Сравнивая цифры доходности и риска, можно сделать вывод о том, куда нужно вкладывать средства.

Продолжим работу с этим же примером. В предыдущих расчетах предполагалось, что будущее распределение процентных ставок является нормальным, и параметры распределения оценивались, исходя из истории процентной ставки за последний год. Однако, как это видно из рис. 8.9, гистограмма эмпирического распределения мало похожа на нормальное

A		B		C		E	F	G
		Процентные ставки (% годовых)				Сумма денег 100 тыс. руб.	Дисконтная облигация на 3 мес. номиналом 100 руб.	Дисконтная облигация на 12 мес. номиналом 100 руб.
1				на 11 месяцев				
2		на 2 месяца				Текущая ставка (% годовых)	14.00	21.00
3	Январь 99	12.60	20.60			Текущая цена облигации (руб.)	$=+100/(1+F2/100)^{(3/12)}$	$=+100/(1+G2/100)^{(12/12)}$
4	Февраль 99	13.10	21.20			Ожидаемая через 1 месяц цена облигации (руб.)	96.78	82.64
5	Март 99	13.60	21.70			Мак ставка (% годовых) с доверит. вероятностью 90%	$=+100/(1+F2/100)^{(2/12)}$	$=+100/(1+G2/100)^{(11/12)}$
6	Апрель 99	13.80	21.80			Мин ставка (% годовых) с доверит. вероятностью 90%	97.84	83.97
7	Май 99	13.60	21.60			VAR облигации (руб.) на доверительном уровне 90%	$=+F2-B18$	$=+G2-C18$
8	Июнь 99	12.20	20.40			Число облигаций в портфеле	14.83	21.81
9	Июль 99	12.40	20.30			Ожидаемый доход от инвестиций (руб.)	97.72	83.46
10	Август 99	13.20	21.20			VAR портфеля (руб.) на доверительном уровне 90%	$=+F6-F4$	$=+G6-G4$
11	Сентябрь 99	13.40	21.40			Число облигаций в портфеле	-0.119	-0.509
12	Октябрь 99	14.40	22.30			Ожидаемый доход от инвестиций (руб.)	$=\text{ЦЕЛОЕ}((100000/F3))$	$=\text{ЦЕЛОЕ}((100000/G3))$
13	Ноябрь 99	14.20	22.20			Ожидаемый доход от инвестиций (руб.)	1033	1210
14	Декабрь 99	13.60	21.70			Ожидаемый доход от инвестиций (руб.)	$=+(F4-F3)*F8$	$=+(G4-G3)*G8$
15	Среднее значение (% годовых)	$=\text{СРЗНАЧ}(B3:B14)$	$=\text{СРЗНАЧ}(C3:C14)$			Ожидаемый доход от инвестиций (руб.)	1037.57	1601.19
16	Среднеквадр. отклонение (% годовых)	$=\text{СТАНДОТКЛОНП}(B3:B14)$	$=\text{СТАНДОТКЛОНП}(C3:C14)$			Ожидаемый доход от инвестиций (руб.)	$=+F8*F7$	$=+G8*G7$
17	Квантиль порядка 0.9 (% годовых)	$=\text{НОРМОБР}(0.9;B15;B16)$	$=\text{НОРМОБР}(0.9;C15;C16)$			Ожидаемый доход от инвестиций (руб.)	-122.79	-616.45
18	Мак изменение % ставки с доверит. вероятностью 90%	$=+B17-B15$	$=+C17-C15$					
19		0.83	0.84					

Рис. 8.8. Оценка риска инвестирования в облигации: а) оценка изменчивости процентных ставок; б) оценка VaR для портфеля дисконтных облигаций

распределение. Покажем, как использовать метод интерполяции для оценки квантиля нужного порядка прямо из эмпирического распределения.

Пример. Рассмотрим инвестиции в облигацию со сроком погашения 12 месяцев. Исходя из данных, представленных на рис. 8.8, можно предположить, что с вероятностью $11/12 = 0.917$ уровень процентной ставки на срок 11 месяцев будет не выше 22.3%, и с вероятностью $10/12 = 0.833$ — не выше 22.2%. Предположим, необходимо вычислить квантиль 0.9, т. е. величину процентной ставки, которая не будет превышена с вероятностью 90%. Используя формулу (8.8), найдем, что искомый эмпирический квантиль равен 22.28%:

$$22.2\% + (22.3\% - 22.2\%)(0.9 - 0.833)/(0.917 - 0.833) = 22.28\%$$

На рис. 8.9 вычислены также соответствующие этому квантилю максимальная процентная ставка, минимальное значение цены облигации и VaR облигации и портфеля для тех же условий, что и на рис. 8.8. Разница между цифрами, приведенными на рис. 8.8 и 8.9, достаточна заметна. Какой из этих двух подходов использовать, аналитик должен решить сам.

Как вычислить VaR для купонной облигации, цена которой определяется несколькими процентными ставками на разные периоды? Строго говоря, необходимо знать, как изменяются все процентные ставки, определяющие цену этой купонной облигации. Чаще всего эти изменения происходят в одном и том же направлении, причем обычно процентные ставки на короткий срок более изменчивы, чем ставки на длительные сроки. Однако на рынке может сложиться ситуация, когда процентные ставки на короткий срок и на длинные сроки движутся в разных направлениях, при этом меняется сам вид кривой доходности. Как быть в этом случае? Можно использовать концепцию ободранных облигаций, она позволяет представить купонную облигацию в виде портфеля нескольких дисконтных облигаций, т. е. нескольких активов, каждый из которых имеет свою ожидаемую доходность (процентную ставку), коэффициент корреляции с доходностью других активов (т. е. других процентных ставок), а также дисперсию доходности (дисперсию процентной ставки). Относительная величина купона служит весовым коэффициентом, с которым соответствующая ободранная (дисконтная) облигация входит в этот гипотетический портфель. Далее можно использовать любые описанные в главах 8, 9 методы оценки риска портфеля активов.

Описанный подход математически строг, но сложен для применения. На практике считают, что изменения денежно-кредитной политики центрального банка страны смещают всю кривую доходности целиком, т. е.

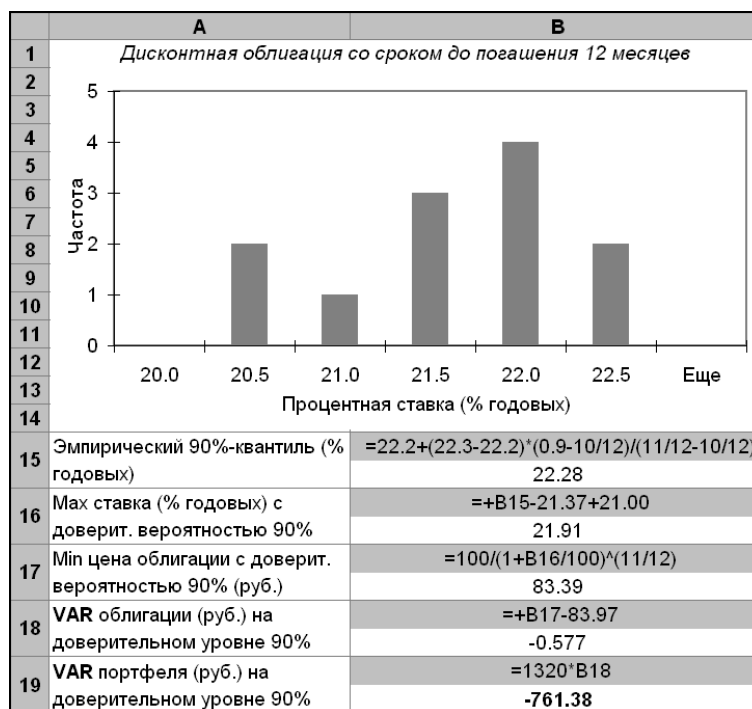


Рис. 8.9. Расчет VaR для портфеля дисконтных облигаций

	А	В	С	Д
1	Купонная облигация номиналом 100 руб., сроком до погашения 3 года, с ежегодным купоном 18%			
2	Денежные выплаты по облигации (руб.)	в 1-й год	во 2-й год	в 3-й год
3		18	18	118
4	Текущие процентные ставки (% годовых)	на 1 год	на 2 года	на 3 года
5		21.0	22.0	23.0
6	Ожидаемые процентные ставки (% годовых)	21.0	22.0	23.0
7	Стандартное отклонение от ожидаемых % ставок	0.629	0.629	0.629
8	Мах ставки (% годовых) с доверит. вероятностью 90%	$=НОРМОБР(0,9;B6;B7)$ 21.81	$=НОРМОБР(0,9;C6;C7)$ 22.81	$=НОРМОБР(0,9;D6;D7)$ 23.81
9	Накопленный за 1 месяц купонный доход (руб.)	$=+B3*1/12$ 1.50		
10	Текущая цена облигации (руб.)	$=+B3/(1+B5/100)+C3/(1+C5/100)^2+D3/(1+D5/100)^3$ 90.38		
11	Ожидаемая "грязная" цена облигации (руб.)	$=B3/(1+B6/100)^{(11/12)}+C3/(1+C6/100)^{(23/12)}+D3/(1+D6/100)^{(35/12)}$ 91.92		
12	Min "грязная" цена облигации (руб.) с доверит. вероятностью 90%	$=+B3/(1+B8/100)^{(11/12)}+C3/(1+C8/100)^{(23/12)}+D3/(1+D8/100)^{(35/12)}$ 90.46		
13	VAR облигации (руб.) на доверительном уровне 90%	$=+B12-B11$ -1.46		

Рис. 8.10. Оценка VaR для купонной облигации

все процентные ставки изменяются на одну и ту же величину. Для примера на рис. 8.10 вычислены ожидаемая цена, минимальная цена и VaR для трехлетней облигации с ежегодными купонными выплатами по 18% от номинала при условии, что все процентные ставки изменяются синхронно на одну и ту же величину. Видно, что риск вложений на 1 месяц в купонную облигацию выше, чем в случае дисконтных облигаций при примерно одинаковых возможных изменениях процентных ставок. Это неудивительно, так как до выплаты основной суммы долга по рассмотренной купонной облигации слишком большой срок — 3 года.

8.4.1. Использование дюрации и выпуклости облигации для оценки риска

Из рассмотренных примеров ясно, что цены различных облигаций в разной степени реагируют на изменение процентных ставок — чем «длиннее» облигация (чем больше срок до погашения), тем сильнее реакция. Степень влияния изменения процентных ставок на цену облигации можно выразить численно, с помощью двух коэффициентов. Один из них в финансовой теории получил название «модифицированная дюрация» (*duration*), другой — «коэффициент выпуклости» (*convexity*). Подробнее о дюрации и выпуклости речь пойдет в Приложении 8.5. Обозначим эти коэффициенты MD и Cnv , тогда изменение цены облигации при изменении процентных ставок можно выразить следующим образом:

$$\Delta P = -MDP\Delta R + 1/2Cnv P(\Delta R)^2, \quad (8.13)$$

где P — текущая цена облигации, а ΔR и ΔP — изменения процентной ставки и цены облигации.

Фактически, если изменение процентных ставок мало, то для многих типов облигаций можно ограничиться только первым членом уравнения (8.13), однако при значительных изменениях ΔR вклад второго члена может стать весомым. Значения модифицированной дюрации и коэффициента выпуклости часто приводятся эмитентами при выпуске новых облигаций или рассчитываются организаторами займа, информационными аналитическими агентствами; впрочем, их вполне можно вычислить самостоятельно. Используя эти коэффициенты, значения VaR определить очень легко. На рис. 8.11 представлены расчеты дюрации и выпуклости для рассмотренных выше дисконтных облигаций и вычислены изменения цен (т. е. VaR) с использованием формулы (8.13) при условиях, аналогичных приведенным в примерах на рис. 8.8. Видно, что точность вычислений

	А	В	С
1	Облигация	Дисконтная на 3 мес. номиналом 100 руб.	Дисконтная на 12 мес. номиналом 100 руб.
2	Текущая ставка (% годовых)	14.00	21.00
3	Ожидаемая ставка (% годовых)	14.00	21.00
4	Мак изменение ставки (% годовых) на доверит. уровне 90%	0.84	0.81
5	Модифицированная дюрация (Приложение 10.1)	$=2/12/(1+B2/100)$ 0.146	$=11/12/(1+C2/100)$ 0.758
6	Выпуклость облигации (Приложение 10.1)	$=2/12*(2/12+1)/(1+B3/100)^2$ 0.150	$=11/12*(11/12+1)/(1+C3/100)^2$ 1.200
7	Текущая цена облигации (руб.)	$=100/(1+B2/100)^(3/12)$ 96.78	$=100/(1+C2/100)^(3/12)$ 82.64
8	Ожидаемая цена облигации (руб.)	$=100/(1+B3/100)^(2/12)$ 97.84	$=100/(1+C3/100)^(11/12)$ 83.97
9	Мак изменение цены облигации (руб.) на доверит. уровне 90%	$=C7*C13*C5/100+0.5*C9*C13*(C5/100)^2$ -0.119	$=C7*C13*C5/100+0.5*C9*C13*(C5/100)^3$ -0.509
10	VAR облигации (руб.) на доверит. уровне 90%	$=+B9$ -0.119	$=+C9$ -0.509

Рис. 8.11. Использование дюрации для оценки VaR дисконтной облигации

достаточно высока, результаты совпадают с точными расчетами по формуле (8.9).

Формулу (8.13) можно использовать и для купонных облигаций, однако возникает резонный вопрос: изменение какой процентной ставки использовать? Как оценить риск купонной облигации на развивающемся рынке, на котором процентные ставки (кривая доходности) точно вообще неизвестны? Можно предложить следующую процедуру. Зная текущую цену и параметры облигации (срок до погашения, величину купонов и периодичность их выплат), вычислим *IRR* облигации (внутреннюю ставку доходности) по формуле (8.12). На совершенном рынке *IRR* должна быть близка к процентной ставке некоей гипотетической дисконтной облигации, эквивалентной рассматриваемой купонной (эквивалентность понимается в смысле одинаковой подверженности риску инвестиций). Можно показать, что в этом смысле любая купонная облигация эквивалентна дисконтной облигации со сроком до погашения, равным некоторому числу *DM*. *DM* — это параметр, введенный Масаулау (*дюрация Маколи*), выраженный в единицах временного периода (см. Приложение 8.5). Так, например, трехлетняя купонная облигация с ежегодными платежами в 18% от номинала имеет дюрацию Маколи, равную 2.54 года, т. е. в определенном смысле эквивалентна дисконтной облигации со сроком до погашения 2.54 года (о вычислении *DM* см. Приложение 8.5). Таким образом, определив эффективное время жизни *DM* купонной облигации, мы можем сопоставить ей спот-ставку на срок *DM*. Далее, применив исторический метод, можно определить параметры распределения этой спот-ставки и использовать

	А	В	С	Д	Е
1	Купонная облигация (срок до погашения 3 года, ежегодный купон 18%)				
2					
3	Текущая цена облигации (руб.)	90.38			
4		0-й год	1-й год	2-й год	3-й год
5	Денежный поток (руб.)	-90.38	18.00	18.00	118.00
6	Внутренняя норма доходности IRR (% годовых)	=ВНДОХ(В5:Е5)			
		0.228			
7	Модифицированная дюрация (Приложение 10.1)	=(C5/(1+B6)+D5*2/(1+B6)^2+E5*3/(1+B6)^3)/B3/(1+B6)			
		2.072			
8	Выпуклость облигации (Приложение 10.1)	=(C5*1*2/(1+B6)+D5*2*3/(1+B6)^2+E5*3*4/(1+B6)^3)/B3/(1+B6)^2			
		6.360			
9	Мах изменение ставки (% годовых) на доверит. уровне 90%	=НОРМОБР(0.9;B6*100;0.629)-B6			
		0.81			
10	Ожидаемая "грязная" цена облигации (руб.)	91.92			
11	Мах изменение цены облигации на уровне 90%	=-B7*B3*B9/100+0.5*B8*B3*(B9/100)^2			
		-1.491			
12	VAR облигации (руб.) на доверит. уровне 90%	=+B13			
		-1.49			

Рис. 8.12. Использование дюрации и выпуклости для оценки **VaR** купонной облигации

квантиль этого распределения для вычисления VaR купонной облигации. Например, для предыдущего случая среднее значение спот-ставки на 2.5 года составляло 22.5%, а стандартное отклонение было равно 0.64% (интерполированные данные из рис. 8.10). Значит, квантиль порядка 0.95 для спот-ставки на 2.5 года равен 23.55%, т. е. с вероятностью 95% процентная ставка не изменится более, чем на 1.05%, и мы можем предположить, что с вероятностью 95% внутренняя ставка доходности по купонной облигации также не изменится более, чем на $\Delta IRR_{0.95} = 1.05\%$. Теперь VaR облигации вычислить очень легко, предварительно рассчитав параметры MD и Cnv :

$$VaR_{0.95} = \Delta P = -MD \cdot \Delta IRR_{0.95}P + 1/2CnvP(\Delta IRR_{0.95})^2. \quad (8.14)$$

Пример вычислений в пакете Excel приведен на рис. 8.12. Результаты расчетов расходятся с результатами, полученными по точным формулам, однако погрешность вычислений приемлема для практических целей.

Почему аналитики предпочитают использовать формулы (8.13) и (8.14) вместо расчетов по точным формулам? В основном для простоты и наглядности. Ведь в этом случае длинную купонную облигацию можно описать не десятком процентных ставок, а всего двумя параметрами, причем во многих случаях используют только один параметр — модифицированную дюрацию.

8.4.2. Риск портфеля облигаций. Минимизация риска

Рассмотрим, как определить риск портфеля, состоящего из различных облигаций. Можно выделить два подхода. Первый заключается в том, что весь портфель можно представить как совокупность реальных дисконтных облигаций, имеющихся в портфеле, и ободранных облигаций (*стрипов*), полученных от каждой купонной облигации. Все эти облигации можно рассматривать как активы, параметры распределения доходности которых (матрицу ожидаемых доходностей и матрицу ковариации) можно оценить, используя исторический метод. Далее можно воспользоваться методами оценки риска портфеля активов, описанными в главе 8. Ясно, что эта вычислительная процедура слишком сложна.

Другой подход заключается в том, чтобы представить весь портфель в виде одной гипотетической дисконтной облигации, вычислив дюрацию Маколи для портфеля. Для спот-ставки, соответствующей этому значению дюрации, следует определить параметры распределения и квантиль нужного порядка. Затем необходимо вычислить модифицированную дюрацию и выпуклость портфеля, после чего легко определить *VaR* портфеля. Такой подход ясен и прост, тем более что вычислить параметры DM , Cnv , MD для любого портфеля очень легко, зная соответствующие параметры для каждой отдельной облигации в портфеле

$$DM_P = \sum_{i=1}^N w_i DM_i, \quad Cnv_P = \sum_{i=1}^N w_i Cnv_i, \quad MD_P = \sum_{i=1}^N w_i MD_i, \quad (8.15)$$

где w_i — доля средств, вложенных в i -ю облигацию, N — число разных облигаций в портфеле.

В качестве примера на рис. 8.13 рассмотрен портфель из двух дисконтных и одной купонной облигации, которые использовались нами ранее. В примере на рис. 8.13 предполагалось, что возможное максимальное изменение процентных ставок одно и то же для всех типов облигаций. Это означает, что кривая доходности может смещаться целиком на одну и ту же величину — 0.81% годовых.

В заключение коснемся вопроса оптимизации портфеля облигаций. Как известно, существует несколько методов управления портфелем облигаций, каждый из них требует отдельного подробного рассмотрения с тем, чтобы понять, где, когда и какие риски возникают, тем более что в портфель часто включают производные финансовые инструменты (фьючерсы, валютные и процентные свопы, форвардные соглашения и т. п.).

	A	B	C	D
1	Портфель облигаций			
2	Тип облигации в портфеле	Дисконтная, срок погашения 3 мес.	Дисконтная, срок погашения 12 мес.	Купонная, на 3 года, ежегодный купон 18%
3	Текущая цена облигации (руб.)	96.78	82.64	90.38
4	Число облигаций в портфеле	516	364	221
5	Ожидаемая цена облигации	97.84	83.97	91.92
6	Доля средств, вложенных в данные облигации	$=B3*B4/B9$	$=C3*C4/B9$	$=D3*D4/B9$
7	Модифиц. дюрация облигации	0.146	0.758	2.072
8	Выпуклость облигации	0.150	1.200	6.360
9	Текущая стоимость портфеля (руб.)	$=B3*B4+C3*C4+D3*D4$		
		99993.42		
10	Ожидаемая стоимость портфеля (руб.)	$=B5*B4+C5*C4+D5*D4$		
		101364.840		
11	Максимальное изменение % ставок на доверит. уровне 90%	0.806		
12	Дюрация портфеля	$=B7*B6+C7*C6+D7*D6$		
		0.715		
13	Выпуклость портфеля	$=B8*B6+C8*C6+D8*D6$		
		1.706		
14	VAR портфеля облигаций (руб.) на уровне 90%	$=B12*B10*B11/100+0.5*B13*B10*(B11/100)^2$		
		-578.40		

Рис. 8.13. Оценка VaR портфеля различных облигаций

Мы остановимся на одном из так называемых пассивных методов — методе иммунизации портфеля, предполагающем, что значительные средства инвестируются на длительный срок для получения требуемой доходности, соответствующей некоторой процентной ставке на кривой доходности. Идея заключается в следующем: будущие денежные потоки, генерируемые портфелем, будут в меньшей степени критичны к небольшим изменениям процентных ставок, если портфель формируется таким образом, что дюрация Маколи для портфеля равна сроку, на который инвестируются средства. Это достигается подбором доли средств w_i , вложенных в конкретные облигации. Очевидно, что если на рынке много разных облигаций с различными сроками до погашения, то сформировать иммунизированный портфель можно по-разному. Можно наложить дополнительное условие — минимизацию выпуклости портфеля, — что сделает портфель менее критичным к сильным изменениям процентных ставок.

Возможна иммунизация портфеля и в более общем случае. Пусть фирма имеет свободные денежные средства и обязательства выплатить в будущем в определенные моменты времени определенные суммы денег. Для этого денежного потока обязательств так же, как для обычной купон-

ной облигации, можно вычислить дюрацию Маколи, выпуклость и модифицированную дюрацию. Имеющиеся свободные средства фирма хочет вложить в облигации. Какие облигации следует приобрести, чтобы получить доход и при этом иметь возможность расплатиться по обязательствам независимо от изменения процентных ставок? Оптимальный (иммунизированный) портфель будет состоять из такого набора облигаций, чтобы модифицированная дюрация и выпуклость портфеля были как можно ближе к дюрации и выпуклости потока ваших обязательств. Если же прогнозируется, что в будущем процентные ставки будут снижаться, то можно рискнуть увеличить выпуклость портфеля при сохранении той же величины дюрации. Действительно, при снижении процентных ставок это приведет к росту цен облигаций и, следовательно, дополнительной прибыли. Увеличения выпуклости при сохранении дюрации легче всего достигнуть, формируя так называемый гантельный портфель, состоящий в основном из долгосрочных и краткосрочных облигаций, среднесрочные (по отношению к срокам обязательств) бумаги в таком портфеле отсутствуют. Но величину риска необходимо строго контролировать, и концепция **VaR** в этом случае просто незаменима.

8.5. Вычисление VaR для производных инструментов

К основным производным инструментам срочного рынка, используемым в управлении финансовыми рисками, традиционно относятся форвардные (*forwards*) и фьючерсные (*futures*) контракты, опционы (*options*), и своп контракты (*swap*). Все производные инструменты характеризуются тем, что цена инструмента жестко определяется ценой базового актива. Базовым активом форвардных, фьючерсных контрактов и опционов могут быть и акция, и рыночный индекс, и процентная ставка, и иностранная валюта, и корзина облигаций, и биржевой товар. Следует заметить, что базовым активом опциона чаще всего является фьючерсный контракт.

Важнейший момент в оценке рисков производных инструментов — функциональная связь между ценой производного инструмента и ценой базового актива. Эта связь может быть линейной и нелинейной — в зависимости от этого к оценке риска портфелей, содержащих производные инструменты, применяются разные подходы. Для оценки риска инструментов, цена которых линейно зависит от цены базового актива, в принципе, можно применить все ранее рассмотренные методы, несколько моди-

фицировав их для конкретного инструмента. В качестве примера в этом разделе рассмотрим фьючерсный контракт на акцию (линейная зависимость цены производного инструмента от цены базового актива) и оценим риск портфеля, содержащего этот инструмент. Вкратце также рассмотрим особенности оценки риска портфеля, содержащего форвардный контракт. Оценить риск некоторых производных инструментов (таких как опционы) и риск портфеля, содержащего такие инструменты, ранее рассмотренными методами не представляется возможным. Это связано с тем, что цена опциона нелинейно зависит от цены базового актива. Поэтому вначале рассмотрим простой метод, позволяющий оценить *VaR* подобных инструментов — так называемый дельта-гамма метод.

8.5.1. Дельта-гамма метод оценки риска производных инструментов

Поясним, в чем состоит сложность оценки риска некоторых производных инструментов. Предположим, что на рынке обращается инструмент, цена P_D которого жестко связана с ценой S базового актива некоторым сложным нелинейным образом: $P_D = Y(S)$, причем распределение цены базового актива описывается нормальным распределением или даже любым другим распределением, квантиль которого мы можем определить, используя исторический метод. Как вычислить квантиль распределения цены производного инструмента?

Из-за нелинейности функции $Y(S)$ искусственное построение распределения цены P_D является сложной математической задачей, но даже если решить эту задачу, то оценка риска с использованием меры риска «дисперсия» даст совершенно неправильный результат, а оценка риска по квантилю распределения цены P_D (мера **VaR**) может оказаться не совсем корректной. Построение распределения цены P_D по историческим данным о ценах производного инструмента вообще не имеет смысла. Дело в том, что производный инструмент создается решением сторон сделки, и инструмента, риск которого сейчас оценивается, при определенных ценах базового актива могло не существовать вообще. Например, опцион с ценой страйк 100 руб. будет «создан» биржей только в том случае, если цена на базовый актив достигнет примерно этого уровня. Если затем цена базового инструмента резко снизится, мы не сможем воспользоваться историей цен на производный инструмент, потому что при столь низких ценах опциона с такой ценой исполнения просто не было. Таким образом, мы не обладаем «полной» историей цен на многие производные инструменты.

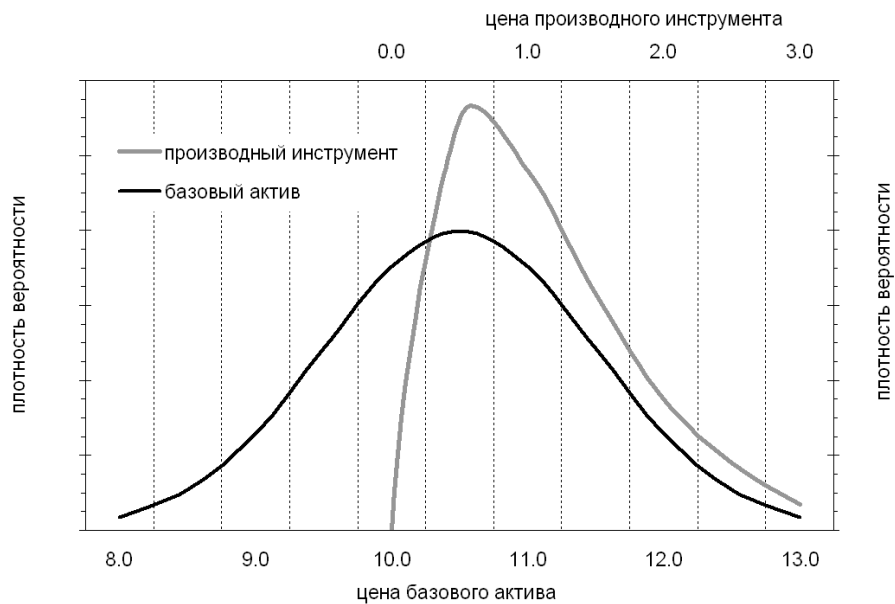


Рис. 8.14. Вероятностное распределение стоимости базового актива и цены опциона

Этот пропуск в истории приведет к совершенно неверному распределению.

Пример. Базовый актив — обыкновенная акция, распределение цены которой характеризуется нормальным распределением с параметрами 10.5 руб. (математическое ожидание) и 1 руб. (стандартное отклонение). Нетрудно подсчитать, что $VaR(S)_{0.95} = -1.65$ руб. Пусть цена производного инструмента равна $P = (S - 10)$, если $S > 10$ руб., и $P = 0$, если $S < 10$ руб. (отметим, что наш производный инструмент похож на колл-опцион со страйкинговой ценой 10 руб. и с небольшим сроком до исполнения). В настоящий момент акция стоит 10.5 руб., следовательно, можно купить колл-опцион за 0.5 руб. Каков риск покупки опциона? Если построить распределение цены опциона, очевидно, оно будет примерно таким, как изображено на рис. 8.14 (ведь отрицательной цены быть не может). Явно видно, что квантиль 0.05 этого распределения будет больше нуля (хотя и не намного), и, следовательно, $VaR(P)_{0.95}$ опциона будет несколько больше, чем (-0.5) руб. (примерно -0.45 руб.). Теперь рассмотрим другой подход. С вероятностью 95% цена акции будет выше 8.85 руб. Значит, при некоторых вариантах развития событий, из тех, которые принимаются как возможные, а именно — в диапазоне цен от 8.85 руб. до 10 руб., цена

производного инструмента будет нулевой. И поскольку вероятность этого высока, то, значит, с вероятностью 95% цена производного инструмента будет больше нуля, но не больше 0.05 руб., как это следует из предыдущего анализа, т. е. на самом деле $VaR(P_D)_{0.95}$ в точности равен -0.5 руб.

Разница в цифрах, казалось бы, невелика, но она носит принципиальный характер. Второй подход более справедлив. Разница в ответах получилась потому, что при первом подходе во всех ситуациях, когда цена базового инструмента была меньше 10 руб., рассмотренный производный инструмент просто никому не был нужен, поэтому в этих ситуациях как бы и не было истории цен на него. Итак, действуя в рамках второго подхода, чтобы определить VaR производного инструмента с нелинейной зависимостью цены от цены базового актива, необходимо найти минимально допустимую цену на базовый актив, затем определить минимальную цену производного инструмента. Разность между этой минимальной ценой и текущей ценой P_D инструмента и будет оценкой риска инвестирования:

$$VaR_{0.95}(P) = Y(S_{0.05}) - P_D,$$

где $S_{0.05}$ — 5%-й квантиль распределения цены базового актива.

Работать с нелинейными функциями не очень приятно, поэтому для удобства в финансовой практике поступают следующим образом: раскладывают это выражение в ряд Тейлора до квадратичного члена. Нетрудно проверить, что в результате получается:

$$VaR_{0.95}(P_D) = \left. \frac{\partial Y}{\partial S} \right|_{S_0} VaR(S)_{0.95} - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} \right|_{S_0} (VaR(S)_{0.95})^2,$$

где S_0 — текущая цена базового актива.

Таким образом, зная VaR базового актива, легко определить VaR производного инструмента, если известны числа $\partial Y / \partial S = \delta$ и $\partial^2 Y / \partial S^2 = \gamma$. Эти числа получили название дельта- и гамма-коэффициентов, а сам приближенный метод, использующий эту формулу, называется дельта-гамма методом. Коэффициенты δ и γ , вообще говоря, могут сильно меняться при изменении цены базового актива. Их величина табулируется для ряда значений S из возможного диапазона изменений цен базового актива. Для наиболее важных производных инструментов, таких как опционы, значения δ и γ можно найти с помощью специальных программ — опционных калькуляторов, — встраиваемых во все финансовые пакеты. Кроме того, опционные калькуляторы широко представлены в сети Интернет на

сайтах многих ведущих финансовых компаний и бирж, торгующих опционами. Эти коэффициенты во многих случаях можно вычислить самостоятельно (формулы для вычисления δ и γ европейских опционов приведены в Приложении 8.7).

Важно отметить, что дельта-гамма метод имеет принципиальное ограничение — он справедлив только в том случае, если изменения цены базового актива невелики по сравнению с текущей ценой. Поэтому пытаться оценивать риск производного инструмента на большие периоды некорректно, и это может привести к значительным ошибкам. Оценка возможна только на короткий период (реально на срок не более недели), после чего риск необходимо оценивать заново, исходя из новой цены базового актива.

8.5.2. Фьючерсный контракт. Хеджирование риска

Фьючерсный контракт на акцию представляет собой обязательство купить или продать некоторое стандартное количество акций (базовый актив) в определенный в контракте день и по определенной цене (цене контракта). Это определение поставочного контракта. Но следует заметить, что многие фьючерсные контракты предполагают не физическую поставку базового актива, а денежные расчеты по спот-цене (*spot*) базового актива в день, предшествующий дню исполнения контракта.

Фьючерсный контракт — это биржевой инструмент, все его параметры, за исключением цены, строго фиксированы. Контракт заключается решением сторон, т. е. обязательство одной стороны купить сопровождается обязательством другой стороны продать. При заключении контракта вносится гарантийный взнос (*initial margin*), который обычно составляет 10–20% от цены контракта. Гарантийный взнос расходуется на выплату так называемой вариационной маржи (*variable margin*). По мере расходования гарантийный взнос должен постоянно восполняться (*maintenance margin*). Это является дополнительным фактором риска, так как необходимо всегда иметь свободные средства для пополнения гарантийного вноса. Отметим, что при исполнении контракта или закрытии контракта за счет совершения противоположной операции (офсетная сделка) гарантийный взнос возвращается.

Для чего нужно включать в портфель подобный инструмент? Причин несколько. Одна из них заключается в том, что фьючерсный контракт дает возможность высокоспекулятивной игры с большим финансовым рычагом. Действительно, если инвестор купил базовый актив и назавтра

актив поднялся в цене на 5%, то получится 5% прибыли. Если же инвестор купил фьючерсный контракт и базовый актив повысился в цене на 5% (следовательно, как будет показано далее, и цена контракта поднимется на 5%), то прибыль составит примерно 50%, так как фактически для заключения контракта необходимы средства в размере гарантийного взноса, а это около 10% от цены базового актива.

Другая причина заключается в том, что фьючерсный контракт позволяет резко уменьшить риск портфеля. Действительно, пусть инвестор купил базовый актив в виде пакета акций за 9 тыс. руб. и продал контракт по цене 9 тыс. 500 руб., заплатив только 1 тыс. руб. гарантийного взноса. Теперь, что бы ни случилось с ценой пакета (повышение до 10 тыс. руб. или падение до 8 тыс. руб.), инвестор в день исполнения контракта продаст свои акции кому-то, кто купил такой контракт, за 9 тыс. 500 руб., т. е. получит 5% прибыли, казалось бы, без всякого риска. Технически все выглядит несколько иначе. Например, инвестор продаст акции за 8 тыс. руб., но ему будет начислена вариационная маржа 1 тыс. 500 руб. и возвращен гарантийный взнос 1 тыс. руб., или: инвестор продаст акции за 10 тыс. руб., выплатит вариационную маржу 500 руб. и получит обратно гарантийный взнос 1 тыс. руб. В любом случае в сумме получится 10 тыс. 500 руб. Такая операция — покупка базового актива и продажа фьючерсного контракта или продажа базового актива и покупка фьючерсного контракта, — называется хеджированием (*hedging*). В первом случае это так называемый хедж производителя, или длинный хедж (*long hedge* — длинная позиция по базовому активу), во втором — хедж потребителя или короткий хедж (*short hedge* — короткая позиция по базовому активу).

Третья причина — возможность быстрого переключения позиций с одного сектора рынка на другой — часто применяется в управлении фондами. Идея заключается в следующем. Если вы владеете акциями немецких предприятий и хотите перейти на американский фондовый рынок, то можно продать фьючерсы на индекс немецких акций и купить фьючерсы на индекс американских акций. Произведя, таким образом, двойной хедж, вы получаете время, чтобы организовать продажу немецких и покупку американских акций по разумным ценам, снизив для себя риск ликвидности.

И наконец, фьючерсные контракты дают возможность уходить от налогов на прирост капитала. Если вы хотите зафиксировать прибыль по акциям, так как чувствуете, что скоро они должны упасть в цене, вы можете продать фьючерсные контракты и после падения цен на акции

купить контракты обратно. Акции остаются нетронутыми, а вы должны заплатить налоги только на прибыль по фьючерсным сделкам. Существует и много других способов уменьшения рисков, особенно при использовании фьючерсных контрактов по разным базовым активам и на различные сроки.

8.5.3. Оценка риска фьючерсного контракта

Рассмотрим, как можно оценить риск фьючерсного контракта. Возможны два крайних случая: первый — фьючерсный контракт покупается (или продается) на очень короткий срок задолго до даты исполнения контракта. Тогда, как видно из Приложения 8.6, можно считать, что цена контракта прямо пропорциональна спот-цене базового актива, следовательно, распределение доходности по контракту имеет тот же вид, что и для базового актива. Однако численные параметры этого распределения сильно отличаются из-за влияния финансового рычага.

Пример. Пусть для простоты базовым активом фьючерсного контракта является 1 тыс. акций компании АБВ. Пусть спот-цена акции составляет 8 руб., значит, 1 тыс. акций стоит 8 тыс. руб. Предположим, что ожидаемая дневная доходность по акции составляет 0.005 (т.е. 0.5%), а среднеквадратичное отклонение — 0.01 или 1%. Таким образом, VaR акции на доверительном уровне 95% на инвестиционном горизонте в один день равен

$$VaR_{0.95} = 0.005 - 1,65 \cdot 0.01 = -0.0115, \text{ или } -1.15\%.$$

В денежном выражении VaR портфеля из 1000 акций будет равен

$$VaR_{0.95} = -0.0115 \cdot 1000 \cdot 8 = -92 \text{ руб.}$$

Предположим теперь, что на один день покупается фьючерсный контракт на 1 тыс. акций компании АБВ, до истечения срока которого остается 1 год, по цене 8 тыс. 500 руб., гарантийный взнос 1 тыс. руб. Ожидаемая цена контракта составит $8500(1 + 0.005) = 8543$ руб. После продажи контракта будет возвращен гарантийный взнос, кроме того, будет начислена ожидаемая вариационная маржа в размере $8543 - 8500 = 43$ руб. Ожидаемая доходность этой операции $(1000 + 43 - 1000)/1000 = 0.043$ или 4.3%. В то же время с вероятностью 95% цена акции не упадет ниже, чем $8000(1 - 0.0115) = 7908$ руб., и это значит, что на завтра цена контракта с вероятностью 95% будет выше, чем 8402 руб. в предположении, что процентные ставки на рынке не изменятся. Значит, с вероятностью 95% доходность операции с фьючерсом будет не ниже, чем $(8402 - 8500)/1000 = -0.098$ или -9.8%. Это и есть $VaR_{0.95}(F)$ фьючерсного контракта (по доходности). В денежном выражении $VaR_{0.95}(F)$ фьючерса будет равен, очевидно, -98 руб.

В общем виде

$$VaR_{0.95}(F) = VaR_{0.95}(S)F/G \quad (\text{по доходности}) \quad (8.16)$$

$$VaR_{0.95}(F) = VaR_{0.95}(S)F/S \quad (\text{в денежном выражении}), \quad (8.17)$$

где F — цена контракта, S — спот-цена базового актива, G — величина гарантийного вноса.

Если гарантийный взнос составляет 10% от спот-цены базового актива, то, очевидно, ожидаемая доходность фьючерсного контракта будет примерно в 10 раз больше, а дисперсия — в 100 раз больше, чем для базового актива. VaR контракта (по доходности) также будет примерно в 10 раз больше. Однако, если от доходности перейти к реальным деньгам, то VaR контракта будет почти тем же самым, что и для базового актива. Все это следует из линейной зависимости между изменением цены базового контракта и изменением цены контракта.

Рассмотрим другой крайний случай, когда фьючерсный контракт покупается (или продается) на длительный срок, вплоть до даты исполнения контракта. Как видно из Приложения 8.6, в день исполнения контракта цена фьючерса будет в точности равна спот-цене базового актива. Предположим, что процентная ставка за все время действия контракта не меняется. Предположим также, что спот-цена базового актива за все время действия контракта не меняется. Это малореальные предположения, но даже в этом случае цена фьючерсного контракта не будет неизменной. С течением времени она будет снижаться, если в момент заключения контракта цена фьючерса была выше спот-цены (т. е. на рынке наблюдалась ситуация контанго), и будет повышаться, если на рынке ситуация бэквордейшн (цена фьючерса ниже спот-цены), что может быть характерно только для фьючерсных контрактов на биржевые товары или валюту.

Предположим, что наблюдается ситуация контанго (иначе говоря, что базис, т. е. разница между ценой фьючерса и спот-ценой, положительна). В нашем примере, если контракт куплен (длинная позиция), необходимо будет выплатить вариационную маржу и понести убытки. Риск этой позиции в данном примере нетрудно оценить: $VaR = S - F$, где F — цена фьючерсного контракта, S — цена базового актива. Если инвестор в короткой позиции, то он получит вариационную маржу; казалось бы, риска нет, но кто может быть уверен, что ситуация на рынке будет развиваться по такому сценарию? Аналогично, в ситуации бэквордейшн $VaR = F - S$. Таким образом, значение $VaR = -|F - S|$, где $|F - S|$ — абсолютное значение базиса. Это оценка риска на уровне 50%, а поскольку вариантов всего

два, то эта оценка будет справедлива и на любых других, более высоких уровнях.

Выше предполагалось постоянство процентной ставки и цены базового актива, на самом же деле это величины изменчивые. Значит, можно утверждать, что риск фьючерсного контракта имеет три компоненты: первая связана с риском изменения цены базового актива, вторая — с риском изменения краткосрочных процентных ставок и третья компонента обусловлена спекулятивными ожиданиями рынка. Можно ли оценить риск фьючерсного контракта (подсчитать VaR в общем случае? Строго говоря, точный подсчет произвести затруднительно, можно провести только оценку VaR фьючерсного контракта в предположении, что процентные ставки неизменны. В соответствии с этими рассуждениями VaR фьючерса будет равен сумме VaR , обусловленного изменчивостью цены базового актива, и VaR , обусловленного «неправильной» позицией по контракту:

$$VaR_{0.95}(F) = VaR_{0.95}(S) - |F - S|. \quad (8.18)$$

В промежуточном случае, когда контракт предполагается ликвидировать до истечения его срока, последнее слагаемое нужно подкорректировать на множитель $1 - \exp(-RT)$, где T — время до истечения контракта, R — краткосрочная процентная ставка. Графическая иллюстрация этих рассуждений представлена на рис. 8.15.

Оценим риск хеджированного портфеля, содержащего базовый актив и фьючерсный контракт. В соответствии с рассуждениями о хеджировании, приведенными ранее, может показаться, что совершенный хедж вообще не имеет риска. Однако это не так — риск заключается в том, что необходимо выплачивать вариационную маржу, и в определенных ситуациях может не хватить на это средств, тогда позиции по контракту будут принудительно ликвидированы и убытки зафиксированы. Выплата вариационной маржи связана только с наличием в портфеле фьючерсного контракта, поэтому присутствие базового актива никак не влияет на риск портфеля. Из приведенной выше формулы видно, что риск фьючерсного контракта даже несколько выше, чем риск базового актива. Таким образом, закрадывается мысль, что хеджирование фьючерсным контрактом не снижает никаких рисков, но зато строго фиксирует доходность в определенный момент времени (в день исполнения контракта) некоторой положительной величиной.

На первый взгляд, здесь есть определенное противоречие. Кажется, если зарезервировать достаточное количество средств для покрытия ва-

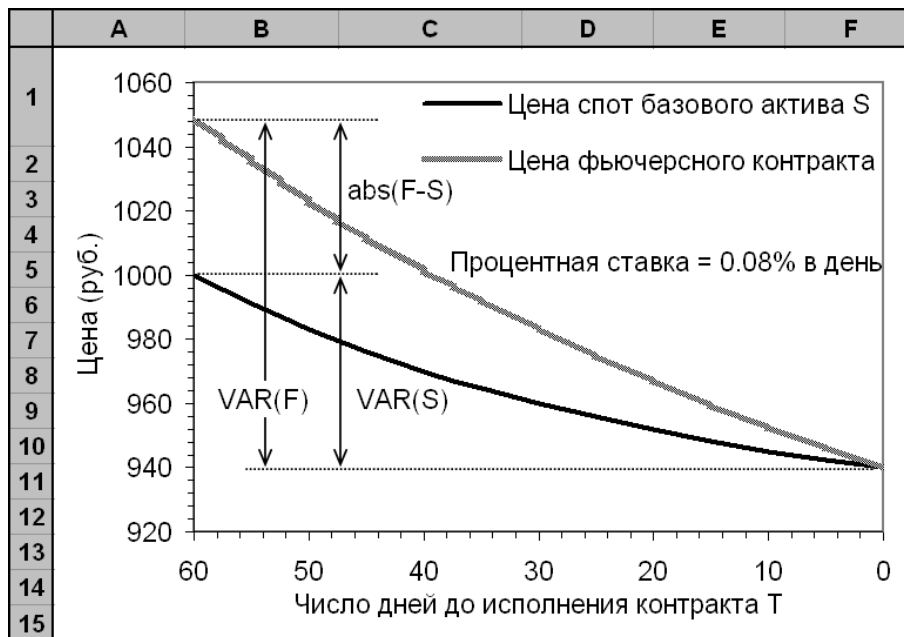


Рис. 8.15. VaR фьючерсного контракта

риационной маржи, то можно полностью избежать всякого риска и получить запланированную прибыль. Это так, но доходность такого портфеля (базовый актив + фьючерс + деньги) может оказаться очень низкой, проще и, возможно, даже несколько выгоднее всю эту сумму поместить в банк под проценты или приобрести короткие государственные облигации. Разница в полученной доходности оказывается особенно ощутимой, если формируется портфель с высоким финансовым левериджем.

Пример. Рассмотрим случай полного отсутствия финансового левериджа. Предположим, что у инвестора имеется 1 млн руб, и он решил купить базовый актив, спот-цена которого составляет 800 тыс. руб. и фьючерсный контракт на этот же актив с исполнением через 30 дней по цене 810 тыс. руб., для чего нужно внести гарантийное обеспечение в 100 тыс. руб., кроме того, зарезервировано 100 тыс. руб. для выплаты вариационной маржи. Предположим, что в течение всего срока контракта цена базового актива падала, так что ежедневно начислялась вариационная маржа. Через 30 дней результат будет следующим: $810 + 100 + 100 = 1010$ тыс. руб., и доходность этой операции составит 1%. Легко подсчитать, что если бы было зарезервировано не 100 тыс. руб., а только 25 тыс. руб.,

то доходность портфеля была бы 1.08%. Рассмотрим теперь случай высокого финансового левириджа. Предположим, что у инвестора имеется 200 тыс. руб. собственных средств и еще 800 тыс. руб. взято в долг под 1% в месяц с обязательством выплатить через 30 дней 808 тыс. руб. Предположим, формируется тот же самый портфель, что и в предыдущем случае. Через 30 дней результат будет — те же 1010 тыс. руб., из которых 808 тыс. руб. нужно немедленно перечислить в счет погашения долга. Останется 202 тыс. руб., т.е. доходность операции составит 1%, — стоило ли занимать деньги? Можно было бы отдать их в долг под этот же процент. Но если бы было зарезервировано не 100 тыс. руб., а только 25 тыс. руб., то доходность портфеля за 30 дней составила бы 1.6%, но и риск портфеля стал бы намного выше.

На практике, однако, ситуация может оказаться значительно сложнее. Многое зависит от типа фьючерсного контракта (поставочный контракт или индексный), от принятой методики расчета котировочной цены контракта, от особенностей маржинальных требований, устанавливаемых биржей, от размера комиссионных брокеру, наконец, от особенностей налогообложения прибыли по срочным сделкам. В любом случае на практике оценку риска фьючерсного контракта необходимо начинать с тщательного изучения спецификации контракта.

8.5.4. Риски форвардного контракта

Рассмотрим вкратце некоторые особенности оценки риска, связанного с форвардными контрактами на товар. Форвардный контракт — это не биржевой инструмент, его параметры не фиксированы, никакой вариационной маржи не выплачивается, хотя обычно форвардные контракты предусматривают гарантийное обеспечение. Ликвидность форвардных контрактов низкая, и в отличие от фьючерсов многие форвардные контракты завершаются физической поставкой базового актива. Значит, риск форвардного контракта можно оценить так же, как и риск фьючерсного контракта в случае, когда фьючерс удерживается до момента исполнения. Поскольку выплата вариационной маржи не предусматривается, комбинация «биржевой товар + форвардный контракт» не имеет риска, и такой портфель является безрисковым. В этой связи большой интерес представляет портфель, состоящий из форвардных и фьючерсных контрактов.

Например, можно заключить форвардный контракт на продажу 100 т нефти и купить 100 фьючерсных контрактов на поставку 1 тонны нефти каждый. Казалось бы, позиция очень выигрышная: если цена нефти падает, то в день исполнения форвардного контракта можно купить де-

шевую нефть и выиграть на форвардном контракте, хотя и проиграть на фьючерсах из-за выплаты вариационной маржи. Если цена нефти растёт, то выплачивается вариационная маржа по фьючерсам, но возникает проигрыш по форвардному контракту. И в любом случае будет заметная прибыль, определяемая разницей справедливых цен форвардного и фьючерсных контрактов (дело в том, что в стоимости форвардного контракта учитываются издержки, связанные с хранением базового актива нефти). Какие возникают риски? Во-первых, это все риски, связанные с фьючерсными контрактами. Действительно, сроки денежных платежей по форварду и фьючерсу никак не могут совпадать, хотя бы потому, что вариационную маржу нужно вносить ежедневно, а все платежи по форварду происходят в день исполнения контракта. Во-вторых, риски, связанные с неполным совпадением базового актива и поставляемого по форварду товара (марка нефти может несколько отличаться, что, возможно, приведет к незначительному рассогласованию в динамике цены фьючерса и спот-цены нужной нефти). В-третьих, различие сроков исполнения форвардного и фьючерсных контрактов; возможно, будет некоторый временной промежуток, когда фьючерсы уже проданы, поскольку завтра их исполнение, а срок форварда еще не наступил. В это время портфель не будет хеджированным, следовательно, станет полностью подвержен риску, связанному с изменчивостью цены базового актива.

8.5.5. Опционы и опционные стратегии хеджирования риска

Опционы бывают двух типов: колл (*call*) и пут (*put*). Кроме того, опцион может быть двух видов: американский и европейский. Европейский колл опцион — это инструмент, который предоставляет владельцу право, но не накладывает обязанность, купить базовый актив по заранее оговоренной цене (цене исполнения опциона — *striking price*) в определенный момент времени (дата исполнения — *expiration date*). Аналогично, опцион пут (*put*) дает право, но не обязанность, продать базовый актив. Опцион создается решением сторон сделки, однако продавец опциона (*writer*) несет обязательство по выполнению условий контракта, в то время как покупатель (*holder*) имеет право решать, будет ли контракт исполняться. За это право выбора покупатель платит продавцу премию, эта премия и есть цена опциона. Опционы так же, как и фьючерсы, часто являются биржевыми инструментами. Обычно на бирже предлагаются опционы не только с различными датами исполнения, но и с различными ценами исполнения. Так как продажа опциона (короткая позиция) связана с принятием обязательств, то продавец опциона вносит гарантийный взнос и выплачивает

(или получает) вариационную маржу. Покупка опциона (длинная позиция) обычно не связана с какими-либо взносами и выплатами. Отметим, что концепция опциона широко используется в теории финансов, так как многие традиционные инструменты также предполагают необязательную возможность совершения какого-то действия. В этом случае говорят о встроенном опционе, примером может служить облигация с правом досрочного погашения эмитентом.

Пример. Пусть куплен за 10 руб. колл опцион с ценой исполнения 100 руб. и датой исполнения через 1 месяц, базовым активом которого является акция. Если через месяц цена акции будет меньше 100 руб., то покупатель может не исполнять опцион и потеряет только премию, которую заплатил продавцу, т. е. убыток составит 10 руб. Если цена акции будет больше 100 руб., например, 120 руб., то выгодно исполнить опцион и купить акцию у продавца опциона за 100 руб. Если сразу же продать полученную акцию за 120 руб., то прибыль составит $120 - 100 - 10 = 10$ руб. или 100%. На самом деле нет нужды перепродавать акцию, можно продать сам опцион, теперь его рыночная цена будет 20 руб.

Из этого примера видно, что в опционе изначально заложен огромный эффект финансового рычага, что делает этот инструмент чрезвычайно привлекательным для спекулятивной игры. Однако опционы активно используются и для хеджирования риска, технику которого поясним на примере пут опциона. Например, имея базовый актив (акцию) и желая застраховаться от падения цены на него, можно приобрести пут опцион на этот актив. Если цена акции будет расти, можно не исполнять опцион, если же цена акции будет падать, можно исполнить опцион и продать акцию по (высокой) цене исполнения. Отметим, что эта стратегия (длинная позиция по базовому активу и пут опциону) эквивалентна покупке колл опциона, по сути, чисто спекулятивной операции. Комбинация короткой позиции по пут и длинной позиции по колл (с одной и той же датой и ценой исполнения) создает искусственный форвардный контракт. Можно указать и много других способов использования опционов.

Ценообразование на опционы кратко рассмотрено в Приложении 8.7. Из формулы Блэка — Шоулза, приведенной в Приложении 8.7, видно, что на цену опциона влияют пять факторов:

- краткосрочная процентная ставка,
- изменчивость цены базового актива,
- доход, выплачиваемый по базовому активу,
- время, оставшееся до исполнения опциона,
- внутренняя стоимость опциона, т. е. прибыль от разницы цены исполнения и спот-цены базового актива.

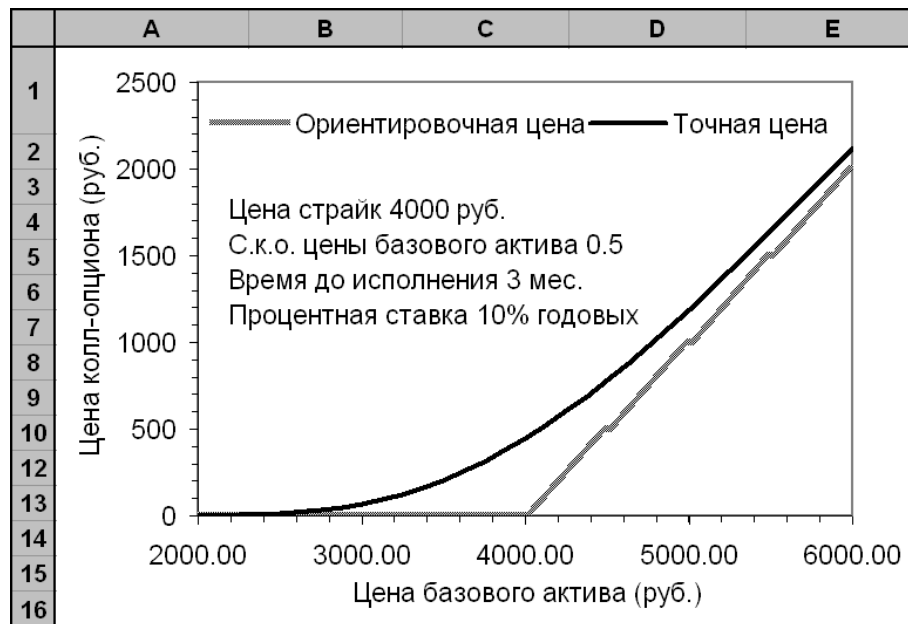


Рис. 8.16. График цены колл-опциона

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что процентная ставка неизменна, доход по базовому активу не выплачивается, волатильность (изменчивость цены) базового актива с течением времени не меняется. Время фиксировано (оцениваем риск на определенную дату), следовательно, меняется лишь внутренняя стоимость опциона (*expiration value*). Это изменение фактически обусловлено только изменением цены базового актива. Можно показать, что даже при сделанных выше предположениях зависимость цены опциона от цены базового актива имеет нелинейный характер (рис. 8.16). Как оценить риск опциона? Простейший способ предполагает использование дельта-гамма метода, который был рассмотрен ранее. Для этого должны быть известны коэффициенты дельта δ и гамма γ для данного конкретного опциона. Изменение цены, например, колл-опциона в зависимости от изменения цены базового актива описывается формулой:

$$\Delta P_{\text{call}} = \delta \Delta S + \gamma (\Delta S)^2, \quad (8.19)$$

где ΔS — изменение цены базового актива, ΔP_{call} — изменение цены опциона колл.

Если известно значение $VaR(S)$ базового актива, то $VaR(\text{call})$ опциона легко определить:

$$VaR_{0.95}(\text{call}) = \delta VaR_{0.95}(S) + \gamma (VaR_{0.95}(S))^2. \quad (8.20)$$

Отметим только, что вследствие сильной нелинейной зависимости $P_{\text{call}} = P(S)$ значения коэффициентов δ и γ зависят от цены базового актива. Так, например, для колл опциона при возрастании цены базового актива (относительно цены исполнения опциона) коэффициент δ может меняться от нуля до единицы. Значения коэффициентов дельта и гамма, а также других специфических коэффициентов (тэта, вега, ро), характеризующих изменение цены конкретного опциона при изменении условий на рынке, можно получить, используя специальные программы (*option calculator*), представленные в Интернете на сайтах крупных финансовых компаний и бирж.

Используя формулу (8.19), можно определить риск портфеля, содержащего комбинацию однотипных опционов. Если портфель содержит несколько разных опционов на один и тот же базовый актив, но, например, с разными ценами и датами исполнения, можно подсчитать коэффициенты дельта δ_p и гамма γ_p всего портфеля:

$$\begin{aligned} \delta_p &= \delta_1 N_1 + \delta_2 N_2 + \dots + \delta_N N_S, \\ \gamma_p &= \gamma_1 N_1 + \gamma_2 N_2 + \dots + \gamma_N N_S, \end{aligned}$$

где N_i — число одинаковых опционов (N_i положительно в случае длинной позиции по опциону, отрицательно — в случае короткой позиции), S — число различных опционов (различающихся страйком, типом, датой исполнения) в портфеле.

Короткая позиция предполагает выплату вариационной маржи и, следовательно, возникают специфические риски вариационной маржи, аналогичные рискам фьючерсного контракта.

Такой подход справедлив в случае спекулятивных портфелей, формируемых на коротких горизонтах. Как можно оценить риски в случае, если опционы в портфеле удерживаются по дату исполнения? Могут встретиться и несколько необычные ситуации, поэтому количественной оценке риска портфеля опционов должен предшествовать анализ возможных ситуаций в будущем. Для примера рассмотрим комбинацию опционов, называемую стрэнглом (*strangle*) — короткие позиции по колл и пут опционам с одинаковыми датами исполнения, но разными страйками (ценами исполнения). В данном случае речь идет о продаже стрэнгла, позиция принесет максимальную прибыль, равную сумме премий по обоим опционам

$P_{\text{call}} + P_{\text{put}}$, если цена базового актива в момент исполнения будет находиться в диапазоне между страйком пут опциона X_{put} и страйком колл опциона X_{call} . В других ситуациях эта позиция менее прибыльна, а при сильных изменениях цены — убыточна (рис. 8.17). Пусть в момент продажи стрэнгла цена базового актива составляла S . Очевидно, что если цена базового актива станет ниже цены исполнения пут опциона, уменьшенной на сумму премий, $S < X_{\text{put}} - (P_{\text{call}} + P_{\text{put}})$, то будет убыток, и в этой ситуации риск портфеля $VaR(\mathcal{P})$ можно оценить следующим образом:

$$v_1 = VaR(\mathcal{P})_{0.95} = P_{\text{call}} + P_{\text{put}} - X_{\text{put}} + (S - \Delta S_{0.95}).$$

Если цена базового актива станет значительно выше цены исполнения колл опциона $S > X_{\text{call}}$, также будет убыток, и в этой ситуации **VaR** портфеля $\mathcal{P}$ можно оценить так:

$$v_2 = VaR(\mathcal{P})_{0.95} = P_{\text{call}} + P_{\text{put}} + X_{\text{put}} - (S + \Delta S_{0.95}).$$

где $(\Delta S)_{0.95}$ — максимальное изменение цены вверх или вниз актива с доверительной вероятностью 95%.

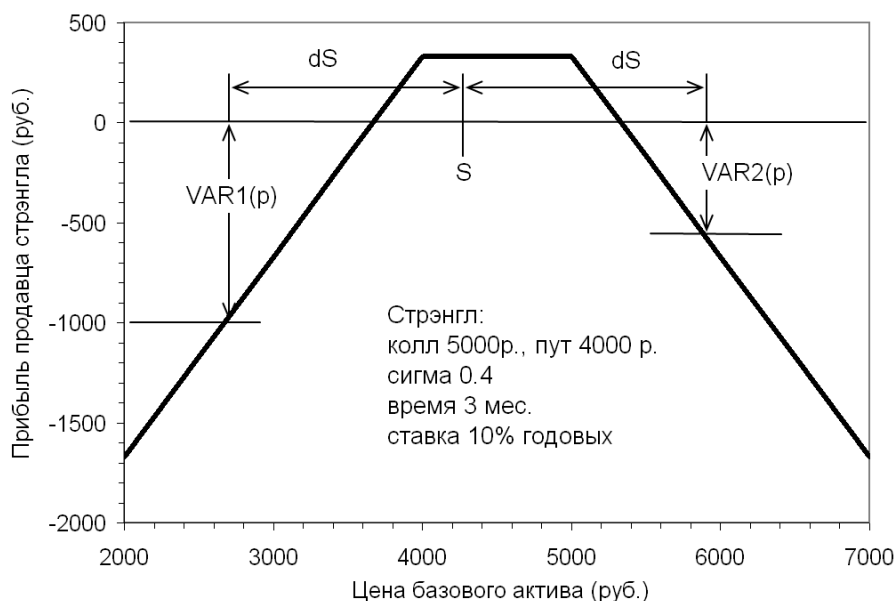
Если оценивать полный риск портфеля в обеих ситуациях, необходимо ориентироваться на худшую возможность. VaR портфеля будет равен максимальному из двух возможных значений потерь, т. е.: $VaR_{0.95}(\mathcal{P}) = \min\{v_1, v_2\}$.

8.6. Стохастический метод моделирования риска

8.6.1. Моделирование динамики цен

Чаще всего оценка VaR проводится по распределению доходности актива. Однако концепция **VaR** может быть применена непосредственно к цене. Для этого необходимо предположить, что цена актива в определенный момент в будущем является случайной величиной, с математическим ожиданием и стандартным отклонением, которые и определяются из истории цен на актив. Далее можно вычислить квантиль распределения требуемого порядка, это и будет VaR сразу в денежном выражении.

Как уже отмечалось ранее, такой подход не очень хорош, потому что параметры распределения определяются на основании ряда цен в прошлом на достаточно большом промежутке времени (тем больше, чем больше период, на котором вычисляется VaR). А для многих важных активов цены имеют выраженную тенденцию к повышению (восходящий

Рис. 8.17. **VaR** опционной комбинации

тренд). В условиях восходящего тренда значение математического ожидания окажется заниженным, а стандартного отклонения — завышенным. Особенно ярко это проявляется для облигаций. Для этих инструментов указанный эффект столь силен, что оценка риска методом, описанным в предыдущем абзаце, даст совершенно неверные результаты.

Однако рассматриваемый подход оказывается очень продуктивным, если оценивается риск портфеля, содержащего производные инструменты. Дело в том, что многие важные производные инструменты предполагают ежедневные расчеты по маржинальным требованиям. Это создает особый риск. Например, инвестор купил фьючерс в надежде, что цена базового актива через месяц вырастет и он сможет продать фьючерс с немалой выгодой. Но ситуация сложилась так, что всю первую неделю владения контрактом цена базового актива снижалась, и инвестор вынужден был ежедневно платить вариационную маржу. В результате к концу недели у него не хватило денег, и контракт был принудительно закрыт биржей, естественно, с большим убытком для инвестора. Дальнейшее развитие событий показало, что еще через три недели цена базового актива все-таки выросла до тех уровней, которые инвестор и ожидал, но контракт уже

закрыт и получены убытки вместо прибыли. Этого бы не случилось, если бы инвестор зарезервировал больше денег для маржинальных выплат, но для того, чтобы количественно оценить необходимый запас денег, нужно вычислить VaR не только на конец периода инвестиций (в данном случае через месяц), но и на каждый день в течение этого месяца. Казалось бы, и в этом случае можно использовать все те подходы, которые рассматривались в предыдущих разделах. Но теперь задача сильно усложнится, потому что нужно знать множество распределений доходности на самые разные периоды (на день, два дня, три и т. д., вплоть до месяца — применительно к этому примеру). Ясно, что построение такого множества распределений для расчета VaR на каждый день просто нереально.

Выход заключается в том, чтобы попытаться спрогнозировать все движение будущей цены на весь период, образно говоря, нарисовать график, по которому пойдет цена в течение ближайшего месяца. Ясно, что точный вид этого графика никому не известен. Поэтому скажем осторожнее, — можно попытаться нарисовать линию возможного движения цены. Может, именно по этой линии будет двигаться цена в будущем, что, конечно, исключительно маловероятно. Идея заключается в том, чтобы нарисовать множество таких линий возможного движения цены, так что они закрасят целую область на графике «цена — время». Дальше можно будет вычислить (образно говоря, по густоте линии), какова вероятность того, что действительная цена в такой-то день попадет в такой-то ценовой диапазон. Как нарисовать хотя бы одну линию возможного движения цены, или, говоря научным языком, как смоделировать движение цены во времени? Ответ может быть таким: на основании анализа движения цены в прошлом нужно попытаться найти вероятностный закон, которому было подчинено изменение цены актива в прошлом времени и, как предполагается, будет подчиняться в будущем. Для этого необходимо знать, как менялась цена во времени в прошлом. Если будет найден закон, которому подчинялась динамика цены в прошлом, то можно будет спрогнозировать (с какой-то вероятностью) движение цены в будущем. Это первый шаг в вычислении VaR стохастическим методом.

В данной главе не рассматривается проблема поиска вероятностных законов изменения цены для конкретных активов. Моделей, описывающих динамику цены разных активов, существует множество, эти модели могут включать в качестве параметров различные финансовые или экономические показатели (темп инфляции, разность между доходностями длинных и коротких государственных ценных бумаг, индекс ВВП и т. д.).

Но все эти модели объединяет то, что они содержат случайную компоненту. В этом разделе примем как данное одну из самых простых и эффективных моделей, — модель, представляющую динамику цены актива как геометрическое броуновское движение:

$$p(t) = \mu + p(t-1) + \varepsilon(t; m; \sigma), \quad (8.21)$$

где $p(t) = \log(P(t))$ — логарифм цены актива в момент времени t , $p(t-1)$ — логарифм цены актива в предыдущий момент времени $t-1$, $\mu = \text{const}$ — параметр, показывающий силу трендового движения, а $\varepsilon(t; m; \sigma)$ — независимая случайная величина с нулевой автокорреляцией, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием $m = 0$ и стандартным отклонением, не зависящим от времени: $\varepsilon(t) \in N\{m, \sigma\}$, $\sigma = \text{const}(t)$. Параметр t (число дней, на которые инвестируются средства) меняется от 1 (завтра) до T .

Движение цены, которое подчиняется закону (8.21), называют случайными блужданиями с трендом. Отметим, что эта модель приводит к тому, что распределение цены актива в любой момент времени будет подчиняться не нормальному распределению, а так называемому логарифмически нормальному распределению, более правдоподобному для реальных активов, обращающихся на рынке. Такой тип распределения, в частности, означает, что цена никогда не может стать отрицательной.

Оценим риск инвестирования в актив, используя конкретную вероятностную модель динамики цены. Главная задача — вычислить VaR актива (портфеля) в любой день в течение всего периода инвестирования. Для этого существует очень наглядный и чрезвычайно эффективный метод, который получил название стохастического метода, или метода Монте-Карло.

8.6.2. Метод Монте-Карло

Поясним идею данного метода на очень упрощенном примере. Предположим, что, наблюдения за ценой актива в течение долгого времени показывают, что динамика цены описывается следующим вероятностным законом:

$$P(t) = P(t-1) + \varepsilon(t; -0.1, +0.1; 0.5, 0.5),$$

где $P(t)$ — цена актива в момент времени t , а $\varepsilon(\dots)$ — случайная величина, которая может с равной вероятностью принимать значения -0.1 руб. или $+0.1$ руб.

Начинаем расчеты с сегодняшнего дня. Пусть цена актива сегодня составляет $P(0) = 7.5$ руб. Значит, завтра ($t = 1$) цена $P(1)$ может быть либо 7.4 руб., либо 7.6 руб., в зависимости от того, какое значение примет завтра случайная величина $\varepsilon(t)$. Будем кидать монетку: если выпадет орел, будем считать, что $\varepsilon(t) = -0.1$ руб., если решка, то $\varepsilon(t) = +0.1$ руб. Пусть выпала решка $\varepsilon(1) = 0.1$, значит $P(1) = 7.6$ руб. Кинем еще раз, предположим, снова выпала решка $\varepsilon(2) = 0.1$, значит, послезавтра цена будет $P(2) = 7.7$ руб. Продолжая бросать монетку, в конце концов построим ряд цифр $P(1), P(2), P(3), \dots, P(T)$, которые показывают возможное движение цены. Таким образом, с помощью простой процедуры были сгенерированы случайные числа и тем самым синтезирован временной ряд возможных цен. Такой метод, использующий для определения каких-либо величин генерацию случайных чисел, называется методом Монте-Карло.

Это исключительно простой пример. Можно было бы предположить другой вероятностный закон движения цены актива. Например, $\varepsilon(t)$ — случайная величина, которая может с равной вероятностью принимать любые значения в диапазоне от -0.1 руб. до $+0.1$ руб., или $\varepsilon(t)$ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением 0.05 руб. Суть метода не изменится, просто монетку в качестве генератора случайных чисел использовать станет невозможно, необходимо будет прибегнуть либо к специальным таблицам случайных чисел, либо к помощи компьютера. Генерация случайных чисел в пакете Excel описана в Приложении 8.9.

Продолжим работу с этим простым примером. Ясно, что, скорее всего, построенный временной ряд цен в реальности окажется неверным. Естественно, нельзя утверждать, что цена актива будет меняться именно так, но такой ряд цен возможен, как, впрочем, возможны и другие ряды. Их тоже можно сгенерировать с помощью описанной процедуры. Для этого просто необходимо повторить весь опыт сначала. Получится еще один возможный ряд цен, например: $P(0) = 7.5$, $P(1) = 7.4$, $P(2) = 7.5$ и т. д. Вновь и вновь будем повторять опыт сначала и в конце концов получим множество возможных временных рядов цен (скажем, 100 рядов). Теперь сконцентрируем внимание на множестве значений $P(2)$. Это возможные будущие цены послезавтра. Очевидно, что в данном примере будет только пять возможностей: $P(2) = 7.3$, $P(2) = 7.4$, $P(2) = 7.5$, $P(2) = 7.6$, $P(2) = 7.7$. Подсчитаем, сколько раз в этом множестве значений $P(2)$ встретится значение 7.5, и разделим на число опытов, полученное число и будет вероятностью того, что послезавтра цена актива будет равна

7.5 руб. Действуя аналогичным образом, можно определить вероятность того, что через 5 дней цена актива будет равна, например, 7.7 руб. Для этого необходимо проанализировать множество сгенерированных значений $P(6)$. Нетрудно догадаться, что можно определить и более важную для оценки риска величину, — с какой вероятностью цена актива через 5 дней превысит, например, 7.4 рубля. Или можно определить **VaR**, установив посредством описанных вычислений, какое пороговое значение цена превысит с вероятностью 95% (при этом 95% сгенерированных возможных значений цены будут больше порогового значения, которое и есть VaR). Это легко сделать, построив распределение цены, исходя из множества сгенерированных значений возможных в этот день цен.

8.6.3. Вычисление VaR стохастическим методом

Покажем на примере, как определить риск фьючерсного контракта методом Монте-Карло. Пусть сегодня куплен фьючерсный контракт по цене 2 тыс. руб., при этом в качестве гарантийного обеспечения на биржу перечислены 200 руб. Срок исполнения контракта наступает через 4 недели. Определим VaR контракта. Это значение фактически покажет, какую сумму нужно зарезервировать для выплаты вариационной маржи.

Как уже известно из п. 8.3 (Приложение 8.6), цена фьючерсного контракта $F(t)$ жестко связана с ценой базового актива $S(t)$ и величиной безрисковой процентной ставки $R(t)$

$$F(t) = S(t)\exp(R_{T-t}(T - t)), \quad (8.22)$$

где $T - t$ — время до окончания контракта. В качестве безрисковой процентной ставки R_{T-t} можно принять процентную ставку по краткосрочным государственным облигациям с тем же сроком погашения, что и срок до окончания фьючерсного контракта, т. е. сроком $T - t$.

Эта связь детерминированная, не вероятностная. Но вот динамика цены базового актива и будущие значения процентной ставки подчиняются вероятностным законам. Предположим, что наблюдения за ценами на базовый актив (пусть это будет акция) в течение последнего года-двух показывают, что динамика логарифма цены акции описывалась вероятностным законом типа (8.21) с параметрами $\mu = 0,01$ и $\sigma = 0.05$

$$p(t) = \mu + p(t - 1) + \varepsilon(t; m; \sigma) = 0,01 + p(t - 1) + \varepsilon(t; 0; 0,05), \quad (8.23)$$

Очевидно, что $p(0) = \ln(2000) = 7,6009$.

Для цены базового актива можно записать

$$S(t) = \exp(p(t)). \quad (8.24)$$

Предположим, что величина безрисковой процентной ставки по краткосрочным государственным облигациям на разные сроки описывалась вероятностным законом

$$R_{T-t} = 0.14 - \alpha t + \varepsilon_r(m; \sigma_r), \quad (8.25)$$

где $\alpha = 0.02$, а $\varepsilon_r(\dots) \in N\{m, \sigma_r\}$ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным $\sigma_r = 0.01$ в неделю.

Поясним уравнение (8.25). Оно означает, что сейчас, когда до истечения контракта остается 4 недели, процентная ставка на этот срок нам точно известна (14% годовых). Через неделю рынок будет оценивать контракт, исходя из ставки заимствования на 3 недели, и сейчас она точно не известна. Но анализ данных за последний год показывает, что процентная ставка на 3 недели описывалась вероятностным законом $R_3 = 0.12 + \varepsilon_r(m; \sigma_r)$, на 2 недели — $R_2 = 0.10 + \varepsilon_r(m; \sigma_r)$, на 1 неделю — $R_1 = 0.08 + \varepsilon_r(m; \sigma_r)$. Значение R_0 никакого смысла уже не имеет, все равно в момент окончания фьючерсного контракта его цена совпадает с ценой базового актива. Таким образом, уравнение (8.25) — просто удобная комбинация нескольких вероятностных законов, описывающих возможную величину процентной ставки на конкретный срок. Это не слишком реалистичная модель, такое уравнение взято для простоты расчетов, главное, что оно отражает тот факт, что процентная ставка обычно тем меньше, чем меньше срок до погашения государственных облигаций (или, иначе, процент по кредиту тем меньше, чем меньше срок долгового обязательства). Предполагая, что и в будущем (по крайней мере, в течение четырех ближайших недель) динамика цены базового актива и величина процентной ставки будут подчиняться указанным вероятностным законам (8.24) и (8.25), соответственно, для цены фьючерсного контракта можно записать:

$$F(t) = \exp(p(t)) \exp((0.14 - 0.02t + \varepsilon_r(t; 0; 0.01))(T - t)).$$

Можно было бы и не выписывать это уравнение в явном виде, а проводить вычисления для каждой компоненты цены фьючерса отдельно. Именно так для наглядности и продемонстрировано в Кейсе 8.1, который иллюстрирует расчет VaR фьючерсного контракта методом Монте-Карло.

Отметим, что если читатель решит повторить эти вычисления с теми же параметрами, то получатся другие результаты. Это не удивительно, ведь сгенерированные случайные числа будут другими, это изменит и окончательные цифры цены. Однако, если повторить вычисления не 10 раз, а 1 тыс. или более раз, то можно увидеть, как по мере увеличения числа генераций будет стабилизироваться полученная оценка *VaR*. При этом станет заметно, что, во-первых, по мере генерации все новых и новых рядов, они по большей части будут группироваться в достаточной узкой области рисунка, а во-вторых, сильные отклонения линий от этой области будут редкими.

Судя по представленным в Кейсе 8.1 данным, минимально возможная цена через 2 недели будет составлять 1 тыс. 805 руб. Это означает, что если такой вариант развития событий реализуется в будущем, мы должны будем внести $2000 - 1805 = 195$ руб. вариационной маржи. Вероятность такого сценария составляет, очевидно, 10% (один вариант из 10 возможных временных рядов), поэтому мы можем на основании наших грубых вычислений утверждать, что *VaR* фьючерса на уровне 90% равен 195 руб. Именно такую сумму нужно зарезервировать, чтобы покрыть убытки по маржинальным требованиям в 90% случаев. Отметим, что эта сумма почти в точности равна начальному гарантийному взносу.

Кейс 8.1. Оценка VaR фьючерсного контракта методом Монте-Карло

Исходные данные:

- цена фьючерсного контракта определяется формулой (8.22);
- срок до исполнения фьючерсного контракта — 4 недели (4/52 года);
- изменение во времени цены базового актива подчиняется уравнению (8.23);
- текущие значения: цены базового актива — 2 тыс. руб., процентной ставки — 14% годовых;
- изменение во времени величины процентной ставки в (8.22) подчиняется уравнению (8.25).

В таблице на рис. 8.18 представлена последовательность расчета возможных значений цены базового актива: генерация случайных чисел, подчиненных условиям (8.23) — показаны только первые 10 генераций и расчет цены на основе этих сгенерированных значений. Расчеты проведены

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	t	Сгенерированные случайные числа, распределенные по нормальному закону (математическое ожидание =0, стандартное отклонение =0.05)										
2	1	eps(1)	-0.0142809	0.0519990	0.0211816	-0.0144204	0.0700729	-0.0499285	0.0137518	-0.0408892	0.0290911	-0.0244504
3	2	eps(2)	-0.0034739	0.0238487	0.0889256	0.0787873	-0.0088801	0.0173333	0.0215965	-0.0892637	0.0383815	0.0313888
4	3	eps(3)	0.0152919	-0.0179928	-0.0022211	-0.1150756	-0.0029258	-0.0420941	-0.0203885	-0.0056596	0.0098657	-0.0654736
5	4	eps(4)	0.0109477	-0.0157897	0.0006254	-0.0319953	-0.0494397	0.0210352	0.0720470	-0.0396285	-0.0010003	0.0143128
6	t	Динамика случайных блужданий $p(t)=0.01+pr(t-1)+eps(t)$ с начальным условием $p(0)=7.6009$										
7	0	p(0)	7.6009	7.6009	7.6009	7.6009	7.6009	7.6009	7.6009	7.6009	7.6009	7.6009
8	1	p(1)	=C7+0.01+C2	=D7+0.01+D2	=E7+0.01+E2	=F7+0.01+F2	=G7+0.01+G2	=H7+0.01+H2	=I7+0.01+I2	=J7+0.01+J2	=K7+0.01+K2	=L7+0.01+L2
9	2	p(2)	7.5966	7.6629	7.6321	7.5965	7.6810	7.5810	7.6247	7.5700	7.6400	7.5865
10	3	p(3)	7.6031	7.6968	7.7310	7.6832	7.6821	7.5883	7.6563	7.4918	7.6884	7.6278
11	4	p(4)	7.6284	7.6888	7.7388	7.5782	7.6892	7.5862	7.6459	7.4961	7.7080	7.5723
12	t	Динамика цены базового актива $P_s(t)=exp[r(t)]$										
13	0	P _s (0)	=EXP(C7)	=EXP(D7)	=EXP(E7)	=EXP(F7)	=EXP(G7)	=EXP(H7)	=EXP(I7)	=EXP(J7)	=EXP(K7)	=EXP(L7)
14	1	P _s (1)	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00
15	2	P _s (2)	1891.46	2127.92	2063.35	1991.18	2168.73	1921.72	2048.07	1939.20	2079.73	1971.31
16	3	P _s (3)	2004.50	2201.18	2277.90	2171.66	2169.16	1874.97	2113.82	1793.22	2182.78	2054.57
17	4	P _s (4)	2055.84	2183.66	2295.69	1955.06	2184.56	1912.59	2092.01	1801.02	2226.18	1943.70
18	4	P _s (4)	2099.36	2171.05	2320.21	1912.52	2100.08	1872.88	2270.90	1748.45	2246.30	1981.53

Рис. 8.18. Вычисление возможных значений цены базового актива стохастическим методом. (Формула в ячейке C8 скопирована в ячейки C9 — C11 и т.д., формула в ячейке C14 скопирована в ячейки C15 — C18 и т.д.)

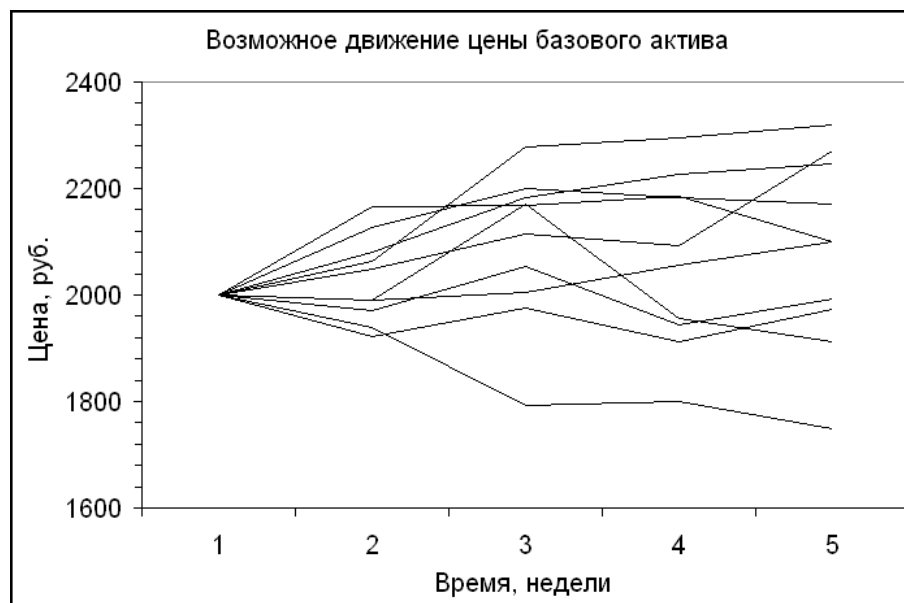


Рис. 8.19. Возможная динамика изменений цены базового актива

для 5 временных точек — до исполнения контракта 4 недели ($t = 0$), 3 недели, 2 недели, 1 неделя и для момента исполнения контракта ($t = 4$). На рис. 8.17 по данным таблицы показаны возможные траектории изменений цены базового актива во времени (по мере приближения срока исполнения контракта).

В таблице на рис. 8.20 представлена последовательность расчета возможных значений процентной ставки: генерация новых случайных чисел, подчиненных условиям (8.25) — показаны только первые 10 генераций — и расчет ставки на основе этих сгенерированных значений. Расчеты проведены для тех же 5 временных точек. На рис. 8.21 по данным таблицы показаны возможные траектории изменений процентной ставки по мере приближения к дате исполнения фьючерсного контракта.

В таблице на рис. 8.22 представлена последовательность расчета возможных значений цены фьючерсного контракта по формуле (8.22) — показаны только 10 значений, соответствующих генерациям, представленным в таблицах на рис. 8.18 и 8.20. На рис. 8.23 показаны возможные траектории изменений цены фьючерсного контракта во времени до момента исполнения контракта.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t	Сгенерированные случайные числа, распределенные по нормальному закону (математическое ожидание =0, стандартное отклонение =0,01)									
2	1	eps(1)	0.009540	-0.002545	-0.002007	-0.002849	-0.009304	-0.007804	-0.010592	-0.009139	-0.002716
3	2	eps(2)	0.021408	-0.000888	0.016004	-0.008955	0.001699	-0.001362	0.011399	0.008908	0.011514
4	3	eps(3)	0.012475	-0.009897	-0.013772	0.001400	0.004479	0.014803	0.004158	0.003255	-0.009421
5	4	eps(4)	0.015922	0.004746	0.022534	0.022092	-0.004568	0.001999	-0.017708	-0.009000	0.019874
6	t	Динамика процентной ставки $r(t)=0.14-0.02 \cdot t \cdot \text{eps}(t)$ с начальным условием $r(0)=0.14$									
7	0	r(0)	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400
8	1	r(1)	$=C\$7-0.02 \cdot \$A8+C2$	$=D\$7-0.02 \cdot \$A8+D2$	$=E\$7-0.02 \cdot \$A8+E2$	$=F\$7-0.02 \cdot \$A8+F2$	$=G\$7-0.02 \cdot \$A8+G2$	$=H\$7-0.02 \cdot \$A8+H2$	$=I\$7-0.02 \cdot \$A8+I2$	$=J\$7-0.02 \cdot \$A8+J2$	$=K\$7-0.02 \cdot \$A8+K2$
9	2	r(2)	0.1295	0.1225	0.1180	0.1174	0.1107	0.1110	0.1122	0.1084	0.1109
10	3	r(3)	0.1214	0.0891	0.1160	0.0910	0.1017	0.0905	0.0986	0.1114	0.1089
11	4	r(4)	0.0925	0.0701	0.0862	0.0814	0.0845	0.0792	0.0948	0.0842	0.0833
			0.0759	0.0847	0.0825	0.0821	0.0554	0.0620	0.0655	0.0423	0.0510
											0.0799

Рис. 8.20. Вычисление возможных значений процентной ставки стохастическим методом. (Формула в ячейке C8 скопирована в ячейки C9 – C11 и т.д.)

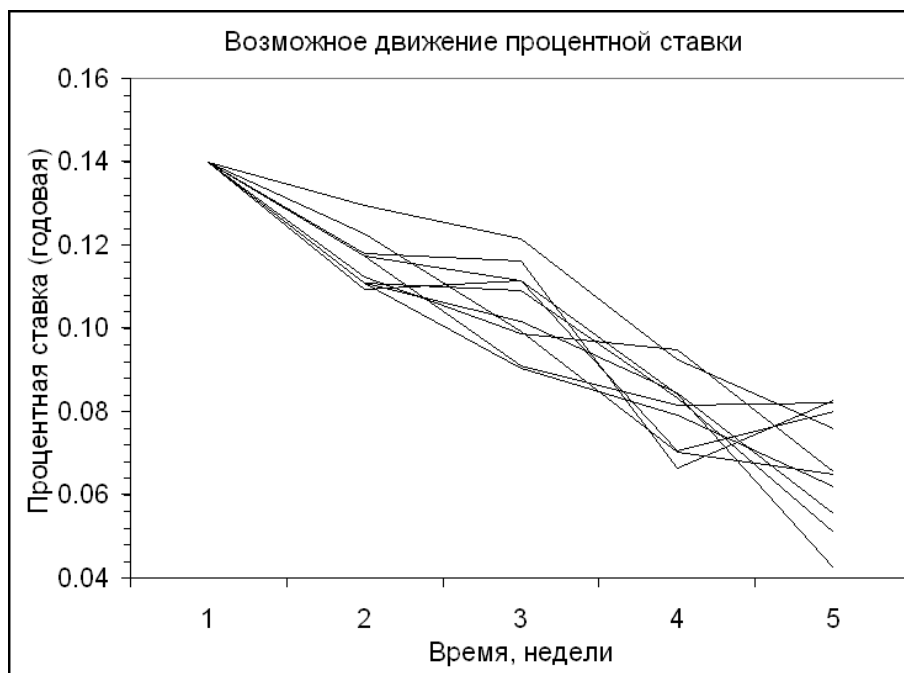


Рис. 8.21. Возможные значения будущих процентных ставок

Результат вычислений:

- если ограничиться только показанными 10 генерациями, то можно грубо оценить лишь $VaR_{90\%}$ для 4 моментов времени (это будут самые худшие результаты из 10 представленных для каждого момента времени);
- если провести не менее 1 тыс. генераций, то можно довольно точно оценить VaR на уровне 90% и 95% и не слишком точно оценить VaR на уровне 99%. Результаты представлены в Таблице.

Таблица рассчитанных значений VaR фьючерсного контракта для разных моментов времени:

	$VaR_{99\%}$	$VaR_{95\%}$	$VaR_{90\%}$
$t = 1$ (3 недели до исполнения)	1788	1860	1885
$t = 2$ (2 недели до исполнения)	1755	1818	1888
$t = 3$ (1 неделя до исполнения)	1740	1842	1881
$t = 4$ (момент исполнения)	1743	1817	1865

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t										
2	0	Ps(0)	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00	2000.00
3	1	Ps(1)	1991.48	2063.35	1991.18	2168.73	1921.72	2048.07	1938.20	2079.73	1971.31
4	2	Ps(2)	2004.50	2277.90	2171.66	2169.16	1974.97	2113.82	1793.22	2182.78	2054.57
5	3	Ps(3)	2055.84	2295.69	1955.06	2184.56	1912.59	2092.01	1801.02	2226.18	1943.70
6	4	Ps(4)	2099.36	2320.21	1912.52	2100.08	1972.88	2270.90	1748.45	2246.30	1991.53
7	t										
Динамика процентной ставки											
8	0	r(0)	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400	0.1400
9	1	r(1)	0.1295	0.1180	0.1174	0.1107	0.1110	0.1122	0.1094	0.1109	0.1173
10	2	r(2)	0.1214	0.1180	0.0910	0.1017	0.0905	0.0986	0.1114	0.1089	0.1115
11	3	r(3)	0.0925	0.0662	0.0814	0.0845	0.0792	0.0948	0.0842	0.0833	0.0706
12	4	r(4)	0.0759	0.0647	0.0821	0.0554	0.0620	0.0655	0.0423	0.0510	0.0799
13	t										
Динамика цены фьючерсного контракта											
14	0	PF(0)	$=C_2^*EXP(C_8^* (4-\$A14)/52)$	$=E_2^*EXP(E_8^* (4-\$A14)/52)$	$=F^*EXP(F_8^* (4-\$A14)/52)$	$=G_2^*EXP(G_8^* (4-\$A14)/52)$	$=H_2^*EXP(H_8^* (4-\$A14)/52)$	$=I_2^*EXP(I_8^* (4-\$A14)/52)$	$=J_2^*EXP(J_8^* (4-\$A14)/52)$	$=K_2^*EXP(K_8^* (4-\$A14)/52)$	$=L_2^*EXP(L_8^* (4-\$A14)/52)$
15	1	PF(1)	2021.65	2021.65	2021.65	2021.65	2021.65	2021.65	2021.65	2021.65	2021.65
16	2	PF(2)	2008.40	2077.44	2004.71	2180.61	1934.06	2061.37	1951.48	2083.07	1984.89
17	3	PF(3)	2013.88	2288.09	2179.28	2177.66	1981.85	2121.85	1800.92	2191.94	2063.40
18	4	PF(4)	2059.50	2298.62	1958.12	2188.11	1915.50	2095.83	1803.94	2229.74	1946.34
			2099.36	2320.21	1912.52	2100.08	1972.88	2270.90	1748.45	2246.30	1991.53

Рис. 8.22. Вычисление возможных значений цены фьючерсного контракта

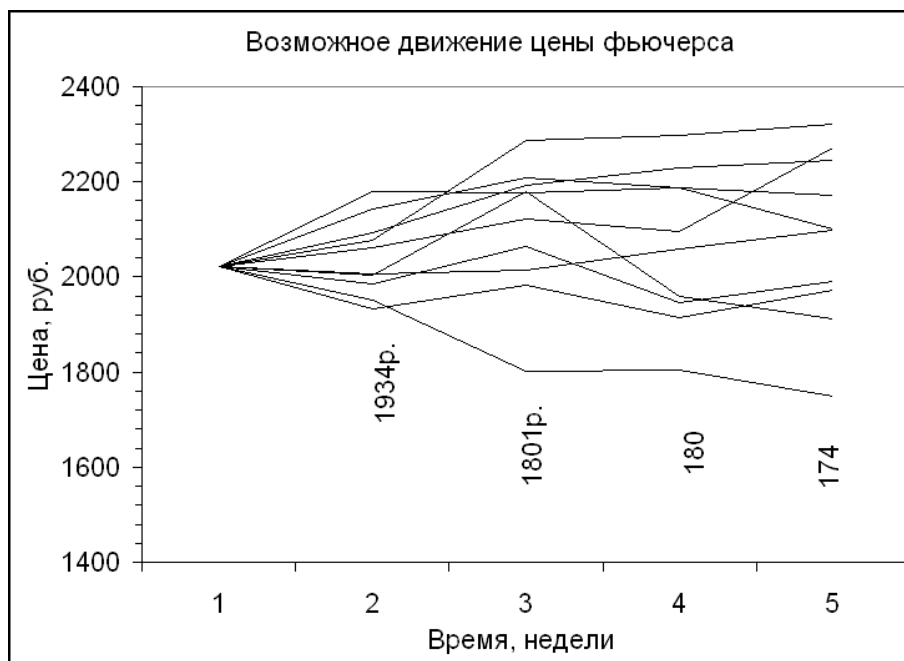


Рис. 8.23. Возможная динамика изменений цены фьючерсного контракта

Задачи к главе 8

1. Докажите, что стандартное отклонение цены портфеля удовлетворяет свойствам когерентной меры риска.
Указание. Представьте стандартное отклонение цены портфеля как произведение его стоимости в фиксированный момент времени на стандартное отклонение доходности.
2. Приведите пример, доказывающий, что **VaR** не является когерентной мерой риска (не выполняется свойство субаддитивности).
Указание. Рассмотрите пример портфеля из двух облигаций, подверженных кредитному риску, дефолт по которым не может наступить одновременно. Примите, что в случае дефолта выплата по облигации является случайной с равномерным распределением от нуля до номинала.
3. Рассчитайте коэффициенты абсолютной и относительной несклонности к риску для функций полезности, представленных в табл. 8.1.
Указание. Используйте одну и ту же игру, рассмотрите, как меняются абсолютное значение премии за риск и ее относительная величина (премия по отношению к начальному богатству).

4. Докажите, что диверсификация снижает риск портфеля, даже если доходности активов не являются полностью независимыми случайными величинами.
Указание. Представьте дисперсию доходности портфеля как взвешенную сумму дисперсий и ковариаций активов.
5. По историческим значениям индекса акций, полученным с интернет-сайта одного из организаторов торгов (например, РТС: <http://www.rts.ru> или ММВБ: <http://www.micex.ru>) рассчитайте недельные доходности по индексу и оцените риск инвестирования в хорошо диверсифицированный портфель российских акций.
6. Докажите справедливость формул (9.8).
Указание. Воспользуйтесь свойствами производной от суммы функций.
7. Проведите расчеты в MS Excel и покажите, что если инвестиционный горизонт инвестора совпадает с дюрацией купонной облигации, то полученный инвестором доход будет неизменным, даже если процентные ставки на рынке незначительно изменятся.
Указание. Считайте, что: 1) ставки изменились сразу после покупки облигации, 2) реинвестирование купонов происходит по текущим процентным ставкам.
8. Докажите справедливость формулы (9.24).
Указание. Считайте, что на рынке не существует арбитражных возможностей.
9. Оцените VaR дельта-хеджированного портфеля, включающего базовый актив и опционные контракты.
Указание. Дельта-хеджированный портфель — это такой портфель, дельта-коэффициент которого равен нулю.

Приложения к главе 8

П 8.1. Построение гистограммы в пакете Excel

Последовательность действий при построении гистограммы в пакете Excel:

- вводим требуемые уровни вероятности (например, в ячейки $C2:C5$ — эти и все другие адреса ниже указаны применительно к рис. 8.3;
- выбираем «Сервис», «Анализ данных», «Гистограмма» (возможно, вначале потребуется установить пакет анализа, выбрав пункт «Настройка» и установив флажок «Пакет анализа»);
- в открывшемся окне «Гистограмма» указываем исходные данные «Входной интервал»: $A2:A11$, интервал уровней вероятностей «Интервал карманов»: $C2:C5$, ячейку для вывода результатов «Выходной интервал»: $D1$ и «ОК»;
- если нужно построить еще и эмпирическую функцию накопленной вероятности, то предварительно в окне «Гистограмма» включаем флажок «Интегральный процент»;
- можно построить графики, включив в окне «Гистограмма» флажок «Вывод графика».

П 8.2. Характеристики распределения вероятности

Построенная в примерах эмпирическая функция распределения вероятности случайной величины (доходности) относится к классу дискретных распределений. Нормальное распределение вероятности случайной величины является непрерывным распределением. Дискретность случайной величины X означает, что возможны только конечное (счетное) число возможных реализаций X_i ($i = 1, 2, \dots, I$), причем вероятность реализации X_i равна q_i . Таким образом, распределение дискретной случайной величины X задается набором (X_i, q_i) . Непрерывность означает, что случайная величина X может принимать любое значение в диапазоне от $X_{\min}$ до $X_{\max}$, в частности от $-\infty$ до $+\infty$, как, например, для нормального распределения. Распределение непрерывной случайной величины задается функцией распределения $p(X)$. Значение этой функции в какой-либо точке X_i задает вероятность того, что случайная величина X попадет в диапазон от X_i до $X_i + dX$ при условии, что $dX \rightarrow 0$, т.е.

$$P(X_i) \rightarrow \text{Prob}(X_i \leq X < X_i + dX) \text{ при } dX \rightarrow 0.$$

Ниже приведены некоторые числовые характеристики одномерного (поскольку в данном пособии мы рассматриваем только одну случайную величину — доходность) распределения вероятности (рис. 8.3):

Начальные моменты распределения — их задание полностью определяет любое распределение вероятности:

- начальный момент порядка k для дискретного распределения

$$M_k(X) = \sum_{i=1}^I q_i X_i^k;$$

- начальный момент k -порядка для непрерывного распределения

$$M_k(X) = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} p(X) X^k dX.$$

Характеристики положения:

- центр распределения или математическое ожидание $E(X)$ случайной величины X . По определению это начальный момент 1-го порядка ($k = 1$);

- медиана распределения **Me** — такое значение случайной величины, что вероятность реализации случайной величины больше этого значения равна 50%. $\mathbf{Me} : Prob(X > \mathbf{Me}) = 0.5$;
- мода распределения **Mo** — наиболее вероятное значение доходности (отметим, что произвольное распределение может быть многомодальным).

Характеристики рассеяния (разброса):

- размах распределения — разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями случайной величины ($X_{\max} - X_{\min}$);
- дисперсия случайной величины $\mathbf{D}(X)$. Дисперсию можно выразить через начальные моменты 1-го и 2-го порядков: $D(X) = M_2(X) - [M_1(X)]^2$;
- среднее квадратическое отклонение $\mathbf{s}(X) = [\mathbf{D}(X)]^{1/2}$;
- коэффициент вариации $x = \mathbf{s}(X)/\mathbf{E}(X)$ — отношение среднее квадратического отклонения к математическому ожиданию.

Характеристики формы распределения:

- коэффициент эксцесса — коэффициент, показывающий, как быстро, по сравнению с нормальным распределением, падает вероятность реализации очень больших и очень малых значений случайной величины;
- коэффициент асимметрии — коэффициент, показывающий, насколько равновероятно получение одинаковых по величине, но разных по знаку отклонений случайной величины от среднего значения;
- пирсоновская мера асимметрии (для одномодальных распределений) $s = (\mathbf{E} - \mathbf{Mo})/\mathbf{s}$.

Квантиль порядка α одномерного распределения случайной величины X — такое значение X_α , что вероятность реализации случайной величины меньше X_α равна α . Общая математическая форма записи этого определения:

$$X_\alpha : Prob(X < X_\alpha) = \alpha.$$

Для непрерывного распределения квантиль порядка α — это такое значение X_α , что:

$$\alpha = \int_{X_{\min}}^{X_\alpha} p(X) dX.$$

Для дискретного распределения квантиль порядка — это максимальное из всех значений X_α , для которых выполняется неравенство:

$$X_\alpha = \max(\tilde{X}) : \alpha \leq \sum_{X_i=X_{\min}}^{\tilde{X}} q_i(X_i),$$

где все возможные значения X_i дискретной случайной величины X упорядочены по возрастанию от $X_{\min}$ до $X_{\max}$, а $q_i(X_i)$ — вероятность реализации X_i .

Отметим, что медиана распределения α — это квантиль порядка 0,5: $\mathbf{Me} \equiv X_{0,5}$.

П 8.3. Проверка гипотезы о нормальности распределения

В Excel проверку гипотезы о нормальном распределении можно провести при помощи теста хи-квадрат. Идея заключается в проверке гипотезы о том, что эмпирические вероятности равны вероятностям, полученным из нормального распределения *Prob*. Последовательность действий такова (рис. 8.24):

- по имеющейся выборке доходности строим эмпирическую функцию вероятности. Если для какого-либо интервала доходности вероятность слишком мала (меньше 0.05), то объединяем этот интервал с соседним, складывая при этом вероятности;
- по имеющейся выборке доходности вычисляем математическое ожидание $\bar{X}$ и дисперсию доходности $\bar{s}^2$, затем вычисляем стандартное отклонение s^* ;
- вычисляем накопленную вероятность для границ интервалов доходности, используя функцию НОРМРАСП. От накопленной вероятности переходим к вероятности попадания доходности в заданный интервал, вычитая из накопленной вероятности для верхней границы заданного интервала накопленную вероятность для нижней границы интервала;
- вычисляем статистику хи-квадрат

$$\chi^2 = N \sum_{j=1}^k \frac{(Prob_j - Prob_j^*)^2}{Prob_j^*},$$

где N — объем выборки, K — число интервалов доходности;

- сравниваем полученное значение с критическим значением статистики хи-квадрат

$$\chi^2 = \chi_{\alpha, df}^2,$$

где α — доверительный уровень, на котором проверяется гипотеза, df — число степеней свободы статистики (в нашем случае $df = K - 3$). Критическое значение статистики хи-квадрат легко вычислить в Excel, воспользовавшись функцией ХИ2ОБР.

Если полученное значение статистики хи-квадрат больше критического значения, то гипотеза о близости эмпирического распределения вероятности нормальному распределению должна быть отвергнута.

П 8.4. Работа с матрицами в пакете Excel

Работа с матрицами в пакете Excel имеет одну особенность, которую проще пояснить на примере. На рис. 8.25 в ячейках A2:B4 находятся элементы матрицы X , в ячейках D2:E4 — элементы матрицы Y . Пусть необходимо сложить эти матрицы и результат $Z = X + Y$ поместить в ячейки G2:H4. Последовательность действий такова:

- выделяем ячейки G2:H4;
- в строке формул набираем `=A2:B4+D2:E4`, это можно сделать и с помощью клавиатуры, и с помощью мыши;
- нажимаем одновременно клавиши **Ctrl** и **Shift** и, удерживая их, нажимаем **Enter**.

Во всех ячейках G2:H4 появится результат. Если выделить любую из ячеек этого диапазона, то в строке формул появится запись: `{=A2:B4+C2:D4}`. Фигурные скобки как раз и означают, что производится операция с матрицами. Заметим, что если набрать в строке формул все выражение вместе с фигурными скобками, то нужного результата не получится. Необходимое условие матричных вычислений — это ввод формулы нажатием трех клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

Вторая особенность заключается в том, что необходимо тщательно следить за размерами матриц, правильно указывая размер результирующей матрицы при всех операциях. К сожалению, Excel никак не реагирует, если будет указан меньший размер, чем нужно, что может потом привести к серьезным ошибкам.

П 8.5. Дюрация и выпуклость облигации

Из формул (8.9) и (8.11) видно, что цена облигации является сложной, нелинейной функцией от величины процентной ставки. Из курса математики известно, что любую (гладкую) функцию $P(R)$ в окрестности какой-либо точки R_0 можно представить в виде бесконечного ряда Тейлора, разложив по степеням приращения аргумента $(R - R_0)$:

$$P(R) = P(R_0) + \frac{\partial P}{\partial R}(R - R_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial R^2}(R - R_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P}{\partial R^3}(R - R_0)^3 + \dots, \quad (8.26)$$

где все производные вычислены в точке R_0 .

Именно такой подход используется в финансовой теории при описании влияния изменения процентной ставки на цену облигации. Этот подход

применяется и при анализе ценообразования многих производных финансовых инструментов, таких, например, как опционы.

Сравнив формулу (8.13) с формулой (8.26), в которой оставлены только линейный и квадратичный члены ряда, видим, что модифицированная дюрация определяется первой производной от цены облигации по процентной ставке:

$$MD = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (8.27)$$

а коэффициент выпуклости — второй производной:

$$Cnv = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial R^2}, \quad (8.28)$$

Для других финансовых инструментов цена может определяться другими параметрами, а не процентной ставкой. В частности, для производных инструментов цена определяется ценой базового актива, тогда величину, аналогичную MD , называют дельта-коэффициентом δ , а величину, аналогичную Cnv , — гамма-коэффициентом γ . (Разумеется, производные берутся по цене базового актива):

$$\delta = \frac{\partial P}{\partial S}, \quad \gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}. \quad (8.29)$$

Соответственно, разложение типа (8.26) цены инструмента по степеням цены базового актива называют дельта-гамма аппроксимацией, а сам метод оценки изменения цены инструмента с помощью коэффициентов δ и γ — дельта-гамма методом.

Еще одно важное понятие в теории портфеля облигаций — дюрация Макколи DM — есть не что иное, как эластичность цены облигации к изменению процентной ставки. Величина MD прямо связана с дюрацией Макколи:

$$MD = -\frac{1+R}{P} \frac{\partial P}{\partial(1+R)} = -(1+R)DM. \quad (8.30)$$

Дюрация Макколи — размерная величина (измеряется в единицах временного периода). Для дисконтной облигации MD совпадает со сроком до погашения, для купонной облигации MD всегда меньше срока до погашения, поскольку часть долга по облигации выплачивается до погашения номинала в виде купонных платежей.

Применяя (8.28), (8.30) к формулам (8.9) и (8.11), можно вычислить модифицированную дюрацию, коэффициент выпуклости и дюрацию

Макколи для любых дисконтных и купонных облигаций, соответственно. Опуская математические выкладки, сразу запишем для дисконтной облигации:

$$MD = \frac{T}{365} \frac{1}{1+R}, \quad Cnv = \frac{T}{365} \left(\frac{T}{365} + 1 \right) \frac{1}{(1+R)^2}, \quad DM = \frac{T}{365}. \quad (8.31)$$

Для купонной облигации (в качестве процентной ставки подразумевается внутренняя ставка доходности облигации IRR):

$$MD = \frac{1}{1+R} \frac{\sum_{i=1}^T iCF_i(1+R)^{-i}}{\sum_{i=1}^T CF_i(1+R)^{-i}} = \frac{1}{1+R} \frac{\sum_{i=1}^T iCF_i(1+R)^{-i}}{P} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} Cnv &= \frac{1}{(1+R)^2} \frac{\sum_{i=1}^T CF_i i(i+1)(1+R)^{-i}}{\sum_{i=1}^T CF_i(1+R)^{-i}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^T CF_i i(i+1)(1+R)^{-i}}{(1+R)^2 P}, \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^T iCF_i(1+R)^{-i}}{\sum_{i=1}^T CF_i(1+R)^{-i}} = \frac{\sum_{i=1}^T iCF_i(1+R)^{-i}}{P}. \quad (8.34)$$

Пример вычисления модифицированной дюрации и коэффициента выпуклости в пакете Excel для дисконтной облигации приведен на рис. 8.11, для трехлетней купонной облигации с ежегодными купонными платежами 18% номинала — на рис. 8.12.

График изменения истинной цены купонной облигации от колебаний процентной ставки приведен на рис. 8.26. Там же представлены графики цены, определенной только по дюрации, и цены, определенной по дюрации и выпуклости. Видно, что чем больше изменение процентной ставки, тем больший вес приобретает выпуклость облигации, хотя даже для довольно значительных изменений вклад выпуклости мал по сравнению с дюрацией. Для длинной облигации вклад выпуклости в изменение цены больше, чем для короткой облигации (рис. 8.11). Вклад выпуклости в изменение цены тем значительнее, чем больше купон, выплачиваемый по облигации.

В целом можно утверждать, что наиболее подвержены риску изменения процентных ставок длинные облигации с тяжелым купоном. Наименее рискованны короткие дисконтные облигации.

П 8.6. Ценообразование на форвардные контракты

Рассмотрим без какого-либо вывода ценообразование форвардного контракта на актив, по которому не выплачиваются дивиденды. Если текущая цена актива равна S , цена форварда (цена поставки актива в будущем, через время T) равна F , то можно записать:

$$F = Se^{RT}. \quad (8.35)$$

Экспоненциальный множитель e^{RT} означает возможность на рынке дать деньги в долг и получить процентный доход по ставке R . Несколько необычная форма записи связана с тем обстоятельством, что в финансовой теории предполагается, что процентный доход начисляется непрерывно, в каждый момент времени, а не по окончании некоторого временного промежутка, как это происходит в действительности. Если по активу выплачивается известная ставка дохода q , то:

$$F = Se^{(R-q)T}. \quad (8.36)$$

Частный случай — форвардный контракт на валюту, где в формуле (8.19): R — краткосрочная процентная ставка для займов в национальной валюте, q — краткосрочная процентная ставка для займов в иностранной валюте.

Видно, что связь между изменениями цены форварда базового актива линейная. В момент заключения контракта цена форварда меняется сильнее, чем цена базового актива. Изменчивость цены тем больше, чем выше процентная ставка и чем больше срок исполнения контракта. За несколько дней до исполнения контракта цена форварда и цена базового актива изменяются синхронно и одинаково.

Если описывать ценообразование форвардного контракта в терминах дельта-гамма метода, то:

$$\Delta F = \delta \Delta S + \gamma (\Delta S)^2, \quad (8.37)$$

где $\delta = e^{RT}$ — это коэффициент дельта, а коэффициент гамма всегда равен нулю $\gamma \equiv 0$.

П 8.7. Ценообразование на опционы

Приведем без какого-либо вывода и обоснования формулу Блэка—Шоулза для определения справедливой цены европейского колл опциона:

$$P_{\text{call}} = SN(d_1) - (\exp(-RT)XN(d_2)), \quad (8.38)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/X) + (R + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S/X) + (R - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \end{aligned}$$

S — цена базового актива, X — цена исполнения опциона, R — безрисковая процентная ставка (% годовых) на срок равный времени до исполнения опциона, T — время до исполнения опциона (в годах, если R выражена в годовом исчислении), σ — волатильность цены базового актива, $N(\dots)$ — значение функции накопленной вероятности стандартного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Чтобы вычислить коэффициенты дельта и гамма, нужно взять первую и вторую частные производные функции (8.38) по цене базового актива. Приведем приближенные соотношения без вывода:

$$\Delta = \partial P_{\text{call}} / \partial S = N(d_1), \quad \Gamma = \partial^2 P_{\text{call}} / \partial S^2 = N'(d_1) / (S\sigma\sqrt{T}),$$

где N (соответственно N') — функция (соответственно плотность) стандартного нормального распределения.

Первое соотношение дает ясную экономическую интерпретацию дельта-коэффициента опциона, величина дельта — это фактически вероятность того, что опцион будет исполнен. Очевидно, что коэффициент дельта может меняться от нуля до единицы. Если цена базового актива много ниже цены исполнения опциона, то вероятность его исполнения близка к нулю, соответственно, и дельта-коэффициент опциона близок к нулю. Такая интерпретация помогает четче понять смысл дельта-хеджирования портфеля, состоящего из базового актива и опционов. Если, например, проданы 100 колл опционов, дельта-коэффициент которых равен 0.65, то вероятность того, что покупатель заставит их исполнить, равна 0.65. Следовательно, чтобы застраховаться от возможных потерь, нужно купить $100 \cdot 0.65 = 65$ базовых активов.

Гамма-коэффициент можно трактовать как изменение величины дельта-коэффициента при изменении цены базового актива на единицу. Этот коэффициент максимален, когда опцион находится, как говорят, «при деньгах», т. е. когда спот цена базового актива равна цене исполнения опциона. Дельта-хеджированный портфель с большими значениями гамма-коэффициентов опционов имеет высокий риск того, что вдруг (обычно в понедельник, после нескольких выходных на бирже) портфель окажется не хеджированным, постоянная же балансировка портфеля сопряжена с транзакционными издержками. Поэтому дополнительно в портфель включаются другие опционы, так, чтобы результирующее значение гамма всего портфеля стало равным нулю, такой портфель называется гамма-хеджированным. Соответственно, гамма-коэффициент опциона играет исключительно важную роль для хеджера.

Как видно из (8.38), цена опциона зависит не только от цены базового актива, но и от нескольких других параметров. Эти параметры могут изменяться, степень их влияния на цену опциона можно оценить с помощью коэффициентов, представляющих собой первые частные производные функции (8.38) по тому или иному параметру (время, процентная ставка, волатильность). Этим коэффициентам также присвоены греческие буквы (Greeks): Θ — тета, ρ — ро, $Vega$ — вега. Эти коэффициенты важны не столько для оценки и управления риском, сколько для построения различных опционных стратегий.

П 8.8. Генерация случайных чисел в пакете Excel

Рассмотрим, как можно генерировать случайные числа в пакете Excel. Прежде всего, для этой цели предусмотрены функции `СЛЧИС(...)`, `Randbetween(...)`. Функция `СЛЧИС(...)` генерирует случайные числа, равномерно распределенные в интервале (0.1). `Randbetween(...)` генерирует целые числа в границах диапазона, заданного параметрами `bottom` и `top` (нижняя и верхняя границы) (рис. 8.27). Равномерный закон распределения не часто встречается в финансовой практике, поэтому эти функции не слишком подходят для практических финансовых расчетов. Значительно большие возможности предоставляет пакет «Анализ данных» из меню «Сервис». В меню «Анализ данных» есть опция «Генерация случайных чисел». В открывающемся диалоговом окне нужно установить вид распределения «нормальное» и ввести численные параметры распределения («среднее значение» и «стандартное отклонение»). Далее необходимо ввести число переменных и число случайных чисел. Остановимся на трактов-

ке этих чисел подробнее. Предположим, необходимо оценить **VaR** на всем периоде инвестирования в 5 дней и сгенерировать 20 временных рядов цен. Можно в качестве числа переменных взять число временных рядов, т. е. 20, а в качестве числа случайных чисел — число дней в периоде, т. е. 5. Можно поступить и наоборот, все зависит от удобства расположения данных на листе книги Excel. И наконец, необходимо указать в графе «Выходной диапазон» ссылку на левую верхнюю ячейку диапазона, в котором будут размещены случайные числа. Можно начать новый лист или новую книгу, поставив переключатель в соответствующем окне.

Отметим важный момент. Если цена является функцией нескольких случайных величин (например, цена фьючерса есть функция от случайной цены базового актива и случайной процентной ставки), то каждая из них распределена по своему закону и параметры распределений отличаются. Значит, придется дважды вызывать окно «Генерация случайных чисел» и каждый раз заново устанавливать вид и параметры распределения.

	A	B	C	D
1	Доходность (середина интервала)	Эмпирическое распределение	Нормальное распределение	Статистика хи-квадрат
2	-0.15	1	=НОРМРАСП(A2;0,027;0,109;0) 0.980	=(C2-B2)^2/C2 0.00041
3	-0.05	2	=НОРМРАСП(A3;0,027;0,109;0) 2.852	=(C3-B3)^2/C3 0.25478
4	0.05	4	3.579	0.04957
5	0.15	2	1.935	0.00215
6	0.25	1	=НОРМРАСП(A6;0,027;0,109;0) 0.451	=(C6-B6)^2/C6 0.66754
7				
8				=СУММ(D2:D6) 0.9745
9				
10				=ХИ2ОБР(0,05;2) 5.991
11				
12	Так как 0.9745 < 5.991, то гипотеза о нормальности распределения доходности не может быть отвергнута			

Рис. 8.24. Проверка гипотезы о нормальности распределения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Матрица X			Матрица Y			Матрица Z		
2	1.00	6.00		0.50	-6.00		1.50	0.00	
3	2.00	7.00		1.50	-7.00		3.50	0.00	
4	3.00	8.00		2.50	0.00		5.50	8.00	
5									
6									
7									
8									

{=A2:B4+D2:E4}

Рис. 8.25. Сложение матриц в пакете Excel

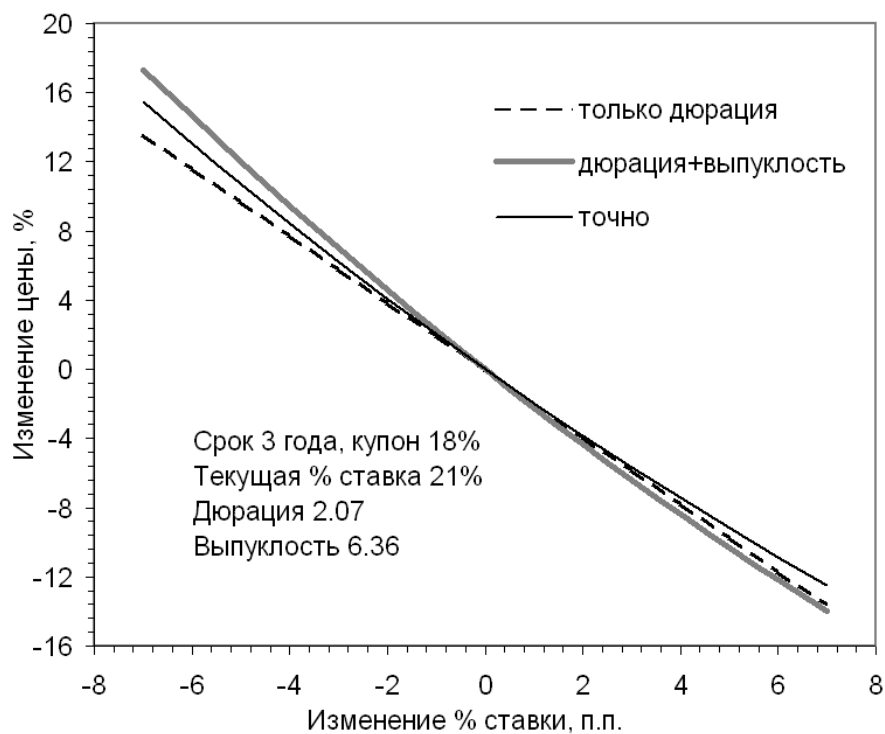


Рис. 8.26. Изменение цены облигации при изменении процентной ставки

A	B	C	D	E
	A	B	C	D
1				
2		=СЛЧИС() 0.1402411	=Randbetween(-20;20) 8	
3				

Рис. 8.27. Пример генерации случайных чисел в пакете Excel

Статистические дополнения

СД 1. Статистические дополнения к главе 1

СД 1.1. Временная структура процента в России: январь — февраль 1998 г.

Графики УТМ по результатам торгов ГКО на ММВБ в
январе — феврале 1998 г.

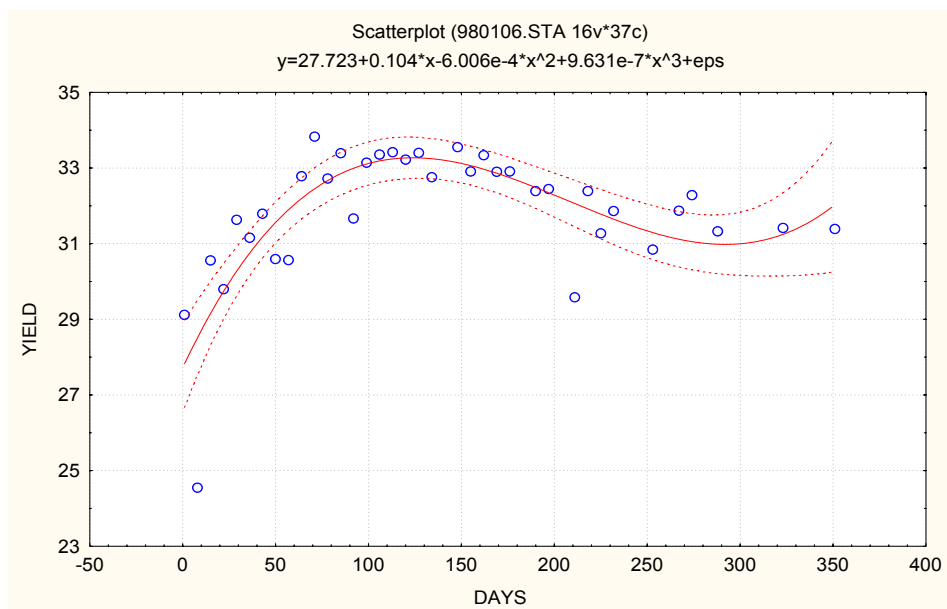


Рис. 1.1а. Временная структура процента на 06.01.1998

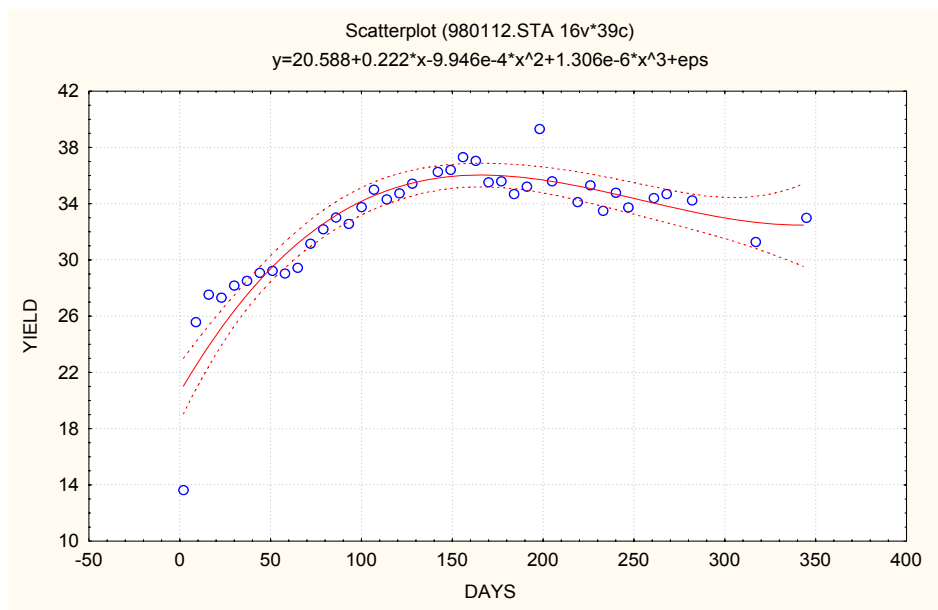


Рис. 1.1b. Временная структура процента на 12.01.1998

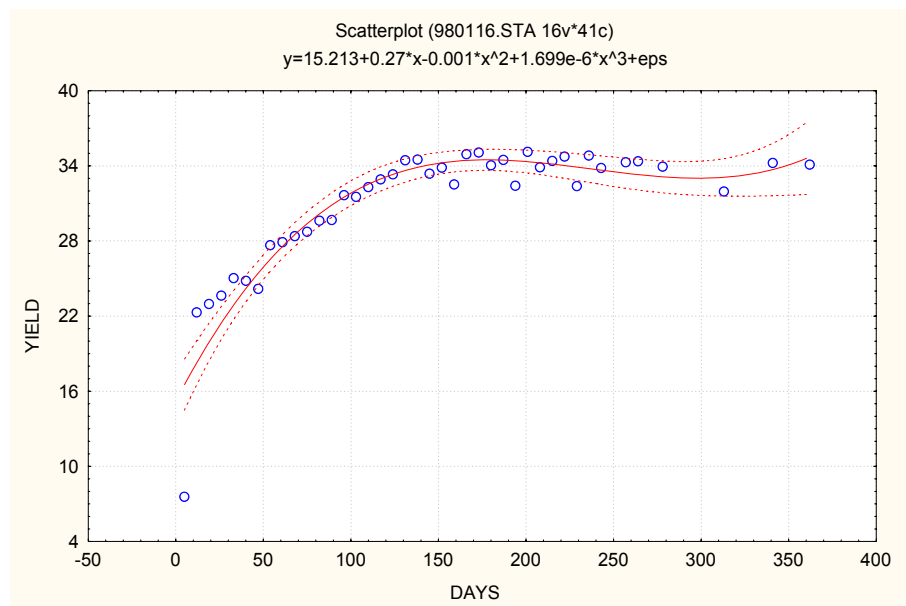


Рис. 1.1с. Временная структура процента на 16.01.1998

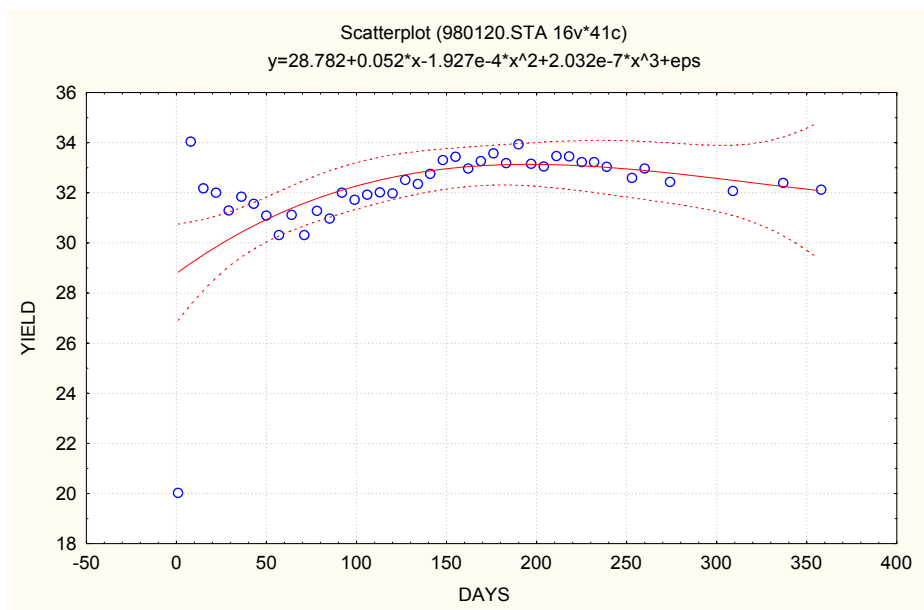


Рис. 1.1d. Временная структура процента на 20.01.1998

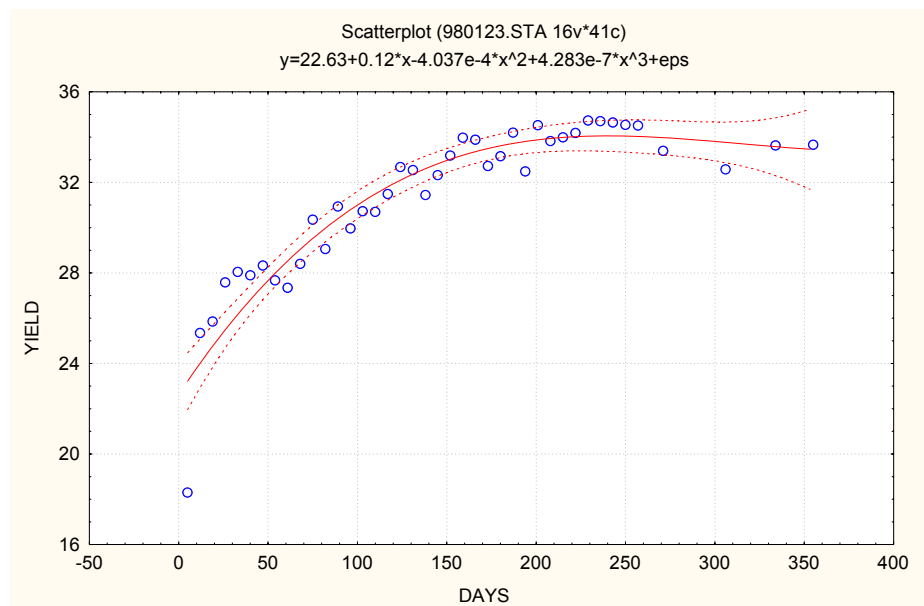


Рис. 1.1е. Временная структура процента на 23.01.1998

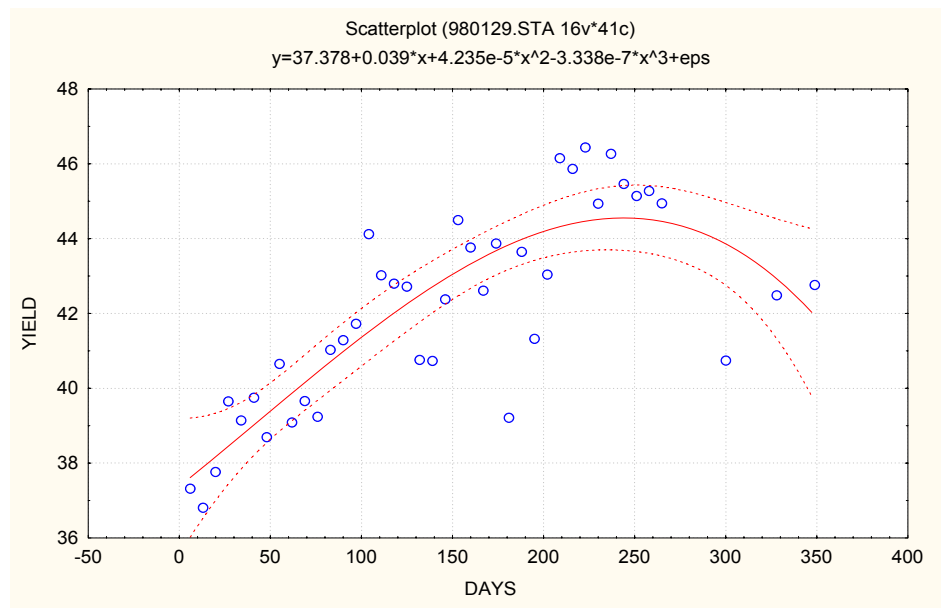


Рис. 1.1f. Временная структура процента на 29.01.1998

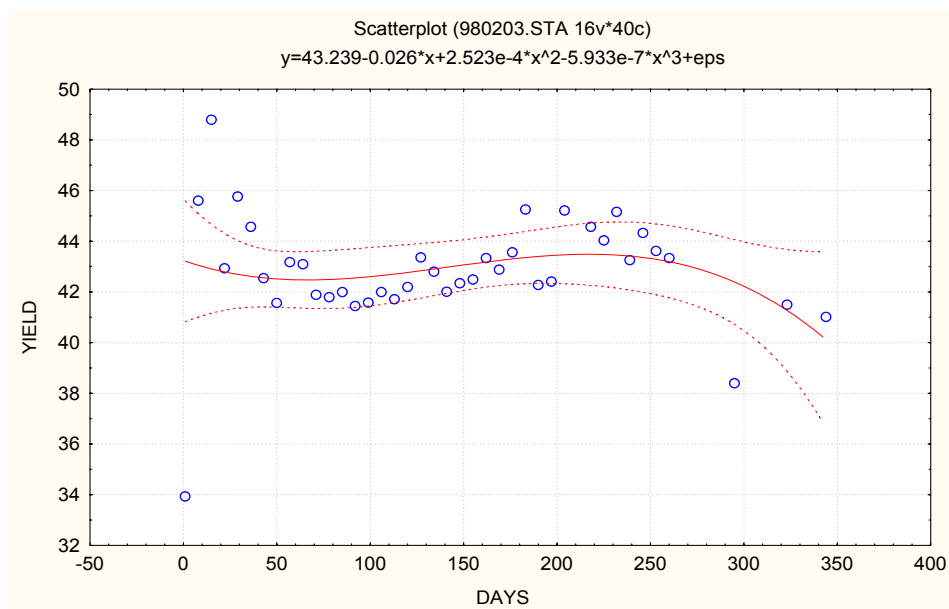


Рис. 1.1g. Временная структура процента на 03.02.1998

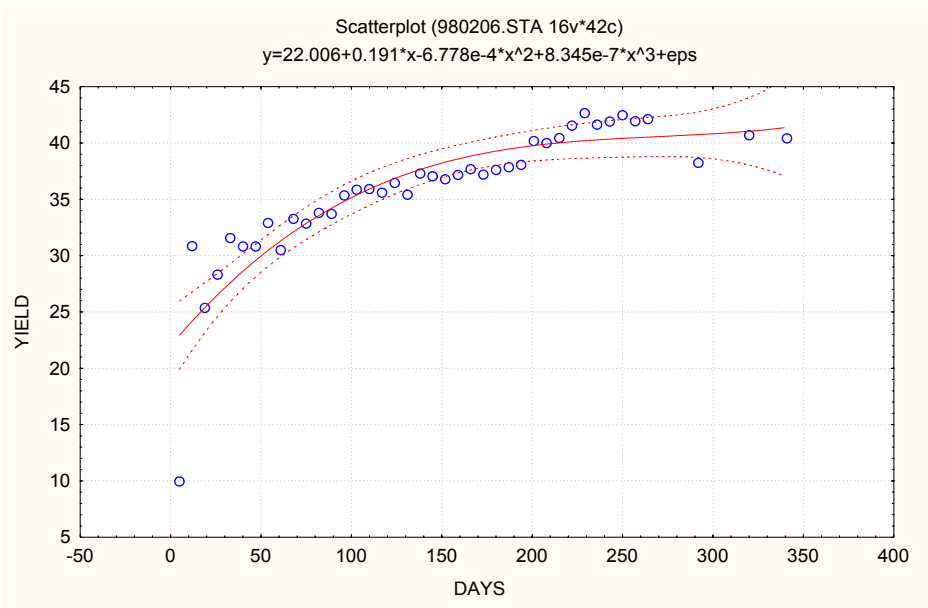


Рис. 1.1h. Временная структура процента на 06.02.1998

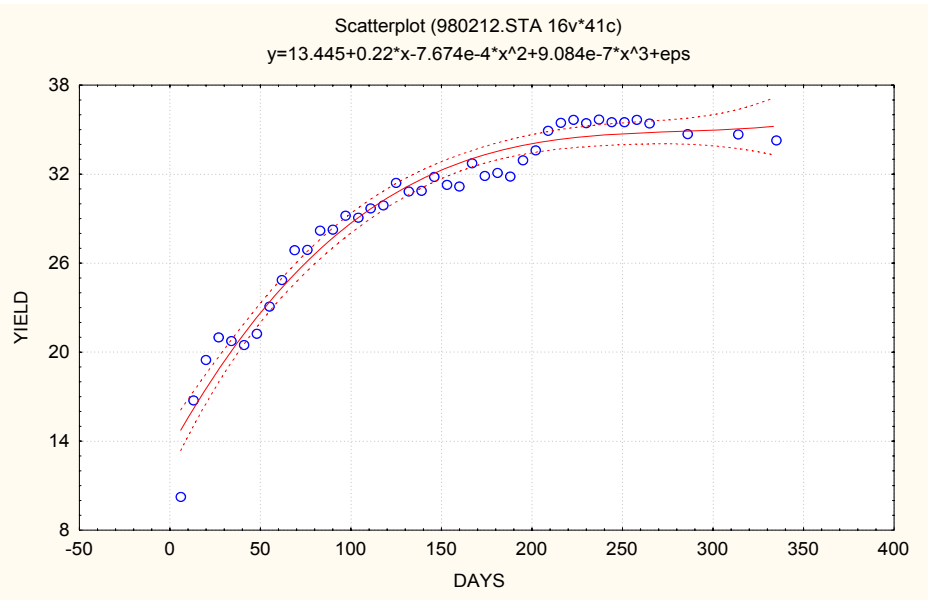


Рис. 1.1i. Временная структура процента на 12.02.1998

СД 5. Статистические дополнения к главе 5

СД 5.1. Статистика *bid-ask*-спредов для случая с единственным инструментом фондового рынка: данные

1. *Предкризисный период.* Уровни альтернативной доходности и число дней, когда активы торговались по котировкам *bid* и *ask* (8 почасовых фиксингов в день)

Уровни альтерна- тивной доходности	Периоды	Всего дней	РАО ЕЭС		Лукойл		ПТС	
			<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>
Период роста рынка РТС		123						
35%	16.01.97–14.02.97, 16.05.97–12.09.97	65	7	23	5	31	5	5
45%	08.01.97, 17.02.97 – 24.03.97, 28.03.97, 11.04.97–14.05.97, 19.09.97–29.10.97	50	5	9	6	19	5	5
55%	05.01.97–06.01.97, 25.03.97–26.03.97, 08.04.97–09.04.97	8	–	5	1	5	–	1
Период падения рынка РТС		96						
35%	03.10.97–15.10.97, 31.10.97–06.11.97	8	1	2	1	1	3	1
45%	01.10.97, 17.10.97– 29.10.97, 05.11.97– 30.12.97, 12.02.98– 15.05.98	42	12	6	9	8	10	14
55%	11.11.97–26.12.97, 19.05.98–21.05.98	19	8	4	6	7	5	3
65%	26.01.98–10.02.98, 04.10.98–06.10.98	9	3	5	4	4	6	2
75%	25.05.98–27.05.98, 19.06.98–28.06.98	6	2	4	2	4	3	1
85%	02.06.98, 11.06.98– 15.06.98	5	3	1	2	1	2	2
95%	16.06.98–18.06.98, 30.06.98	4	3	1	2	2	–	1
105%	27.05.98–29.05.98	3	1	–	2	–	3	–

Уровни альтернативной доходности	Периоды	Всего дней	Оренбургнефть		ГУМ		КАМАЗ	
			<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>
Период роста рынка РТС		123						
35 %	16.01.97–14.02.97, 16.05.97–12.09.97	65	4	9	3	9	3	10
45%	08.01.97, 17.02.97– 24.03.97, 28.03.97, 11.04.97–14.05.97, 19.09.97–29.10.97	50	6	5	6	4	5	9
55%	05.01.97–06.01.97, 25.03.97–26.03.97, 08.04.97–09.04.97	8	1	1	–	1	–	2
Период падения рынка РТС		96						
35%	03.10.97–15.10.97, 31.10.97–06.11.97	8	3	2	5	1	5	–
45%	01.10.97, 17.10.97– 29.10.97, 05.11.97– 30.12.97, 12.02.98– 15.05.98	42	9	5	12	4	9	3
55%	11.11.97–26.12.97, 19.05.98–21.05.98	19	6	1	6	1	7	–
65%	26.01.98–10.02.98, 04.10.98–06.10.98	9	3	5	5	1	4	1
75%	25.05.98–27.05.98, 19.06.98–28.06.98	6	3	1	4	–	4	–
85%	02.06.98, 11.06.98– 15.06.98	5	2	1	3	1	2	3
95%	16.06.98–18.06.98, 30.06.98	4	–	2	1	1	2	1
105%	27.05.98–29.05.98	3	–	2	1	–	2	–

2. *Послекризисный период.* Уровни альтернативной доходности и число дней, когда активы торговали по котировкам *bid* и *ask* (8 почасовых фиксингов в день)

Уровни альтерна- тивной доходности	Периоды	Всего дней	РАО ЕЭС		Лукойл		ПТС	
			<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>
Период роста рынка РТС		123						
4%	27.02.04–11.06.04, 24.09.04–26.11.04, 16.03.05–30.05.05, 28.09.05–30.12.05	236	37	56	48	72	76	56
5.25%	07.02.04–11.06.04, 19.01.04–26.02.04, 12.06.04–23.09.04, 27.11.04–15.03.05, 31.05.05–27.09.05	320	32	39	35	67	84	55
6.5%	01.01.03–06.05.03, 11.08.03–18.01.04	193	11	27	–	25	34	8

Уровни альтерна- тивной доходности	Периоды	Всего дней	Оренбургнефть		ГУМ		КАМАЗ	
			<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>	<i>bid</i>	<i>ask</i>
Период роста рынка РТС		123						
4%	27.02.04–11.06.04, 24.09.04–26.11.04, 16.03.05–30.05.05, 28.09.05–30.12.05	236	96	62	107	49	88	93
5.25%	07.02.04–11.06.04, 19.01.04–26.02.04, 12.06.04–23.09.04, 27.11.04–15.03.05, 31.05.05–27.09.05	320	64	111	88	103	98	83
6.5%	01.01.03–06.05.03, 11.08.03–18.01.04	193	32	30	46	4	23	56

СД 5.2. Статистика *bid-ask*-спредов для случая с единственным инструментом фондового рынка: результаты расчетов

Индекс РТС		
Первый период		
05.01.1997 – 26.10.1997		
Недельная log доходность		$\mu = 0.27\%$
Средняя log вариация		$\sigma = 1.19\%$
Котировочные коэффициенты $\Delta a, \Delta b = 3\%$		
Альтернативная доходность, %	P^* , долл	P_* , долл
35%	346,6	548,3
45%	290,8	442,5
55%	253,4	353,9
Второй период		
27.10.1997 – 30.06.1998		
Недельная log доходность		$\mu = 0.38\%$
Средняя log вариация		$\sigma = 7.02\%$
Котировочные коэффициенты $\Delta a, \Delta b = 5\%$		
Альтернативная доходность, %	P^* , долл	P_* , долл
45%	296,9	490,8
55%	286,1	469,5
65%	276,7	451,2
75%	268,5	435,3
85%	261,2	421,3
95%	254,7	408,0
105%	248,8	397,8

РАО ЕЭС

Первый период 05.01.1997 – 26.10.1997		
Недел. log дох-сть	$\mu = 0.24\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 2.92\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 1\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
35%	0.18	0.44
45%	0.15	0.35
55%	0.13	0.31
Второй период 27.10.1997 – 30.06.1998		
Недел. log дох-сть	$\mu = -0.36\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 7.02\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 1\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
45%	0.23	0.36
55%	0.22	0.34
65%	0.21	0.33
75%	0.20	0.32
85%	0.19	0.30
95%	0.19	0.29
105%	0.18	0.28

Лукойл

Первый период 05.01.1997 – 26.10.1997		
Недел. log дох-сть	$\mu = 0.12\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 1.79\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 1\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
35%	16.08	25.04
45%	11.68	17.25
55%	0.13	13.38
Второй период 27.10.1997 – 30.06.1998		
Недел. log дох-сть	$\mu = -0.23\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 2.36\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 1\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
45%	18.64	24.42
55%	17.76	23.16
65%	17.01	22.10
75%	16.36	21.19
85%	15.80	20.39
95%	15.30	19.70
105%	14.86	19.08

ПТС

Первый период 05.01.1997 – 26.10.1997		
Недел. log дох-сть	$\mu = 0.11\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 3.83\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 6\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
35%	0.92	2.64
45%	0.78	2.11
55%	0.69	1.77
Второй период 27.10.1997 – 30.06.1998		
Недел. log дох-сть	$\mu = -0.33\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 5.50\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 10\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
45%	0.93	2.58
55%	0.90	2.46
65%	0.87	2.35
75%	0.84	2.26
85%	0.82	2.18
95%	0.80	2.11
105%	0.78	2.04

Оренбургнефть

Первый период 05.01.1997 – 26.10.1997		
Недел. log дох-сть	$\mu = 0.10\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 2.81\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 6\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
35%	3.18	8.14
45%	2.41	5.56
55%	1.98	4.29
Второй период 27.10.1997 – 30.06.1998		
Недел. log дох-сть	$\mu = -0.70\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 4.99\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 9\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
45%	3.75	8.63
55%	3.67	8.38
65%	3.59	8.16
75%	3.52	7.96
85%	3.46	7.78
95%	3.41	7.62
105%	3.36	7.47

ГУМ

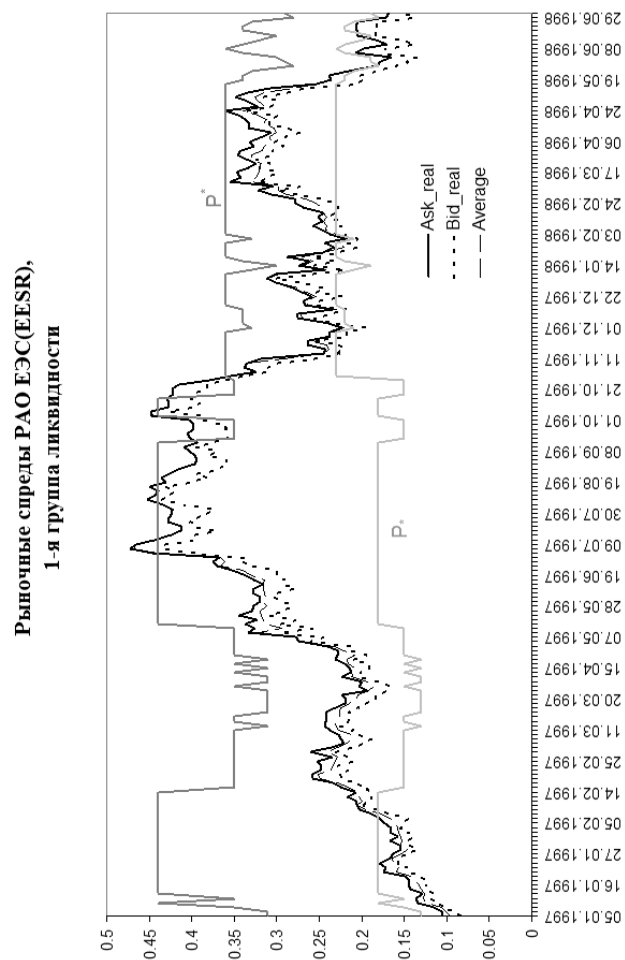
Первый период 5.01.1997 – 26.10.1997		
Недел. log дох-сть	$\mu = 0.31\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 2.03\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 4\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
35%	2.31	5.92
45%	1.57	4.22
55%	1.25	3.47
Второй период 27.10.1997 – 30.06.1998		
Недел. log дох-сть	$\mu = -0.33\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 2.53\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 7\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
45%	1.78	4.89
55%	1.72	4.66
65%	1.67	4.47
75%	1.62	4.30
85%	1.58	4.15
95%	1.54	4.01
105%	1.51	3.90

КАМАЗ

Первый период 05.01.1997 – 26.10.1997		
Недел. log дох-сть	$\mu = 0.13\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 2.27\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 7\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
35%	0.85	3.62
45%	0.55	1.69
55%	0.42	1.13
Второй период 27.10.1997 – 30.06.1998		
Недел. log дох-сть	$\mu = -0.61\%$	
Ср. log вариация	$\sigma = 5.44\%$	
Котир.коэф-ты	$\Delta a, \Delta b = 15\%$	
Альт. дох-сть, %	P^* , долл.	P_* , долл.
45%	1.25	3.85
55%	1.22	3.72
65%	1.20	3.60
75%	1.17	3.50
85%	1.15	3.41
95%	1.13	3.33
105%	1.11	3.25

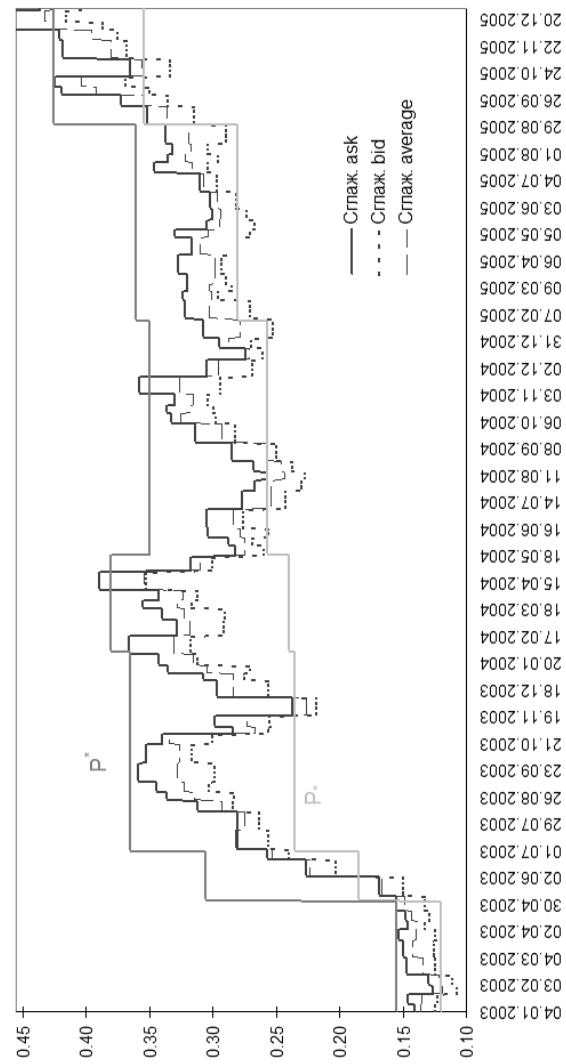
СД 5.3. Рыночные спреды по группам ликвидности акций

1. Предкризисный период



2. Послекризисный период

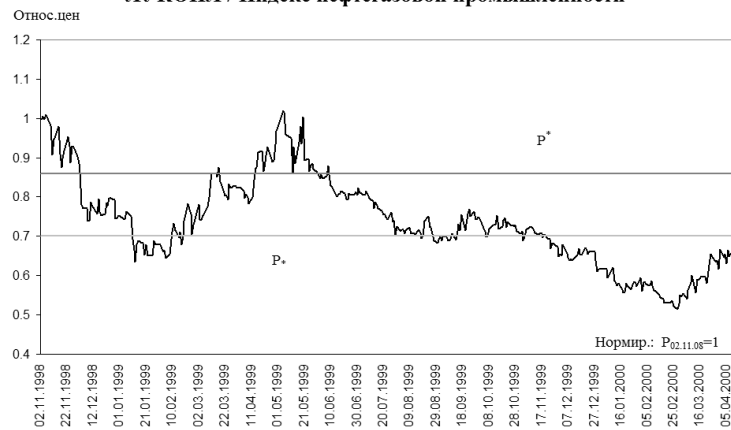
Рыночные спреды РАО ЕЭС(ЕЭСР),
1-я группа ликвидности



СД 5.4. Рыночные спреды по отраслям при возможности обмена акций друг на друга

Нефтегазовый сектор

ЛУКОЙЛ / Индекс нефтегазовой промышленности



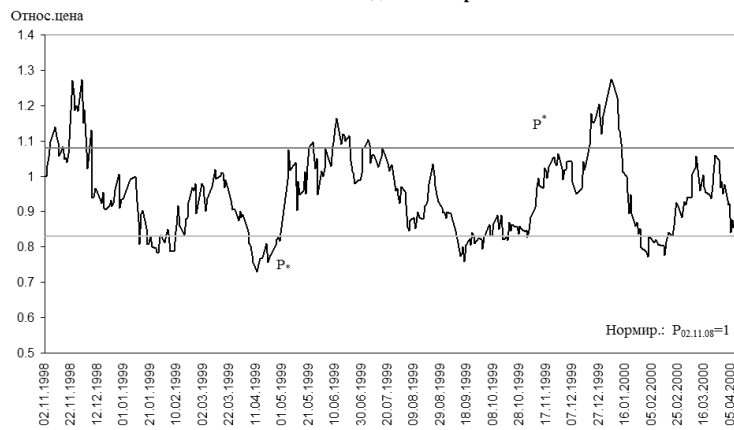
$$\mu = 43\%, \quad \sigma = 4.01\%$$

ЛУКОЙЛ (прив.) / Индекс нефтегазовой промышленности

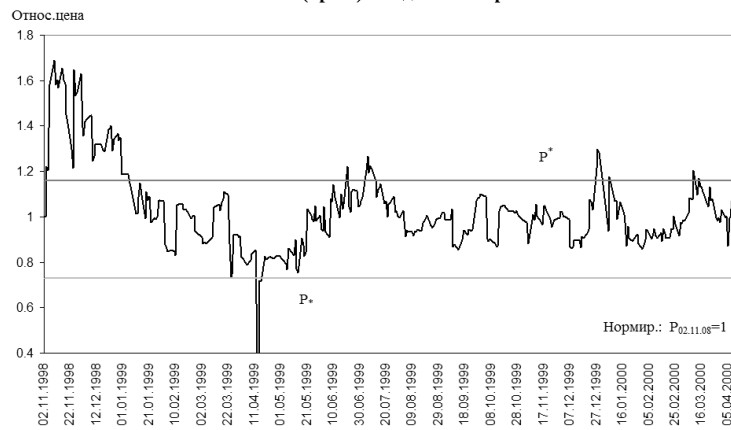


$$\mu = 0.53\%, \quad \sigma = 6.80\%$$



*Сектор электросвязи***Ростелеком / Индекс электросвязи**

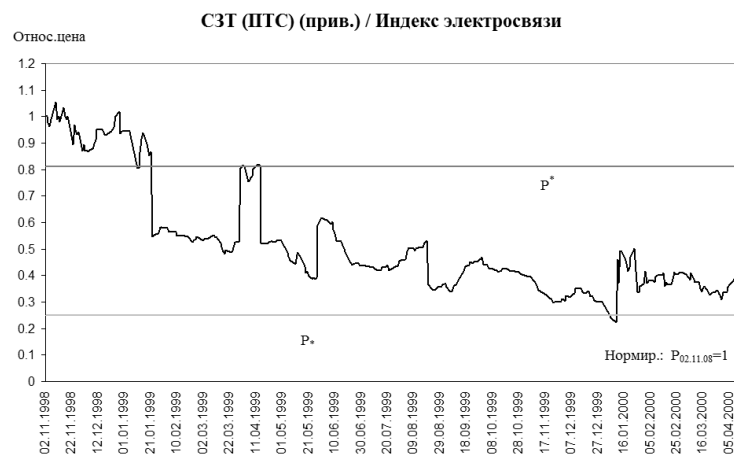
$$\mu = 1.22\%, \quad \sigma = 5.59\%$$

Ростелеком (прив.) / Индекс электросвязи

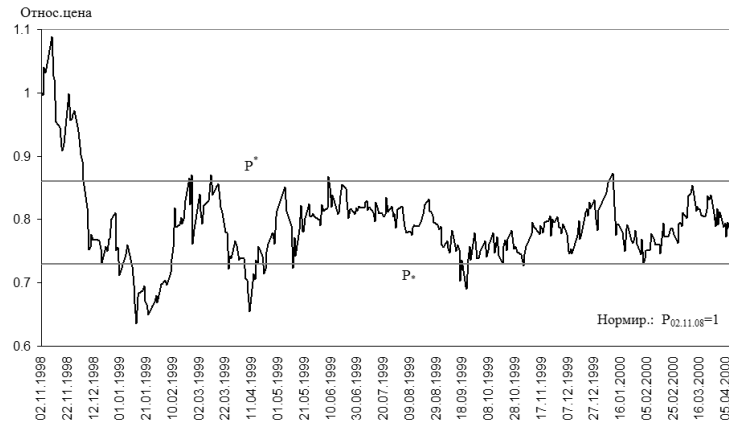
$$\mu = 0.61\%, \quad \sigma = 5.13\%$$



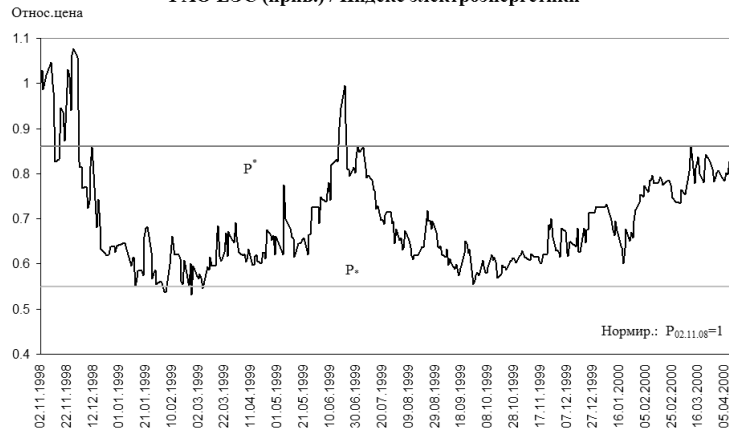
$$\mu = 3.09\%, \quad \sigma = 8.41\%$$



$$\mu = 1.94\%, \quad \sigma = 8.59\%$$

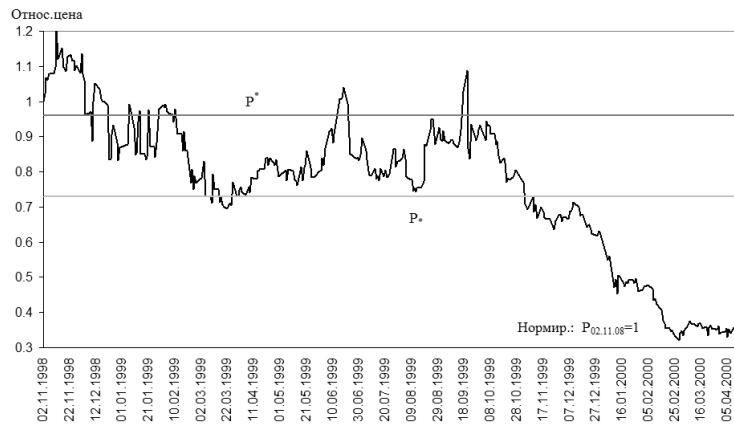
*Сектор электроэнергетики***РАО ЕЭС / Индекс электроэнергетики**

$$\mu = 0.60\%, \quad \sigma = 5.11\%$$

РАО ЕЭС (прив.) / Индекс электроэнергетики

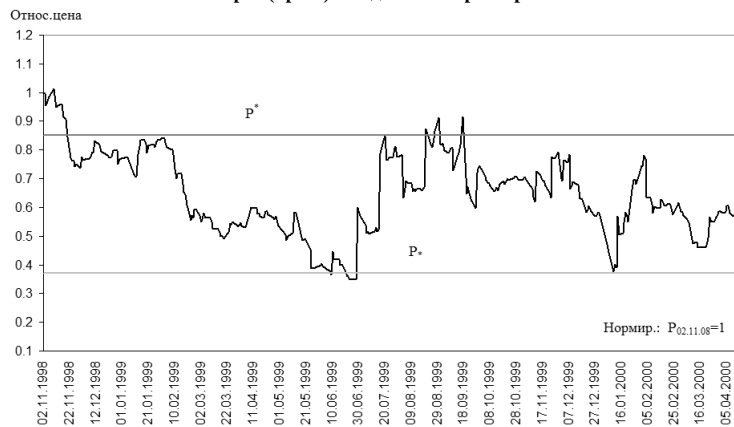
$$\mu = 1.01\%, \quad \sigma = 6.25\%$$

Иркутскэнерго / Индекс электроэнергетики



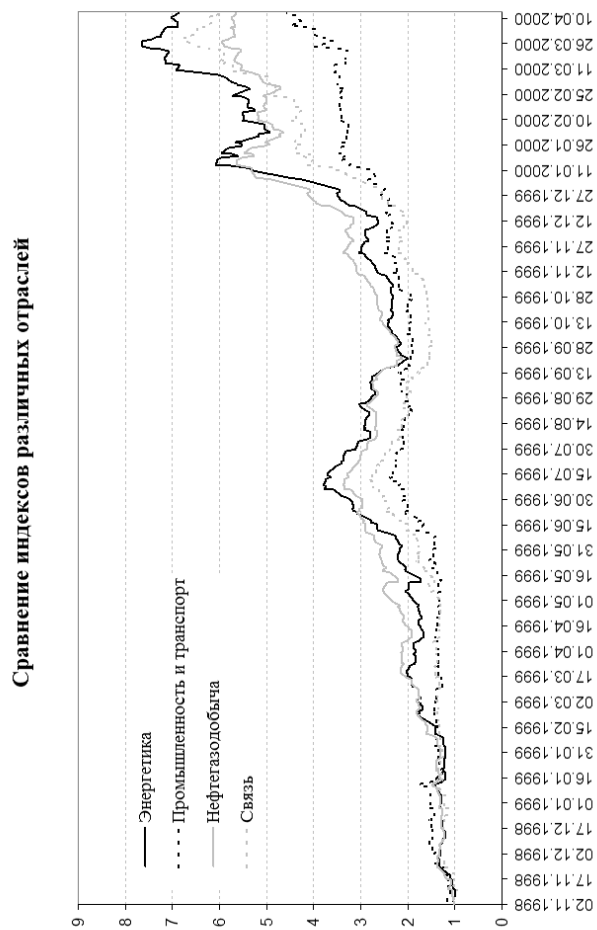
$$\mu = 0.27\%, \quad \sigma = 4.71\%$$

Ленэнерго (прив.) / Индекс электроэнергетики



$$\mu = 1.86\%, \quad \sigma = 7.82\%$$

СД 5.5. Сравнение индексов различных отраслей



Словарь терминов

ADR (American Depositary Receipt, американская депозитарная расписка) — производная ценная бумага, эмитированная банком-резидентом США, владеющим на праве собственности акциями иностранной компании, и дающая владельцу права, равные правам обладателя некоторого фиксированного числа акций фирмы. Позволяет фирмам, чьи акции из-за нормативных ограничений не могут обращаться на американском рынке, привлекать с него доленое финансирование.

ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) — эконометрическая модель временной зависимости регрессионных остатков.

Bid-ask-spread — разница между котировками продавца и покупателя ценной бумаги в один и тот же момент времени.

Downside risk — мера риска, основанная на вычислении полувариации случайной величины, отражающая только отклонение от ожидаемой доходности в меньшую сторону. На ее базе строится модель D-CAMP, бета которой отражает недиверсифицируемый риск при движении риска вниз.

IPO (Initial Public Offering, первичное публичное размещение) — вывод на открытый биржевой рынок акций вновь создаваемых акционерных обществ. Одновременно решает несколько задач: привлечение дополнительного финансирования, повышение ликвидности акционерного капитала, придание рыночной оценки компании.

Value at Risk (VaR) — мера риска, основанная на вычислении заданного квантиля распределения случайной величины.

А

Абсолютно ликвидный актив — гипотетический актив, не имеющий *bid-ask-spread* котировок и обладающий тем свойством, что любой инвестор может приобрести и реализовать (условно) неограниченный объем этого актива по текущей рыночной цене. В качестве *proxy* ликвидных активов обычно рассматриваются государственные облигации.

Актив с нулевым бета — виртуальный портфель рискованных активов, имеющий нулевую корреляцию с выбранным инвестором эффективным портфелем.

Б

Базовая ставка (base rate) — доходность базовой облигации или межбанковского кредита или темп роста макроэкономического индикатора, взятого в качестве основы для расчета плавающей ставки по облигации.

Базовый актив — актив (инструмент), лежащий в основе производного финансового инструмента.

Безрисковая процентная ставка — в контексте экономических моделей (например, CAPM) — это ставка, по которой экономические агенты могут одолживать деньги и получать кредиты без ограничений. На финансовых рынках под безрисковой процентной ставкой (безрисковой доходностью) понимают процентную ставку по инструментам фиксированной доходности, не подверженным рыночным и специфическим рискам (обычно государственные ценные бумаги со сроком погашения, равным горизонту инвестирования).

Безрисковый эквивалент — результат, дающий индивидууму такую же субъективную полезность, как и рискованная игра со случайными исходами.

Бета-коэффициент актива — мера рыночного риска актива, характеризующая степень зависимости доходности этого актива от доходности по рынку в целом.

В

Вариационная маржа — ежедневный денежный поток, связанный с изменением структуры начальной маржи (гарантийного обеспечения) по срочным биржевым контрактам.

Виртуальная ГКО — несуществующая ценная бумага, фактически условная материализация спот-ставки.

Вмененная волатильность — оценка изменчивости (стандартного отклонения) цены базового актива, произведенная на основании текущих (рыночных) цен опционных контрактов.

Внутренняя норма доходности потока платежей — ставка дисконтирования, уравнивающая сумму сегодняшних ценностей (present value) всех ожидаемых платежей с рыночной ценой инструмента, генерирующего этот поток платежей.

Внутренняя ценность опциона — разность между текущей (рыночной) ценой базового актива и ценой исполнения опционного контракта.

Возврат активов — фактическое и юридическое восстановление имущественного положения фирмы (проекта) после вывода активов.

Временная ценность опциона — разность между текущей (рыночной) ценой опционного контракта (премией по опциону) и его внутренней ценностью.

Временная структура процентных ставок — графическое, функциональное или табличное представление зависимости величины процентных ставок (стоимости кредита) от срока до погашения на одном из сегментов долгового рынка.

Вывод активов — обобщенный термин, означающий фактическое осуществление (возможно, без должного юридического оформления) перевода активов компании в иные структуры с целью их последующего присвоения. Термин часто применяется для условного обозначения произвольных действий по получению частных выгод от пользования активами фирмы в ущерб большинству ее собственников.

Выпуклость — параметр, характеризующий нелинейность цены облигации по отношению к изменению доходности облигации к погашению.

Г

Гамма-коэффициент опциона — вторая производная от цены опционного контракта по цене базового актива.

Геометрическое броуновское движение — диффузионный процесс на положительной полуоси, отвечающий тому условию, что логарифм его значения изменяется по броуновскому закону. Является наиболее распространенной теоретической моделью движения цен акций в непрерывном времени.

Гипотеза чистых ожиданий — гипотеза, утверждающая, что между спот-ставками на разные сроки и соответствующими форвардными ставками есть однозначная связь.

Горизонт инвестирования — ожидаемый срок держания актива в портфеле инвестора. Для *стратегического* инвестора, как правило, определяется сроком окупаемости инвестиций в актив; для *портфельного* — появлением возможности выхода из актива с переводом средств в более доходные альтернативные инструменты.

Государственная краткосрочная облигация (ГКО) — в России: дисконтная облигация со сроком погашения менее года, эмитированная Министерством финансов РФ.

Граница (верхняя, нижняя) колебаний купонной доходности — устанавливаемые в проспекте эмиссии предельные значения плавающей купонной ставки. В случае достижения этих границ купонная ставка на следующий период устанавливается равной граничной вне зависимости от колебаний базовой ставки, к которой привязан плавающий купон.

Д

Дельта-коэффициент опциона — первая производная от цены опционного контракта по цене базового актива.

Диверсификация по Марковицу — диверсификация портфеля, при которой структура портфеля определяется не только доходностью и рискованностью активов (инструментов), но и степенью взаимной коррелированности доходности различных активов в портфеле.

Диверсификация портфеля — способ управления рисками, заключающийся в распределении средств по множеству различных активов.

Дисконтная облигация — облигация, по которой выплата купонных платежей не предусматривается. Доход инвестора определяется разностью между ценой облигации и номинальной стоимостью облигации, выплачиваемой при погашении.

Длинная позиция (по активу, инструменту) — покупка актива, инструмента (как правило, связанная с получением права требования в отношении активов).

Доходность облигации к погашению — внутренняя норма доходности потока всех платежей по облигации (купонных в даты выплаты купонов и номинальной стоимости в дату погашения) с данного момента до погашения.

Доходность по индексу — доходность хорошо диверсифицированного портфеля, листинг которого полностью повторяет листинг индекса.

Дюрация облигации — средневзвешенный срок платежей по облигации, причем взвешивание производится по дисконтированной ценности платежа, отнесенной к цене облигации.

И

Иммунизация портфеля облигаций — создание такой структуры облигационного портфеля, при которой его ценность (в конце инвестиционного горизонта) не зависит от незначительных изменений процентных ставок.

Индекс (фондовый) — агрегированный показатель, отражающий уровень цен на фондовом рынке.

Интерполяция — для функции, определенной в двух и более точках, вычисление ее значений в заданных промежуточных точках.

Инфляция — изменение (рост) индекса цен выбранной группы товаров.

Исполнение фьючерсных (опционных) контрактов — для поставочных контрактов: передача прав на базовый актив от продавца контракта к покупателю и одновременная оплата покупателем этих прав в соответствии с заключенным контрактом. Для расчетных контрактов — денежные расчеты в соответствии с текущей ценой базового актива, без передачи прав на базовый актив.

К

Казначейские векселя США (Treasury Bills) — краткосрочные дисконтные облигации (как правило, со сроком погашения 3 месяца), эмитируемые денежными властями США. Служат инструментом денежно-кредитной политики.

Короткая позиция (по активу, инструменту) — продажа актива, инструмента (либо короткая продажа, либо принятие обязательств в отношении прав требования).

Короткая продажа — продажа актива с обязательством выкупить его в будущем. Предполагается, что за счет коротких продаж финансируется покупка других активов.

Корреляция доходностей активов — степень взаимной «похожести» динамики доходности двух различных активов.

Котировка ask — ценовое предложение продавца ценной бумаги.

Котировка bid — ценовое предложение покупателя ценной бумаги.

Кредитный риск — риск инвестора, обусловленный отказом заемщика от обязательств по займу.

Кривая доходности — в широком определении: графическое представление временной структуры процентных ставок на одном из сегментов долгового рынка. В узком определении: кривая спот-ставок.

Кривая доходности к погашению (*Yield Curve To Maturity, YTM*) — графическое представление зависимости доходности к погашению различных облигационных выпусков (обычно одного эмитента) от срока до погашения соответствующего выпуска.

Кривая спот-ставок (*бескупонная кривая доходности, zero-coupon yield curve*) — графическое представление зависимости величины спот-ставок от срока (как правило, в сегменте рынка государственных ценных бумаг).

Л

Ликвидность рынка — показатель сегмента рынка, характеризующий способность участников совершать с минимальными издержками сделки купли-продажи ценных бумаг в больших объемах.

Листинг индекса — набор ценных бумаг, на основании которого рассчитывается фондовый индекс.

М

Мера риска — способ сравнения рискованности, единообразно применяемый к различным активам (финансовым инструментам).

Метод Монте-Карло — общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций случайного процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с предполагаемыми характеристиками исследуемой величины.

Миноритарный акционер (*миноритарий фирмы*) — акционер, обладающий пакетом акций меньшим, чем у другого акционера.

Модель Кокса-Ингерсолла-Росса — гипотеза о диффузионном характере спот-ставки государственных облигаций, отличающаяся тем свойством, что коэффициент сноса имеет эффект возврата к среднему, а коэффициент диффузии пропорционален самой ставке.

Модель Орнштейна-Уленбека — гипотеза о диффузионном характере спот-ставки государственных облигаций, отличающаяся тем свойством, что коэффициент сноса имеет эффект возврата к среднему, а коэффициент диффузии постоянен.

Модель ценообразования на капитальные активы CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) — экономическая модель равновесия на рынке рискованных активов. В версии Шарпа-Линтнера предполагается существование на рынке безрискового актива. В версии Блэка безрисковый актив на рынке отсутствует.

Мониторинг (*действий менеджмента*) — эффективный и регулярный анализ проводимых мероприятий на предмет их соответствия интересам собственников.

Н

Надбавка (*markup*) — надбавка к базовой ставке. Сумма базовой ставки в прошлом периоде и надбавки определяет купонную ставку на текущий период по облигации с плавающими купонами.

Начальная маржа — гарантийное обеспечение по срочному контракту.

Нерыночные активы (*nonmarketable assets*) — подверженные риску специфические активы инвестора, которые он способен использовать для получения инвестиционных выгод, но которые он не имеет возможности приобрести/реализовать на рынке. Рассматриваются инвестором как часть общего, но не рыночно-торгуемого портфеля его активов.

Неявный (воображаемый) опцион на покупку (продажу) актива — нематериальный актив инвестора, дающий ему право требования о продаже ему рыночного актива (соответственно, требования покупки у него рыночного актива) по цене *bid* (соответственно, по цене *ask*). Фактически предоставляется маркет-мейкерами биржи.

Нижняя (floor feature), верхняя (ceiling feature) граница купонной доходности — ограничения на минимальное (максимальное) значение плавающего купона.

Номинальная доходность — относительный рост цены (доходность) инструмента, не учитывающий инфляционное обесценение денег. В контексте главы 6 — доходность облигации к погашению.

«Номинальный якорь», (drop-lock feature) — условие, по которому при достижении плавающим купоном определенного значения он остается на этом уровне до погашения облигации.

Нормальное (гауссово) распределение — одно из простых и удобных для моделирования видов непрерывного распределения, широко используется на практике для описания различных экономических и финансовых величин.

О

Облигации Государственного сберегательного займа (ОГСЗ) — документарные облигации на предъявителя, выпускавшиеся во второй половине 1990-х гг. Министерством финансов РФ.

Облигации с переменным купоном — любые облигации, купонная ставка по которым не фиксируется в момент выпуска, а определяется впоследствии на отдельные купонные периоды.

Облигации с плавающим купоном (floating rate bonds, notes) — облигации, купонная ставка по которым устанавливается перед началом каждого купонного периода путем расчета базовой ставки и надбавки к ней.

Облигация федерального займа (ОФЗ) — в России: купонная облигация, как правило, с фиксированной купонной ставкой, со сроком погашения более года, эмитированная Министерством финансов РФ.

Ожидаемый результат — синоним математического ожидания случайной величины, используемый на практике.

Опционный контракт — инструмент срочного рынка, дающий покупателю право инициировать исполнение контракта или отказаться от его исполнения.

Оферта — обязательство эмитента выкупить облигацию по требованию владельца по номинальной стоимости облигации в дату, оговоренную в проспекте эмиссии.

Офсетная сделка — сделка, зеркальная по отношению к ранее заключенной сделке, как правило, проводимая для закрытия позиций на срочном рынке.

П

Полувариация — характеристика случайной величины, показывающая степень одностороннего отклонения в меньшую сторону возможных значений от ожидаемого значения (математического ожидания случайной величины).

Производные финансовые инструменты — инструменты (как правило, срочного рынка), цена которых определяется ценой базового актива.

Р

Реальная доходность — относительный рост цены (доходность) инструмента с учетом инфляционного обесценения денег. В контексте главы 6 — доходность облигации к погашению, скорректированная на ожидаемый (или текущий) темп инфляции.

Рейтинг — условное обозначение, группировка инструментов (обычно долговых) или эмитентов по степени их схожести в отношении некоторого слабоформализуемого признака. Например, кредитный рейтинг группирует эмитентов по степени их потенциальной способности отвечать по своим долговым обязательствам.

Рынок государственных ценных бумаг (ГЦБ) — сегмент финансового рынка, на котором обращаются долговые ценные бумаги, эмитированные центральными органами власти. Эти ценные бумаги обычно имеют минимальный кредитный риск и наибольшую ликвидность. В России рынок ГЦБ образуют федеральные и субфедеральные облигации.

Рыночная линия SML, линия рынка ценных бумаг (Security Market Line) — график зависимости доходности активов от бета-коэффициентов.

Рыночный портфель — в модели САРМ условный портфель, состоящий из всех обращающихся на рынке рискованных активов, причем доля каждого актива в этом портфеле пропорциональна рыночной капитализации актива.

Рыночный риск — риск, обусловленный изменениями ожиданий экономических агентов по поводу перспектив экономики. Находит отражение в ценах всех рыночных инструментов.

С

Сделка РЕПО — продажа (покупка) ценной бумаги с обязательством выкупить (продать) ее по оговоренной цене в определенную дату.

Серийная корреляция — эффект, связанный с тем, что остатки регрессионной модели оказываются коррелированными.

Случайное блуждание — случайный процесс, при котором изменение случайной величины не зависит от ее предыдущих изменений.

Сплайн-функция — агрегатная функция, совпадающая с функциями более простой природы на каждом элементе разбиения своей области определения. В контексте главы 1 под сплайн-функцией понимается математическое описание

«гладкой» кривой, проходящей через все заданные точки. «Гладкость» означает непрерывность первой и второй производной на всей области определения сплайн-функции.

Справедливая оценка (актива) — оценка, основанная на гипотезе о рациональном поведении всех инвесторов на информационно-эффективном рынке. Определяется движением и ожиданиями экономических переменных, влияющих на денежные потоки актива на фоне альтернативных инструментов инвестирования.

Спот-ставка — процентная ставка, характеризующая стоимость единственного безрискового платежа в определенный момент времени.

Спред доходности — строго: разница в доходностях к погашению двух долговых ценных бумаг с одинаковым сроком до погашения, но относящихся к разным сегментам рынка. Часто понятие «спред доходности» распространяют на любую разницу в процентных ставках (например, спред между ставками на разные сроки в одном сегменте рынка).

Спред котировок — разница между лучшей котировкой на продажу (котировка bid) и лучшей котировкой на покупку (котировка ask) одной и той же ценной бумаги.

Ставка LIBOR (London Interbank Offered Rate) — лондонская межбанковская ставка предложения по кредитам на разные сроки и в разных валютах. Процентная ставка международного денежного рынка, рассчитываемая на основе котировок ведущих международных банков первоклассным финансовым институтам.

Ставка MIBOR (Moscow Interbank Offered Rate) — межбанковская ставка предложения крупными российскими банками рублевых кредитов на разные сроки первоклассным финансовым институтам. Процентная ставка российского денежного рынка, рассчитываемая на основе котировок крупных российских банков первоклассным финансовым институтам.

Ставка MosPrime (Moscow Prime Offered Rate) — межбанковская ставка предоставления рублевых кредитов на разные сроки. Рассчитывается Национальной валютной ассоциацией России на основе котировок, объявляемых ведущими участниками российского денежного рынка первоклассным финансовым институтам.

Ставка рефинансирования — процентная ставка, устанавливаемая Центральным банком, по которой он кредитует коммерческие банки как кредитор последней инстанции. Служит инструментом денежно-кредитной политики.

Стренгл — комбинация двух опционных контрактов разного типа (колл и пут), но с одинаковой ценой исполнения.

Т

Теория ликвидности — теория, объясняющая величину bid-ask-спредов ликвидностью активов. Полагается, что существование спредов является естественным препятствием для получения прибыли посредством экономически необосно-

ванных операций, связанных с покупкой любого актива и быстрой его продажей после малого благоприятного изменения цены.

Теория рыночного запаса — теория, объясняющая величину *bid-ask*-спреда тем, что при накоплении инвестором достаточно большой доли своего портфеля в одном активе он будет готов, при прочих равных, реализовывать этот актив даже по ценам, относительно близким к ценам спроса.

Транзакционные издержки (рыночное «трение») — издержки, связанные с техническим обеспечением купли-продажи биржевых активов. Ограничивают возможности по быстрому выходу из актива после его покупки (и наоборот) и повышают затраты и требуемую доходность от сделок.

У

Уравнение Колмогорова–Планка — уравнение второго порядка в частных производных, описывающее зависимость ожидаемого значения цены облигации с плавающим купоном от базовой спот-ставки и момента времени.

Условие «гладкой склейки» — теоретическое требование к модели, описывающей функции на двух разных интервалах аргумента, чтобы в общей граничной точке этих интервалов совпадали значения функции и ее первой производной. Система дифференциальных уравнений с плавающими границами — система уравнений, граничные условия для которой заданы в неизвестных а priori точках, задача определения которых является частью задачи решения системы.

Ф

Форвардная ставка — это характеристика доходности будущих инвестиций на определенный срок в долговую ценную бумагу — своего рода ожидаемая рынком «будущая спот-ставка».

Форвардный контракт — внебиржевой производный финансовый инструмент срочного рынка, обязательство купить (или продать) базовый актив в дату исполнения контракта по оговоренной в контракте цене.

Функция полезности Неймана–Моргенштерна — кардиналистская функция полезности индивидуума, ставящая в соответствие любому результату определенное численное значение полезности этого результата.

Фьючерсный контракт — как правило, биржевой производный финансовый инструмент срочного рынка, фактически жестко специфицированный форвардный контракт. Особенность заключается в механизмах гарантии по контракту — в периодическом пересмотре структуры гарантийного обеспечения по контракту.

Х

Хеджирование — метод управления рисками (как рыночными, так и специфическими), при котором колебания стоимости хеджируемого товара или финансового актива (портфеля активов) полностью или частично компенсируются колебаниями стоимости включаемого в портфель хеджирующего финансового инструмента (как правило, это инструмент срочного рынка).

Ч

Частные выгоды — эксклюзивная доля лица, участвующего в распределении коллективной прибыли от проекта, обычно в условиях, когда интересы прочих участников ущемляются.

Э

Эмпирическая функция распределения вероятности — функция распределения, построенная по частичной выборке значений случайной величины.

«*Эффект песо*» — эффект, при котором рыночный курс валюты не подчиняется паритету процентных ставок. Впервые наблюдался для мексиканского песо, в настоящее время многими экономистами и инвесторами этот эффект трактуется как преддверие валютного кризиса.

Эффективность рынка — способность рынка оперативно отражать в ценах инструментов всю информацию и не предоставлять участникам рынка возможности совершения арбитражных сделок (гарантированного извлечения прибыли сверх безрисковой).

Эффективный портфель — любой из портфелей рискованных активов, удовлетворяющих условию минимума риска при заданной доходности (или максимума доходности при заданном уровне риска). Совокупность эффективных портфелей образует эффективную границу Марковица.

Литература

- Баринов В., Первозванский А., Первозванская, Т. 1999. *Политика размещения государственного долга и поведение рынка государственных облигаций*. РПЭИ Фонда Евразия, 5.
- Беннинга Ш. 2007. *Финансовое моделирование с использованием Excel*. М.: Вильямс, 2-е изд.
- Брейли Р., Майерс С. 2004. *Принципы корпоративных финансов*. М.: Олимп-Бизнес, 7-е изд.
- Бригхем Ю., Гапенски Л. 1997. *Финансовый менеджмент*. В 2 т. СПб.: Экономическая школа.
- Бухвалов А. В. 2004а. Реальные опционы в менеджменте: введение в проблему. *Российский журнал менеджмента* **2** (1): 3—32.
- Бухвалов А. В. 2004б. Реальные опционы в менеджменте: классификация и приложения. *Российский журнал менеджмента* **2** (2): 27—56.
- Бухвалов А. В. 2006. Реальны ли реальные опционы. *Российский журнал менеджмента* **4** (3): 77—84.
- Бухвалов А. В. 2008. Асимметрия между инсайдерами и аутсайдерами: проблемы двойственности оценки активов компании. *Российский журнал менеджмента* **6** (4): 17—48.
- Бухвалов А. В., Бухвалова В. В. 2009. *Финансовые вычисления для менеджеров*. СПб.: Высшая школа менеджмента, 2-е изд.
- Бухвалов А. В., Крюковская О. В., Окулов В. Л. 2001. Анализ временной структуры процента на российском финансовом рынке. В кн.: *Экономические исследования: теория и приложения*. Сборник научных работ (вып.2). Изд-во Европейского Университета в С.-Петербурге: 72—93.
- Бухвалов А. В., Окулов В. Л. 2000. Действует ли логика на Российском рынке? В сб. *Финансы и политика корпораций*. Изд-во СПбГУ: 7—47.
- Бухрякова Л. П. 1994. *Адаптация производных инструментов международного валютно-финансового рынка для российских участников внешнеэкономической деятельности* / Диссертация канд. экон. наук, СПб.: СПбГУф.

- Воронцовский А. В., Абелканс В. Г. 2001. Учет ARCH-эффекта при построении эконометрических моделей отечественного фондового рынка. *Вестник СПбГУ. Сер. 5.* (4): 106–116.
- Вэриан Х. Р. 2003. Портфель Нобелевских лауреатов: Марковиц, Миллер и Шарп. *Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. Менеджмент* (1): 153–165.
- Гайдар Е. 1998. *Экономика переходного периода: 1991–1997*. Под ред. Е. Гайдара. М.: Изд-во «Дело».
- Гайдар Е. 2003. *Экономика переходного периода: 1998–2002*. Под ред. Е. Гайдара. М.: Изд-во «Дело».
- Гайдар Е. 2008. *Экономика переходного периода: 2000–2007*. Под ред. Е. Гайдара. М.: Изд-во «Дело» АНХ.
- Гамбаров Г., Шевчук И., Балабушкин А. 2004. Оценка срочной структуры процентных ставок. *Рынок ценных бумаг* **11** (290), bf 13 (292).
- Гамбаров Г., Шевчук И., Балабушкин А., Никитин А. 2006. Кривая бескупонной доходности на рынке ГКО-ОФЗ. *Рынок ценных бумаг* **3** (306): 68–77.
- Гребенников П. И. 2000. *Первый этап функционирования российского рынка краткосрочного государственного долга в 1993–1998 гг.* SPIDER-PE. Научные доклады. Стокгольмский университет – СПб университет, вып. 13.
- Гурвич Е. Т., Дворкович А. В. 1999. *Процентные ставки и цена внутренних заимствований в среднесрочной перспективе*. Научные доклады. РПЭИ/фонд Евразия: 99–08.
- Джексон М., Стонтон М. 2006. *Финансовое моделирование в Excel и VBA: углубленный курс* М.: Диалектика.
- Дорофеев Е. А. 1999а. Арбитражная теория ценообразования и фактические детерминанты цен РТС. В сб.: *Проблемы социального и гуманитарного знания*. ЕУСПб: 483–502.
- Дорофеев Е. А. 1999б. *Влияние колебаний экономических факторов на динамику российского фондового рынка*. М.: РПЭИ Фонда Евразия.
- Дорофеев Е. А. 2000. Принципы ценообразования облигаций с переменным купоном. *Экономика и математические методы* **36** (1): 53–62.
- Дорофеев Е. А. 2001. *Моделирование цен российского фондового рынка*. Дисс. канд. экон. наук. СПб.: Европейский Университет в С.-Петербурге.
- Дорофеев Е. А. 2004. Влияние на корпоративное управление мониторинга инвестиций крупным собственником. *Российский журнал менеджмента*. **2** (2): 57–72.

- Дорофеев Е. А. 2005. Входы-выходы с рынка фондовых активов: выбор оптимального момента. *Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. Менеджмент* 4: 33–45.
- Дробышевский С. 1999а. Анализ рынка ГКО на основе изучения временной структуры процентных ставок. Научные труды ИЭПП. No 17Р. М.
- Дробышевский С. 1999b. Обзор современной теории временной структуры процентных ставок. Основные гипотезы и модели // Научные труды ИЭПП. No 14Р. М., 1999.
- Ивантер А., Пересецкий А. 1999. Анализ развития рынка ГКО // Научные доклады РПЭИ. Фонд Евразия, 99-06. М..
- Ишков В. 2001. Модель ценообразования на финансовые активы САРМ в версии Блэка на Российском финансовом рынке. Магистерская диссертация. СПб.: Европейский Ун-т в С.-Петербурге.
- Ишков В. 2002. К вопросу о верификации модели ценообразования на капитальные активы в версии Блэка на российском фондовом рынке. В кн.: *Вопросы экономической теории и практики*. Вып. 3. СПб: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге: 42–57.
- Косенко А. В. 2000. Моделирование риска на российском рынке акций. В кн.: *Финансы и политика корпораций*. Изд-во СПбГУ: 72–93.
- Крюковская О. В. 2003. Объяснение временной структуры процентных ставок. *Рынок ГКО с 1996 по 1998 гг.* Научный доклад No 03/07. М., EERC: 43с.
- Крушвиц Л. 2000. *Финансирование и инвестиции*. Перевод с нем. СПб.: Питер.
- Крушвиц Л., Шеффер Д., Шваке М. 2001. *Финансирование и инвестиции. Сборник задач и решений*. Перевод с нем. СПб: Питер.
- Лимитовский М. А. 2008. *Инвестиционные проекты и реальные опционы на развивающихся рынках*. 4-е изд. М.: Изд-во «Юрайт».
- Лью Ю-Д. 2002. *Методы и алгоритмы финансовой математики*. Перевод с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний
- Малюгин В. И. 2003. *Рынок ценных бумаг. Количественные методы анализа*. М.: Издательство «Дело».
- Мур Дж., Уэдерфорд Л. 2004. *Экономическое моделирование в Microsoft Excel*. М.: Вильямс.
- Окулов В. 1999. Модель САРМ (версия Блэка) на российском фондовом рынке. Магистерская диссертация, СПб.: Европейский ун-т в С.-Петербурге.

- Окулов В. 2000. Модели ценообразования на капитальные активы на российском фондовом рынке. В кн.: *Финансы и политика корпораций*. Изд-во СПбГУ: 94–120.
- Окулов В. Л. 2001. Оценка стоимости и рискованности облигаций с неопределенным переменным купоном. *Рынок ценных бумаг* (10): 78–80.
- Окулов В. Л., Корнеев Д. В. 2001. Новые информационно-аналитические продукты на рынке облигаций С.-Петербурга. *Монитор*, Информационный бюллетень СПВБ, ноябрь–декабрь: 8–11.
- Окулов В. Л., Корнеев Д. В. 2002а. Оценка временной структуры процентных ставок на рынке облигаций С.-Петербурга. *Рынок ценных бумаг* (4): 74–76.
- Окулов В. Л., Корнеев Д. В. 2002б. Кривая доходности рынка облигаций С.-Петербурга: построение и применение. *Индикатор* (8): 28–30.
- Осколков И. В. 2000. Логика премирования риска и рынок российских акций. В кн.: *Финансы и политика корпораций*. Изд-во СПбГУ: 94–120.
- Радыгин А. Д., Энтов Р. М. 1999. *Институциональные проблемы развития корпоративного сектора: собственность, контроль, рынок ценных бумаг*. М.: Институт экономики переходного периода: Москва.
- Рогов М. А. 2001. *Риск-менеджмент*. М.: Финансы и статистика.
- Синцов Д. 2003. *Модификации модели CAPM, учитывающие особенности российского рынка*. Магистерская диссертация, СПб: Европейский ун-т в С.-Петербурге.
- Турмухаметова Г. 1998. *Развитие рынка государственных краткосрочных облигаций в России*. Препринт #SP/98/011 R.M.
- Фабоцци Ф. 2008а. *Справочник по ценным бумагам с фиксированной процентной ставкой. Том 1. Основы*. Перевод с англ. М.: Вильямс.
- Фабоцци Ф. 2008б. *Справочник по ценным бумагам с фиксированной процентной ставкой. Том 2. Оценка, анализ и управление*. Перевод с англ. М.: Вильямс.
- Халл Дж. К. 2007. *Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты*. Перевод с англ. 6-е изд. М.: Вильямс.
- Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Дж. В. 1997. *Инвестиции*. Перевод с англ. М.: ИНФРА-М
- Энтов Р. 1999. *Проблемы моделирования финансовых показателей: цены, обменный курс, процентные ставки, фондовый индекс в российской экономике*. М.: Институт экономики переходного периода.

- Энтов Р. М., Радыгин А. Д. 1999. *Структура собственности и проблемы корпоративного контроля в российской экономике*. М.: Институт экономики переходного периода.
- Энтов Р., Радыгин А., Мау В. и др. 1998. *Развитие российского финансового рынка и новые инструменты привлечения инвестиций*. Под ред. Р. Энтова. М.: Институт экономики переходного периода.
- Agrawal A., Mandelker G.N. 1990. Large shareholders and the monitoring of managers: The case of antitakeover charter amendments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **25** (2): 143–161.
- Adams K. J., Van Deventer D. R. 1994. Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness. *The Journal of Fixed Income*, **4** (1): 52–62.
- Anderson N., Breedon F., Deacon M., Derry A., Murphy G. 1996. *Estimating and Interpreting the Yield Curve*. Series in Financial Economics and Quantitative Analysis. Wiley & Sons.
- Artzner P., Delbaen F., Elber J., Heath D. 1999. Coherent measures of risk. *Math. Finance* **9** (3): 203–228.
- Bebchuk L. 1999. *A Rent protection theory of corporate ownership and control*. NBER Working Paper No. W7203.
- Bebchuk L., Neeman Z. 2007. *Investor protection and interest group politics*. NBER Working Paper No. W13702.
- Becht M. 1999. European corporate governance: trading off liquidity against control. *European Economic Review* **43** (4–6): 1071–1083.
- Best P. 1998. *Implementing Value at Risk*. John Wiley & Sons.
- Bekaert G., Hodrick R. J., Marshall D. A. 1997. „Peso problem“: *Explanation for term structure anomalies*. NBER Working Paper, No W6147.
- Benninga S. 2008. *Financial Modeling*. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts, 3rd ed.
- Bernstein P. L. 1992. *Capital Ideas. The Improbable Origins of Modern Wall Street*. Free Press: N. Y.
- Bernstein P. L. 2007. *Capital Ideas Evolving*. John Wiley & Sons: NJ.
- BIS, 2005. *Zero-coupon yield curve: technical documentation*. Bank for International Settlement. Working paper, №25, October.
- Black F. 1972. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, **45** (3): 444–454.
- Bodie Z., Kane A., Marcus A. J. 2002. *Investments* McGraw-Hill: New York, 5th ed.

- Bondarenko O. 2001. Competing market makers, liquidity provision, and bid-ask spread. *Journal of Financial Markets* **4** (3): 269–308.
- Booth P. et al. 1999. Market structure and bid-ask spreads: IBIS vs Nasdaq. *European Journal of Finance* **5** (1): 51–71.
- Booth G.G., Gurun U.G. 2008. Volatility clustering and the bid-ask spread: exchange rate behavior in early Renaissance Florence. *Journal of Empirical Finance* **15** (1): 131–144.
- Brealey R. A., Myers S., Allen F. 2009. *Principles of Corporate finance*. 9th ed. McGraw-Hill.
- Brennan M. J. 1991. The price of convenience and the valuation of commodity contingent claims. In: Lund, D. and Oksendal B. (eds.) *Stochastic Models and Option Values*. North-Holland: N.Y.
- Campbell J. 1995. Some lessons from the yield curve. *Journal of Economic Perspectives* **9** (3): 129–152.
- Campbell J. et al. 1991. Off-floor trading, disintegration, and the bid-ask spread in experimental markets. *Journal of Business* **64** (4): 495–522.
- Campbell J., Lo A., MacKinlay A. 1997. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press: Princeton, N.J.
- Chan L. K. C., Lakonishok J. 1997. Institutional equity trading costs: NYSE versus Nasdaq. *Journal of Finance*, **52** (2): 713–736.
- Coleman T. S., Fisher L., Ibbotson R. G., 1992. Estimating the term structure of interest rates from data that include the prices of coupon bonds. *J. of Fixed Income*, **2** (2): 85–116.
- Copeland T., Weston J., Shastri K. 2005. *Financial Theory and Corporate Policy*. Pearson Addison Wesley: New York, 4th ed.
- Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. 1980. An analysis of variable loan contracts. *Journal of Finance* **35** (2): 389–403.
- Cuthbertson K. 1999. *Quantitative Financial Economics: Stocks, Bonds and Foreign Exchange*. John Wiley & Sons: Chichester, U.K.
- Defond M. L., Hung M. 2004. Investor protection and corporate governance: evidence from worldwide CEO turnover. *Journal of Accounting Research* **42** (2): 269–312.
- DeMarzo P. M. 1993. Majority voting and corporate control: the rule of the dominant shareholder. *Review of Economic Studies* **60** (3): 713–734.
- Deventer D. R., Imai K. 1997. *Financial Risk Analytics: a Term Structure Model Approach for Banking, Insurance and Investment Management*. Irwin.

- Dixit A. K., Pindyck R. S. 1994. *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press: Princeton, N.J.
- Dolgoplov S. 2004. Insider trading and the bid-ask spread: A critical evaluation of adverse selection in market making. *Capital University Law Review* **33**: 83–180.
- Duffie D. 2001. *Dynamic asset pricing theory*. 3rd ed. Princeton University Press: Princeton NJ.
- Estrada J. 2000. The cost of capital in emerging markets: a downside risk approach. *Emerging Markets Quarterly* **4** (3): 19–30.
- Estrada J. 2001. The cost of capital in emerging markets: a downside risk approach. *Emerging Markets Quarterly II*. **5** (1): 63–72.
- Estrada J. 2002a. *Mean-semivariance behavior: an alternative behavioral model*. Working paper, IESE Business school.
- Estrada J. 2002b. Mean-semivariance behavior II: the D-CAPM. Working paper, IESE Business School.
- Estrada J. 2002c. Systematic risk in emerging markets: The D-CAPM. *Emerging Markets Review* **3** (4): 365–79.
- Estrada J. 2004a. The cost of equity of internet stocks: a downside risk approach. *European Journal of Finance*, **10** (4): 239–54.
- Estrada J. 2004b. Mean-semivariance behavior: an alternative behavioral model. *Journal of Emerging Market Finance*, **3** (3): 231–248.
- Fabozzi F., ed. 2005. *The Handbook of Fixed Income Securities*. 6th ed. McGraw-Hill.
- Fama E. 1970. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance* **25** (2): 383–417.
- Fama E. 1991. Efficient capital markets II. *Journal of Finance* **46** (5): 1575–1617.
- Fama E. 1968. Risk, return and equilibrium: some clarifying comments. *Journal of Finance* **23** (1): 29–40.
- Fama E. F., French K. R. 1992. The cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance* **47** (2): 427–465.
- Fama E. F., French K. R. 1993. Common risk factors in the returns of bonds and stocks. *Journal of Financial Economics* **33** (1): 3–56.
- Fama E. F., French K. R. 1996. The CAPM is wanted, dead or alive. *Journal of Finance* **51** (5): 1947–1958.
- Fama E. F., French K. R. 2004. The capital asset pricing model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives* **18** (3): 25–46.

- Fama E., MacBeth J. 1973. Risk, return and equilibrium: empirical tests. *Journal of Political Economy* **81** (3): 607–636.
- Fama E. F., Schwert G. W. 1977a. Human capital and capital market equilibrium. *Journal of Financial Economics* **4** (1): 95–125.
- Fama E. F., Schwert G. W. 1977b. Asset returns and inflation. *Journal of Financial Economics* **5** (2): 115–146.
- Fisher M., Nychka D., Zervos D. 1995. Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines. *FEB Finance and Economic Discussion Series*, 95-1.
- Francis J. K., Archer S. H. 1971. *Portfolio Analysis*. Prentice-Hall: NY.
- Gagnon L. L., Hurley W. J., Johnson L. D. 1997. Recent Advances in Corporate Bond Valuation. In *Advances in Fixed Income Valuation Modeling and Risk Management*. Ed. by Fabozzi F. J. FJF Ass. New Hope, Pennsylvania: 85–102.
- Gibbons M. 1982. Multivariate tests of financial models: a new approach. *Journal of Financial Economics* **10** (1): 3–27.
- Gibbons M., Ross S., Shanken J. 1989. A test of the efficiency of a given portfolio. *Econometrica* **57** (5): 1121–1152.
- Glosten L., Milgrom P. 1985. Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogenously informed traders. *Journal of Financial Economics* **14** (1): 71–100.
- Golub B. W., Tilman L. M. 1997. Measuring yield curve risk using principal components analysis, Value at Risk, and key rate durations. *J. of Portfolio Management* **23** (4): 72–84.
- Goriaev A., Zabotkin A. 2006. Risks of investing in the Russian stock market: Lessons of the first decade. *Emerging Markets Review* **7** (4): 380–397.
- Grant A. P., Thomas L. B. 1999. Inflationary expectations and rationality revisited. *Economics Letters* **62** (1): 331–338.
- Grinblatt M., Titman S. 2002. *Financial Markets and Corporate Strategy*. 2nd ed. McGraw-Hill: New York.
- Harvey C. R. 2000. The drivers of expected returns in international markets. *Emerging Markets Quarterly* **4** (1): 32–49.
- Harvey C. R., Siddique A. 2000. Conditional skewness in asset pricing tests. *Journal of finance* **55** (3): 1263–1295.
- Helland H., Sykuta M. 2005. Who's monitoring the monitor? Do outside directors protect shareholders' interests? *The Financial Review* **40** (2): 155–172.
- Himmelberg C. P., Hubbard G., Love I. 2002. *Investor protection, ownership, and the cost of capital*. Columbia University (mimeo).

- Hirshleifer D., Thakor A.V. 1998. Corporate control through board dismissals and takeovers. *Journal of Economics & Management Strategy* **7** (4): 489–520.
- Ho T., Stoll H.R. 1981. Optimal dealer pricing under transactions and return uncertainty. *Journal of Financial Economics* **9** (1): 47–73.
- Hull J.C. 2009. *Options, Futures, And Other Derivatives*: Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 7th ed.
- Hull J., White A. 1995. The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities. *Journal of Banking and Finance* **19** (2): 299–322.
- Jagannathan R., Wang Z. 1993. *The CAPM is Alive and Well*. Federal Reserve Bank of Minneapolis Research Department Staff Report No. 165.
- Jagannathan R., Wang Z. 1996. The conditional CAPM and the cross-section of expected returns. *Journal of Finance* **51** (1): 3–53.
- Jensen M.C. 1969. Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios. *Journal of Business* **42** (2): 167–247.
- Jensen M. C. 1972. Capital markets: theory and evidence. *Bell Journal of Economics* **3** (2): 357–398.
- Johnson H., Stulz R. 1987. The pricing of options with default risk. *Journal of Finance* **42** (2): 267–280.
- Jorion P. 2001. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 2nd ed. McGraw-Hill.
- Kandel S. 1984. The likelihood ratio test of mean–variance efficiency without a riskless asset. *Journal of Financial Economics* **13** (4): 575–592.
- Kandel S., Stambaugh, R. 1987. On correlations and inferences about mean-variance efficiency. *Journal of Financial Economics* **18** (1): 61–90.
- Kargin V. 2002. Value investing in emerging markets: risks and benefits. *Emerging Markets Review* **3** (3): 233–244.
- Klapper L.F., Love, I. 2006. *Corporate governance, investor protection, and performance in emerging markets*. The World Bank Policy Research Working Paper, No 2818.
- Kraus A., Litzenberger R. 1976. Skewness preference and the valuation of risk assets. *Journal of Finance* **31** (4): 1085–1100.
- Lintner J. 1965a. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *Journal of Finance* **20** (4): 587–616.
- Lintner J. 1965b. The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics* **47** (1): 13–37.

- Lintner J. 1969. The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets: a reply. *Review of Economics and Statistics* **51** (2): 222–224.
- Liu X. 2007. Bid-ask spread, strike prices and risk-neutral densities. *Applied Financial Economics* **17** (11): 887–900.
- MacCulloch J. H. 1971. Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business* **44** (1): 19–31.
- MacCulloch J. H. 1975. The tax-adjusted yield curve. *Journal of Finance* **30** (3): 811–830.
- Malkiel B. 1992. Efficient Market Hypothesis. In : *New Palgrave Dictionary of Money and Finance*. Ed. by Newman P., Milgate M., Eatwell J. Macmillan: London.
- Markowitz H. 1952. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Wiley & Sons: N.Y.
- Maug E. 1998. Large shareholders as monitors: Is there a trade-off between liquidity and control? *Journal of Finance* **53** (1): 65–98.
- Mayers D. 1972. Nonmarketable assets and capital market equilibrium under uncertainty. In: M.C. Jensen, ed. *Studies in Theory of Capital Markets*. Praeger: N.Y.: 223–248.
- Mayers D. 1973. Nonmarketable assets and the determination of capital assets prices in absense of a riskless asset. *Journal of Business* **46** (2): 258–267.
- Mills T. C. 1999. *The Econometric Modeling of Financial Time Series*. 2nd ed. Cambridge University Press: Cambridge, U.K.
- Mossin J. 1966. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* **34** (4): 768–783.
- Muirhead R. 1983. *Aspects of multivariate statistical theory*. Wiley & Sons: N.Y.
- Myers S. C. 2000. Outside equity. *Journal of Finance* **55** (3): 1005–1037.
- Norden L. L. 2003. Asymmetric option price distribution and bid-ask quotes: consequences for implied volatility smiles. *Journal of Multinational Financial Management* **13** (4): 423–441.
- Pfann G. A., Schotman P. C., Tsherning R. 1996. Nonlinear interest rate dynamics and implications for the term structure. *Journal of Econometrics* **74** (1): 149–176.
- Pindyck R. S., Rubinfeld D. L. 1998. *Econometric Models and Economic Forecasts*. 4th ed. McGraw-Hill.

- Perold A.F. 2004. The capital asset pricing model. *Journal of Economics Perspectives* **18** (3): 3-24.
- Pronk M. 2006. The impact of intraday timing of earnings announcements on the bid-ask spread and depth. *Journal of Accounting Auditing and Finance* **21** (1): 27-54.
- Ramaswamy K., Sundaresan S. M. 1986. The valuation of floating rate instruments. *Journal of Financial Economics* **17** (2): 251-272.
- Reitano R. R., 1997. Yield curve risk management. In: *Advances in Fixed Income Valuation Modeling and Risk Management*. / Ed. by Fabozzi F.J. FJF Ass. New Hope, Pennsylvania, 1997, pp. 281-316.
- Roll R. 1977. A Critique of the asset pricing theory's tests: Part I. *Journal of Financial Economics* **4** (2): 129-176.
- Roy A. D. 1952. Safety first and the holding of assets. *Econometrica* **20** (3): 431-449.
- Rubinstein M. 1973. The fundamental theory of parameter preference security valuation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **8** (1): 61- 69.
- Samuelson P. A. 1965. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review* **6** (2): 41-50.
- Shanken J. 1985. Multivariate tests of zero-beta CAPM. *Journal of Financial Economics* **14** (3): 327-348.
- Shanken J. 1986. Testing Portfolio Efficiency When the Zero-Beta Rate Is Unknown. *Journal of Finance* **41** (1): 269-276.
- Sharpe W. F. 1963. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science* **9** (2): 277-293.
- Sharpe W. 1964. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* **19** (3): 425-442.
- Shea G. S. 1985. Interest rate term structure estimation with exponential splines: A Note. *Journal of Finance* **40** (1): 319-325.
- Shleifer A., Vishny, R. 1986. Large shareholders and corporate control. *Journal of Political Economy* **94** (3): 461-488.
- Shleifer A., Vishny, R. 1997. A survey of corporate governance. *Journal of Finance* **52** (2): 228-257.
- Shleifer A., Wolfenzon, D. 2003. *Investor protection and equity markets*. NBER Working Paper No. W7974.
- Soderlind P., Svensson L. 1997. New techniques to extract market expectations from financial instruments. *Journal of Monetary Economics* **40** (2): 383-429.

- Stepanov S. 2002. Investor protection, going public, and separating control from cash flow rights. *Proceedings of the NES 10 Years Conference*. New Economic School: Moscow.
- Stoll H.R. 1978. The supply of dealer services in securities markets. *Journal of Finance* **33** (4): 1133–1151.
- Treynor J. 1961. *Towards a Theory of the Market Value of Risky Assets*. Unpublished manuscript.
- Urga G., Peresetsky A., Turmuhambetova G. 2001. The development of the GKO futures market in Russia. *Emerging Markets Review* **2** (1): 1-16.
- Vasicek O. A. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* **5** (2): 177–188.
- Vasicek O. A., Fong G. 1982. Term structure modeling using exponential splines. *Journal of Finance* **37** (2): 339–348.

Учебное издание

Александр Васильевич Бухвалов
Евгений Александрович Дорофеев
Виталий Леонидович Окулов

ЛЕКЦИИ ПО ИЗБРАННЫМ ВОПРОСАМ
КЛАССИЧЕСКИХ ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Учебное пособие

Под научной редакцией А.В. Бухвалова

Высшая школа менеджмента СПбГУ
199044, С.-Петербург, Волховский пер., 3
тел. +7 (812) 323 8460
publishing@gsom.spb.ru

Редактор: М.В. Земскова
Корректор: Н.В. Волхонская

Дизайн и подготовка оригинал-макета: Л.Н. Копылова, А.В. Бухвалов,
К.Н. Лочакова, А.А. Салтан

Подписано в печать с оригинал-макета 29.06.2010 Формат 70*100 1/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 33,8. Уч.-изд.л. 28,5.

Тираж 500 экз. Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО «Типография „Береста“»
196084, С.-Петербург, ул. Коли Томчака, 28