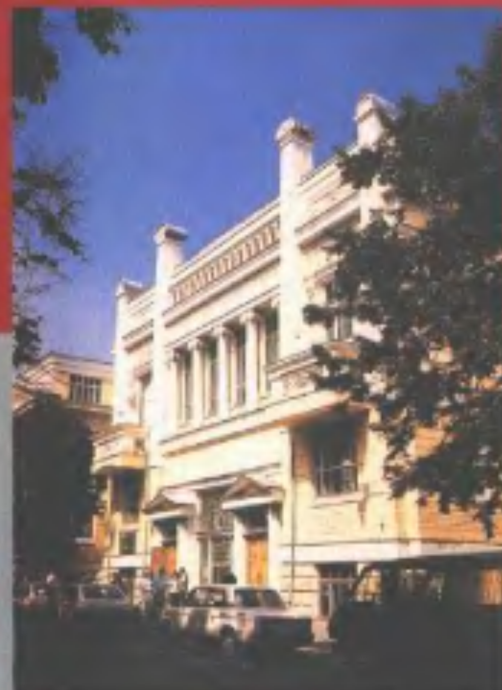
РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени Г.В.ПЛЕХАНОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ по финансовым инвестициям



В.Е.Барбаумов
И.М.Гладких
А.С.Чуйко

РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ИМЕНИ Г.В.ПЛЕХАНОВА

В.Е.Барбаумов
И.М.Гладких
А.С.Чуйко

СБОРНИК ЗАДАЧ по финансовым инвестициям

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по образованию в области финансов,
учета и мировой экономики
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по специальностям
"Финансы и кредит",
"Бухгалтерский учет, анализ и аудит"
"Мировая экономика"

МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
2005

УДК 336.767(075)
ББК 65.262.2я7
Б24

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра «Корпоративное управление и финансы»
Высшей школы международного бизнеса АНХ
при Правительстве РФ;

В.М. Зубов,
доктор экономических наук, профессор,
первый заместитель председателя Комитета
Государственной Думы по кредитным организациям
и финансовым рынкам

Барбаумов В.Е. и др.

Б24 Сборник задач по финансовым инвестициям / В. Е. Барбаумов, И. М. Гладких, А.С. Чуйко. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 352 с.: ил.

ISBN 5-279-02974-2

В сборнике подобраны и методически распределены задачи, содержание которых охватывает все разделы программы курса «Финансовые инвестиции» для экономических высших учебных заведений и экономических факультетов других вузов. Формулировки определений и утверждений, а также последовательность и структура глав и параграфов сборника соответствуют учебнику «Финансовые инвестиции», написанному теми же авторами.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Мировая экономика».

$Б\frac{0605010204-229}{010(01)-2004}$ без объявл.

УДК 336.767(075)
ББК 65.262.2я7

ISBN 5-279-02974-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной экономике важную роль играют инвестиции на финансовых рынках. Управление финансовыми инвестициями становится одной из главных задач как финансовых институтов, так и многих крупных компаний. Управление финансовыми инвестициями, в свою очередь, требует умения правильно прогнозировать рыночные цены различных финансовых инструментов, оценивать и хеджировать риски, связанные с этими инструментами.

Сегодня знания о финансовых инвестициях достигли уровня, позволяющего систематизировать и анализировать их с помощью различных методов, в основе которых лежит хорошо развитый современный математический аппарат. Такое положение предъявляет соответствующие требования к учебно-методической литературе по рассматриваемой проблеме.

Именно эти вопросы составляют основное содержание учебника «Финансовые инвестиции», впервые изданного в России в 2003 г., в котором обобщен многолетний опыт преподавания аналогичного курса в Институте финансов Российской экономической академии имени Г.В. Плеханова.

Авторами вышеуказанного учебника был подготовлен сборник задач, предназначенный для изучения курса «Финансовые инвестиции», который является одним из базовых курсов специальных дисциплин, лежащих в основе подготовки финансистов-рыночников, бакалавров и магистров в области финансов, а также финансистов-аналитиков, обучающихся в Институте финансов РЭА имени Г.В. Плеханова по программе «Анализ финансовых рынков».

В сборнике подобраны и методически распределены задачи, содержание которых охватывает все разделы программы курса «Финансовые инвестиции» для экономических высших учебных заведений и экономических факультетов других вузов.

Приведенное количество задач, как показывает практика преподавания, не только удовлетворяет потребности студентов в закреплении соответствующих разделов курса, но и дает возможность преподавателю разнообразить выбор задач в пределах каждого раздела, а также подбирать задачи для итоговых занятий и контрольных работ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник преследует цель помочь активному и неформальному усвоению изучаемого курса «Финансовые инвестиции» и предназначен как для студентов очного и заочного обучения, так и для преподавателей, которые начинают вести семинары по данному курсу. Формулировки определений и утверждений, а также последовательность и структура глав и параграфов сборника соответствуют учебнику «Финансовые инвестиции». Сборник задач может быть рекомендован в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальностям «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Мировая экономика».

Материал каждого параграфа сборника разбит на две части. В первой части изложены теоретические сведения (основные понятия, утверждения и формулы), необходимые для решения задач. Во второй части приведены задачи и упражнения, определенные названием параграфа. Авторы настоятельно рекомендуют решать задачи каждой главы в порядке возрастания их номеров. Ко всем задачам даны ответы, которые можно найти в конце сборника. Кроме того, многие задачи имеют указания к их решению.

Авторы надеются, что сборник будет полезен как для студентов, так и для преподавателей в работе со студентами, и готовы принять с благодарностью все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение содержания сборника.

ГЛАВА 1

Инвестиции с фиксированными доходами

1.1. ВНУТРЕННЯЯ ДОХОДНОСТЬ ОБЛИГАЦИИ

Годовой внутренней доходностью облигации при начислении процентов m раз в год называется положительное число $r = r(m)$, удовлетворяющее следующему условию:

$$P = \frac{C_{t_1}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt_1}} + \frac{C_{t_2}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt_2}} + \ldots + \frac{C_{t_n}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt_n}},$$

где P – текущая рыночная стоимость облигации;

C_{t_i} – платеж, выполняемый через t_i лет от текущего момента времени, $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.1. Определить годовые внутренние доходности облигаций А и В при начислении процентов один раз в год для исходных данных, приведенных ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам t_i		
	0	1	2
А	–934,58*	1000	–
В	–946,93	50	1050

* Текущая рыночная стоимость облигации А равна 934,58 долл.

1.2. Определить годовые внутренние доходности облигаций А, В и С при начислении процентов один раз в год для исходных данных, приведенных ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам t_i			
	0	1,5	2	3
A	–930	1000	–	–
B	–890	–	1000	–
C	–1031,82	50	100	1100

1.3. Определить годовые внутренние доходности облигаций А и В при начислении процентов 2 раза в год для исходных данных, приведенных ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам t_i				
	0	0,5	1	1,5	2,4
A	–100	10	15	120	–
B	–117,55	8	8	8	108

1.4. По облигации обещают выплачивать по 10 долл. в конце каждого полугодия в течение трех лет и еще 100 долл. в конце третьего года. Внутренняя доходность облигации при начислении процентов один раз в год равна 8%. При этих условиях найти стоимость облигации.

1.5. По облигации обещают выплачивать в течение T лет (T – целое число) m раз в год одну и ту же денежную сумму q долл., а в конце года T еще и A долл. Доказать равенство

$$P=\frac{mq}{r}\cdot\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mT}}\right)+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mT}},$$

где P – текущая рыночная стоимость облигации;
r – внутренняя доходность облигации при начислении процентов m раз в год.

1.6. По облигации обещают выплачивать по 5 долл. в конце каждого полугодия в течение пяти лет и еще 100 долл. в конце пятого года. Определить стоимость облигации, если ее внутренняя доходность при начислении процентов 2 раза в год равна 5,91%.

1.7. По облигации обещают выплачивать по 3 долл. в конце каждого квартала в течение трех лет и еще 100 долл. в конце третьего года. Определить стоимость облигации, если ее внутренняя доходность при начислении процентов 4 раза в год равна 3,94%.

1.8. По облигации обещают выплачивать по 6 долл. в конце каждого полугодия в течение двух лет и еще 100 долл. в конце второго года. Рыночная стоимость облигации равна 105 долл. Найти годовую внутреннюю доходность облигации при начислении процентов 4 раза в год.

1.9. Доказать равенство

$$r(m)=m\left[\left(1+\frac{r(k)}{k}\right)^{k/m}-1\right],$$

где $r(m)$ – внутренняя доходность облигации при начислении процентов m раз в год;
$r(k)$ – внутренняя доходность облигации при начислении процентов k раз в год.

1.10. По облигации обещают выплачивать по 10 долл.в конце каждого года в течение пяти лет и еще 500 долл. в конце пятого года. Найти годовую внутреннюю доходность облигации при начислении процентов 2 раза в год, если ее рыночная стоимость равна 380,22 долл.

1.11. По облигации обещают выплачивать по 50 долл. в конце каждого полугодия в течение 10 лет и еще 1000 долл. в конце десятого года. Найти внутреннюю доходность облигации при начислении процентов один раз в год, если ее стоимость составляет 900 долл.

1.12. Банк согласился предоставить десятилетний ипотечный кредит в размере 200 000 руб. По условиям ипотечного кредитования ежемесячные платежи заемщика должны быть одинаковыми. Каков будет ежемесячный платеж заемщика, если годовая процентная ставка, требуемая банком, равна 8% (при начислении процентов 12 раз в год)?

1.2. СВОЙСТВА ВНУТРЕННЕЙ ДОХОДНОСТИ ОБЛИГАЦИИ. ВНУТРЕННЯЯ ДОХОДНОСТЬ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ НАЧИСЛЕНИИ ПРОЦЕНТОВ

Свойства внутренних доходностей.

1. Если текущая рыночная стоимость облигации увеличивается (уменьшается), то внутренняя доходность $r(m)$ этой облигации уменьшается (увеличивается).

2. Последовательность внутренних доходностей $\{r(m)\}$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, данной облигации всегда является убывающей, т.е. $r(m) > r(m+1)$.

Число $\tilde{r} = \lim\limits_{m\to\infty}\{r(m)\}$, где $r(m)$ – внутренняя доходность облигации при начислении процентов m раз в год, называется ***внутренней доходностью этой облигации при непрерывном начислении процентов***.

3. Положительное число $\tilde{r}$ является внутренней доходностью облигации при непрерывном начислении процентов тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_{t_i} e^{-\tilde{r} t_i},$$

где P – текущая рыночная стоимость облигации;
C_{t_i} – платеж по облигации, выполняемый через t_i лет от текущего момента, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.1. По облигации обещают выплачивать по 100 долл. в конце каждого полугодия в течение двух лет. Определить внутреннюю доходность облигации при начислении процентов 2 раза в год, если ее текущая рыночная стоимость составляет: а) 371,71 долл.; б) 362,99 долл.; в) 354,60 долл.

2.2. Определить внутреннюю доходность облигаций А и В при непрерывном начислении процентов для исходных данных, приведенных ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам t_i		
	0	1	2
А	–934,58	1000	–
В	–946,93	50	1050

2.3. Определить внутренние доходности облигаций А и В при непрерывном начислении процентов для исходных данных, приведенных ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам t_i		
	0	1,5	2
А	–930	1000	–
В	–890	–	1000

2.4. Определить внутреннюю доходность облигации при непрерывном начислении процентов для исходных данных, приведенных ниже.

Срок, годы	0	0,5	1,0	1,5
Платеж, долл.	–100	10	15	120

2.5. Определить внутреннюю доходность облигации при непрерывном начислении процентов для исходных данных, приведенных ниже.

Срок, годы	0	1	1,5	1,8	2
Платеж, долл.	–100	10	20	30	140

2.6. По облигации обещают выплачивать одну и ту же сумму q долл. m раз в год в течение T лет (T – целое число) и в конце T-го года еще A долл. Доказать равенство

$$P = \frac{q}{e^{\tilde{r}/m} - 1}(1 - e^{-\tilde{r}T}) + A\, e^{-\tilde{r}T},$$

где P – текущая рыночная стоимость облигации;
$\tilde{r}$ – внутренняя доходность облигации при непрерывном начислении процентов.

2.7. По облигации обещают выплачивать по 50 долл. в конце каждого полугодия в течение 10 лет и еще 1000 долл. в конце десятого года. Найти внутреннюю доходность облигации при непрерывном начислении процентов, если текущая рыночная стоимость ее равна 900 долл.

2.8. По облигации обещают выплачивать по 10 долл. в конце каждого полугодия в течение трех лет и в конце третьего года еще 100 долл. Определить рыночную стоимость облигации, если ее внутренняя доходность при непрерывном начислении процентов составляет 7,7%.

2.9. По облигации обещают выплачивать по 5 долл. в конце каждого полугодия в течение пяти лет и в конце пятого года еще 100 долл. Найти стоимость облигации, если ее внутренняя доходность при непрерывном начислении процентов равна 5,83%.

2.10. Внутренняя доходность облигации при непрерывном начислении процентов равна 10%. Определить внутреннюю доходность этой облигации при начислении процентов: а) 2 раза в год; б) 4 раза в год.

2.11. Внутренняя доходность облигации при начислении процентов два раза в год равна 15%. Найти внутреннюю доходность облигации при начислении процентов: а) 4 раза в год; б) 8 раз в год; в) непрерывно.

2.12. По бессрочной облигации обещают выплачивать в конце каждого полугодия q долл. Первый платеж должен производиться через полгода от текущего момента.

Доказать равенство

$$P = \frac{q}{e^{\tilde{r}/2} - 1},$$

где P – текущая рыночная стоимость облигации;
$\tilde{r}$ – внутренняя доходность облигации при непрерывном начислении процентов.

1.3. БЕЗРИСКОВЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

Облигация называется ***чисто дисконтной облигацией***, если по ней должен производиться только один платеж в момент ее погашения.

Внутренняя доходность чисто дисконтной облигации без дефолт-риска, погашаемой через t лет, называется ***годовой безрисковой процентной ставкой для инвестиции на t лет.***

Текущая рыночная стоимость облигации при начислении процентов m раз в год и при непрерывном начислении определяется равенствами

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{t_i}}{\left[1 + \frac{r\{m, t_i\}}{m}\right]^{t_i m}}, \quad P = \sum_{i=1}^{n} C_{t_i} e^{-\tilde{r}(t_i)t_i},$$

где $r\{m, t_i\}$ и $\tilde{r}(t_i)$ – безрисковая процентная ставка для инвестиций на t_i лет при начислении процентов m раз в год и при непрерывном начислении процентов соответственно, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Безрисковые процентные ставки $r\{m, t_i\}$ и $\tilde{r}(t)$ связаны равенством

$$\tilde{r}(t) = m \ln\left[1 + \frac{r\{m, t\}}{m}\right].$$

3.1. Имеются три чисто дисконтные государственные облигации A, B и C, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам			
	0	2	2,5	3
A	–90	100	–	–
B	–85	–	100	–
C	–80	–	–	100

Определить безрисковые процентные ставки при начислении процентов один раз в год для инвестиций на 2, 2,5 и 3 года.

3.2. Имеются четыре чисто дисконтные государственные облигации A, B, C и D, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам				
	0	1,5	2,5	3,5	4,5
A	–90	100	–	–	–
B	–85	–	100	–	–
C	–80	–	–	120	–
D	–76	–	–	–	120

Определить безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении процентов для инвестиций на 1,5, 2,5, 3,5 и 4,5 года.

3.3. Имеются две чисто дисконтные государственные облигации A и B без дефолт-риска, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам		
	0	3,5	6
A	–900	1000	–
B	–850	–	1000

Определить безрисковые процентные ставки $r\{4;\ 3{,}5\}$ и $r\{4;\ 6\}$.

3.4. Известны годовые безрисковые процентные ставки при начислении процентов один раз в год:

$$r\{1;\ 0{,}5\} = 0{,}06;\ r\{1;\ 1{,}0\} = 0{,}07;$$
$$r\{1;\ 1{,}5\} = 0{,}075;\ r\{1;\ 2{,}0\} = 0{,}08.$$

Определить текущую рыночную стоимость облигации, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0
Платеж, долл.	10	10	10	110

3.5. Известны годовые безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении процентов:

$$\tilde r(0{,}25) = 0{,}06;\ \tilde r(0{,}5) = 0{,}068;\ \tilde r(0{,}75) = 0{,}075;\ \tilde r(1{,}0) = 0{,}083.$$

Определить стоимость облигации, по которой должны выполняться следующие платежи:

Срок, годы	0,25	0,5	0,75	1,0
Платеж, долл.	5	5	5	105

Кроме того, требуется найти внутреннюю доходность этой облигации (при непрерывном начислении процентов).

3.6. Известны годовые безрисковые процентные ставки при начислении процентов 2 раза в год:

$$r\{2;\ 1{,}0\} = 0{,}03;\ r\{2;\ 2{,}0\} = 0{,}04;\ r\{2;\ 3{,}0\} = 0{,}05.$$

Найти безрисковую процентную ставку $r\{2;\ 4{,}0\}$, если на рынке имеется облигация, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0	1,0	2,0	3,0	4,0
Платеж, долл.	–114,40	10	10	10	110

3.7. Известны безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении процентов:

$$\tilde r(0{,}5) = 4\%;\ \tilde r(1{,}0) = 4{,}5\%;\ \tilde r(1{,}5) = 5\%;\ \tilde r(2{,}0) = 6\%.$$

Найти безрисковую процентную ставку $\tilde r(2{,}5)$, если на рынке имеется облигация, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Платеж, долл.	−121,45	10	10	10	10	110

3.8. Известны годовые безрисковые процентные ставки при начислении процентов 2 раза в год:

$$r\{2;\ 1,0\} = 0,06;\ r\{2;\ 2,0\} = 0,065;\ r\{2;\ 3,0\} = 0,070;\ r\{2;\ 4,0\} = 0,072.$$

Определить стоимость облигации, по которой должны выполняться платежи, приведенные ниже.

Срок, годы	1,0	2,0	3,0	4,0
Платеж, долл.	20	20	20	120

Какова внутренняя доходность облигации при начислении процентов 2 раза в год?

3.9. Платежи по облигациям должны производиться через t_1, t_2, …, t_n лет от текущего момента.

Доказать, что внутренняя доходность облигации $\tilde{r}$ при непрерывном начислении процентов удовлетворяет неравенству

$$\min_{1\le i\le n}\left\{\tilde{r}(t_i)\right\} \le \tilde{r} \le \max_{1\le i\le n}\left\{\tilde{r}(t_i)\right\},$$

где $\tilde{r}(t_i)$ – безрисковая процентная ставка для инвестиции на t_i лет при непрерывном начислении процентов.

1.4. ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК. КРИВАЯ РЫНОЧНЫХ ДОХОДНОСТЕЙ

Набор безрисковых процентных ставок

$$\left[\tilde{r}(t_1),\ \tilde{r}(t_2), \ldots, \tilde{r}(t_k)\right],$$

которые можно в данный момент определить по чисто дисконтным облигациям, называется ***временной структурой процентных ставок при непрерывном начислении процентов.***

График функции $r = \tilde{r}(t)$, где $\tilde{r}(t)$ – безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении процентов для инвестиции на t лет называется ***кривой рыночных доходностей.***

4.1. Найти безрисковую процентную ставку $\tilde{r}(1,5)$, если известны безрисковые процентные ставки:

а) $\tilde{r}(1) = 0,05;\ \ \tilde{r}(2) = 0,06;$

б) $\tilde{r}(0,5) = 0,04;\ \ \tilde{r}(1) = 0,05;\ \ \tilde{r}(2) = 0,06.$

4.2. Определить кривую рыночных доходностей, если известны безрисковые процентные ставки:

а) $\tilde{r}(1) = 0,04;\ \tilde{r}(2) = 0,055;$

б) $\tilde{r}(0,5) = 0,04;\ \tilde{r}(1) = 0,05;\ \tilde{r}(2) = 0,06.$

4.3. Дана временная структура процентных ставок при непрерывном начислении процентов:

$$\tilde{r}(1) = 0,05;\ \tilde{r}(2) = 0,06;\ \tilde{r}(3) = 0,07;\ \tilde{r}(4) = 0,06.$$

Определить кривую рыночных доходностей и безрисковые процентные ставки:

$$\tilde{r}(1,5);\ \tilde{r}(2,8);\ \tilde{r}(3,2).$$

4.4. Дана временная структура процентных ставок при непрерывном начислении процентов:

$$\tilde{r}(0,5) = 0,04;\ \tilde{r}(1,0) = 0,05;\ \tilde{r}(1,5) = 0,05;\ \tilde{r}(2,0) = 0,06.$$

Определить кривую рыночных доходностей и безрисковые процентные ставки:

$$\tilde{r}(0,25);\ \tilde{r}(1,2);\ \tilde{r}(1,75).$$

4.5. Дана временная структура процентных ставок при непрерывном начислении процентов:

$$\tilde{r}(0,5) = 0,05;\ \tilde{r}(1,0) = 0,055;\ \tilde{r}(2,0) = 0,06.$$

Найти стоимость облигации (без дефолт-риска) с потоком платежей, приведенным ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0
Платеж, долл.	10	10	10	1000

4.6. Дана временная структура процентных ставок при непрерывном начислении:

$$\tilde{r}(1{,}0)=0{,}05;\ \tilde{r}(2{,}0)=0{,}06;\ \tilde{r}(3{,}0)=0{,}08.$$

Найти стоимость облигации (без дефолт-риска) с потоком платежей, приведенным ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	5	6	5	6	5	100

4.7. Дана временная структура процентных ставок при начислении процентов один раз в год:

$$r\{1;\,1{,}0\}=0{,}06;\ r\{1;\,2{,}0\}=0{,}08;\ r\{1;\,3{,}0\}=0{,}09.$$

Найти стоимость облигации, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	5	5	6	6	10	110

4.8. На рынке имеется облигация без дефолт-риска, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Платеж, долл.	−102,90	5	5	5	5	105

Известны безрисковые процентные ставки:

$$r\{1;\,0{,}5\}=0{,}06;\ r\{1;\,1{,}0\}=0{,}07;\ r\{1;\,1{,}5\}=0{,}08.$$

Найти безрисковые процентные ставки $r\{1;\,2{,}0\}$ и $r\{1;\,2{,}5\}$ с использованием: 1) линейной экстраполяции; 2) квадратичной экстраполяции.

4.9. На рынке имеется облигация без дефолт-риска, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	−105,09	6	6	6	6	6	106

Известны безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении:

$$\tilde{r}(0{,}5)=0{,}06;\ \tilde{r}(1{,}0)=0{,}065;\ \tilde{r}(1{,}5)=0{,}08.$$

Найти безрисковые процентные ставки $\tilde{r}(2{,}0)$, $\tilde{r}(2{,}5)$ и $\tilde{r}(3{,}0)$ с использованием: 1) линейной экстраполяции; 2) квадратичной экстраполяции; 3) кубической экстраполяции.

4.10. На рынке имеются облигации без дефолт-риска, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам						
	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
1	−98,76	100	–	–	–	–	–
2	−97,04	–	100	–	–	–	–
3	−105,83	3	3	103	–	–	–
4	−113,22	4	4	4	4	104	–
5	−119,14	5	5	5	5	5	104

Определить временную структуру процентных ставок при непрерывном начислении и построить кривую рыночных доходностей.

4.11. На рынке имеются облигации без дефолт-риска, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам						
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
1	−97,80	100	–	–	–	–	–
2	−98,86	2	2	102	–	–	–
3	−111,06	4	4	4	4	4	104

Определить временную структуру процентных ставок при начислении процентов 2 раза в год и построить кривую рыночных доходностей.

4.12. Определить временную структуру процентных ставок при непрерывном начислении, если известны безрисковые процентные ставки $\tilde{r}(0,5)=0,06$ и $\tilde{r}(1,0)=0,08$, а на рынке имеются облигации с потоками платежей, приведенными ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам								
	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
1	–97,49	2	2	2	2	2	100	–	–
2	–107,10	3	3	3	3	3	3	3	105

1.5. КУПОННЫЕ ОБЛИГАЦИИ. ВНУТРЕННЯЯ ДОХОДНОСТЬ КУПОННОЙ ОБЛИГАЦИИ

Купонная облигация представляет собой обязательство выполнить два потока платежей. Первый поток сводится к одному-единственному платежу: выплате в момент погашения облигации денежной суммы, равной номинальной стоимости A этой облигации. Другой поток платежей – это периодические выплаты (купонные платежи) одной и той же фиксированной денежной суммы q, последняя из которых приходится на момент погашения облигации.

Величина одного купонного платежа q определяется купонной ставкой f облигации, которая является отношением суммы всех m купонных платежей за год к номинальной стоимости облигации. Следовательно, $q=\dfrac{Af}{m}$.

Годовая внутренняя доходность r купонной облигации может быть определена из равенства

$$P=\sum_{k=1}^{n}\frac{q}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\left(k/m-\tau\right)m}}+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\left(n/m-\tau\right)m}}$$

или

$$P=A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}\left\{\frac{f}{r}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right]+\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right\},$$

где P – текущая стоимость облигации;

$\tau=\dfrac{n}{m}-T$ – время, прошедшее после очередного купонного платежа до момента покупки облигации;

n – число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, равное

$$n=\begin{cases}Tm, & \text{если } Tm-\text{целое},\\ [Tm]+1, & \text{если } Tm-\text{нецелое},\end{cases}$$

где T – время, остающееся до погашения облигации.

В частности, если текущий момент совпадает с датой оплаты очередного купона, то годовая внутренняя доходность r удовлетворяет равенству

$$P=\frac{qm}{r}\cdot\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right)+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}.$$

5.1. Дана облигация с полугодовыми купонами, погашаемая 25 апреля 2008 г. Сколько купонных платежей оставалось на 18 сентября 2003 г.? Сколько дней должно пройти до очередного купонного платежа?

5.2. Дана облигация, купоны по которой оплачиваются ежеквартально. Дата погашения облигации 12 августа 2009 г. Сколько купонных платежей оставалось на 25 июня 2003 г.? Сколько дней должно было пройти до очередного купонного платежа?

5.3. По 5%-ной купонной облигации номиналом 100 долл. обещают производить купонные платежи каждые полгода. Определить стоимость облигации в момент, когда до погашения облигации остается: а) 3,3 года; б) 3 года.

Безрисковые процентные ставки при начислении процентов 2 раза в год для всех сроков равны 6%.

5.4. По 6%-ной купонной облигации номиналом 200 долл. обещают производить купонные платежи каждый квартал. Определить стоимость облигации в момент, когда до погашения облигации остается: а) 16 мес.; б) 15 мес.

Безрисковые процентные ставки при начислении процентов 4 раза в год для всех сроков равны 5%.

5.5. По 8%-ной купонной облигации номиналом 100 долл. обещают производить купонные платежи 4 раза в год. Найти внутреннюю доходность облигации, если в нее инвестировали 98 долл. за 5 лет до погашения.

5.6. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1000 долл. обещают производить купонные платежи каждый год. Определить годовую внутреннюю доходность облигации, если за 20 лет до погашения ее стоимость составляла 1100 долл.

5.7. По 9%-ной купонной облигации номиналом 1000 долл. обещают производить купонные платежи каждые полгода. Определить внутреннюю доходность облигации, если за 3,8 года до погашения ее стоимость составляла 1118,44 долл.

5.8. По 5,5%-ной купонной облигации номиналом 200 долл. обещают производить купонные платежи каждые полгода. Определить текущую стоимость облигации, если до ее погашения остается 2 года, а безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении равны:

$$\bar{r}(0{,}5)=5\%,\quad \bar{r}(1{,}0)=6\%,\quad \bar{r}(1{,}5)=6\%,\quad \bar{r}(2{,}0)=4\%.$$

Найти внутреннюю доходность облигации при начислении процентов 2 раза в год.

1.6. ЗАВИСИМОСТЬ СТОИМОСТИ КУПОННОЙ ОБЛИГАЦИИ ОТ ВНУТРЕННЕЙ ДОХОДНОСТИ

Чем больше внутренняя доходность облигации в текущий момент, тем меньше ее стоимость, и наоборот.

Функция $P = P(r)$, определяющая зависимость стоимости купонной облигации от ее внутренней доходности, является убывающей и выпуклой.

Относительным ростом (соответственно снижением) стоимости облигации при изменении ее внутренней доходности на $\Delta r > 0$ называется величина

$$\frac{P(r-\Delta r)-P(r)}{P(r)} \quad \left(\frac{P(r)-P(r+\Delta r)}{P(r)}\right).$$

При изменении внутренней доходности на одну и ту же величину относительный рост стоимости облигации всегда больше относительного снижения.

Если до погашения купонной облигации остается больше одного купонного периода, т.е. $T > \frac{1}{m}$, то относительное изменение стоимости облигации тем больше, чем меньше купонная ставка облигации (при одном и том же изменении внутренней доходности).

Текущей доходностью купонной облигации называется число ρ, равное отношению всех купонных платежей за год к рыночной стоимости этой облигации, т.е. $\rho = \frac{Af}{P}$.

Облигация продается по номиналу, если ее рыночная стоимость совпадает с номинальной.

Облигация продается с премией (соответственно ***с дисконтом***), если ее рыночная стоимость выше (ниже) номинальной стоимости.

В те моменты, когда происходит оплата купонов:

1) облигация продается по номиналу в том и только в том случае, если $r = \rho = f$;

2) облигация продается с премией (с дисконтом) в том и только в том случае, если $r < \rho < f$ $(r > \rho > f)$.

6.1. По 8%-ной купонной облигации номиналом 1000 долл. и сроком до погашения 10,25 года обещают производить купонные платежи каждые полгода. Внутренняя доходность облигации равна 8%.

Найти изменения стоимости облигации при изменении ее внутренней доходности на $\Delta r = 1\%$.

6.2. По купонной облигации номиналом 1000 долл. и сроком до погашения 9,25 года обещают производить купонные платежи каждые полгода. Внутренняя доходность облигации равна 8%.

Найти относительные изменения стоимости облигации при изменении ее внутренней доходности на $\Delta r = 2\%$ для купонных ставок 8 и 9%.

6.3. По 8%-ной купонной облигации номиналом 1000 долл. и сроком до погашения 20 лет обещают производить купонные платежи ежегодно.

Определить размер премии (дисконта), если внутренняя доходность облигации составляет 9, 8 и 7%.

6.4. По 5%-ной купонной облигации номиналом 2000 долл. и сроком до погашения 10 лет обещают производить купонные выплаты ежеквартально.

Определить размер премии (дисконта), если внутренняя доходность облигации составляет 7, 5 и 4%.

6.5. По 6,5%-ной купонной облигации номиналом 100 долл. купоны оплачивают 2 раза в год. До погашения облигации остается 5 лет.

Определить текущую и внутреннюю доходности облигации, если ее рыночная стоимость равна 102,13 долл.

6.6. По 6,5%-ной купонной облигации номиналом 100 долл. купоны оплачивают 4 раза в год. До погашения облигации остается 6 лет.

Определить текущую и внутреннюю доходности облигации, если ее рыночная стоимость равна 97,57 долл.

6.7. По 6%-ной купонной облигации номиналом 100 долл. купоны должны оплачиваться 2 раза в год. До погашения облигации остается 4,2 года.

Определить текущую и внутреннюю доходности облигации, если ее рыночная стоимость равна 101,06 долл.

6.8. Дана купонная облигация, купоны по которой оплачиваются m раз в год. Доказать, что

$$f > \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m} \rho, \text{ если } f > r,$$

$$f < \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m} \rho, \text{ если } f < r,$$

где f – купонная ставка облигации;
r – внутренняя доходность облигации;
ρ – текущая доходность облигации;
τ – время от последнего купонного платежа до текущего момента.

1.7. ЗАВИСИМОСТЬ СТОИМОСТИ КУПОННОЙ ОБЛИГАЦИИ ОТ ФАКТОРА ВРЕМЕНИ

Зависимость стоимости купонной облигации от времени при неизменной внутренней доходности описывают следующие два утверждения.

1. Размер премии или дисконта тем меньше, чем меньше времени (купонных платежей) остается до погашения облигации.

2. Изменение размера премии и дисконта тем больше, чем меньше времени (купонных платежей) остается до погашения облигации.

При неизменных условиях на рынке ценных бумаг и неизменной внутренней доходности купонной облигации стоимость облигации изменяется в зависимости от того, в какой момент между купонными выплатами рассматривается эта облигация. Чтобы избежать неудобств, связанных с данным обстоятельством, при торговле на бирже информация о ценах на купонные облигации дается в виде так называемой ***котируемой цены.*** Эта цена совпадает со стоимостью облигации в момент купонной выплаты и остается неизменной до следующей купонной выплаты.

Покупатель облигации должен оплатить не только ее котируемую цену, но и обусловленную временем, прошедшим после купонной выплаты, добавку.

Для покупателя стоимость облигации через время τ после очередной купонной выплаты состоит из котируемой цены и «накопленных процентов» $\frac{N_1}{N_2}q$, которые прямо пропорциональны числу дней N_1, прошедших после очередной купонной выплаты, и обратно пропорциональны числу дней N_2 между соседними купонными выплатами.

7.1. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1000 долл. обещают производить ежегодные купонные выплаты в течение 5 лет. Внутренняя доходность этой облигации равна 12% и со временем не изменяется.

Определить:

а) размер дисконта после каждой купонной выплаты, т.е. D_5, D_4, D_3, D_2, D_1, D_0;

б) значения изменений дисконта в каждом из перечисленных случаев.

Выполнить рисунок.

7.2. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1000 долл. обещают производить ежегодные купонные выплаты в течение 10 лет. Внутренняя доходность этой облигации равна 8% и остается постоянной до момента погашения облигации.

Определить:

а) размер премии после каждой купонной выплаты, т.е. $П_{10}$, $П_9$, ... , $П_1$, $П_0$;

б) значения изменений премии в каждом из перечисленных случаев.

Выполнить рисунок.

7.3. Две 10%-ные купонные облигации А и В, каждая номиналом 1000 долл. и с годовой внутренней доходностью 8%, имеют сроки до погашения 10 и 20 лет соответственно.

Определить размер премии для каждой облигации в текущий момент и через год после этого, а также сравнить изменения премий для этих облигаций, если купонные платежи производятся ежегодно, а внутренняя доходность не изменяется.

7.4. Две 10%-ные купонные облигации А и В, каждая номиналом 1000 долл. и годовой внутренней доходностью 12%, имеют сроки до погашения 15 и 20 лет соответственно.

Определить размер дисконта для каждой облигации в текущий момент и через год после этого, а также сравнить изменения дисконтов для этих облигаций, если купонные платежи производятся 2 раза в год, а внутренняя доходность не изменяется.

7.5. До погашения облигации, купоны по которой оплачиваются 4 раза в год, остается 25 лет. Внутренняя доходность облигации составляет 7%, а ее рыночная стоимость – 1025 долл.

Найти стоимость облигации через 10, 40, 60 и 80 дней после текущего момента, если ее внутренняя доходность не изменяется (число дней в году считать равным 360).

7.6. По 10%-ной купонной облигации номиналом 1000 долл. обещают в конце каждого квартала производить купонные выплаты в течение 5,2 года. Внутренняя доходность облигации равна 8% и не изменяется до погашения облигации.

Найти котируемую цену данной облигации и величину «накопленных процентов», которую должен оплатить покупатель.

1.8. ДЮРАЦИЯ И ВЫПУКЛОСТЬ ОБЛИГАЦИИ

Если r – внутренняя доходность облигации при начислении процентов m раз в год, то дюрация Маколея и выпуклость Маколея облигации определяются следующими равенствами:

$$D_m = \sum_{k=1}^{l} t_k \cdot \frac{\Pi V_m(C_{t_k})}{P(r)}, \quad C_m = \sum_{k=1}^{l} t_k \cdot \left(t_k + \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{\Pi V_m(C_{t_k})}{P(r)},$$

где $\Pi V_m(C_{t_k}) = \dfrac{C_{t_k}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt_k}}$ – приведенное значение платежа C_{t_k};

$P(r)$ – текущая рыночная стоимость облигации.

Если абсолютная величина изменения внутренней доходности облигации Δr достаточно мала, то относительное изменение стоимости облигации можно оценить с помощью дюрации и выпуклости облигации:

$$\frac{\Delta P}{P(r)} \approx -D_m\left(\frac{\Delta r}{1+\frac{r}{m}}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\Delta P}{P(r)} \approx -D_m\left(\frac{\Delta r}{1+\frac{r}{m}}\right)+\frac{C_m}{2}\left(\frac{\Delta r}{1+\frac{r}{m}}\right)^2,$$

где $\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r)$.

Если $\tilde{r}$ – внутренняя доходность облигации при непрерывном начислении, то дюрация и выпуклость облигации определяются следующими равенствами:

$$D_\infty = \sum_{k=1}^{l} t_k \frac{C_{t_k} e^{-\tilde{r}t_k}}{P(\tilde{r})}, \quad C_\infty = \sum_{k=1}^{l} t_k^2 \frac{C_{t_k} e^{-\tilde{r}t_k}}{P(\tilde{r})}.$$

При этом

$$\frac{\Delta P}{P(\tilde{r})} \approx -D_\infty \Delta r; \quad \frac{\Delta P}{P(\tilde{r})} \approx -D_\infty \Delta r + \frac{C_\infty}{2}(\Delta r)^2.$$

Дюрацию и выпуклость купонной облигации, по которой купоны оплачиваются m раз в год, принято определять при начислении процентов m раз в год, если не оговорено противное.

8.1. Определить дюрацию и выпуклость облигации, если ее внутренняя доходность при начислении процентов 2 раза в год равна 4%, а поток платежей приведен ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,2	1,4	2,0
Платеж, долл.	5	6	6	6	106

8.2. Определить дюрацию и выпуклость облигации, если ее внутренняя доходность при начислении процентов 4 раза в год равна 6%, а поток платежей имеет следующий вид:

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
Платеж, долл.	4	10	4	10	110

Оценить (двумя способами) относительное изменение стоимости облигации при увеличении внутренней доходности облигации на 60 б.п. (б.п. – базисный пункт, сотая доля процента).

8.3. Определить дюрацию и выпуклость облигации, если ее внутренняя доходность при непрерывном начислении равна 5%, а поток платежей приведен ниже.

Срок, годы	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
Платеж, долл.	10	10	10	10	10	100

Оценить стоимость облигации, если внутренняя доходность облигации уменьшится на 80 б.п.

8.4. Определить дюрацию и выпуклость облигации при начислении процентов один раз в год, если поток платежей по облигации приведен ниже.

Срок, годы	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	–1000	30	30	30	30	30	1030

Оценить (двумя способами) относительное изменение стоимости облигации при уменьшении внутренней доходности на 120 б.п.

8.5. Определить дюрацию и выпуклость облигации при начислении процентов 2 раза в год, если поток платежей по облигации имеет вид:

Срок, годы	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Платеж, долл.	–1000	40	40	40	40	40	40	40	1040

8.6. Найти дюрацию и выпуклость облигации при непрерывном начислении, если поток платежей по облигации приведен ниже.

Срок, годы	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Платеж, долл.	–100	5	5	5	5	105

8.7. Дана 6%-ная купонная облигация номиналом 1000 долл., по которой купоны оплачиваются 2 раза в год в течение 3 лет. Известно, что облигация продается по номиналу.

Определить дюрацию и показатель выпуклости облигации. Найти относительное изменение стоимости облигации точно и приближенно при изменении внутренней доходности на $\Delta r = 0{,}01$; 0,02 и –0,01.

8.8. Дана 8%-ная купонная облигация номиналом 1000 долл., по которой купоны оплачиваются дважды в год в течение 5 лет. Внутренняя доходность облигации равна 10%.

Найти:

1) дюрацию и выпуклость облигации;

2) относительные изменения стоимости облигации (точно и приближенно) при изменениях внутренней доходности на $\Delta r = 0{,}005$; 0,01 и 0,03.

8.9. Все безрисковые процентные ставки одинаковы и равны 6% (при начислении процентов дважды в год). Текущая рыночная стоимость облигации $P = 1000$ долл., ее дюрация $D_2 = 3{,}5$ года, а выпуклость $C_2 = 25{,}43$.

Оценить стоимость облигации, если все безрисковые процентные ставки изменятся на $\Delta r = 0{,}005$ и –0,010.

8.10. Все безрисковые процентные ставки одинаковы и равны 8% (при непрерывном начислении процентов). Текущая рыночная стоимость облигации $P = 1000$ долл., ее дюрация $D_\infty = 5{,}62$ года, а выпуклость $C_\infty = 45{,}78$.

Оценить стоимость облигации, если все безрисковые процентные ставки изменятся на $\Delta r = 0{,}01$; 0,02 и –0,005.

8.11. По ренте должны выплачивать одну и ту же денежную сумму m раз в год в течение n лет.

Доказать, что

$$D_m = \frac{1+\frac{r}{m}}{r} - \frac{n}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1},$$

где r – внутренняя доходность ренты при начислении m раз в год.

8.12. По ренте должны выплачивать одну и ту же денежную сумму 4 раза в год в течение 30 лет.

Найти дюрацию ренты, если ее внутренняя доходность при начислении 4 раза в год равна 5%.

1.9. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЮРАЦИИ И ВЫПУКЛОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

1. Дюрация любой облигации не превышает срока ее погашения. Дюрация чисто дисконтной облигации равна сроку ее погашения.

2. Чем больше внутренняя доходность облигации, не являющейся чисто дисконтной, тем меньше дюрация и выпуклость облигации.

3. Если все платежи по облигациям отсрочить на одно и то же время – на τ лет, не меняя внутренней доходности облигации, то ее дюрация увеличится на τ лет, а выпуклость – на $\tau^2 + 2\tau D + \tau/m$, где D – дюрация исходной облигации.

4. Имеет место неравенство

$$C_m(r) > D_m^2(r) + \frac{1}{m} D_m(r),$$

где r – внутренняя доходность облигации при начислении процентов m раз в год.

5. Если до погашения купонной облигации остается более одного купонного платежа, то чем больше купонная ставка при неизменной внутренней доходности, тем меньше дюрация и выпуклость облигации.

6. Пусть D_n – дюрация купонной облигации, купоны по которой оплачиваются m раз в год, когда до ее погашения остается n/m лет, $n = 1, 2, \ldots$.

Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \frac{r+m}{rm}$;

2) последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей, если купонная ставка облигации f больше или равна ее внутренней доходности.

9.1. Дана облигация, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	1,0	2,0	3,0	4,0
Платеж, долл.	10	10	20	500

Определить дюрацию и выпуклость облигации, если внутренняя доходность (при начислении процентов один раз в год) принимает значения 5, 6 и 7%.

9.2. Дана облигация, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	4	4	5	5	5	100

Определить дюрацию и выпуклость облигации, если ее внутренняя доходность при непрерывном начислении процентов принимает значения 6, 8 и 10%.

9.3. Дюрация и выпуклость облигации при начислении процентов 4 раза в год соответственно равны 5,6 и 35,65. Определить дюрацию и выпуклость облигации, если все платежи отсрочить на полгода при неизменной внутренней доходности.

9.4. Даны две облигации, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам				
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1	10	10	10	300	–
2	–	10	10	10	300

Внутренняя доходность обеих облигаций равна 8% (при начислении процентов дважды в год). Определить дюрацию и выпуклость этих облигаций.

9.5. Дюрация и выпуклость облигации при непрерывном начислении процентов равны D_∞ и C_∞. Каковы будут дюрация и выпуклость облигации, если все платежи по облигации отсрочить на τ лет, не меняя внутренней доходности?

9.6. Даны две облигации, потоки платежей по которым имеют следующий вид.

Облигация	Платежи, долл., по годам						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
1	20	20	–	20	20	120	–
2	–	20	20	–	20	20	120

Внутренняя доходность обеих облигаций составляет 10% (при непрерывном начислении процентов). Определить дюрацию и выпуклость этих облигаций.

9.7. Дана пятилетняя купонная облигация, купоны по которой оплачиваются ежегодно. Найти дюрацию и выпуклость облигации, если ее внутренняя доходность равна 8%, а купонная ставка принимает значения 6, 7, 8, 9 и 10%.

9.8. Дана трехлетняя облигация с полугодовыми купонами. Внутренняя доходность облигации равна 6%. Найти дюрацию и выпуклость облигации, если купонная ставка принимает значения 4, 5, 6 и 7%.

9.9. Доказать, что зависимость дюрации купонной облигации от купонной ставки при всех остальных неизменных параметрах определяется выпуклой функцией.

9.10. Дана купонная облигация номинальной стоимостью 1000 долл. с ежегодными купонами по ставке 50%. Внутренняя доходность облигации равна 10%. Найти дюрацию облигации, когда до ее погашения остается 2 и 2,1 года.

9.11. Дана облигация с купонами, оплачиваемыми m раз в год, до погашения которой остается n/m лет, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказать, что

$$D_m(n) = \frac{1+\frac{r}{m}}{r} H_n + \frac{n}{m}\left(\frac{r-f}{r}\right)(1-H_n),$$

где r – внутренняя доходность облигации при начислении процентов m раз в год;

H_n – отношение текущей стоимости ренты из купонных платежей к текущей стоимости облигации;

f – купонная ставка облигации.

9.12. Дана купонная облигация с полугодовыми купонами по ставке 10%. Внутренняя доходность облигации равна 6%. Определить дюрацию облигации, когда до ее погашения остается $n/2$ лет, $n = 1, 2, \ldots, 10$. Зависимость дюрации от срока погашения изобразить на рисунке.

9.13. Дана купонная облигация с ежегодными купонами по ставке 6%. Внутренняя доходность облигации равна 60%. Определить дюрацию облигации, когда до ее погашения остается n лет, $n = 1, 2, \ldots, 10$. Зависимость дюрации от срока погашения изобразить на рисунке.

9.14. Дана купонная облигация с полугодовыми купонами по ставке 5%. Внутренняя доходность облигации равна 70%. Определить дюрацию облигации, когда до ее погашения остается $n/2$ лет, $n = 1, 2, \ldots, 10$. Зависимость дюрации от срока погашения изобразить на рисунке.

9.15. Дана купонная облигация с полугодовыми купонами по ставке 6%. Внутренняя доходность облигации равна 80%. Определить наименьшее число n так, чтобы $D_2(n + 1) < D_2(n)$, где $D_2(n)$ - дюрация облигации, когда до ее погашения остается $n/2$ лет.

1.10. СТОИМОСТЬ ИНВЕСТИЦИИ В ОБЛИГАЦИЮ. ИММУНИЗИРУЮЩЕЕ СВОЙСТВО ДЮРАЦИИ ОБЛИГАЦИЙ

Если в нулевой момент покупается некоторая облигация, то стоимость инвестиции в нее на момент t складывается из стоимости облигации в момент t и денежной суммы, накопленной в результате реинвестирования доходов, полученных по облигации до момента t включительно.

При условии, что в момент покупки облигации безрисковые процентные ставки равны r для всех сроков (при начислении m раз в год), рассматриваются следующие два сценария.

1. Безрисковые процентные ставки не будут меняться с течением времени.

2. В некоторый момент τ до первого платежа по облигации процентные ставки станут равными $\bar{r}$, но в дальнейшем уже меняться не будут.

Стоимость инвестиции в облигацию на момент t при первом сценарии называется ***планируемой стоимостью инвестиции*** и обозначается $V(r, t)$.

Стоимость инвестиции в облигацию на момент t при втором сценарии называется ***фактической стоимостью инвестиции*** и обозначается $V(r, \bar{r}, t)$.

Планируемое и фактическое значения стоимости инвестиции в облигацию удовлетворяют следующим равенствам:

$$V(r,t)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}P(r),\quad V(r,\bar{r},t)=\left(1+\frac{\bar{r}}{m}\right)^{mt}P(\bar{r}),\quad t\ge\tau,$$

где $P(r)$ и $P(\bar{r})$ – планируемое и фактическое значения стоимости облигации в начальный момент при внутренней доходности, равной r $(\bar{r})$.

Основные утверждения.

1. Существует, и притом единственный, момент $t^* = t(\bar{r})$, когда фактическая стоимость инвестиции в облигацию совпадает с ее планируемой стоимостью. При этом

$$t^*=\frac{\ln\dfrac{P(r)}{P(\bar{r})}}{m\ln\dfrac{1+\bar{r}/m}{1+r/m}}.$$

2. Если $D_m = D_m(r)$ – дюрация облигации в начальный момент, когда безрисковые процентные ставки равны r, то в момент $t = D_m$ фактическая стоимость инвестиции в облигацию при любых безрисковых ставках $\bar{r}$ не меньше планируемой стоимости этой инвестиции.

3. Если $\bar{r}_1 \le r \le \bar{r}_2$, то $t^*(\bar{r}_2) \le D_m \le t^*(\bar{r}_1)$.

10.1. Имеется облигация со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	5	5	5	5	5	105

Определить стоимость инвестиции в облигацию через 1,5 года после ее покупки для безрисковых процентных ставок (при начислении процентов дважды в год), приведенных ниже.

Момент времени, годы	Безрисковая процентная ставка, %, по срокам инвестиции, годы		
	0,5	1,0	1,5
0,5	4	5	6
1,0	5	5	6
1,5	6	6	7

10.2. Дана облигация, поток платежей по которой имеет следующий вид:

Срок, годы	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
Платеж, долл.	6	6	7	7	8	8	8	108

Определить стоимость инвестиции в облигацию через 3,5 года после ее покупки для безрисковых процентных ставок (при начислении процентов дважды в год), приведенных ниже.

Момент времени, годы	Безрисковая процентная ставка, % по срокам инвестиции, годы				
	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
1,0			5		
2,0		5			
3,0	4				
3,5	5	6	7	7	8

10.3. При покупке облигации поток платежей по ней имел следующий вид:

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Платеж, долл.	10	10	20	20	30	10	20	800

Определить стоимость инвестиции в облигацию через 2,5 года после ее покупки, если безрисковые процентные ставки (при непрерывном начислении) приведены ниже.

Момент времени, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Безрисковая процентная ставка для всех сроков, %	6	6	8	8	9

10.4. Имеется 6%-ная купонная облигация номиналом 100 долл. с годовыми купонами, до погашения которой остается 4 года. Все безрисковые процентные ставки одинаковы и равны 7%. Определить стоимость инвестиции в облигацию через 2,5 года при следующих условиях:

а) безрисковые ставки не меняются в течение 2,5 года;

б) сразу же после покупки облигации все безрисковые процентные ставки уменьшились на 1% и в дальнейшем не менялись;

в) сразу же после покупки облигации все безрисковые процентные ставки увеличились на 1%, после первого купонного платежа уменьшились на 1% и затем уже не менялись.

10.5. Дана 10%-ная купонная облигация номиналом 100 долл. с ежегодными купонами, до погашения которой остается 3 года. Все безрисковые процентные ставки одинаковы и равны 10%.

Определить:

а) планируемую и фактическую стоимости инвестиции в облигацию в момент t, если сразу же после покупки облигации все безрисковые процентные ставки стали равны 11%;

б) время, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадут;

в) дюрацию облигации в момент покупки.

10.6. Имеется 6%-ная купонная облигация номиналом 1000 долл. с ежегодными купонами, до погашения которой остается 5 лет. Все безрисковые процентные ставки равны 6%.

Найти:

а) дюрацию облигации и планируемую стоимость инвестиции в нее на момент, равный дюрации D_1;

б) фактическую стоимость этой инвестиции на момент D_1, если сразу же после покупки облигации безрисковые процентные ставки составили 5%;

в) стоимость инвестиции в облигацию на момент, равный дюрации D_1, если через 3,1 года после покупки облигации безрисковые процентные ставки стали равны 7%, не изменяясь до этого момента.

10.7. Дана 6%-ная купонная облигация номиналом 1000 долл. с полугодовыми купонами, до погашения которой остается 3 года. Все безрисковые процентные ставки равны 8%.

Найти:

1) дюрацию облигации D_2 и планируемую стоимость инвестиции в нее на момент D_2;

2) фактическую стоимость этой инвестиции в облигацию на момент D_2, если сразу же после покупки облигации безрисковые процентные ставки составят: а) 7%; б) 9%;

3) время, когда фактическая и планируемая стоимости этой инвестиции совпадут при условиях 2а и 2б.

10.8. Дана 9%-ная купонная облигация номиналом 1000 долл. с полугодовыми купонами, когда до погашения остается 5 лет. Все безрисковые процентные ставки равны 9%.

Найти:

1) дюрацию облигации D_2 и планируемую стоимость инвестиции в нее на момент D_2;

2) фактическую стоимость данной инвестиции на момент D_2, если сразу же после покупки облигации безрисковые процентные ставки станут равны: а) 8% ; б) 10%;

3) время, когда фактическая стоимость инвестиции совпадет с планируемой при условиях 2а и 2б;

4) стоимость инвестиции в облигацию на момент D_2, если сразу же после покупки облигации безрисковые процентные ставки составили 8%, а через 2,2 года – 9%.

10.9. Имеется 10%-ная купонная облигация номиналом 1000 долл., купоны по которой оплачиваются 4 раза в год. До погашения облигации остается 10 лет. Безрисковые процентные ставки при начислении процентов 4 раза в год равны 10%.

Найти фактическую стоимость инвестиции в облигацию на момент, равный дюрации D_4, если сразу же после покупки облигации безрисковые процентные ставки изменятся на $\Delta r = 0$; $\pm 0{,}005$; $\pm 0{,}1$; $\pm 0{,}2$.

1.11. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ДЮРАЦИЯ И ВЫПУКЛОСТЬ ОБЛИГАЦИЙ

Модифицированная дюрация $D_m^{\text{мод}}(r)$ и модифицированная выпуклость $C_m^{\text{мод}}(r)$ облигации определяются следующими соотношениями:

$$D_m^{\text{мод}}(r) = \frac{D_m(r)}{1+\frac{r}{m}}, \qquad C_m^{\text{мод}}(r) = \frac{C_m(r)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^2}$$

где $D_m(r)$, $C_m(r)$ – дюрация и выпуклость Маколея облигации;
r – внутренняя доходность облигации при начислении процентов m раз в год.

Основные утверждения.

1. $$\frac{dP(r)}{dr} = -P(r)\,D_m^{\text{мод}}(r); \quad \frac{d^2P(r)}{dr^2} = P(r)\,C_m^{\text{мод}}(r).$$

2. $$\frac{d}{dr}\left(D_m^{\text{мод}}(r)\right) = \left(D_m^{\text{мод}}(r)\right)^2 - C_m^{\text{мод}}(r).$$

3. $$\frac{d}{dr}\left[P(r)\,D_m^{\text{мод}}(r)\right] = -C_m^{\text{мод}}(r)\,P(r).$$

($P(r)D_m^{\text{мод}}(r)$ – стоимостная дюрация облигации).

4. Если приращение внутренней доходности $\Delta r > 0$ достаточно мало по абсолютной величине, то

а) $$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D_m^{\text{мод}}(r)\,\Delta r + \frac{1}{2}C_m^{\text{мод}}(r)(\Delta r)^2;$$

б) $$D_m^{\text{мод}}(r) \approx \frac{P(r-\Delta r) - P(r+\Delta r)}{2P(r)\,\Delta r},$$

$$C_m^{\text{мод}}(r) \approx \frac{P(r-\Delta r) + P(r+\Delta r) - 2P(r)}{P(r)\cdot(\Delta r)^2}.$$

5. При достаточно малых положительных Δy:

$$D_m^{\text{мод}}(r) \approx \frac{P^-(\Delta y) - P^+(\Delta y)}{2P\Delta y}; \quad C_m^{\text{мод}}(r) \approx \frac{P^-(\Delta y) + P^+(\Delta y) - 2P}{P(\Delta y)^2},$$

где P – текущая стоимость облигации;
$P^-(\Delta y)$ ($P^+(\Delta y)$) – стоимость облигации при уменьшении (увеличении) безрисковых процентных ставок на величину Δy.

11.1. Определить модифицированные дюрацию и выпуклость облигации, если ее внутренняя доходность при начислении процентов 4 раза в год равна 6%, а поток платежей от облигации приведен ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
Платеж, долл.	4	10	4	10	110

11.2. Найти стоимость облигации при условиях задачи 11.1 при увеличении и уменьшении внутренней доходности на 50 б.п. Оценить приближенно модифицированные дюрацию и выпуклость исходной облигации.

11.3. Дана 9%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами номиналом 1000 долл., когда до погашения остается 20 лет. Внутренняя доходность облигации равна 9%.

Найти:

1) модифицированную дюрацию облигации;

2) стоимость облигации при увеличении и уменьшении внутренней доходности на: а) 100 б.п.; б) 20 б.п. В обоих случаях оценить модифицированные дюрацию и выпуклость облигации.

11.4. Определить относительные изменения цены облигации при увеличении внутренней доходности на 20 б.п. и уменьшении ее на 40 б.п., если модифицированные дюрация и выпуклость равны 5 и 25 соответственно.

11.5. Имеется облигация стоимостью 950 долл., модифицированные дюрация и выпуклость которой равны 8 и 135

соответственно. Оценить стоимость облигации при увеличении безрисковых процентных ставок на 40 б.п. и уменьшении их на 50 б.п.

11.6. Определить точно и приближенно при $\Delta y = 0{,}002$ модифицированные дюрацию и выпуклость 10%-ной облигации с полугодовыми купонами, до погашения которой остается 4 года. Временная структура процентных ставок при начислении процентов дважды в год приведена ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Процентная ставка, %	6,0	6,5	6,7	6,8	7,0	7,5	8,0	8,5

11.7. Модифицированные дюрация и выпуклость облигации равны 3,85 и 19,00 соответственно. Как изменится модифицированная дюрация при увеличении внутренней доходности на 20 б.п.?

11.8. Модифицированная выпуклость облигации составляет 19, а ее стоимость – 445 долл. Как изменится стоимостная дюрация при уменьшении внутренней доходности на 40 б.п.?

11.9. Инвестор предполагает обменять облигацию стоимостью P с модифицированной дюрацией D на облигацию с модифицированной дюрацией D'. Какова должна быть стоимость второй облигации, чтобы в результате обмена не изменилась подверженность процентному риску (при параллельных сдвигах кривой рыночных доходностей)?

11.10. Инвестор предполагает обменять облигацию стоимостью 10 000 долл. с модифицированной дюрацией 4,2 на облигацию с модифицированной дюрацией 16,8. Каков должен быть номинал покупаемой облигации, чтобы в результате обмена не изменилась подверженность процентному риску, если при номинале облигации 100 долл. ее цена равна 125 долл.?

1.12. ДОХОДНОСТЬ ПОРТФЕЛЯ ОБЛИГАЦИЙ

Внутренней доходностью портфеля облигаций называется внутренняя доходность облигации, поток платежей по которой совпадает с потоком платежей по портфелю.

Средневзвешенная доходность портфеля облигаций определяется как взвешенная по стоимости сумма внутренних доходностей облигаций портфеля, т.е.

$$r_{вз} = \sum_{j=1}^{l} \omega_j r_j,$$

где r_j – внутренняя доходность j-й облигации, $j = 1, 2, \ldots, l$;
ω_j – отношение текущей стоимости j-й облигации к текущей стоимости всего портфеля облигаций, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Средневзвешенная доходность портфеля облигаций совпадает с внутренней доходностью этого портфеля, если все облигации портфеля имеют одну и ту же внутреннюю доходность.

12.1. Найти средневзвешенную доходность портфеля облигаций при следующих исходных данных.

Облигация	Стоимость, долл.	Внутренняя доходность при начислении процентов 2 раза в год, %
1	120	6
2	250	10
3	500	8
4	1500	7

12.2. Дан портфель облигаций стоимостью 25 000 долл., средневзвешенная доходность которого равна 8%. Какова будет средневзвешенная доходность портфеля после продажи облигации стоимостью 1250 долл. с внутренней доходностью 6%?

12.3. Имеется портфель облигаций стоимостью 30 000 долл., средневзвешенная доходность которого равна 6%. Какова будет средневзвешенная доходность портфеля после покупки облигации стоимостью 5000 долл. с внутренней доходностью 10%?

12.4. Дан портфель облигаций стоимостью 10 000 долл., средневзвешенная доходность которого равна 6,5% при начислении процентов 2 раза в год. Найти средневзвешенную доходность портфеля после покупки облигации со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Платеж, долл.	–1267,11	100	100	100	100	1100

12.5. Дан портфель из трех купонных облигаций с полугодовыми купонами. Данные по облигациям приведены ниже.

Номер облигации (j)	Купонная ставка, %	Номинал облигации, долл.	Срок до погашения, годы	Внутренняя доходность (m = 2), %
1	6,0	1000	2,0	5
2	6,5	2000	2,5	6
3	7,0	3000	3,0	7

Найти внутреннюю и средневзвешенную доходности портфеля облигаций (при начислении процентов дважды в год).

12.6. Определить внутреннюю и средневзвешенную доходности портфеля облигаций П(2000, 1000, 2000, 3000) при начислении процентов один раз в год и при потоках платежей по облигациям, приведенных ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам				
	0	0,5	1	1,5	2,0
A	–217,50	5	10	15	200
B	–100,00	6	6	6	106
C	–213,76	10	10	10	200
D	–145,80	8	8	8	150

1.13. ДЮРАЦИЯ И ВЫПУКЛОСТЬ ПОРТФЕЛЯ ОБЛИГАЦИЙ

Дюрацией D_m(П) и соответственно ***выпуклостью*** C_m(П) ***портфеля облигаций*** П при начислении процентов m раз в год называется дюрация (выпуклость) облигации, имеющей такой же поток платежей, как и портфель П.

Если безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков, то

$$D_m(\Pi)=\sum_{j=1}^{l}\omega_j D_j;\quad C_m(\Pi)=\sum_{j=1}^{l}\omega_j C_j,$$

где ω_j – отношение текущей стоимости j-й облигации к текущей стоимости портфеля облигаций, $j=1,2,\ldots,l$;

D_j и C_j – дюрация и выпуклость j-й облигации портфеля.

Модифицированная дюрация $D^{\text{мод}}(\Pi)$ и ***модифицированная выпуклость*** $C^{\text{мод}}(\Pi)$ ***портфеля облигаций*** Π определяются следующими равенствами:

$$D_m^{\text{мод}}(\Pi)=\frac{D_m(\Pi)}{1+\dfrac{r}{m}};\quad C_m^{\text{мод}}(\Pi)=\frac{C_m(\Pi)}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^2},$$

где r – внутренняя доходность портфеля Π при начислении процентов m раз в год.

Относительное изменение стоимости портфеля облигаций Π, соответствующее изменению его внутренней доходности на величину Δr, оценивается на основе приближенного равенства

$$\frac{\Delta\Omega(r)}{\Omega}\approx -D_m^{\text{мод}}(\Pi)\Delta r+\frac{C_m^{\text{мод}}(\Pi)}{2}(\Delta r)^2,$$

где Ω – текущая стоимость портфеля облигаций Π.

Модифицированная дюрация $D_m^{\text{мод}}(\Pi)$ и модифицированная выпуклость $C_m^{\text{мод}}(\Pi)$ портфеля облигаций Π приближенно определяются следующим образом:

$$D_m^{\text{мод}}(\Pi)\approx\frac{\Omega^-(\Delta y)-\Omega^+(\Delta y)}{2\Delta y\cdot\Omega};\quad C_m^{\text{мод}}(\Pi)\approx\frac{\Omega^-(\Delta y)+\Omega^+(\Delta y)-2\Omega}{(\Delta y)^2\cdot\Omega},$$

где $\Omega^-(\Delta y)$ и $\Omega^+(\Delta y)$ – стоимость портфеля облигаций Π соответственно при уменьшении и увеличении всех безрисковых процентных ставок на величину $\Delta y>0$.

Средневзвешенная дюрация $D^{\text{вз}}(\Pi)$ и ***средневзвешенная выпуклость*** $C^{\text{вз}}(\Pi)$ ***портфеля облигаций*** Π определяются следующими равенствами:

$$D^{\text{вз}}(\Pi)=\sum_{j=1}^{l}\omega_j D_j^{\text{мод}};\quad C^{\text{вз}}(\Pi)=\sum_{j=1}^{l}\omega_j C_j^{\text{мод}},$$

где $D_j^{\text{мод}}$ и $C_j^{\text{мод}}$ – модифицированные дюрация и выпуклость j-й облигации соответственно;

ω_j – отношение текущей стоимости j-й облигации к текущей стоимости всего портфеля Π, $j=1,2,\ldots,l$.

Можно считать, что

$$D^{\text{мод}}(\Pi)\approx D^{\text{вз}}(\Pi),\quad C^{\text{мод}}(\Pi)\approx C^{\text{вз}}(\Pi).$$

13.1. Имеется портфель из двух облигаций, данные которых приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по срокам, годы				Внутренняя доходность, % ($m=1$)
	1,0	2,0	3,0	4,0	
1	10	10	20	200	5
2	20	–	20	400	10

Найти:

а) дюрацию и выпуклость портфеля облигаций;

б) модифицированные дюрацию и выпуклость портфеля облигаций;

в) относительные изменения стоимости портфеля облигаций при увеличении и уменьшении внутренних доходностей облигаций на 40 б.п.

13.2. Определить средневзвешенные дюрацию и выпуклость портфеля облигаций при условиях задачи 13.1.

13.3. Имеется портфель из трех облигаций, данные по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по срокам, годы					Внутренняя доходность, % (m = 2)
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	
1	100	–	–	–	–	4
2	–	200	–	–	–	5
3	50	50	50	50	1050	10

Найти:

а) модифицированные дюрацию и выпуклость портфеля облигаций;

б) относительные изменения стоимости портфеля облигаций при увеличении и уменьшении внутренних доходностей облигаций на 60 б.п.

13.4. Найти средневзвешенные дюрацию и выпуклость портфеля облигаций при условиях задачи 13.3.

13.5. Временная структура процентных ставок является ровной, т.е. безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков. Дюрации четырех видов облигаций соответственно равны 1,5; 2,0; 3,5 и 5, а их выпуклость составляет 5, 8, 16 и 35.

Инвестор приобрел облигации соответственно на суммы 1000, 15 000, 2500 и 4000 долл.

Определить дюрацию и выпуклость портфеля из данных облигаций, а также относительное изменение стоимости портфеля, если безрисковые процентные ставки изменились с 8 до 9% (при начислении процентов один раз в год).

13.6. Модифицированные дюрации двух видов облигаций соответственно равны 2 и 3. Определить портфель из этих облигаций, средневзвешенная дюрация которого равна 2,75.

13.7. Модифицированные дюрации четырех видов облигаций соответственно равны 1,2; 2; 3,4 и 4, а их модифицированные выпуклости составляют 4, 8, 16 и 36.

Найти портфель с наибольшей средневзвешенной выпуклостью при средневзвешенной дюрации 3,6, если:

1) доли средств, инвестированных в облигации, могут быть любыми;

2) доля средств, инвестированных в облигации четвертого вида, не может превышать 50%.

13.8. Модифицированные дюрации пяти видов облигаций соответственно равны 3; 3,5; 3,75; 4,2 и 4,5, а их модифицированные выпуклости составляют 10, 12, 15, 20 и 25.

Найти портфель с наибольшей средневзвешенной выпуклостью при средневзвешенной дюрации 4, если:

а) доли средств, инвестированных в облигации, могут быть любыми;

б) доля средств, инвестированных в облигации первого вида, не может превышать 20%.

13.9. Имеются облигации двух видов, данные которых приведены ниже.

Облигация	Купонная ставка, %	Частота оплаты купонов (m)	Номинал, долл.	Срок до погашения, годы
A	5	2	100	2
B	8	1	100	4

Безрисковые процентные ставки при начислении процентов 2 раза в год для всех сроков равны 9%. Инвестор приобрел облигации первого вида на 4000 долл., а второго вида – на 6000 долл.

Найти дюрацию и выпуклость портфеля облигаций.

13.10. Временная структура безрисковых процентных ставок при начислении процентов 2 раза в год имеет следующий вид:

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Процентная ставка, %	5	7	7	5	8	10

Инвестор владеет портфелем облигаций, данные которых приведены ниже.

Номер облигации (j)	Стоимость облигации, долл.	Внутренняя доходность при m = 2	Модифицированная дюрация ($D_2^{(j)}$)	Модифицированная выпуклость ($C_2^{(j)}$)
1	109,7065	6,866	1,278	2,392
2	181,1901	5,000	1,951	4,759
3	368,7037	9,731	2,632	8,921

Номер облигации (j)	Платежи, долл., по срокам, годы					
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
1	20	–	100	–	–	–
2	–	–	–	200	–	–
3	–	40	–	–	40	400

Найти:

а) средневзвешанные дюрацию и выпуклость портфеля облигаций;

б) стоимость портфеля облигаций при увеличении и уменьшении всех безрисковых процентных ставок на 50 и 20 б.п.

Получить соответствующие оценки дюрации и выпуклости портфеля облигаций.

13.11. Временная структура процентных ставок при начислении процентов дважды в год приведена ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Процентная ставка, %	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0

Портфель состоит из трех купонных облигаций с полугодовыми купонами:

Номер облигации	Номинал, долл.	Купонная ставка, %	Срок до погашения, годы
1	1000	8	1,0
2	600	9	2,0
3	200	10	2,5

Определить:

а) текущую стоимость портфеля облигаций;

б) стоимость портфелл облигаций при уменьшении и увеличении безрисковых процентных ставок на Δy = 20 б.п. и приближенные значения модифицированных дюрации и выпуклости портфеля облигаций;

в) относительные изменения стоимости портфеля облигаций при увеличении и уменьшении безрисковых процентных ставок на 50 и 100 б.п.

13.12. В условиях задачи 13.11 определить:

а) внутреннюю и средневзвешенную доходности портфеля облигаций (при начислении процентов 2 раза в год);

б) модифицированные дюрацию и выпуклость портфеля облигаций;

в) средневзвешенные дюрацию и выпуклость портфеля облигаций;

г) относительное изменение стоимости портфеля облигаций точно и приближенно при изменении безрисковых процентных ставок на Δr = 50 б.п. и Δr = –50 б.п.

1.14. ИММУНИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ОБЛИГАЦИЙ

Иммунизация портфеля облигаций – это стратегия управления инвестициями в облигации на временном промежутке заданной продолжительности для уменьшения процентного риска.

Если иммунизация портфеля облигаций производится на временном промежутке продолжительностью T, то в начальный момент формируется портфель облигаций с дюрацией, равной T, а в течение времени инвестиционный портфель периодически корректируется. При корректировке инвестиционного портфеля через t лет фактическая стоимость инвестиции расходуется на формирование нового портфеля облигаций с дюрацией, равной величине $T - t$.

Иммунизация портфеля облигаций дает наилучшие результаты, если в течение времени возможны только параллельные сдвиги кривой рыночных доходностей и практически отсутствуют издержки при покупке и продаже облигаций.

При этих условиях инвестиционный портфель следует корректировать всякий раз, когда по портфелю облигаций выплачиваются доходы, а перед этим изменилась кривая рыночных доходностей. Кроме того, при формировании портфеля облигаций целесообразно максимизировать его выпуклость.

14.1. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8%. На рынке имеются купонные облигации со следующими параметрами:

$$A_1 = 100 \text{ долл.},\quad f_1 = 10\%,\quad m_1 = 1,\quad T_1 = 2 \text{ года};$$
$$A_2 = 100 \text{ долл.},\quad f_2 = 10\%,\quad m_2 = 1,\quad T_2 = 4 \text{ года}.$$

Определить, какова будет стратегия иммунизации при инвестировании 10 000 долл. в данные облигации сроком на 3 года для вариантов изменения безрисковых процентных ставок, приведенных ниже.

Время, годы	Безрисковая ставка, %, по вариантам			
	a	b	c	d
0,5	9	8	10	11
1,5	8	9	8	9

14.2. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 9%. На рынке имеются облигации двух видов, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам					
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
A	5	5	6	6	110	–
B	–	10	–	10	–	110

Какова должна быть стратегия иммунизации при инвестировании 5000 долл. в данные облигации сроком на 2,5 года, если безрисковые процентные ставки изменялись следующим образом: через 0,1 года ставка составила 8%, через 0,6 года – 7%, а через 1,1 года – 6%?

Все безрисковые процентные ставки определены при начислении процентов один раз в год.

14.3. В начальный момент безрисковые процентные ставки при начислении процентов один раз в год для всех сроков одинаковы и равны 10%. На рынке имеются облигации трех видов, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам			
	1	2	3	4
A	10	110	–	–
B	10	10	110	–
C	10	10	10	110

Определить стратегию иммунизации при инвестировании 6000 долл. в данные облигации сроком на 3 года, если безрисковые процентные ставки через 0,5 года составили 9%, а через 1,5 года – 8%. Доля средств, инвестированных в облигации B, должна составлять 20%.

14.4. Безрисковые процентные ставки при начислении процентов один раз в год одинаковы для всех сроков и равны 8%. На рынке имеются облигации трех видов, потоки платежей по которым приведены ниже.

Облигация	Платежи, долл., по годам			
	1	2	3	4
A	20	20	1020	–
B	30	30	30	530
C	100	60	60	860

Определить стратегию иммунизации при инвестировании 50 000 долл. в данные облигации сроком на 3,2 года, если безрисковые процентные ставки через 0,8 года составили 7%, а в дальнейшем не менялись.

14.5. Имеются облигации двух видов со следующими данными.

Облигация	Стоимость, долл.	Дюрация
A	100	2
B	200	4

При покупках и продажах облигаций необходимо оплачивать комиссионные в размерах 0,5 и 0,6% соответственно.

Инвестор, располагающий денежной суммой 200 долл. и портфелем П(2000, 3000) из данных облигаций, должен сформировать новый портфель с дюрацией, равной 3,5.

Определить этот портфель при наименьших трансакционных издержках.

14.6. Безрисковые процентные ставки при начислении процентов один раз в год равны 8%. На рынке имеются облигации с годовыми купонами, данные которых приведены ниже.

Облигация	Номинал, долл.	Купонная ставка, %	Срок до погашения, годы
A	100	8	2
B	100	8	4

При покупках и продажах облигаций необходимо оплачивать комиссионные в размере 0,5%.

Инвестор, располагающий суммой 10 050 долл., вкладывает денежные средства в данные облигации сроком на 3 года.

Определить, какова будет стратегия иммунизации, если через 0,5 года процентные ставки возрастут до 9%, а в дальнейшем не будут изменяться.

1.15. ПРОСТЕЙШИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ОБЛИГАЦИИ

На рынке имеются облигации l видов с данными, приведенными ниже.

Номер облигации	Платежи, по срокам					Цена покупки	Цена продажи
	t_1	...	t_i	...	t_n		
1	$C_{t_1}^{(1)}$	...	$C_{t_i}^{(1)}$	...	$C_{t_n}^{(1)}$	P_1	Q_1
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
j	$C_{t_1}^{(j)}$	...	$C_{t_i}^{(j)}$	...	$C_{t_n}^{(j)}$	P_j	Q_j
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
l	$C_{t_1}^{(l)}$	...	$C_{t_i}^{(l)}$	...	$C_{t_n}^{(l)}$	P_l	Q_l

1. Предполагается, что инвестору предстоит через $t_1, t_2, \ldots, t_n$ лет произвести выплаты соответственно в размерах $S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_n}$.

Чтобы определить портфель из данных облигаций с наименьшей стоимостью, платежи по которому достаточны для выполнения обязательств инвестора, решается следующая задача линейного программирования:

$$f = \sum_{j=1}^{l} P_j x_j \ (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{l} C_{t_i}^{(j)} x_j \geq S_{t_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, l,$$

где x_j – количество покупаемых облигаций j-го вида.

Если же допустить частичное использование текущих платежей по портфелю облигаций для выполнения последующих обязательств инвестора, то задача отыскания портфеля облигаций с наименьшей стоимостью примет следующий вид:

$$f = \sum_{j=1}^{l} P_j x_j \ (\min);$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} C_{t_1}^{(j)} x_j \geq S_{t_1} + F_{t_1}, \\ F_{t_{i-1}}(1+r)^{t_i - t_{i-1}} + \sum_{j=1}^{l} C_{t_i}^{(j)} x_j \geq S_{t_i} + F_{t_i}, \ i = 2, 3, \ldots, n-1, \\ F_{t_{n-1}}(1+r)^{t_n - t_{n-1}} + \sum_{j=1}^{l} C_{t_n}^{(j)} x_j \geq S_{t_n}, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, l,$$

$$F_{t_i} \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где F_{t_i} – часть i-го платежа, используемая в последующий момент, $i = 1, 2, ..., n-1$;

r – ставка реинвестирования при начислении процентов один раз в год.

2. Чтобы определить оптимальную стратегию обмена облигаций, можно решить следующую задачу:

$$f = \sum_{j=1}^{l} Q_j y_j - \sum_{j=1}^{l} P_j x_j \; (\max);$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} C_{t_1}^{(j)} x_j \geq \sum_{j=1}^{l} C_{t_1}^{(j)} y_j + F_{t_1}, \\ \sum_{j=1}^{l} C_{t_i}^{(j)} x_j + F_{t_{i-1}} (1+r)^{t_i - t_{i-1}} \geq \sum_{j=1}^{l} C_{t_i}^{(j)} y_j + F_{t_i}, \; i = 2, 3, \ldots, n-1, \\ \sum_{j=1}^{l} C_{t_n}^{(j)} x_j + F_{t_{n-1}} (1+r)^{t_n - t_{n-1}} \geq \sum_{j=1}^{l} C_{t_n}^{(j)} y_j, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; y_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, l,$$

$$y_j \leq b_j, \; j = 1, 2, \ldots, l,$$

$$F_{t_i} \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где x_j, y_j – количества соответственно покупаемых и продаваемых облигаций j-го вида, $j = 1, 2, ..., l$.

15.1. Инвестору предстоят выплаты через 1, 2 и 3 года соответственно в размерах 260, 660 и 440 долл. В данный момент на рынке имеются две облигации с параметрами, приведенными ниже.

Облигация	Платежи, долл.			Цена покупки (P_j), долл.
	$C_1^{(j)}$	$C_2^{(j)}$	$C_3^{(j)}$	
1	10	10	110	100
2	50	150	–	150

Требуется сформировать портфель облигаций с наименьшей стоимостью:

а) чтобы поток платежей от него позволил выполнить обязательства инвестора;

б) чтобы поток платежей по нему обеспечивал выполнение обязательств инвестора при условии, что поступающие платежи можно использовать через год для покрытия очередного обязательства инвестора (безрисковые процентные ставки при начислении один раз в год равны 5%).

15.2. Инвестору предстоят выплаты через 1, 2 и 3 года соответственно в размерах 200, 550 и 500 долл. В данный момент на рынке имеются три облигации с параметрами, приведенными ниже.

Облигация	Платежи, долл.			Цена покупки (P_j), долл.
	$C_1^{(j)}$	$C_2^{(j)}$	$C_3^{(j)}$	
1	10	10	100	100
2	10	100	–	90
3	100	–	–	80

Требуется сформировать портфель облигаций с наименьшей стоимостью при следующих условиях:

а) платежи от портфеля используются только в моменты выполнения обязательств;

б) платежи от портфеля можно использовать через один год для выполнения последующих обязательств (безрисковые процентные ставки при начислении один раз в год равны 10%).

15.3. В данный момент на рынке имеются три облигации с параметрами, приведенными ниже.

Облигация	Платежи, долл.			Цена покупки (P_j), долл.
	$C_1^{(j)}$	$C_2^{(j)}$	$C_3^{(j)}$	
1	10	10	200	180
2	20	220	–	200
3	30	300	–	300

Инвестору предстоят выплаты через 1, 2 и 3 года соответствеино в размерах 200, 5740 и 2000 долл.

Определить портфель облигаций с наименьшей стоимостью, поток платежей по которому позволяет выполнить обязательства инвестора. Платежи от портфеля можно использовать через один год для выполнения последующих обязательств (процентные ставки при иачислении один раз в год равны 8%).

15.4. На рынке имеются две облигации с параметрами, приведенными ниже.

Облигация	Платежи, долл.		Цена покупки (P_j), долл.	Цена продажи (Q_j), долл.
	$C_1^{(j)}$	$C_2^{(j)}$		
1	10	100	100	100
2	100	–	92	92

Определить оптимальный обмен облигаций портфеля при условии, что не разрешается продавать более двух облигаций каждого вида, а безрисковые процентные ставки равны 10% (при начислении один раз в год).

15.5. Определить оптимальный обмен облигаций, если на рынке имеются облигации двух видов с показателями, приведенными ниже.

Облигация	Платежи, долл.		Цена покупки (P_j), долл.	Цена продажи (Q_j), долл.
	$C_1^{(j)}$	$C_2^{(j)}$		
1	100	0	90	85
2	10	110	100	95

Не разрешается продавать более четырех облигаций каждого вида, а безрисковая процентная ставка при начислении процентов один раз в год равна 10%.

1.16. РЕАЛИЗУЕМАЯ ДОХОДНОСТЬ УПРАВЛЯЕМОГО ПОРТФЕЛЯ ОБЛИГАЦИЙ

Годовой реализуемой доходностью управляемого портфеля облигаций за период $[t_0, T]$ при начислении процентов m раз в год называется число R, удовлетворяющее следующему равенству:

$$\left(1+\frac{R}{m}\right)^{(T-t_0)m}=\frac{\Omega_n}{\Omega_0}\left(1+\frac{Q_1}{\Omega_1}\right)\left(1+\frac{Q_2}{\Omega_2}\right)\cdots\left(1+\frac{Q_n}{\Omega_n}\right),$$

где Ω_0 – стоимость портфеля облигаций в начальный момент t_0;
$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ – доходы, поступающие от портфеля облигаций за период $[t_0, T]$;
$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ – стоимость портфеля в моменты поступления доходов.

16.1. Определить годовую реализуемую доходность управляемого портфеля облигаций за первые 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 и 2,5 года (при начислении процентов дважды в год), если начальная стоимость портфеля равна 10 000 руб., а доходы, поступающие от портфеля, и соответствующие его стоимости приведены ниже.

Показатели	Срок, годы				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Доход, руб.	100	100	80	70	80
Стоимость, руб.	10 100	10 200	10 000	9500	9600

16.2. Определить годовую реализуемую доходность портфеля облигаций за 5 лет при начислении процентов один раз в год, если начальная стоимость портфеля равна 20 000 руб., а доходы, поступающие от портфеля, и соответствующие его стоимости приведены ниже.

Показатели	Срок, годы				
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Доход, руб.	200	–300	–100	200	–200
Стоимость, руб.	20 100	20 200	20 100	20 200	20 500

16.3. Доказать, что годовые реализуемые доходности портфеля облигаций за один и тот же период удовлетворяют следующему равенству:

$$R(m)=m\left[\left(1+\frac{R(l)}{l}\right)^{l/m}-1\right],$$

где $R(m)$ и $R(l)$ – годовые реализуемые доходиости при иачислеиии процентов соответственно m и l раз в год.

16.4. Годовые реализуемые доходности портфеля облигаций при начисленин процентов m раз в год за периоды $[t_0, T]$, $[t_0, t]$ н $[t, T]$ составляет R, R_1, и R_2 соответственно. Доказать, что

$$\left(1+\frac{R}{m}\right)^{T-t_0}=\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{t-t_0}\left(1+\frac{R_2}{m}\right)^{T-t}.$$

16.5. Времениой период разделеи на k этапов одной и той же продолжительности. Доказать, что годовая реализуемая доходность портфеля за весь период ие превышает среднего арифметического годовых поэтапных реализуемых доходностей.

16.6. Начальиая стоимость портфеля облигаций равиа 1129,55 долл., а доходы, поступающие от портфеля, и соответствующие его стоимости приведены ниже.

Показатели	Срок, годы				
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Доход, руб.	–100	200	–100	200	100
Стоимость, руб.	1050	1100	1200	1100	1200

Найти годовые реализуемую и внутрениюю доходности портфеля облнгаций при начислеиии процентов один раз в год.

16.7. Имеется купонная облигация, купоны по которой оплачиваются m раз в год. В данный момеит безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков.

Доказать, что годовая реализуемая доходность облигации прн начисленин процентов m раз в год за любое число купоиных периодов совпадает с внутреиией доходиостью этой облигацни, если в течение времени безрисковые процентные ставки не измеиялись.

16.8. Даиы три купоиные облигации с полугодовыми купонами, основные показатели которых приведеиы ниже.

Облигация	Номинал, долл.	Купонная ставка, %	Срок до погашения, годы	Внутренняя доходность, %
А	100	8	3	8
В	200	9	8	9
С	100	10	10	10

Требуется:

а) из облигаций А и С сформировать портфель $П_2$ так, чтобы его средиевзвешенная дюрация совпала со средиевзвешенной дюрацией портфеля $П_1$, состоящего из одной облигации В;

б) определить осиовные характеристики портфелей $П_1$ и $П_2$;

в) найти годовые реализуемые доходиости портфелей $П_1$ и $П_2$ за первые полгода, если внутрениие доходности облигаций А, В и С изменились на одну и ту же величину Δr = –1; –0,5; –0,2; 0; 0,2; 0,5; 1%.

1.17. ТЕМП ИНФЛЯЦИИ. НОМИНАЛЬНАЯ И РЕАЛЬНАЯ ВНУТРЕННИЕ ДОХОДНОСТИ ОБЛИГАЦИЙ

Индексом потребительских цен $I(t)$ в момент $t \in [0, T]$ называется отношение стоимости потребительской корзины $K(t)$ в этот момент к стоимости этой же корзины K_0 в нулевой момент, т.е.

$$I(t)=\frac{K(t)}{K_0}.$$

Средним годовым темпом инфляции за время от t до $t + h$ называется число $\pi(t, t + h)$, удовлетворяющее равеиству

$$[1+\pi(t,t+h)]^h = \frac{I(t+h)}{I(t)}.$$

Если стоимость этой облигации в данный (нулевой) момент равна P, то номинальная (без учета инфляции) внутренняя доходность ($r_{ном}$) облигации при начислении процентов один раз в год находится из уравнения

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{t_k}}{(1+r_{ном})^{t_k}}.$$

Реальная (с учетом инфляции) внутренняя доходность ($r_{реал}$) облигации определяется из уравнения

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{t_k}}{(1+r_{реал})^{t_k}} \cdot \frac{I(0)}{I(t_k)},$$

где I_0 и $I(t_k)$ – индекс потребительских цен в данный (нулевой) момент и в момент t_k соответственно.

Уравнение, связывающее номинальную и реальную внутренние доходности облигации, носит название ***уравнения Фишера***:

$$r_{ном} = r_{реал} + \pi + r_{реал}\pi \quad \text{и} \quad r_{реал} \approx r_{ном} - \pi.$$

17.1. За 3 года индекс потребительских цен возрос на 40%. Определить средний годовой темп инфляции.

17.2. Найти средний годовой темп инфляции, если индекс потребительских цен за 2,5 года увеличился на: а) 18% ; б) 10%.

17.3. Относительные изменения индекса потребительских цен за 6 лет приведены ниже.

t, годы	1	2	3	4	5	6
$\pi(t-1,t)$, %	10,25	9,56	8,32	9,35	10,12	9,38

Определить средний годовой темп инфляции за эти годы.

17.4. Относительные изменения индекса потребительских цен за 8 лет приведены ниже.

t, годы	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(t-1,t)$, %	5,62	6,25	4,55	5,25	6,75	4,32	4,25	6,28

Найти средний годовой темп инфляции за эти годы.

17.5. Показатели облигаций трех видов приведены ниже.

Облигация	A, долл.	f, %	m	T, годы	P, долл.
1	100	10	1	4	94
2	100	8	1	5	90
3	100	10	2	4	92

Определить реальную внутреннюю доходность каждой облигации, если ожидаемый годовой темп инфляции равен 5%.

17.6. Дана облигация со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0	1	2	3	4
Платеж, долл.	–100	6	6	6	106

Определить реальную внутреннюю доходность облигации, если ожидаемый годовой темп инфляции для первых двух лет равен 3%, а для последующих двух лет – 4%.

17.7. Дана облигация с потоком платежей, приведенным ниже.

Срок, годы	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	–100	5	5	5	5	5	105

Определить реальную внутреннюю доходность облигации, если ожидаемый годовой темп инфляции за первые полгода равен 2%, а затем каждые полгода увеличивается на 0,2%.

17.8. Имеется облигация, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	–100	5	5	5	5	5	105

Найти реальную внутреннюю доходность облигации, если ожидаемый годовой темп инфляции за первые полгода равен 6%, а затем каждые полгода снижается на 0,5%.

17.9. Имеется облигация, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок, годы	0	1,0	2,0	3,0	4,0
Платеж, долл.	–1000	100	100	100	1100

Ожидаемые темпы инфляции по годам составляют соответственно 4, 6, 8 и 10%.

Определить годовую реальную внутреннюю доходность и средний годовой темп инфляции.

Оценить реальную внутреннюю доходность на основе уравнения Фишера.

1.18. ВНУТРЕННЯЯ ДОХОДНОСТЬ ОБЛИГАЦИИ С УЧЕТОМ НАЛОГОВ

Внутренняя доходность (r') облигации с учетом налогов при начислении процентов один раз в год определяется из уравнения

$$P=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{t_k}(1-\alpha)}{(1+r')^{t_k}}+\frac{A-(A-P)\beta}{(1+r')^{t_n}},$$

где α – ставка налогов на процентные доходы;

β – ставка налога на прирост капитала.

Внутренняя доходность купонной облигации с учетом налогов может быть найдена приближенно из равенства

$$r'=(1-\beta)\cdot(r-f)+f(1-\alpha).$$

Чтобы найти внутреннюю доходность облигации с учетом налогов при наличии инфляции, необходимо вычислить номинальную внутреннюю доходность после уплаты налогов, а затем с помощью уравнения Фишера определить величину реальной внутренней доходности с учетом выплаченных налогов.

18.1. Дана купонная облигация со следующими данными: A = 1000 долл., f = 10%, m = 1, T = 6 лет. Внутренняя доходность облигации без учета налогов равна 12%.

Найти точное и приближенное значения внутренней доходности с учетом налогов, если ставка их на купонные доходы составляет 25%, а на прирост капитала – 30%.

18.2. Имеется купонная облигация со следующими данными: A = 1000 долл., f = 6%, m = 1, T = 5 лет. Внутренняя доходность облигации без учета налогов равна 10%.

Определить точное и приближенное значения внутренней доходности с учетом налогов, если ставка налогов на купонные доходы равна 25%, а на прирост капитала – 30%.

18.3. Дана купонная облигация со следующими данными: A = 100 долл., f = 10%, m = 1, T = 3 года. Текущая стоимость облигации равна 102,7 долл. Ожидаемый средний годовой темп инфляции – 4%.

Найти номинальную и реальную внутренние доходности облигации с учетом налогов, если ставки их на купонный доход и на прирост капитала одинаковы и равны: а) 20%; б) 30%; в) 40%.

18.4. Имеются две купонные облигации со следующими данными: A = 100 долл., f = 10%, m = 1, T = 3 года. Внутренние доходности их без учета налогов соответственно равны 5 и 7,5%.

Какую облигацию можно рекомендовать инвестору, если первая не облагается налогами, а купонный доход и прирост капитала по второй облигации облагаются налогами по ставке 25%?

18.5. Имеются две купонные облигации со следующими данными: A = 1000 долл., f = 8%, m = 1, T = 4 года. Внутренние доходности облигаций без учета налогов соответственно равны 8 и 10%.

Какую облигацию можно рекомендовать инвестору, если доходы от первой облигации не облагаются налогами, а купоиный доход и прирост капитала по второй облигации облагаются налогами по единой ставке: а) 20%; б) 30%?

18.6. Имеется купонная облигация со следующими данными: A = 1000 долл., f = 8%, m = 1, T = 5 лет. Внутреиняя доходность облигации без учета налогов равна 9 %. Ожидаемый годовой темп инфляции составляет 4%.

Определить реальную внутреннюю доходность облигации с учетом иалогов, если купоиные доходы облагаются налогом по ставке 20%, а прирост капитала – по ставке 30%.

ГЛАВА 2

Портфели рискованных активов и инвестиции

2.1. ОЖИДАЕМАЯ ДОХОДНОСТЬ И ДИСПЕРСИЯ ДОХОДНОСТИ ОДНОЙ ЦЕННОЙ БУМАГИ

Доходиостью инвестиции иа срок T лет называется число r, удовлетворяющее равеиству

$$V_0(1+r)=V,$$

где V_0 и V – начальиая и конечная стоимости иивестиции.

Среднегодовая доходность $r(m)$ инвестицни при иачислении процентов m раз в год и средиегодовая доходиость $\tilde{r}$ при непрерывном начислении процеитов определяются следующими равенствами:

$$V_0\left[1+\frac{r(m)}{m}\right]^{mT}=V;\quad V_0e^{\tilde{r}T}=V.$$

Конечная стоимость инвестиции на срок T лет находится с учетом реинвестирования доходов за T лет.

Ожидаемой доходностью ценной бумаги за T лет называется математическое ожндаиие доходности инвестицин в эту ценную бумагу, а ***дисперсией доходности ценной бумаги*** – дисперсия доходности инвестиции.

1.1. Акция продается за 40 долл. Ожидается, что в конце каждого года будут выплачиваться дивиденды в размере 2 долл. Предполагается, что через 2 года ее можио будет продать за 50 долл.

Определить среднегодовую доходность инвестиции в эту акцию при начислении процентов один раз в год, если дивиденды реинвестируются под годовую процентную ставку при начислении процентов один раз в год, равную: а) 5%; б) 20%.

1.2. Акция продается за 50 долл. Ожидается, что в конце каждого года будут выплачиваться дивиденды в размере 1,5 долл., а в конце третьего года акцию можно будет продать за 55 долл.

Определить среднегодовую доходность инвестиции в акцию при начислении процентов дважды в год, если дивиденды реинвестируются под годовую ставку при начислении процентов дважды в год, равную: а) 6%; б) 10%.

1.3. Акция продается за 60 долл. Ожидается, что в конце каждого года будут выплачиваться дивиденды в размере 2 долл., а в конце четвертого года ее можно будет продать за 70 долл.

Определить среднегодовую доходность инвестиции в эту акцию при начислении процентов 2 раза в год, если дивиденды реинвестируются под годовую ставку при начислении процентов 2 раза в год, равную: а) 4%; б) 8%.

1.4. Акция продается за 40 долл. Ожидается, что в конце каждого года будут выплачиваться дивиденды в размере 2 долл., а стоимость акции в конце первого и второго года будет соответственно равна 45 и 50 долл.

Определить среднегодовую доходность инвестиции при начислении процентов один раз в год, если дивиденды реинвестируются в саму акцию.

1.5. Акция продается за 70 долл. Ожидается, что каждый год будут выплачиваться дивиденды в размере 3 долл. Предполагается, что в конце первого года акция будет стоить 75 долл., в конце второго года – 80 долл., а в конце третьего года – 85 долл.

Определить среднегодовую доходность инвестиции при начислении процентов один раз в год, если дивиденды реинвестируются в саму акцию.

1.6. Вы покупаете пятилетнюю облигацию с 6%-ным годовым купоном номиналом 1000 долл., когда ее внутренняя доходность равна 8%.

Определить среднегодовую доходность инвестиции в облигацию за 5 лет при начислении процентов один раз в год, если купоны реинвестируются под годовую ставку: а) 8%; б) 6%.

1.7. Вы покупаете четырехлетнюю облигацию с 7%-ным годовым купоном номиналом 1000 долл., когда ее внутренняя доходность равна 8%.

Определить среднегодовую доходность инвестиции в облигацию за 4 года при начислении процентов один раз в год, если годовая ставка реинвестирования купонов равна: а) 8%; б) 6%; в) 10%.

1.8. Имеются три ценные бумаги с одним и тем же номиналом 1000 долл.: 1) вексель на один год; 2) пятилетняя чисто дисконтная облигация; 3) тридцатилетняя чисто дисконтная облигация.

Внутренняя доходность этих облигаций при начислении процентов один раз в год равна 6%.

Определить доходность инвестиции в каждую ценную бумагу за один год, если через год: а) рыночная доходность не изменилась; б) рыночная доходность снизилась до 4%; в) рыночная доходность увеличилась до 8%.

1.9. Чисто дисконтная облигация продается по цене 970 долл. Распределение стоимости облигации через 2 года приведено ниже.

Вероятность	0,10	0,15	0,05	0,20	0,50
Стоимость, долл.	920	930	940	970	1000

Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности облигации за 2 года.

1.10. Чисто дисконтная облигация продается по цене 920 долл. Распределение стоимости облигации через 3 года приведено ниже.

Вероятность	0,10	0,15	0,20	0,25	0,20	0,10
Стоимость, долл.	900	920	940	950	970	1000

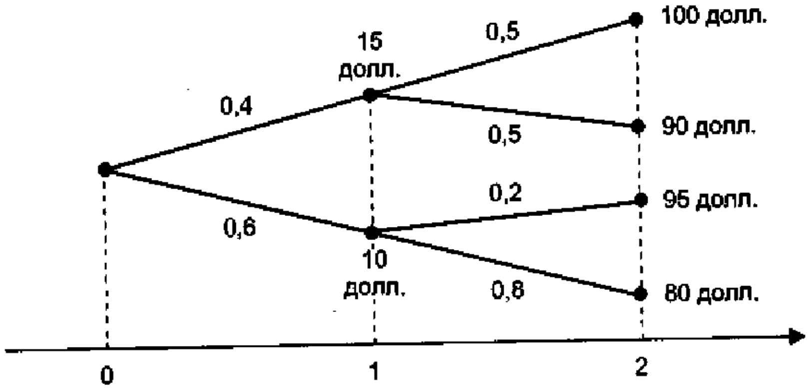
Определить ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности облигации за 3 года.

1.11. Имеется купонная облигация со следующими данными: $A = 1000$ долл., $f = 6\%$, $m = 2$, $T = 10$ лет, когда ее внутренняя доходность равна 6%.

Найти ожидаемую доходность облигации за полгода и стандартное отклонение доходности, если распределение внутренней доходности облигации через полгода имеет следующий вид:

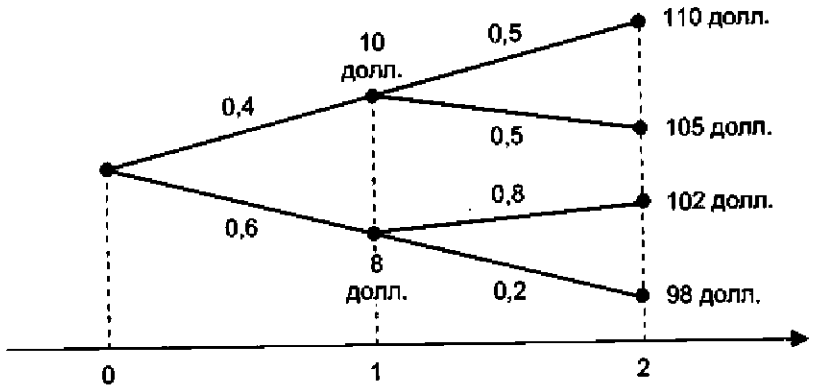
Вероятность	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2
Доходность, %	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0

1.12. Дана двухлетняя облигация стоимостью 100 долл. На рисунке показано распределение доходов от облигации.



Определить ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности облигации за 2 года, если доходы можно реинвестировать под 5% годовых.

1.13. Дана двухлетняя облигация стоимостью 100 долл., распределение доходов от которой показано на рисунке.



Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности облигации за 2 года, если доходы можно реинвестировать под: а) 5% ; б) 8%.

2.2. ОЖИДАЕМАЯ ДОХОДНОСТЬ И ДИСПЕРСИЯ ДОХОДНОСТИ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Любой портфель, сформированный из ценных бумаг n видов, можно рассматривать в виде n-мерного вектора

$$\overline{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \Theta_i = 1\right),$$

где Θ_i – доля стоимости портфеля, инвестированная в ценные бумаги i-го вида, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если на рынке разрешены короткие продажи ценных бумаг, то показатели Θ_i могут иметь любые знаки, а при запрещенных коротких продажах все Θ_i должны быть неотрицательными.

Ожидаемая доходность портфеля $\overline{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ является линейной комбинацией ожидаемых доходностей ценных бумаг, входящих в этот портфель, т.е.

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i \bar{r}_i.$$

Дисперсия доходности портфеля $\overline{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ определяется следующим равенством:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \Theta_i^2 + 2\sum_{i<j} \sigma_{ij} \Theta_i \Theta_j,$$

где σ_i^2 – дисперсия доходности ценной бумаги i-го вида, $i = 1, 2, \ldots, n$;
σ_{ij} – ковариация между доходностями ценных бумаг i-го и j-го видов.

Ковариационная матрица доходностей данных ценных бумаг имеет следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \sigma_{3n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

2.1. Портфель ценных бумаг содержит акции трех видов, информация о которых приведена ниже.

Номер акции	Ожидаемая доходность, %	Стандартное отклонение доходности, %	Начальная стоимость, долл.	Число акций в портфеле
1	8	4	10	100
2	10	9	15	200
3	12	10	20	–100

Определить ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности данного портфеля ценных бумаг, если известны коэффициенты корреляции между доходностями ценных бумаг: $\rho_{12} = 0{,}20$; $\rho_{13} = 0{,}50$; $\rho_{23} = 0{,}30$.

2.2. Дан портфель ценных бумаг, содержащий акции четырех видов, информация о которых приведена ниже.

Номер акции	Ожидаемая доходность, %	Стандартное отклонение доходности, %	Начальная стоимость, долл.	Число акций в портфеле
1	6	12	60	100
2	8	10	80	200
3	4	8	40	–100
4	10	12	100	200

Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности данного портфеля ценных бумаг, если известны коэффициенты корреляции между доходностями ценных бумаг: $\rho_{12} = 0{,}20$; $\rho_{13} = 0{,}30$; $\rho_{14} = -0{,}10$; $\rho_{23} = -0{,}20$; $\rho_{24} = 0{,}50$; $\rho_{34} = 0{,}40$.

2.3. Даны ценные бумаги трех видов, ковариационная матрица доходностей которых имеет следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Найти стандартное отклонение доходности портфеля ценных бумаг, если доли средств, инвестированных в ценные бумаги, соответственно равны –0,1; 0,6; 0,5.

2.4. Даны ценные бумаги двух видов, информация о которых приведена ниже.

Вероятность	Доходность ценной бумаги, %	
	1	2
0,2	–5	–10
0,5	10	15
0,3	20	25

Определить ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности портфеля из этих двух ценных бумаг, если:

а) $\Theta_1 = -2$; $\Theta_2 = 3$; б) $\Theta_1 = 0{,}25$; $\Theta_2 = 0{,}75$.

2.5. Имеются ценные бумаги трех видов, информация о которых приведена ниже.

Вероятность	Доходность ценной бумаги, %		
	1	2	3
0,3	–5	–6	–7
0,3	4	5	6
0,4	8	6	10

Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности портфеля из данных трех ценных бумаг, если:

а) $\Theta_1 = -0{,}25$; $\Theta_2 = 0{,}8$; $\Theta_3 = 0{,}45$; б) $\Theta_1 = 0{,}4$; $\Theta_2 = 0{,}1$; $\Theta_3 = 0{,}5$.

2.6. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициент корреляции между доходностями портфелей $\overline{\Theta}_1 = (0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}25)$ и $\overline{\Theta}_2 = (0{,}1;\ 0{,}6;\ 0{,}3)$.

2.7. В таблице приведены доходности двух ценных бумаг за 10 мес.

Ценная бумага	Доходность ценной бумаги, %, по месяцам									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	-3	6	-2	4	5	-3	-2	1	2
2	2	1	3	-1	-2	3	4	3	2	2

Оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение портфеля $\overline{\Theta} = (0{,}4;\ 0{,}6)$.

2.3. ОТЫСКАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ С НАИМЕНЬШИМ РИСКОМ

Если $\Lambda(\sigma_{ij})$ – ковариационная матрица доходностей рассматриваемых ценных бумаг, то портфель с наименьшим риском является точкой глобального минимума функции

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \Theta_i^2 + 2\sum_{i<j} \sigma_{ij} \Theta_i \Theta_j$$

на множестве допустимых портфелей V_n.

При разрешенных коротких продажах ценных бумаг портфель $\overline{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ подвержен наименьшему риску тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \Theta_i + 2\sum_{j\neq i} \sigma_{ij} \Theta_j + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} \Theta_j = 1. \end{cases}$$

Если же короткие продажи ценных бумаг запрещены и нет иных ограничений на формирование портфелей, то для отыскания портфеля с наименьшим риском достаточно решить следующую задачу:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \Theta_i^2 + 2\sum_{i<j} \sigma_{ij} \Theta_i \Theta_j \quad (\min),$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \Theta_i = 1, \\ \Theta_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

которая сводится к стандартной задаче квадратичного программирования:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i^2 \Theta_i^2 + \sigma_n^2 (1 - \Theta_1 - \Theta_2 - \cdots - \Theta_{n-1})^2 + 2\sum_{i<j\leq n-1} \sigma_{ij} \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{in} (1 - \Theta_1 - \Theta_2 - \cdots - \Theta_{n-1}) \Theta_i \quad (\min),$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i \leq 1, \\ \Theta_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

В общем случае для отыскания портфеля с наименьшим риском можно использовать теорему Куна–Таккера.

Теорема Куна–Таккера. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) функции $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., s$, выпуклы и дифференцируемы на всем n-мерном пространстве R^n;

2) функция $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ выпукла и дифференцируема на множестве

$$Q=\{M(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n \mid f_i(M)\le 0,$$
$$i=1,2,\dots,s,\ g_k(M)=0, k=1,2,\dots,r\},$$

где $g_k(M)$ – линейные функции, $k = 1, 2, ..., r$;

3) существует точка $N \in Q$ такая, что

$$f_i(N) < 0, i = 1, 2, ..., s.$$

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ является точкой глобального минимума функции $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве Q тогда и только тогда, когда существует набор чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, где $\mu_1 \ge 0, \dots, \mu_s \ge 0$, такой, что

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}(M_0)=0, \quad j=1,2,\dots,n;$

2) $\mu_i f_i(M_0)=0, \ i = 1, 2, ..., s;$

3) $f_i(M_0) \le 0, \ i = 1, 2, ..., s;$

4) $g_k(M_0) = 0, \ k = 1, 2, ..., r$

$$\left(L=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{s}\mu_i f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\right.$$

– функция Лагранжа.)

3.1. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0{,}4 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшим риском, если короткие продажи ценных бумаг: а) разрешены; б) запрещены.

3.2. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшим риском, если короткие продажи ценных бумаг: а) разрешены; б) запрещены.

3.3. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшим риском, если короткие продажи ценных бумаг: а) разрешены; б) запрещены.

3.4. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}6\end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшим риском, если короткие продажи ценных бумаг: а) разрешены; б) запрещены; в) запрещены, а доля средств, инвестированных в ценные бумаги второго вида, не может превышать 50%.

3.5. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0\\ 0{,}4 & 0 & 0{,}8\end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшим риском, если короткие продажи ценных бумаг: а) разрешены; б) запрещены.

3.6. Найти портфель с наименьшим риском при разрешенных коротких продажах ценных бумаг, если ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшим риском, если разрешены короткие продажи ценных бумаг, а доля средств, инвестированных в ценные бумаги второго вида, не может превышать 50%.

3.8. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

1. Доказать, что при запрещенных коротких продажах ценных бумаг $\overline{\Theta} = \left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10}\right)$ – портфель с наименьшим риском.

2. Найти портфель с наименьшим риском, если короткие продажи ценных бумаг запрещены, а доля средств, инвестированных в ценные бумаги второго вида, не превышает 50%.

2.4. МНОЖЕСТВО ИНВЕСТИЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИ ЗАДАННОМ НАБОРЕ ЦЕННЫХ БУМАГ

Множество инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}(V_n)$ при заданном наборе ценных бумаг – это множество всех точек плоскости (σ, r), удовлетворяющих следующим условиям:

$$r = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Theta_i,$$

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \Theta_i^2 + 2 \sum_{i<j} \sigma_{ij} \Theta_i \Theta_j \right)^{1/2},$$

$$\overline{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n) \in V_n,$$

где $\Lambda(\sigma_{ij})$ – ковариационная матрица доходностей данных ценных бумаг;

$\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ – ожидаемые доходности этих ценных бумаг;

V_n – множество допустимых портфелей (замкнутое и выпуклое множество в n-мерном пространстве R^n).

Простейшие свойства множеств инвестиционных возможностей.

1. $\mathfrak{M}(V_n) \subset \mathfrak{M}(V'_n)$, если $V_n \subset V'_n$.

2. $\mathfrak{M}(\Omega_n^+) \subset \mathfrak{M}(\Omega_n)$,

где $$\Omega_n = \left\{ \overline{\Theta} \in R^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \Theta_i = 1 \right\},$$

$$\Omega_n^+ = \left\{ \overline{\Theta} \in R^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \Theta_i = 1,\ \Theta_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

3. $\mathfrak{M}^+(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2) \subset \mathfrak{M}(V_n)$, если $\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2 \in V_n$;

$\mathfrak{M}(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2) \subset \mathfrak{M}(\Omega_n)$, если $\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2 \in \Omega_n$.

($\mathfrak{M}(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2)$, $\mathfrak{M}^+(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2)$ – множества инвестиционных возможностей при двух ценных бумагах $\overline{\Theta}_1$ и $\overline{\Theta}_2$, если соответственно разрешены или запрещены короткие продажи этих ценных бумаг.)

4.1. На рынке имеются ценные бумаги двух видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}15$ и $\bar{r}_2 = 0{,}25$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти значения σ, при которых:

а) $(\sigma; 0{,}16) \in \mathfrak{M}(\Omega_2^+)$; б) $(\sigma; 0{,}18) \in \mathfrak{M}(\Omega_2^+)$.

4.2. На рынке имеются ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}1$, $\bar{r}_2 = 0{,}2$ и $\bar{r}_3 = 0{,}25$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все значения σ, при которых:

а) $(\sigma; 0{,}26) \in \mathfrak{M}(\Omega_3)$; б) $(\sigma; 0{,}26) \in \mathfrak{M}(\Omega_3^+)$.

4.3. На рынке имеются ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}2$, $\bar{r}_2 = 0{,}2$ и $\bar{r}_3 = 0{,}4$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти все значения σ, при которых

а) $(\sigma; 0{,}4) \in \mathfrak{M}(\Omega_3)$; б) $(\sigma; 0{,}4) \in \mathfrak{M}(\Omega_3^+)$.

4.4. Имеются ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}1$, $\bar{r}_2 = 0{,}2$ и $\bar{r}_3 = 0{,}4$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что точка $\left(\sqrt{\frac{3}{8}};\ 0{,}2\right)$ принадлежит $\mathfrak{M}(\Omega_3)$, но не принадлежит $\mathfrak{M}(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2)$, где $\overline{\Theta}_1 = (-1,\ 2,\ 0)$, $\overline{\Theta}_2 = (0,\ 0,\ 1)$.

4.5. Доказать, что точка $(\sqrt{0{,}196};\ 0{,}22)$ принадлежит $\mathfrak{M}^+(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2)$, если $\overline{\Theta}_1 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $\overline{\Theta}_2 = \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{8}\right)$, $\bar{r}_1 = 0{,}1$; $\bar{r}_2 = 0{,}20$; $\bar{r}_3 = 0{,}40$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

2.5. МНОЖЕСТВО ИНВЕСТИЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИ ДВУХ ЦЕННЫХ БУМАГАХ

Множество инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}(\Omega_2)$ определяется условиями:

$$\begin{cases} r = \bar{r}_1\,\Theta_1 + \bar{r}_2\,\Theta_2, \\ \sigma = [\sigma_1^2\,\Theta_1^2 + \sigma_2^2\,\Theta_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\,\Theta_1\Theta_2]^{1/2}, \\ \Theta_1 + \Theta_2 = 1, \end{cases}$$

где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ – ожидаемые доходности данных ценных бумаг;
σ_1 и σ_2 – стандартные отклонения этих ценных бумаг;
ρ_{12} – коэффициент корреляции между их доходностями.

Чтобы найти множество инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}(\Omega_2^+)$, необходимо к предыдущим соотношениям добавить условие $\Theta_1 \geq 0$, $\Theta_2 \geq 0$.

5.1. На рынке имеются ценные бумаги двух видов со следующими показателями: $\bar{r}_1 = 10\%$; $\bar{r}_2 = 15\%$; $\sigma_1 = 0{,}4$; $\sigma_2 = 0{,}6$.

Найти уравнение, определяющее множество инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}(\Omega_2^+)$, если: а) $\rho_{12} = -1$; б) $\rho_{12} = 1$; в) $\rho_{12} = 0{,}2$; г) $\rho_{12} = 0{,}5$.

В каждом случае множество инвестиционных возможностей изобразить на плоскости.

5.2. На рынке имеются ценные бумаги двух видов со следующими показателями: $\bar{r}_1 = 15\%$; $\bar{r}_2 = 25\%$; $\sigma_1 = 0{,}2$; $\sigma_2 = 0{,}4$.

Найти уравнение, определяющее множество инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}(\Omega_2)$, если а) $\rho_{12} = 1$; б) $\rho_{12} = -1$; в) $\rho_{12} = 0{,}4$; г) $\rho_{12} = 0{,}8$.

В каждом случае множество инвестиционных возможностей изобразить на плоскости.

5.3. Ожидаемые доходности и стандартные отклонения доходностей ценных бумаг двух видов удовлетворяют условию $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$.

Доказать, что ожидаемая доходность $\bar{r}^*$ портфеля, принадлежащего $\mathfrak{M}(\Omega_2^+)$ и имеющего наименьший риск, определяется следующим равенством:

$$\bar{r}^* = \begin{cases} \bar{r}_1 & \text{при} \quad \rho_{12} \geq \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}, \\ \dfrac{\sigma_1^2 \bar{r}_2 + \sigma_2^2 \bar{r}_1 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} & \text{при} \quad \rho_{12} < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}. \end{cases}$$

5.4. На рынке имеются ценные бумаги трех видов со следующими показателями:

$$\bar{r}_1 = 8\%; \quad \bar{r}_2 = 10\%; \quad \bar{r}_3 = 20\%;$$

$$\sigma_1 = 0{,}4; \quad \sigma_2 = 0{,}5; \quad \sigma_3 = 0{,}8;$$

$$\rho_{12} = 0{,}5; \quad \rho_{13} = \rho_{23} = 0.$$

Найти уравнение, определяющее множество инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}^+(\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2)$, если $\bar{\Theta}_1 = (0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}3)$, $\bar{\Theta}_2 = (0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}4)$.

5.5. На рынке имеются ценные бумаги трех видов со следующими показателями:

$$\bar{r}_1 = 10\%; \quad \bar{r}_2 = 15\%; \quad \bar{r}_3 = 20\%;$$

$$\sigma_1 = 0{,}2; \quad \sigma_2 = 0{,}3; \quad \sigma_3 = 0{,}4;$$

$$\rho_{12} = 0; \quad \rho_{13} = -0{,}5; \quad \rho_{23} = 0.$$

Найти уравнение, определяющее множество инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}(\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2)$, если $\bar{\Theta}_1 = (1{,}0;\ -0{,}4;\ 0{,}4)$, $\bar{\Theta}_2 = (0;\ 0{,}4;\ 0{,}6)$.

2.6. ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Инвестиционная возможность $A(\sigma_A, r_A) \in \mathfrak{M}(V_n)$ ***доминирует*** над инвестиционной возможностью $B(\sigma_B, r_B) \in \mathfrak{M}(V_n)$, если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) $\bar{r}_A > \bar{r}_B$, $\sigma_A \leq \sigma_B$;

б) $\bar{r}_A \geq \bar{r}_B$, $\sigma_A < \sigma_B$.

Эффективной границей $\Gamma(V_n)$ множества инвестиционных возможностей $\mathfrak{M}(V_n)$ называется множество всех недоминируемых инвестиционных возможностей из $\mathfrak{M}(V_n)$.

Основные утверждения.

1. Если

$$(\sigma, r) \in \Gamma(V_n), \text{ то } r \geq \bar{r}^*,$$

где $\bar{r}^*$ – ожидаемая доходность допустимого портфеля с наименьшим риском.

2. Эффективная граница $\Gamma(V_n)$ совпадает с множеством инвестиционных возможностей вида

$(\sigma_{\min}(r), r)$, где $r \in S(V_n)$, а $S(V_n) = \{r \geq \bar{r}^* \mid (\sigma, r) \in \mathfrak{R}(V_n)\}$.

3. $S(\Omega_n) = [\bar{r}_1^*, +\infty)$, $S(\Omega_n^+) = \left[\bar{r}_2^*, \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\bar{r}_j\}\right]$,

где $\bar{r}_1^*$ и $\bar{r}_2^*$ – ожидаемые доходности портфелей с наименьшим риском при соответственно разрешенных или запрещенных коротких продажах ценных бумаг.

Существует функция $r = \Phi(\sigma)$, график которой совпадает с эффективной границей $\Gamma(V_n)$, причем эта функция является непрерывной, возрастающей и вогнутой.

6.1. Даны инвестиционные возможности: $A(0{,}2;\ 0{,}1)$, $B(0{,}2;\ 0{,}15)$, $C(0{,}3;\ 0{,}2)$, $D(0{,}3;\ 0{,}14)$.

Найти все пары сравнимых инвестиционных возможностей.

6.2. Даны ценные бумаги двух видов со следующими показателями: $\bar{r}_1 = 15\%$, $\bar{r}_2 = 25\%$, $\sigma_1 = 0{,}2$, $\sigma_2 = 0{,}4$, $\rho_{12} = 0{,}4$.

Найти множество $S(V_n)$, если: а) $V_2 = \Omega_2$; б) $V_2 = \Omega_2^+$.

6.3. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями: $\bar{r}_1 = 0{,}1$, $\bar{r}_2 = 0{,}15$, $\bar{r}_3 = 0{,}19$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти множество $S(V_3)$, если: а) $V_3 = \Omega_3$; б) $V_3 = \Omega_3^+$.

6.4. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}15$, $\bar{r}_2 = 0{,}25$, $\bar{r}_3 = 0{,}3$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти множество $S(V_3)$, если: а) $V_3 = \Omega_3$; б) $V_3 = \Omega_3^+$.

6.5. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями: $\bar{r}_1 = 20\%$, $\bar{r}_2 = 30\%$, $\bar{r}_3 = 40\%$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Принадлежат ли точки $A\left(\sqrt{\frac{3}{70}};\ 0{,}3\right)$ и $B\left(\sqrt{\frac{11}{125}};\ 0{,}36\right)$:

а) эффективной границе $\Gamma(\Omega_3)$; б) эффективной границе $\Gamma(\Omega_3^+)$?

6.6. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}1$, $\bar{r}_2 = 0{,}2$, $\bar{r}_3 = 0{,}4$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель, принадлежащий множеству Ω_3 и имеющий наименьшую дисперсию доходности при ожидаемой доходности, равной 0,4. Принадлежит ли инвестиционная возможность, определяемая этим портфелем, эффективной границе $\Gamma(\Omega_3)$?

6.7. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}12$, $\bar{r}_2 = 0{,}2$, $\bar{r}_3 = 0{,}4$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель, принадлежащий множеству Ω_3^+ и имеющий наименьшую дисперсию доходности при ожидаемой доходности, равной: а) 0,13; б) 0,3. Принадлежит ли инвестиционная возможность, определяемая этим портфелем, эффективной границе $\Gamma(\Omega_3^+)$?

6.8. Доказать, что эффективная граница $\Gamma(V_n)$ определяется допустимыми портфелями, имеющими наибольшую ожидаемую доходность при заданной дисперсии доходности.

2.7. ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИ РАЗРЕШЕННЫХ КОРОТКИХ ПРОДАЖАХ ЦЕННЫХ БУМАГ

Эффективная граница $\Gamma(\Omega_n)$ совпадает с множеством точек вида $(\sigma_{\min}(r), r)$ при $r \geq \bar{r}^*$, где $\bar{r}^*$ – ожидаемая доходность допустимого портфеля с наименьшим риском.

Чтобы найти портфель с наименьшей дисперсией доходности при ожидаемой доходности, равной r, необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\sigma_i^2\Theta_i + 2\sum\limits_{j\neq i}\sigma_{ij}\Theta_j + \lambda_1 + \lambda_2\bar{r}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\bar{r}_i\,\Theta_i = r, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\Theta_i = 1. \end{cases}$$

Все портфели с наименьшей дисперсией доходности при заданной ожидаемой доходности имеют следующий вид:

$$\overline{\Theta}_{\min}(r) = \{a_1 + b_1 r,\ a_2 + b_2 r, \ldots, a_n + b_n r\},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – некоторые числа.

Если портфели $\overline{\Theta}_1$ и $\overline{\Theta}_2$ определяют инвестиционные возможности из множества $\{(\sigma_{\min}(r), r)\}$, то

$$\mathfrak{M}(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2) = \{(\sigma_{\min}(r), r)\}.$$

Эффективная граница $\Gamma(\Omega_n)$ задается уравнением вида

$$\sigma = (Ar^2 + Br + C)^{1/2}, \quad r \geq -\frac{B}{2A},$$

причем если $r(\Lambda) = n$, а среди ожидаемых доходностей $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ имеются несовпадающие, то $A > 0$, $B < 0$ и $B^2 - 4AC < 0$.

7.1. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 10\%$, $\bar{r}_2 = 20\%$, $\bar{r}_3 = 20\%$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективную границу $\Gamma(\Omega_3)$.
2. Записать уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_3)$.
3. Изобразить эффективную границу на рисунке.

7.2. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}1$, $\bar{r}_2 = 0{,}2$, $\bar{r}_3 = 0{,}4$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективную границу $\Gamma(\Omega_3)$.
2. Записать уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_3)$.
3. Изобразить эффективную границу на рисунке.

7.3. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 20\%$, $\bar{r}_2 = 30\%$, $\bar{r}_3 = 50\%$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективную границу $\Gamma(\Omega_3)$.
2. Записать уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_3)$.
3. Изобразить эффективную границу на рисунке.

7.4. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}1$, $\bar{r}_2 = 0{,}3$, $\bar{r}_3 = 0{,}5$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективную границу $\Gamma(\Omega_3)$.
2. Записать уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_3)$.
3. Изобразить эффективную границу на рисунке.

7.5. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}3$, $\bar{r}_2 = 0{,}2$, $\bar{r}_3 = 0{,}1$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективную границу $\Gamma(\Omega_3)$.
2. Записать уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_3)$.
3. Изобразить эффективную границу на рисунке.

7.6. Портфели $\bar{\Theta}_1$ и $\bar{\Theta}_2$ определяют инвестиционные возможности, принадлежащие эффективной границе $\Gamma(\Omega_n)$.

Составить уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_n)$, если:

$$\bar{r}(\bar{\Theta}_1) = 0{,}1;\ \bar{r}(\bar{\Theta}_2) = 0{,}2;\ \sigma(\bar{\Theta}_1) = 0{,}2;\ \sigma(\bar{\Theta}_2) = 0{,}5;\ \rho(\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2) = -0{,}2.$$

7.7. На рынке имеются ценные бумаги четырех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 10\%$, $\bar{r}_2 = 20\%$, $\bar{r}_3 = 20\%$, $\bar{r}_4 = 40\%$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ -0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

1. Составить уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_4)$.
2. Найти уравнение эффективной границы $\Gamma(V_4)$, где

$$V_4 = \{\bar{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) \in R^4 \mid \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 1,\ \Theta_i \ge 0{,}2\}.$$

2.8. ОТЫСКАНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИ ЗАПРЕЩЕННЫХ КОРОТКИХ ПРОДАЖАХ ЦЕННЫХ БУМАГ

Эффективная граница $\Gamma(\Omega_n^+)$ совпадает с множеством инвестиционных возможностей вида $\{(\sigma_{\min}(r), r)\}$ при $r \ge \bar{r}^*$, где $\bar{r}^*$ – ожидаемая доходность портфеля с наименьшим риском, принадлежащего Ω_n^+.

Чтобы найти портфель, определяющий инвестиционную возможность $(\sigma_{\min}(r), r)$, необходимо решить систему

$$\begin{cases} 2\sigma_i^2\Theta_i + 2\sum\limits_{j\ne i}\sigma_{ij}\Theta_j + \lambda_1 + \lambda_2\bar{r}_i - \mu_i = 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\Theta_i = 1, & \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\bar{r}_i\Theta_i = r, & \\ \mu_i\Theta_i \ge 0,\quad \mu_i \ge 0,\quad \Theta_i \ge 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

где $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ – ожидаемые доходности исходных ценных бумаг;
$\Lambda(\sigma_{ij})$ – ковариационная матрица доходностей ценных бумаг.

8.1. Доказать, что $r_1 \le r_2$, если инвестиционная возможность $(r_1, \sigma) \in \Gamma(\Omega_n^+)$, а инвестиционная возможность $(r_2, \sigma) \in \Gamma(\Omega_n)$.

8.2. Даны ценные бумаги трех видов, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти множество портфелей, определяющих эффективную границу $\Gamma(\Omega_3^+)$, и записать ее уравнение, если:

а) $\bar{r}_1 = 0,1$, $\bar{r}_2 = 0,2$, $\bar{r}_3 = 0,2$;

б) $\bar{r}_1 = 0,2$, $\bar{r}_2 = 0,3$, $\bar{r}_3 = 0,5$.

8.3. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0,1$, $\bar{r}_2 = 0,2$, $\bar{r}_3 = 0,4$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 0,2 & -0,2 \\ 0 & -0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективные границы $\Gamma(\Omega_3)$ и $\Gamma(\Omega_3^+)$.

2. Записать уравнения эффективных границ $\Gamma(\Omega_3)$ и $\Gamma(\Omega_3^+)$ и изобразить их на рисунке.

3. Найти инвестиционный портфель не склонного к риску инвестора, удовлетворяющий условию $\dfrac{\bar{r}}{\sigma} = 0,75$, если короткие продажи ценных бумаг: а) разрешены; б) запрещены.

8.4. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0,04$, $\bar{r}_2 = 0,2$, $\bar{r}_3 = 0,4$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 & 0,2 \\ -0,1 & 0,3 & -0,2 \\ 0,2 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективные границы $\Gamma(\Omega_3)$ и $\Gamma(\Omega_3^+)$.

2. Записать уравнения эффективных границ $\Gamma(\Omega_3)$ и $\Gamma(\Omega_3^+)$ и изобразить их на рисунке.

8.5. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0,05$, $\bar{r}_2 = 0,15$, $\bar{r}_3 = 0,3$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

1. Найти множество портфелей, определяющих эффективные границы $\Gamma(\Omega_3)$ и $\Gamma(\Omega_3^+)$.

2. Записать уравнения эффективных границ $\Gamma(\Omega_3)$ и $\Gamma(\Omega_3^+)$ и изобразить их на рисунке.

8.6. Составить уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_4^+)$, если:

$$\bar{r}_1 = 0,1,\ \bar{r}_2 = 0,2,\ \bar{r}_3 = 0,2,\ \bar{r}_4 = 0,4,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ -0,2 & 0 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

2.9. ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ РИСКОВАННЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ И БЕЗРИСКОВОГО АКТИВА

При наличии на рынке рискованных активов (ценных бумаг) n видов и безрискового актива с доходностью r_f любой инвестиционный портфель имеет вид

$$\bar{\Delta}(\Theta_0, \bar{\Theta}) = (1-\Theta_0,\ \Theta_0\bar{\Theta}) = (1-\Theta_0,\ \Theta_0\Theta_1,\ \Theta_0\Theta_2, \ldots, \Theta_0\Theta_n),$$

где $\Theta_0 \ge 0$, $\bar{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n) \in V_n$ (V_n – множество допустимых портфелей из рискованных ценных бумаг).

Формируя портфель $\bar{\Delta}(\Theta_0, \bar{\Theta})$ при $0 \le \Theta_0 \le 1$, инвестор часть своих средств Θ_0 вкладывает в портфель рискованных активов $\bar{\Theta}$, а оставшуюся часть средств отдает в кредит под безрисковую процентную ставку r_f.

Если же $\Theta_0 > 1$, то портфель $\bar{\Delta}(\Theta_0, \bar{\Theta})$ можно интерпретировать следующим образом: инвестор берет ссуду, составляющую часть от имеющихся средств $\Theta_0 - 1$, под безрисковую процентную ставку r_f и все образовавшиеся средства вкладывает в портфель рискованных активов $\bar{\Theta}$.

Если инвестор вкладывает средства в портфель рискованных активов $\bar{\Theta}$, то инвестиционные возможности находятся на луче l, заданном условиями

$$r = \frac{\bar{r}(\bar{\Theta}) - r_f}{\sigma(\bar{\Theta})}\sigma + r_f \quad \text{и} \quad \sigma \ge 0.$$

При этом множество инвестиционных возможностей совпадает с лучом l, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под одну и ту же безрисковую ставку r_f. Если же инвестор может предоставлять только кредиты (соответственно брать ссуды) под безрисковую процентную ставку r_f, то множество инвестиционных возможностей совпадает с частью луча l, определяемой условием $0 \le \sigma \le \sigma(\bar{\Theta})$ $(\sigma \ge \sigma(\bar{\Theta}))$.

9.1. Инвестор выбрал портфель рискованных ценных бумаг с ожидаемой доходностью 10% и стандартным отклонением доходности 20%.

Каковы инвестиционные возможности этого инвестора, если он:

а) может кредитовать и брать ссуды под безрисковую ставку в 6%;

б) может кредитовать под 6%, а брать ссуды под 8%?

9.2. На рынке имеются рискованные активы трех видов с ожидаемыми доходностями 10, 20 и 30%, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \\ -0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Каковы инвестиционные возможности инвестора при заданном портфеле рискованных активов $\bar{\Theta} = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$, если инвестор:

а) может кредитовать и брать ссуды под безрисковую ставку $r_f = 8\%$;

б) может кредитовать под безрисковую ставку в 8%, а брать ссуды под безрисковую ставку в 9%?

9.3. На рынке имеются рискованные активы трех видов с ожидаемыми доходностями 10, 20 и 40%. Инвестор может кредитовать под безрисковую ставку в 6%, а брать ссуды под ставку в 8%.

Как при заданном портфеле рискованных активов $\bar{\Theta}$ = (0,2; 0,4; 0,4) обеспечить ожидаемую доходность: а) 16%; б) 30%?

9.4. Имеются ценные бумаги двух видов со следующими данными:

$$\bar{r}_1 = 10\%,\ \bar{r}_2 = 20\%,\ \sigma_1 = 20\%,\ \sigma_2 = 40\%,\ \rho_{12} = 0,8.$$

Определить множество инвестиционных возможностей, если инвестор может кредитовать и брать ссуды под безрисковую ставку в 6%, а короткие продажи рискованных ценных бумаг: 1) разрешены; 2) запрещены.

9.5. Даны ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями: $\bar{r}_1 = 10\%$, $\bar{r}_2 = 20\%$, $\bar{r}_3 = 30\%$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Найти множество инвестиционных возможностей, если инвестор может кредитовать и брать ссуды под безрисковую процентную ставку в 8% и разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг.

2.10. ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАНИЦА МНОЖЕСТВА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ БЕЗРИСКОВОГО АКТИВА

Портфель рискованных активов $\overline{\Theta}_f \in V_n$ называется ***касательным портфелем***, соответствующим безрисковой процентной ставке r_f, если существует число $\Theta_0^* > 0$, при котором инвестиционная возможность

$$[\Theta_0^* \sigma(\overline{\Theta}_f),\ (1-\Theta_0^*) r_f + \Theta_0^* \bar{r}(\overline{\Theta}_f)]$$

является недоминируемой.

Касательный портфель $\overline{\Theta}_f$, соответствующий безрисковой процентной ставке r_f, всегда определяет инвестиционную возможность, принадлежащую эффективной границе $\Gamma(V_n)$, и удовлетворяет условию

$$\max_{\Theta \in V_n} \frac{\bar{r}(\overline{\Theta}) - r_f}{\sigma(\overline{\Theta})} = \frac{\bar{r}(\overline{\Theta}_f) - r_f}{\sigma(\overline{\Theta}_f)}.$$

Касательные портфели $\overline{\Theta}_{f_1}$ и $\overline{\Theta}_{f_2}$, соответствующие безрисковым процентным ставкам r_{f_1} и r_{f_2}, где $r_{f_1} < r_{f_2}$, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\bar{r}(\overline{\Theta}_{f_1}) \le \bar{r}(\overline{\Theta}_{f_2}) \quad \text{и} \quad \sigma(\overline{\Theta}_{f_1}) \le \sigma(\overline{\Theta}_{f_2}).$$

Если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку r_f и существует касательный портфель, соответствующий этой ставке, то эффективная граница множества инвестиционных возможностей является лучом:

$$r = \frac{\bar{r}(\overline{\Theta}) - r_f}{\sigma(\overline{\Theta})}\sigma + r_f, \quad \sigma \ge 0.$$

Если же инвестор может предоставлять кредиты под безрисковую ставку r_{f_1}, а брать ссуды под безрисковую ставку r_{f_2}, $r_{f_1} < r_{f_2}$, то эффективная граница множества инвестиционных возможностей определяется следующими условиями:

$$r = \begin{cases} \dfrac{\bar{r}(\overline{\Theta}_{f_1}) - r_{f_1}}{\sigma(\overline{\Theta}_{f_1})}\sigma + r_{f_1} & \text{при } 0 \le \sigma \le \sigma(\overline{\Theta}_{f_1}), \\ \dfrac{\bar{r}(\overline{\Theta}_{f_2}) - r_{f_2}}{\sigma(\overline{\Theta}_{f_2})}\sigma + r_{f_2} & \text{при } \sigma(\overline{\Theta}_{f_2}) \le \sigma < \infty \end{cases}$$

и

$$(\sigma,\ r) \in \Gamma(V_n) \quad \text{при} \quad \sigma(\overline{\Theta}_{f_1}) \le \sigma \le \sigma(\overline{\Theta}_{f_2}).$$

10.1. Ожидаемая доходность и стандартное отклонение доходности касательного портфеля, соответствующего безрисковой ставке $r_f = 0{,}08$, равны 15 и 40%.

Найти эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под указанную безрисковую ставку.

10.2. На рынке разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг двух видов со следующими показателями:

$$\bar{r}_1 = 0{,}1,\ \sigma_1 = \sqrt{0{,}2},\ \bar{r}_2 = 0{,}16,\ \sigma_2 = \sqrt{0{,}4},\ \rho_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

1. Определить эффективную границу $\Gamma(\Omega_2)$.
2. Найти касательные портфели, соответствующие безрисковым процентным ставкам $r_{f_1} = 0{,}06$ и $r_{f_2} = 0{,}07$.
3. Записать уравнение эффективной границы множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты под безрисковую ставку r_{f_1}, а брать ссуды под безрисковую ставку r_{f_2}.

10.3. На рынке разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг. Инвестор может предоставлять кредиты под безрисковую процентную ставку $r_{f_1}=6\%$, а брать ссуды под безрисковую процентную ставку $r_{f_2}=8\%$. Ожидаемые доходности касательных портфелей $\overline{\Theta}_{f_1}$ и $\overline{\Theta}_{f_2}$ соответственно равны 20 и 40%.

Найти инвестиционный портфель с наименьшей дисперсией доходности при ожидаемой доходности, равной: а) 11,6%; б) 30%; в) 46,4%.

10.4. Эффективная граница $\Gamma(\Omega_n^+)$ имеет вид

$$\sigma=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(100r^2-38r+\dfrac{11}{3}\right)^{1/2}, & r\in\left[0{,}19;\ \dfrac{31}{105}\right];\\ (27{,}5r^2-15r+2{,}1)^{1/2}, & r\in\left[\dfrac{31}{105};\ 0{,}4\right].\end{cases}$$

Определить безрисковую процентную ставку, если ожидаемая доходность касательного портфеля, соответствующего этой ставке, равна: а) 25%; б) 32%.

10.5. Эффективная граница $\Gamma(\Omega_n)$ определяется уравнением

$$\sigma=\frac{1}{7}(350r^2-196r+29{,}4)^{1/2},\quad r\geq 0{,}28.$$

Касательные портфели, соответствующие безрисковым процентным ставкам $r_{f_1}=0{,}12$ и $r_{f_2}=0{,}2$, имеют ожидаемые доходности 31,5 и 35%.

Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты под безрисковую ставку r_{f_1}, а брать ссуды под безрисковую ставку r_{f_2}.

2.11. ОТЫСКАНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ПРИ РАЗРЕШЕННЫХ КОРОТКИХ ПРОДАЖАХ РИСКОВАННЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ

Даны рискованные ценные бумаги с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,\dots,\bar{r}_n$, ковариационная матрица доходностей которых равна $\Lambda(\sigma_{ij})$.

Если $r(\Lambda)=n$, а среди ожидаемых доходностей $\bar{r}_1,\ \bar{r}_2,\dots,\bar{r}_n$ есть несовпадающие, то справедливы следующие утверждения.

1. Для существования касательного портфеля $\overline{\Theta}_f\in\Omega_n$, соответствующего безрисковой процентной ставке r_f, необходимо и достаточно, чтобы $r_f<\bar{r}^*$ ($\bar{r}^*$ – ожидаемая доходность портфеля из Ω_n с наименьшим риском).

При этом ожидаемая доходность $\bar{r}$ касательного портфеля $\overline{\Theta}_f$ удовлетворяет равенству

$$\bar{r}=-\frac{r_fB+2C}{B+2Ar_f}.$$

2. Если портфель $\overline{\Theta}$ определяет инвестиционную возможность из эффективной границы $\Gamma(\Omega_n)$, то он является касательным портфелем, соответствующим безрисковой процентной ставке

$$r_f=-\frac{2C+\bar{r}(\overline{\Theta})B}{2A\bar{r}(\overline{\Theta})+B}.$$

3. Касательный портфель $\overline{\Theta}_f$, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f<\bar{r}^*$, определяется следующими условиями:

$$\overline{\Theta}_f=\left(\frac{z_1^*}{\rho},\ \frac{z_2^*}{\rho},\dots,\frac{z_n^*}{\rho}\right),\quad \rho=\sum_{i=1}^{n}z_i^*,$$

$$\sigma_i^2z_i^*+\sum_{j\neq i}\sigma_{ij}z_j^*=\bar{r}_i-r_f,\quad i=1,2,\dots,n.$$

11.1. Разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг трех видов, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Эффективная граница $\Gamma(\Omega_3)$ определяется портфелями вида

$$\overline{\Theta}_{\min}(r) = \left(2-10r,\ \frac{25}{4}r-\frac{5}{8},\ \frac{15}{4}r-\frac{3}{8}\right) \quad r \ge \frac{23}{150}.$$

1. Найти касательный портфель $\overline{\Theta}_f$, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}08$.

2. Определить безрисковую процентную ставку r_f так, чтобы портфель

$$\overline{\Theta} = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{15}{16},\ \frac{9}{16}\right) \in \Gamma(\Omega_3)$$

являлся касательным портфелем, соответствующим этой ставке.

11.2. Портфели $\overline{\Theta}_1$ и $\overline{\Theta}_2$ определяют инвестиционные возможности из эффективной границы $\Gamma(\Omega_n)$, причем

$$\bar r(\overline{\Theta}_1) = 0{,}1,\ \bar r(\overline{\Theta}_2) = 0{,}2,\ \sigma(\overline{\Theta}_1) = 0{,}2,\ \ \sigma(\overline{\Theta}_2) = 0{,}5,\ \rho(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2) = -0{,}2.$$

Найти ожидаемую доходность касательного портфеля, соответствующего безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}1$.

11.3. Разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг трех видов, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Эффективная граница $\Gamma(\Omega_3)$ определяется портфелями вида

$$\overline{\Theta}_{\min}(r) = \left(\frac{17}{15}-\frac{10}{3}r,\ \frac{5}{3}r+\frac{7}{30},\ \frac{5}{3}r-\frac{11}{30}\right) \quad r \ge 0{,}1.$$

1. Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты под безрисковую ставку $r_{f_1} = 0{,}02$, а брать ссуды под безрисковую ставку $r_{f_2} = 0{,}03$.

2. Определить безрисковую процентную ставку r_f так, чтобы портфель

$$\overline{\Theta} = \left(\frac{19}{30},\ \frac{29}{60},\ -\frac{7}{60}\right) \in \Gamma(\Omega_3)$$

являлся касательным портфелем, соответствующим этой ставке.

11.4. На рынке разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг двух видов, причем

$$\bar r_1 = 10\%,\ \bar r_2 = 15\%,\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

1. Найти касательный портфель $\overline{\Theta}_f$, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 6\%$.

2. Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую ставку $r_f = 6\%$.

3. В условиях п. 2 данной задачи определить стратегию не склонного к риску инвестора для обеспечения ожидаемой доходности $R = 10\%$.

11.5. Разрешены короткие продажи рискованных активов трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar r_1 = 20\%$, $\bar r_2 = 30\%$, $\bar r_3 = 50\%$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

1. Найти касательные портфели, соответствующие безрисковым процентным ставкам $r_{f_1} = 6\%$ и $r_{f_2} = 8\%$.

2. Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковые ставки $r_{f_1} = 6\%$ и $r_{f_2} = 8\%$ соответственно.

3. В условиях п. 2 данной задачи указать стратегию не склонного к риску инвестора для обеспечения ожидаемой доходности а) $R_1 = 20\%$; б) $R_2 = 45\%$; в) $R_3 = 50\%$.

11.6. Даны рискованные активы трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar r_1 = 0{,}1$, $\bar r_2 = 0{,}2$, $\bar r_3 = 0{,}35$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Короткие продажи рискованных активов разрешены.

1. Найти касательные портфели $\bar\Theta_1$ и $\bar\Theta_2$, соответствующие безрисковым процентным ставкам $r_{f_1} = 0{,}05$ и $r_{f_2} = 0{,}09$.

2. Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковые ставки $r_{f_1} = 0{,}05$ и $r_{f_2} = 0{,}09$ соответственно.

3. В условиях п. 2 данной задачи найти инвестиционный портфель так, чтобы отношение $\dfrac{\bar r - 0{,}1}{\sigma^2}$ было наибольшим.

11.7. Даны рискованные ценные бумаги четырех видов с ожидаемыми доходностями: $\bar r_1 = 0{,}12$, $\bar r_2 = 0{,}28$, $\bar r_3 = 0{,}28$, $\bar r_4 = 0{,}48$, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Короткие продажи рискованных активов разрешены.

1. Найти касательный портфель из $\Gamma(\Omega_4)$, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}08$.

2. Найти касательный портфель из $\Gamma(V_4)$, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}08$, где

$$V_4 = \{\bar\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) \in \Omega_4 \mid \Theta_3 \ge 0\}.$$

2.12. ОТЫСКАНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ПРИ ЗАПРЕЩЕННЫХ КОРОТКИХ ПРОДАЖАХ РИСКОВАННЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ

Даны рискованные ценные бумаги n видов с ожидаемыми доходностями $\bar r_1, \bar r_2, \ldots, \bar r_n$, ковариационная матрица доходностей которых равна $\Lambda = (\sigma_{ij})$.

Если $r(\Lambda) = n$, среди ожидаемых доходностей $\bar r_1, \bar r_2, \ldots, \bar r_n$ есть несовпадающие, а $r_f < \min\limits_{1\le i\le n} \{\bar r_i\}$, то справедливы следующие утверждения.

1. Существует, и притом единственный, касательный портфель из $\Gamma(\Omega_n^+)$, соответствующий безрисковой процентной ставке r_f.

2. Если вектор $\bar z = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$ – решение системы

$$\begin{cases} \sigma_i^2 z_i + \sum\limits_{j\ne i} \sigma_{ij} z_j - \Delta_i = \bar r_i - r_f, \\ \Delta_i z_i = 0, \quad \Delta_i \ge 0, \quad z_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{12.1}$$

то вектор

$$\bar\Theta_f = \left(\frac{z_1^*}{\rho}, \frac{z_2^*}{\rho}, \ldots, \frac{z_n^*}{\rho}\right), \quad \rho = \sum_{i=1}^{n} z_i^*$$

принадлежит эффективной границе $\Gamma(\Omega_n^+)$ и является касательным портфелем, соответствующим безрисковой процентной ставке r_f.

Замечание. Для решения системы (12.1) достаточно найти оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (\min),$$

$$\begin{cases} \sigma_i^2 z_i + \sum_{j \ne i} \sigma_{ij} z_j - \Delta_i + y_i = \bar{r}_i - r_f, \\ \Delta_i \ge 0, \quad y_i \ge 0, \quad z_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

базис которого не содержит сопряженных векторов условий.

12.1. Даны рискованные ценные бумаги двух видов со следующими параметрами:

$$\bar{r}_1 = 0{,}16, \ \bar{r}_2 = 0{,}2, \ \Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Короткие продажи рискованных ценных бумаг запрещены.

1. Найти касательный портфель Θ_f, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}14$.

2. Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую ставку $r_f = 0{,}14$.

3. Указать стратегию не склонного к риску инвестора для обеспечения ожидаемой доходности $\bar{R} = 18\%$.

12.2. Даны рискованные ценные бумаги трех видов со следующими параметрами:

$$\bar{r}_1 = 0{,}1, \ \bar{r}_2 = 0{,}2, \ \bar{r}_3 = 0{,}3, \ \Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Короткие продажи рискованных ценных бумаг запрещены.

1. Найти касательный портфель, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}06$.

2. Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую ставку $r_f = 0{,}06$.

3. Указать стратегию не склонного к риску инвестора для обеспечения ожидаемой доходности $\bar{R} = 0{,}15$.

12.3. На рынке запрещены короткие продажи рискованных ценных бумаг трех видов со следующими параметрами:

$$\bar{r}_1 = 0{,}12, \ \bar{r}_2 = 0{,}2, \ \bar{r}_3 = 0{,}4, \ \Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

1. Найти касательные портфели, соответствующие безрисковым процентным ставкам $r_{f_1} = 0{,}04$ и $r_{f2} = 0{,}1$.

2. Определить эффективную границу множества инвестиционных возможностей, если инвестор может предоставлять кредиты под безрисковую ставку $r_{f_1} = 0{,}04$, а брать ссуды под безрисковую ставку $r_{f_2} = 0{,}1$.

3. Указать стратегию не склонного к риску инвестора для обеспечения ожидаемой доходности: а) $\bar{R} = 15\%$; б) $\bar{R} = 30{,}5\%$; в) $\bar{R} = 50\%$.

12.4. Даны рискованные ценные бумаги трех видов со следующими параметрами:

$$\bar{r}_1 = 0{,}18, \ \bar{r}_2 = 0{,}25, \ \bar{r}_3 = 0{,}28, \ \Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Составить уравнение эффективной границы, если инвестор может предоставлять кредиты под безрисковую ставку $r_{f_1} = 0{,}03$, а брать ссуды под безрисковую ставку $r_{f_2} = 0{,}05$ при запрещенных коротких продажах рискованных ценных бумаг.

12.5. Даны рискованные ценные бумаги четырех видов со следующими показателями:

$$\bar{r}_1 = 0{,}16, \ \bar{r}_2 = 0{,}28, \ \bar{r}_3 = 0{,}26, \ \bar{r}_4 = 0{,}48, \ \Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Короткие продажи рискованных ценных бумаг запрещены.

1. Составить уравнение эффективной границы, если инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку $r_f = 0{,}08$.

2. Найти инвестиционный портфель так, чтобы отношение $\frac{\bar{r}-0{,}4}{(\sigma-0{,}2)^2}$ было наибольшим.

2.13. *k*-ФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА РИСКОВАННЫХ АКТИВОВ

Рынок удовлетворяет k-факторной модели, если существует k экономических факторов $F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_k$ и набор чисел

$$\alpha_j,\ \beta_{1j}, \ldots, \beta_{ij}, \ldots, \beta_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

таких, что

$$r_j = \alpha_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ij} F_i + \varepsilon_j,$$

$$\bar{\varepsilon}_j = 0,$$

$$\operatorname{cov}(F_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – доходности рискованных активов;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ – остаточные доходности (случайные величины).

Имеют место следующие равенства:

$$\bar{r}_j = \alpha_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ij} \overline{F_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\sigma_{j_1, j_2} = \sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \beta_{i_1 j_1} \beta_{i_2 j_2} \operatorname{cov}(F_{i_1}, F_{i_2}) + \sigma_{\varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_2}},$$

$$\operatorname{cov}(F_i, r_j) = \sum_{i_1=1}^{k} \beta_{i_1 j} \operatorname{cov}(F_{i_1}, F_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В условиях k-факторной модели доходность портфеля активов $P = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_n)$ записывается в виде

$$r_P = \alpha_P + \sum_{i=1}^{k} \beta_{i,P} F_i + \varepsilon_P,$$

где $\alpha_P = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Theta_j, \quad \beta_{i,P} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \Theta_j, \quad \varepsilon_P = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \Theta_j.$

Стандартное отклонение остаточной доходности портфеля активов называется нефакторным или особым риском этого портфеля, а величина

$$\left(\sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \beta_{i_1,p} \beta_{i_2,p} \operatorname{cov}(F_{i_1}, F_{i_2}) \right)^{1/2}$$

его факторным риском. Особый риск портфеля активов может быть устранен за счет диверсификации.

13.1. Найти факторные бета-коэффициенты рискованного актива, если известна факторная ковариационная матрица

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

а

$$\operatorname{cov}(F_1, r) = -0{,}04 \text{ и } \operatorname{cov}(F_2, r) = 0{,}13.$$

13.2. Определить факторные бета-коэффициенты рискованных активов двух видов, если известна факторная ковариационная матрица

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 1{,}2 \end{pmatrix},$$

а

$$\operatorname{cov}(F_1, r_1) = 0{,}2,\ \operatorname{cov}(F_2, r_1) = 0{,}5,\ \operatorname{cov}(F_3, r_1) = 0{,}8,$$
$$\operatorname{cov}(F_1, r_2) = 0{,}04,\ \operatorname{cov}(F_2, r_2) = 0{,}1,\ \operatorname{cov}(F_3, r_2) = 1{,}42.$$

13.3. Найти стандартные отклонения доходностей и ковариацию между доходностями ценных бумаг двух видов, если известна факторная ковариационная матрица

$$\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}00 \\ 0{,}01 & 0{,}00 & 0{,}09 \end{pmatrix},$$

а факторные бета-коэффициенты и ковариационная матрица остаточных доходностей приведены ниже.

Ценная бумага	Факторный бета-коэффициент			Ковариационная матрица остаточных доходностей
	β_{1j}	β_{2j}	β_{3j}	
1	–0,3	1,2	0,6	$\begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}05 \end{pmatrix}$
2	–0,4	1,3	0,8	

13.4. В условиях задачи 13.3 найти факторные бета-коэффициенты портфеля $P = (0{,}2;\ 0{,}8)$. Оценить факторный и особый риски портфеля.

13.5. Факторная ковариационная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

ожидаемые значения факторов: $\overline{F}_1 = -0{,}1, \quad \overline{F}_2 = 0{,}3, \quad \overline{F}_3 = 0{,}4$.

Определить ожидаемую доходность, особый и факторный риски портфеля $P = (0{,}3;\ -0{,}2;\ 0{,}9)$ в условиях модели рынка, характеристики которой приведены ниже.

Ценная бумага	Факторный бета-коэффициент			Свободный член (α_j)	Ковариационная матрица остаточных доходностей
	β_{1j}	β_{2j}	β_{3j}		
1	1,2	1,3	–0,1	0,03	$\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
2	–0,1	1,5	0,2	–0,02	
3	0,4	1,2	0,1	–0,03	

13.6. Дана ковариационная матрица остаточных доходностей рискованных активов пяти видов:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Определить особые риски портфелей

$$P_2 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)\quad P_3 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$$

$$P_4 = \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ 0\right)\quad P_5 = \left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

13.7. Дана ковариационная матрица остаточных доходностей рискованных активов n видов:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & \ldots & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & \ldots & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0{,}1 & 0 & 0 & \ldots & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найти особый риск портфеля $P_n = \left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ \cdots,\ \frac{1}{n}\right)$.

13.8. Факторная ковариационная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

ожидаемые значения факторов: $\overline{F}_1 = -0{,}1, \quad \overline{F}_2 = 0{,}12, \quad \overline{F}_3 = 0{,}01$.

Характеристики ценных бумаг двух видов в условиях факторной модели приведены ниже.

Ценная бумага	Факторный бета-коэффициент			Свободный член (α_j)	Ковариационная матрица остаточных доходностей
	β_{1j}	β_{2j}	β_{3j}		
1	0,8	1,2	–0,2	–0,042	$\begin{pmatrix} 0{,}01 & -0{,}01 \\ -0{,}01 & 0{,}02 \end{pmatrix}$
2	0,2	0,5	–0,3	0,003	

Составить уравнение эффективной границы $\Gamma(\Omega_2)$.

2.14. ПОСТРОЕНИЕ k-ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА РИСКОВАННЫХ АКТИВОВ

Известны доходности рискованных активов n видов и значения k экономических факторов за T предшествовавших периодов заданной продолжительности:

$$r_1^t,\ \dots,r_j^t,\ \dots\ ,r_k^t \quad \text{и}$$

$$F_1^t,\ \dots,F_2^t,\ \dots,\ F_i^t,\ \dots,\ F_k^t,\ t=1,\ 2,\ \dots,\ T.$$

Свободный член α_j и факторные бета-коэффициенты $\beta_{1j}, \dots, \beta_{ij}, \dots, \beta_{kj}$ для j-го актива можно подобрать на основе метода наименьших квадратов, решив систему линейных уравнений

$$(X^T\cdot X)\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \beta_{1j}\\ \vdots\\ \beta_{ij}\\ \vdots\\ \beta_{kj}\end{pmatrix}=X^T\begin{pmatrix}r_j^1\\ r_j^2\\ \vdots\\ r_j^T\end{pmatrix},\ \text{где}\ X=\begin{pmatrix}1 & F_1^1 & \cdots & F_i^1 & \cdots & F_k^1\\ 1 & F_1^2 & \cdots & F_i^2 & \cdots & F_k^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & F_1^T & \cdots & F_i^T & \cdots & F_k^T\end{pmatrix}.$$

Решение этой системы линейных уравнений

$$\hat\alpha_j, \hat\beta_{1j},\dots,\hat\beta_{ij},\dots,\hat\beta_{kj}$$

дает оценки коэффициентов регрессии:

$$r_j^t=\alpha_j+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ij}F_i^t+\varepsilon_j^t, t=1,2,\dots,T.$$

Для тестирования линейной регрессионной модели используются следующие показатели:

1. $\hat\varepsilon_j^t=r_j^t-\hat\alpha_j-\sum_{i=1}^{k}\hat\beta_{ij}F_i^t,\ t=1,2,\dots,T$.

2. $(TSS)_j=\sum_{t=1}^{T}(r_j^t-\bar r_j)^2,\ \bar r_j=\dfrac{\sum_{t=1}^{T}r_j^t}{T}$ (полная сумма квадратов отклонений);

   $(RSS)_j=\sum_{t=1}^{T}(\hat\varepsilon_j^t)^2$ (сумма квадратов, не объясненная регрессией);

   $(ESS)_j=(TSS)_j-(RSS)_j$ (сумма квадратов, объясненная регрессией).

3. $R_j^2=\dfrac{(ESS)_j}{(TSS)_j}$ (коэффициент детерминации).

4. $\Phi_j=\dfrac{(ESS)_j}{(RSS)_j}\cdot\dfrac{(T-k-1)}{k}$ (статистика Фишера).

5. $d_j=\dfrac{\sum_{t=2}^{T}(\hat\varepsilon_j^t-\hat\varepsilon_j^{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}(\hat\varepsilon_j^t)^2}$ (статистика Дарбина–Уотсона).

6. $S_j=\sqrt{\dfrac{(RSS)_j}{T-k-1}}$ (стандартная ошибка оценки).

Если допустить, что остаточные доходности $\varepsilon_j^t,\quad j=1,2,\dots,T$, независимы и распределены нормально с нулевыми математическими ожиданиями и одной и той же дисперсией, то доверительные интервалы для коэффициентов регрессии оцениваются следующим образом:

$$\left(\hat{\alpha}_j - t_{\frac{1-\gamma}{2}}(T-k-1)S_j\sqrt{a_{11}},\ \ \hat{\alpha}_j + t_{\frac{1-\gamma}{2}}(T-k-1)S_j\sqrt{a_{11}}\right),$$

$$\left(\hat{\beta}_{ij} - t_{\frac{1-\gamma}{2}}(T-k-1)S_j\sqrt{a_{i+1,i+1}},\ \ \hat{\beta}_{ij} + t_{\frac{1-\gamma}{2}}(T-k-1)S_j\sqrt{a_{i+1,i+1}}\right),$$

где $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{k+1,k+1}$ – диагональные элементы матрицы $(X^T \cdot X)^{-1}$;

$t_{\frac{1-\gamma}{2}}(T-k-1)$ – критическое значение распределения Стьюдента с $(T-k-1)$ степенями свободы;

γ – уровень надежности.

14.1. На рынке имеются рискованные активы двух видов, доходности которых определяются одним фактором F^t. Данные о доходностях активов и значениях фактора за 6 предшествовавших месяцев приведены ниже.

t	r_1^t	r_2^t	F^t
1	–0,007	–0,015	–0,01
2	0,048	0,062	0,05
3	0,054	0,075	0,06
4	0,039	0,045	0,04
5	0,047	0,058	0,05
6	–0,016	–0,027	–0,02

1. Оценить коэффициенты линейных регрессий для доходностей активов и найти значения всех показателей, используемых при тестировании моделей.

2. Построить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с надежностью 95%.

14.2. При условиях задачи 14.1 оценить значения доходностей активов, если фактор примет значение, равное 0,05.

Построить доверительные интервалы для этих доходностей с надежностью 95%.

14.3. При условиях задачи 14.2 построить ковариационную матрицу доходностей данных активов, если дисперсия фактора равна 0,02, а остаточные доходности не коррелируют.

14.4. Данные о доходностях активов и значения двух факторов приведены ниже.

Номер месяца (t)	r_1^t	r_2^t	F_1^t	F_2^t
1	0,124	0,165	0,10	0,20
2	0,115	0,138	0,08	0,10
3	0,103	0,077	0,05	0,15
4	0,176	0,204	0,12	0,16
5	–0,002	–0,032	–0,01	0,20
6	–0,013	0,008	–0,02	0,17
7	0,120	0,090	0,08	0,14
8	0,099	0,072	0,06	0,12
9	0,126	0,136	0,08	0,12
10	0,133	0,154	0,10	0,10
11	0,181	0,197	0,12	0,12
12	0,090	0,079	0,05	0,14

1. Оценить коэффициенты линейных регрессий для доходностей активов и найти значения всех показателей, используемых при тестировании модели.

2. Построить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с надежностью 95%.

14.5. При условиях задачи 14.4 определить значения доходностей активов и ковариационную матрицу их доходностей, если значения факторов $\tilde{F}_1 = 0{,}09$ и $\tilde{F}_2 = 0{,}15$, остаточные доходности не коррелируют, а факторная ковариационная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0{,}01 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Найти доверительные интервалы для доходностей с надежностью 95%.

2.15. ОТЫСКАНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ОДНОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ РЫНКА

Если рынок рискованных активов удовлетворяет однофакторной модели, то

$$r_j = \alpha_j + \beta_j F + \varepsilon_j\ , \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

При некоррелируемых остаточных доходностях касательный портфель, принадлежащий эффективной границе $\Gamma(\Omega_n)$ и соответствующий безрисковой ставке $r_f < \bar{r}^*$ ($\bar{r}^*$ – ожидаемая доходность портфеля с наименьшим риском), определяется вектором

$$\bar{\Theta}_f = \left(\frac{z_1^*}{\rho}, \ldots, \frac{z_j^*}{\rho}, \ldots, \frac{z_n^*}{\rho}\right), \quad \rho = \sum_{j=1}^{n} z_j^*,$$

где

$$z_j^* = \frac{\beta_j}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}\left[\frac{\bar{r}_j - r_f}{\beta_j} - \Phi_0\right], \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\Phi_0 = \frac{\sigma_F^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}\beta_j}{1 + \sigma_F^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}}.$$

Если же на рынке, удовлетворяющем однофакторной модели с некоррелируемыми остаточными доходностями, запрещены короткие продажи активов, бета-коэффициенты активов положительны и

$$\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\beta_1} \ge \frac{\bar{r}_2 - r_f}{\beta_2} \ge \cdots \ge \frac{\bar{r}_n - r_f}{\beta_n} > 0,$$

то касательный портфель, соответствующий безрисковой процентной ставке r_f, определяется вектором

$$\bar{\Theta}_f = \left\{\frac{z_1^*}{\rho}, \ldots, \frac{z_j^*}{\rho}, \ldots, \frac{z_n^*}{\rho}\right\},$$

где

$$z_j^* = \frac{\beta_j}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}\left[\frac{\bar{r}_j - r_f}{\beta_j} - \Phi_l\right], \quad j = 1, 2, \ldots, l;$$

$$z_j^* = 0, \quad j = l+1, \ldots, n;$$

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} z_j^*;$$

$$\Phi_1 < \Phi_2 < \cdots < \Phi_l, \quad \Phi_l \ge \Phi_{l+1}$$

$$\left(\Phi_k = \frac{\sigma_F^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}\beta_j}{1 + \sigma_F^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n\right).$$

15.1. На рынке, удовлетворяющем однофакторной модели (остаточные доходности не коррелируют), разрешены короткие продажи активов. Основные данные о рынке приведены ниже.

j	1	2	3	4	5
α_j	0,060	0,040	0,045	0,008	0,002
β_j	1,4	0,8	1,3	0,9	1,1
$\sigma_{\varepsilon_j}^2$	0,0065	0,0020	0,0045	0,0024	0,0045

Найти касательный портфель, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}04$, если $\bar{F} = 0{,}1$, $\sigma_F^2 = 0{,}02$. Определить ожидаемую доходность и дисперсию доходности касательного портфеля.

15.2. Рынок удовлетворяет однофакторной модели с некоррелируемыми остаточными доходностями, $\sigma_F^2 = 0{,}1$, а остальные данные приведены ниже.

j	1	2	3	4	5	6
$\bar{r}_j$	0,20	0,08	0,15	0,25	0,09	0,18
β_j	1,4	0,7	1,0	1,3	0,9	1,2
$\sigma_{\varepsilon_j}^2$	0,05	0,20	0,25	0,40	0,25	0,30

Найти касательный портфель рискованных активов, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}03$, если: а) разрешены короткие продажи активов; б) запрещены короткие продажи активов.

15.3. Рынок удовлетворяет однофакторной модели с некоррелируемыми остаточными доходностями, $\sigma_F^2 = 0{,}001$, а остальные данные приведены ниже.

j	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{r}_j$	0,15	0,17	0,12	0,17	0,11	0,11	0,11	0,07
β_j	1,0	1,5	1,0	2,0	1,0	1,5	2,0	0,8
$\sigma_{\varepsilon_j}^2$	0,005	0,004	0,002	0,001	0,004	0,003	0,004	0,0016

Найти касательный портфель, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}03$, если запрещены короткие продажи активов.

Определить инвестиционный портфель не склонного к риску инвестора, обеспечивающий ожидаемую доходность в 12%.

15.4. В условиях задачи 15.3 найти касательный портфель, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}04$. Определить ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности касательного портфеля.

15.5. Рынок удовлетворяет однофакторной модели с некоррелируемыми остаточными доходностями, $\sigma_F^2 = 0{,}04$. Остальные данные приведены ниже.

j	1	2	3	4	5
$\bar{r}_j$	0,08	0,15	0,10	0,12	0,22
β_j	1,0	1,1	1,2	1,0	1,5
$\sigma_{\varepsilon_j}^2$	0,05	0,0625	0,08	0,08	0,05

Найти касательный портфель рискованных активов, соответствующий безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}04$, если: а) разрешены короткие продажи активов; б) запрещены короткие продажи активов.

2.16. РАВНОВЕСИЕ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

Дан финансовый рынок, на котором обращаются рискованные активы n видов и оперируют m инвесторов.

Инвесторы имеют однородные ожидания относительно данного финансового рынка, если: все они рассматривают один и тот же временной горизонт, одинаково оценивают инвестиционные качества рискованных активов и у всех инвесторов одно и то же множество инвестиционных возможностей.

При этом каждый инвестор, формируя стратегию на рынке, максимизирует свою функцию полезности вида $U(\sigma, r)$, где r – ожидаемая доходность инвестиционного портфеля, а σ – стандартное отклонение его доходности.

Замечание. Если на рынке разрешены короткие продажи рискованных активов, а инвесторы могут предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку r_f, то функция полезности записывается следующим образом:

$$U(\sigma, r), \text{ где } r = (1-\Theta_0)r_f + \Theta_0\bar{r}(\overline{\Theta}), \quad \sigma = \Theta_0\sigma(\overline{\Theta}), \quad \overline{\Theta} \in \Omega_n, \quad \Theta_0 \geq 0\,.$$

Если такая функция полезности достигает наибольшего значения при $\Theta_0 > 0$, то в точке максимума отношение

$$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\Theta_i}$$

принимает одно и то же значение для всех $i = 1, 2,..., n$.

Финансовый рынок находится ***в равновесии***, если все рискованные активы распределены между инвесторами, а каждый инвестор при этом максимизирует свою функцию полезности.

Финансовый рынок называется ***совершенным***, если: все рискованные активы свободно обращаются на рынке, разрешены короткие продажи этих активов, участники рынка являются «потребителями цен» и рынок работает «без трения».

Финансовый рынок является ***почти совершенным***, если выполняются все условия для совершенного рынка, но запрещены короткие продажи рискованных активов.

Рыночный портфель определяется вектором

$$M = (\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n),$$

где ω_i – отношение стоимости рискованных ценных бумаг i-го вида к стоимости всех активов на рынке, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Основные утверждения о равновесных рынках при инвесторах, не склонных к риску и имеющих однородные ожидания.

1. Если рынок рискованных активов является совершенным, то инвестиционная возможность $(\sigma(M), \bar{r}(M))$, определяемая рыночным портфелем M, принадлежит эффективной границе $\Gamma(\Omega_n)$.

2. Если инвесторы могут предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку r_f, а рынок рискованных активов является совершенным или почти совершенным, то касательный портфель $\overline{\Theta}_f$, соответствующий ставке r_f, оказывается рыночным, а эффективная граница множества инвестиционных возможностей определяется уравнением

$$r = \frac{\bar{r}(M) - r_f}{\sigma(M)}\sigma + r_f, \quad \sigma \geq 0.$$

Луч, заданный уравнением $r = \frac{\bar{r}(M) - r_f}{\sigma(M)}\sigma + r_f, \quad \sigma \geq 0$, называется линией рынка капиталов, а величина $\frac{\bar{r}(M) - r_f}{\sigma(M)}$ – рыночной ценой риска.

16.1. Даны рискованные ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 15\%$, $\bar{r}_2 = 25\%$, $\bar{r}_3 = 35\%$, ковариационная матрица доходностей которых равна

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найти инвестиционный портфель, максимизирующий функцию полезности $U(\sigma, r) = r - 2\sigma^2$, если разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг, а инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку $r_f = 0{,}05$.

16.2. Даны рискованные ценные бумаги трех видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 16\%$, $\bar{r}_2 = 26\%$, $\bar{r}_3 = 30\%$, ковариационная матрица доходностей которых равна

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти инвестиционный портфель, максимизирующий функцию полезности $U(\sigma, r) = r^2 - 2\sigma^2$, если разрешены короткие продажи рискованных ценных бумаг, а инвестор может предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку $r_f = 6\%$.

16.3. Инвесторы могут предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую ставку $r_f = 0{,}08$. Записать уравнение линии рынка капиталов, если ожидаемая доходность рыночного портфеля равна 12%, а стандартное отклонение его доходности составляет 25%. Какова рыночная цена риска?

16.4. Инвесторы могут предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую ставку $r_f = 0{,}06$. Записать уравнение линии рынка капиталов, если ожидаемая доходность рыночного портфеля равна 10%, а стандартное отклонение его доходности составляет 30%. Какова рыночная цена риска?

16.5. На рынке имеются рискованные активы трех видов. Информация о рынке приведена ниже.

Вид активов	Количество	Цена, долл.	Ожидаемая доходность, %	Ковариационная матрица доходностей
1	1000	100	10	$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
2	2000	50	12	
3	2000	150	8	

Составить уравнение линии рынка капиталов, если инвесторы могут предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку $r_f = 0{,}06$.

16.6. В условиях задачи 16.5 выяснить: принадлежит ли рыночный портфель эффективной границе $\Gamma(\Omega_3)$.

16.7. На рынке имеются рискованные активы трех видов. Информация о рынке приведена ниже.

Вид активов	Цена, долл.	Ожидаемая доходность, %	Количество	Ковариационная матрица доходностей
1	16	10	1000	$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
2	15	20	1000	
3	4,5	20	2000	

Является ли рыночный портфель касательным, соответствующим безрисковой процентной ставке $r_f = 0{,}04$, если короткие продажи ценных бумаг разрешены?

2.17. МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ (САРМ)

На рынке обращаются рискованные активы n видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ и оперируют m инвесторов.

Инвесторы имеют однородные ожидания относительно данного рынка и могут кредитовать и брать ссуды под безрисковую процентную ставку r_f.

Модель оценки финансовых активов определяется равенствами

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_M - r_f), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\bar{r}_M$ – ожидаемая доходность рыночного портфеля M;

$\beta_i = \dfrac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$ – бета-коэффициент рискованных активов i-го вида, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Равновесный рынок рискованных активов удовлетворяет модели оценки финансовых активов в одном из следующих случаев:

1) рынок является совершенным;

2) рынок является почти совершенным, а инвесторы не склонны к риску.

Прямая, заданная уравнением

$$r = r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f),$$

называется линией рынка рискованных активов.

17.1. Ожидаемая доходность рыночного портфеля $\bar{r}_M = 14\%$, а стандартное отклонение его доходности $\sigma_M = 40\%$. Определить бета-коэффициент рискованного актива, если ковариация между доходностью этого актива и доходностью рыночного портфеля равна: а) 0,15; б) 0,2; в) –0,1.

В каждом случае определить равновесную ожидаемую доходность рискованного актива, если безрисковая процентная ставка составляет 7%.

17.2. Ожидаемая доходность рыночного портфеля $\bar{r}_M = 12\%$, стандартное отклонение его доходности $\sigma_M = 50\%$, безрисковая процентная ставка $r_f = 6\%$. Определить ковариацию между доходностью рискованного актива и доходностью рыночного портфеля, если ожидаемая равновесная доходность этого актива равна: а) 10%; б) 20%; в) 5%.

17.3. Построить линию рынка рискованных активов, если $\bar{r}_M = 12\%$ и $r_f = 8\%$. Определить равновесную ожидаемую доходность рискованного актива, если его бета-коэффициент равен: а) 1,5; б) 0,8; в) –1,2.

17.4. Найти бета-коэффициент рискованного актива, если $\bar{r}_M = 16\%$ и $r_f = 7\%$, а равновесная ожидаемая доходность равна: а) 20%; б) 10%; в) 5%.

17.5. На рынке имеются рискованные активы трех видов. Информация о рынке приведена ниже.

Вид активов	Количество	Цена, долл.	Ковариационная матрица доходностей
1 2 3	100 200 400	20 25 30	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$

Определить равновесные ожидаемые доходности рискованных активов, если ожидаемая доходность рыночного портфеля равна 12%, а безрисковая процентная ставка $r_f = 7\%$.

2.18. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Дан рынок, на котором обращаются рискованные активы n видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$.

Модель оценки финансовых активов определяется равенствами

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i(\bar{r}_M - r_f), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\beta_i = \dfrac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$ (M – рыночный портфель).

Основные свойства модели.

1. Ожидаемая доходность рискованных активов является суммой безрисковой процентной ставки и премии за риск, которая

может быть представлена в виде произведения рыночной цены риска $\dfrac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$ и рыночной меры риска $\dfrac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M}$.

2. Если $P = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n)$ – некоторый портфель рискованных активов, то

$$r_P = r_f + \beta_P(r_M - r_f) + \varepsilon_P,$$

где $\beta_P = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Theta_i = \dfrac{\operatorname{cov}(r_P, r_M)}{\sigma_M^2}$; ($\beta_P$ – бета-коэффициент портфеля P),

$$\bar{\varepsilon}_P = 0, \quad \operatorname{cov}(\varepsilon_P, r_M) = 0.$$

При этом

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_P}^2,$$

где $\beta_P \sigma_M$ – ***систематический риск*** портфеля P;
σ_{ε_P} – ***особый риск портфеля*** P.

3. Текущая стоимость S_0 портфеля рискованных активов P может быть определена по формуле

$$S_0 = \frac{\bar{S}_P}{1 + r_f + \beta_P(\bar{r}_M - r_f)},$$

где $\bar{S}_P$ – ожидаемая конечная стоимость портфеля P.

4. Если рыночный портфель M является допустимым портфелем, а его ожидаемая доходность больше безрисковой процентной ставки r_f, то он является касательным портфелем, соответствующим этой ставке.

18.1. Ожидаемая доходность и стандартное отклонение доходности рыночного портфеля равны 15 и 40% соответственно, а безрисковая процентная ставка составляет 8%.

Найти равновесную ожидаемую доходность, систематический и общий риски активов, если а) $\beta = 1{,}8$; $\sigma_\varepsilon = 20\%$; б) $\beta = 0{,}9$; $\sigma_\varepsilon = 40\%$.

18.2. Ожидаемая доходность рыночного портфеля, его стандартное отклонение и безрисковая процентная ставка следующие: $\bar{r}_M = 20\%$, $\sigma_M = 50\%$, $r_f = 9\%$. Известно, что остаточные доходности не коррелируют.

Определить равновесную ожидаемую доходность, систематический, особый и общий риски портфеля активов для исходных данных, приведенных в ниже.

i	β_i	σ_{ε_i}, %	Θ_i, %
1	1,2	20	20
2	0,8	30	50
3	1,5	15	–10
4	0,6	6	40

18.3. Ожидаемая доходность рыночного портфеля, его стандартное отклонение и безрисковая процентная ставка следующие: $\bar{r}_M = 15\%$, $\sigma_M = 30\%$, $r_f = 10\%$. Известно, что коэффициенты корреляции между остаточными доходностями составляют 0,2.

Определить равновесную ожидаемую доходность, систематический, особый и общий риски портфеля активов для исходных данных, приведенных ниже.

i	β_i	σ_{ε_i}, %	Θ_i
1	1,5	20	0,7
2	1,8	40	0,4
3	0,8	10	–0,1

18.4. Определить бета-коэффициент, систематический и особый риски акции для исходных данных, приведенных ниже.

Состояние экономики	Вероятность	Доходность рыночного портфеля, %	Доходность акции, %
1	0,1	4,5	2
2	0,2	2,0	–1
3	0,4	10,0	12
4	0,3	5,0	6

Какова рыночная цена риска, если безрисковая процентная ставка равна 5%?

18.5. Определить бета-коэффициент, систематический и особый риски портфеля акций $P = (0{,}25;\ 0{,}25;\ 0{,}50)$ для исходных данных, приведенных ниже.

Состояние экономики	Вероятность	Доходность рыночного портфеля, %	Доходность акции, %		
			№ 1	№ 2	№ 3
1	0,1	–1	–1	–2	1
2	0,2	–3	–3	–3	0
3	0,3	16	16	17	18
4	0,4	14	14	15	17

18.6. Определить текущую равновесную цену акции, если

$\bar{S} = 100$ долл., $\bar{r}_M = 16\%$, $\sigma_M = 14\%$, $r_f = 8\%$, $\operatorname{cov}(r_S, r_M) = 0{,}025$.

18.7. Определить текущую равновесную цену акции, если

$\bar{S} = 200$ долл., $\bar{r}_M = 12\%$, $\sigma_M = 40\%$, $r_f = 5\%$, $\operatorname{cov}(r_S, r_M) \approx 5{,}6$.

2.19. МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ ПРИ ОТСУТСТВИИ БЕЗРИСКОВОГО АКТИВА

На рынке разрешены короткие продажи рискованных активов n видов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_i, \ldots, \bar{r}_n$, среди которых имеются несовпадающие.

Предполагается, что ранг ковариационной матрицы Λ равен n, а ожидаемая доходность портфеля с наименьшим риском $\bar{r}^*$ положительна.

В этих условиях, если портфель P определяет инвестиционную возможность $(\sigma_P, \bar{r}_P)$, принадлежащую эффективной границе $\Gamma(\Omega_n)$, а $\bar{r}_P > \bar{r}^*$, то

$$\bar r_i = \bar r_Q + \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_P)}{\sigma_P^2}(\bar r_P - \bar r_Q), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Q – портфель рискованных активов, доходность которого не коррелирует с доходностью портфеля P.

При этом если эффективная граница $\Gamma(\Omega_n)$ определяется условиями

$$\sigma = (Ar^2 + Br + C)^{1/2}, \quad r \geq -\frac{B}{2A},$$

то

$$\bar r_Q = -\frac{B\bar r_P + 2C}{2A\bar r_P + B}$$

является ожидаемой доходностью портфеля Q.

Модель оценки финансовых активов при отсутствии безрискового актива определяется равенствами

$$\bar r_i = \bar r_Q + \beta_i(\bar r_M - \bar r_Q), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где M – рыночный портфель;

Q – портфель, доходность которого не коррелирует с доходностью рыночного портфеля M;

$\beta_i = \dfrac{\mathrm{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$ – бета-коэффициент рискованных активов i-го вида, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Равновесный рынок удовлетворяет данной модели, если он является совершенным, а инвесторы не склонны к риску.

19.1. Эффективная границ $\Gamma(\Omega_3)$ задана уравнением

$$\sigma = (4{,}35r^2 - 0{,}87r + 0{,}16965)^{1/2}, \quad r \geq 0{,}1.$$

Найти ожидаемую доходность портфеля, не коррелирующего с эффективным портфелем P, если $\bar r_P = 0{,}2$.

19.2. Эффективная граница $\Gamma(\Omega_3)$ задана уравнением

$$\sigma = \left(\frac{15}{4}r^2 - \frac{7}{8}r + \frac{11}{64}\right)^{1/2}, \quad r \geq \frac{7}{60}.$$

Найти ожидаемую доходность портфеля, не коррелирующего с эффективным портфелем P, если $\bar r_P = 0{,}2$.

19.3. Разрешены короткие продажи рискованных активов трех видов, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшей дисперсией, не коррелирующий с эффективным портфелем $P = (0{,}2;\ 0{,}45;\ 0{,}35)$.

Определить бета-коэффициенты рискованных активов относительно портфеля P.

19.4. Разрешены короткие продажи рискованных активов трех видов, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель с наименьшей дисперсией, не коррелирующий с эффективным портфелем $P = \left(0;\ \frac{4}{7};\ \frac{3}{7}\right)$.

Определить бета-коэффициенты рискованных активов относительно портфеля P.

19.5. Доходности рыночного портфеля и портфеля с наименьшей дисперсией, не коррелирующего с рыночным портфелем, равны соответственно 12 и 6%.

Найти равновесные ожидаемые доходности рискованных активов, имеющих бета-коэффициенты: $\beta_1 = 0{,}75$; $\beta_2 = 1{,}2$; $\beta_3 = 1{,}8$.

Определить стратегию не склонного к риску инвестора для обеспечения ожидаемой доходности в 10%.

19.6. Ожидаемая доходность и дисперсия доходности рыночного портфеля равны соответственно 0,15 и 0,2. Ожидаемая доходность портфеля с наименьшей дисперсией, не коррелирующего с рыночным портфелем, составляет 0,06.

Определить равновесные ожидаемые доходности рискованных активов, если ковариации между их доходностями и доходностью рыночного портфеля равны 0,15; 0,25 и 0,12.

2.20. РЫНОЧНЫЕ ИНДЕКСЫ. ОЦЕНКА БЕТА-КОЭФФИЦИЕНТОВ РИСКОВАННЫХ АКТИВОВ

Конъюнктуру рынка часто оценивают на основе того или иного рыночного индекса.

Если рыночный индекс рассчитывается методом взвешивания по стоимости, то

$$I(t_2) = \frac{V(t_2)}{V(t_1)} I(t_1),$$

где $I(t_1)$ и $I(t_2)$ – значения индекса соответственно в моменты t_1 и t_2;
$V(t_1)$ и $V(t_2)$ – стоимости всех учитываемых индексом активов в эти моменты.

Доходность рыночного индекса акций за n периодов от t до T определяется равенством

$$r = \frac{I_T}{I_t}\left(1+\frac{D_1}{V_1}\right)\left(1+\frac{D_2}{V_2}\right)\cdots\left(1+\frac{D_n}{V_n}\right),$$

где I_t и I_T – значения индекса акций в моменты t и T;
$D_1, D_2, \ldots, D_n$ – дивиденды, выплачиваемые по рассматриваемым акциям за период от t до T.

Дивидендной доходностью индекса акций за период от t до T называется число q такое, что

$$1+q = \left(1+\frac{D_1}{V_1}\right)\left(1+\frac{D_2}{V_2}\right)\cdots\left(1+\frac{D_n}{V_n}\right).$$

Если же $\tilde{q}$ – годовая дивидендная доходность при непрерывном начислении, то

$$e^{\tilde{q}(T-t)} = 1+q, \quad I_t(1+r) = I_T e^{\tilde{q}(T-t)}.$$

Чтобы оценить бета-коэффициенты рискованных активов относительно выбранного рыночного индекса, можно воспользоваться информацией о доходностях рыночного индекса r_I^t, доходностях рассматриваемых активов r_j^t, $j = 1, 2,\ldots, n$ и величинах безрисковой процентной ставки r_f^t за T временных периодов.

Если случайные величины $z_j^t = r_j^t - r_f^t$, $j = 1, 2,\ldots, n$ и $z_I^t = r_I^t - r_f^t$ удовлетворяют линейным регрессионным моделям

$$z_j^t = \alpha_j + \beta_j z_I^t + \varepsilon_j^t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$\bar{\beta}_j = \frac{\sum_{t=1}^{T} z_j^t z_I^t - \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} z_j^t\right)\left(\sum_{t=1}^{T} z_I^t\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(z_I^t\right)^2 - \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} z_I^t\right)^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Прогнозные значения бета-коэффициентов рискованных активов можно найти методом экспоненциального взвешивания, положив

$$\sigma_I^2\{t-1 \mid t\} = (1-\lambda)(z_I^t)^2 + \lambda \sigma_I^2\{t \mid t+1\},$$

$$\sigma_{j,I}\{t-1 \mid t\} = (1-\lambda_j) z_j^t z_I^t + \lambda_j \sigma_{j,I}\{t \mid t+1\}, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$

где $\sigma_I^2\{t-1 \mid t\}$ и $\sigma_{j,I}\{t-1 \mid t\}$ – прогнозы дисперсии z_I и ковариации между z_j и z_I, сделанные в периоде t на период $(t-1)$;
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – специально подобранные положительные числа;

$$\sigma_I^2\{T \mid T+1\}=(z_I^T)^2, \quad \sigma_{j,I}\{T \mid T+1\}=z_j^T z_I^T.$$

Тогда

$$\hat{\beta}_j=\frac{\sigma_{j,I}\{0 \mid 1\}}{\sigma_I^2\{0 \mid 1\}}.$$

20.1. В течение 18 мес. по портфелю акций выплачивались дивиденды 3 раза. Размеры дивидендов и стоимости портфеля акций в момент выплат дивидендов приведены ниже.

D, тыс. долл.	5	6	6
V, тыс. долл.	200	210	215

Найти дивидендную доходность портфеля акций за 18 мес. Какова годовая дивидендная доходность портфеля акций при непрерывном начислении?

20.2. В течение 6 мес. значение индекса акций изменилось с 400 до 410. Какова доходность индекса за этот период, если годовая дивидендная доходность индекса при непрерывном начислении равна 10%?

20.3. В течение 10 мес. значение индекса акций изменилось с 210 до 215. Какова доходность индекса за этот период, если годовая дивидендная доходность индекса при непрерывном начислении равна 8%?

20.4. В течение двух лет по портфелю акций выплачивались дивиденды 4 раза. Размеры дивидендов и стоимости портфеля акций в момент выплат дивидендов приведены ниже.

D, тыс. долл.	0,5	0,5	0,6	0,6
V, тыс. долл.	100	102	103	104

Найти дивидендную доходность портфеля акций за 2 года. Какова годовая дивидендная доходность портфеля акций при непрерывном начислении?

20.5. Данные о доходностях рискованных активов трех видов, доходностях рыночного индекса акций и величинах безрисковой процентной ставки последовательно за 12 мес. приведены ниже.

t	r_f^t, %	r_I^t, %	r_1^t, %	r_2^t, %	r_3^t, %
1	6	18,3	18,0	31,2	37,7
2	6	12,0	21,3	8,9	21,8
3	4	6,4	–0,1	9,5	14,6
4	5	9,5	6,6	9,6	36,9
5	4	8,4	7,2	7,7	3,3
6	4	8,5	1,2	14,8	–15,6
7	3	–3,8	–6,0	8,4	–7,0
8	2	–0,1	0,8	–1,0	–9,5
9	4	7,5	5,1	5,5	9,6
10	5	11,2	17,7	15,8	0,3
11	4	6,5	11,5	7,8	14,6
12	4	2,8	3,1	5,3	11,9

1. Оценить коэффициенты линейных регрессий $z_j^t=r_j^t-r_f^t$, $j=1, 2, 3$ по $z_I^t=r_I^t-r_f^t$ и найти значения всех показателей, используемых для тестирования моделей.

2. Построить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с надежностью 95%.

3. Определить прогнозные значения бета-коэффициентов рискованных активов методом экспоненциального взвешивания, если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda=0{,}9$.

20.6. Данные о доходностях рискованных активов трех видов, доходностях рыночного индекса акций и величинах безрисковой процентной ставки последовательно за 10 мес. приведены ниже.

t	r_f^t, %	r_I^t, %	r_1^t, %	r_2^t, %	r_3^t, %
1	10	20	26,3	23,7	23,2
2	8	10	15,4	9,5	17,9
3	5	15	16,5	11,4	12,6
4	12	16	13,6	14,2	18,1
5	–1	20	8,9	20,3	18,7
6	–2	17	22,5	10,7	22,6

Продолжение

t	r_f^t, %	r_I^t, %	r_1^t, %	r_2^t, %	r_3^t, %
7	8	14	20,2	27,9	15,9
8	6	12	23,8	7,2	23,6
9	8	12	15,5	1,4	5,9
10	10	10	8,6	23,2	27,0

1. Оценить коэффициенты линейных регрессий $z_j^t = r_j^t - r_f^t$, $j = 1, 2, 3$ по $z_I^t = r_I^t - r_f^t$ и найти значения всех показателей, используемых при тестировании моделей.

2. Построить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с надежностью 95%.

3. Определить прогнозные значения бета-коэффициентов рискованных активов методом экспоненциального взвешивания, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 0,94$.

2.21. АРБИТРАЖНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Рассматривается рынок рискованных активов, удовлетворяющий k-факторной модели:

$$\tilde{r}_j = \alpha_j + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ij} F_i + \varepsilon_j;$$

$$\bar{\varepsilon}_j = 0, \quad \sigma_{F_i, \varepsilon_j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Вектор $\Delta\overline{\Theta} = (\Delta\Theta_1, \Delta\Theta_2, \ldots, \Delta\Theta_n)$ называется ***арбитражным портфелем***, если выполняются следующие условия:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta\Theta_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \Delta\Theta_j = 0, \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j \Delta\Theta_j > 0.$$

Если существует арбитражный портфель, то инвесторы, владеющие хорошо диверсифицированными портфелями рискованных активов, имеют прибыльные арбитражные возможности, т.е., покупая и продавая активы, они могут получить прибыль без риска.

Арбитражная модель оценки финансовых активов определяется равенствами

$$\bar{r}_j = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ij} \lambda_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – некоторые числа.

Равновесный рынок рискованных активов удовлетворяет арбитражной модели оценки финансовых активов, если количество рассматриваемых активов больше учитываемых факторов.

Если инвесторы могут предоставлять кредиты и брать ссуды под безрисковую процентную ставку r_f, то модель оценки финансовых активов имеет вид

$$\bar{r}_j = r_f + \sum_{i=1}^{k} (\delta_i - r_f) \beta_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где δ_i – ожидаемая доходность факторного портфеля P_i, соответствующего i-му фактору $(\beta_{i,P_i} = 1, \ \beta_{l,P_i} = 0, \ l \neq i)$.

21.1. Факторные бета-коэффициенты и ожидаемые доходности рискованных активов приведены ниже.

j	β_{1j}	β_{2j}	$\bar{r}_j$
1	2,4	1,6	0,13
2	1,6	0,9	0,18
3	0,8	1,0	0,10
4	1,6	1,3	0,12

Найти арбитражный портфель $\Delta\overline{\Theta}$ и определить ожидаемую доходность портфеля $\overline{\Theta}+\Delta\overline{\Theta}$, где $\overline{\Theta}=(0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}2)$.

21.2. Факторные бета-коэффициенты и ожидаемые доходности рискованных активов приведены ниже.

j	β_{1j}	β_{2j}	β_{3j}	$\bar{r}_j$
1	1,2	1,0	1,4	0,10
2	0,8	0,6	1,2	0,12
3	0,9	0,5	1,7	0,08
4	1,0	0,9	1,2	0,15
5	1,2	1,0	1,2	0,12

Найти арбитражный портфель $\Delta\overline{\Theta}$ и определить ожидаемую доходность портфеля $\overline{\Theta}+\Delta\overline{\Theta}$, где $\overline{\Theta}=(-0{,}5;\ 0{,}3;\ -0{,}4;\ 1{,}2;\ 0{,}4)$.

21.3. Значения факторных бета-коэффициентов рискованных активов двух видов приведены ниже.

j	β_{1j}	β_{2j}	β_{3j}	β_{4j}
1	1,2	–0,1	0,2	1,5
2	1,1	0,2	–0,1	1,6

Найти равновесные ожидаемые доходности рискованных активов, если безрисковая процентная ставка $r_f = 0{,}08$, а ожидаемые доходности факторных портфелей: $\delta_1 = 0{,}1$; $\delta_2 = 0{,}12$; $\delta_3 = 0{,}08$; $\delta_4 = 0{,}15$.

21.4. Ожидаемые доходности и факторные бета-коэффициенты четырех видов рискованных активов приведены ниже.

j	$\bar{r}_j$	β_{1j}	β_{2j}
1	0,10	1,2	0,6
2	0,15	1,0	0,8
3	0,08	0,8	1,0
4	0,12	1,2	1,3

1. Найти факторные портфели рискованных активов для каждого фактора.

2. Определить ожидаемые доходности найденных факторных портфелей.

21.5. Факторные бета-коэффициенты трех видов рискованных активов приведены ниже.

j	β_{1j}	β_{2j}	β_{3j}
1	1,8	0,6	1,2
2	1,6	1,2	0,5
3	1,2	0,8	0,4

Определить равновесную ожидаемую доходность портфеля $P = (0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}5)$, если безрисковая процентная ставка $r_f = 0{,}05$, а ожидаемые доходности факторных портфелей $\delta_1 = 0{,}15$; $\delta_2 = 0{,}08$; $\delta_3 = 0{,}06$.

21.6. Значения факторных бета-коэффициентов рискованных активов трех видов приведены ниже.

j	β_{1j}	β_{2j}	β_{3j}
1	0,8	0,2	–0,1
2	1,2	0,1	–0,2
3	0,9	–0,1	–0,1

Найти равновесную ожидаемую доходность портфеля $P = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}2)$, если безрисковая процентная ставка $r_f = 0{,}6$, а показатели рыночного портфеля: $\sigma_M^2 = 0{,}05$, $\operatorname{cov}(F_1, r_M) = 0{,}08$, $\operatorname{cov}(F_2, r_M) = 0{,}06$, $\operatorname{cov}(F_3, r_M) = 0{,}10$, $\bar{r}_M = 0{,}15$.

21.7. Факторные бета-коэффициенты рискованных активов трех видов приведены ниже.

j	β_{1j}	β_{2j}
1	1,2	0,1
2	1,0	–0,2
3	0,8	–0,1

Инвесторы могут кредитовать и брать ссуды под безрисковую процентную ставку $r_f = 0{,}06$.

Найти равновесную ожидаемую доходность активов третьего вида, если равновесные ожидаемые доходности активов первого и второго видов соответственно равны 10 и 6,5%.

2.22. ЭФФЕКТИВНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ АКТИВОВ (ИНВЕСТИЦИОННЫМ ФОНДОМ)

Реализованной доходностью управляемого портфеля активов P за период от t до $(t_0 + t_n)$ называется число R_P, удовлетворяющее равенству

$$1 + R_P = (1 + r_1)(1 + r_2)\cdots(1 + r_n),$$

где $$r_i = \frac{V_i - Q_i - V_{i-1}}{V_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ – денежные суммы, инвестированные в портфель активов за период $[t_0, t_0 + t_n]$;

$V_1, V_2, \ldots, V_n$ – стоимости портфеля в момент инвестирования (V_0 – начальная стоимость портфеля P).

Если денежные суммы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ инвестировались в моменты $t_0 + t_1, t_0 + t_2, \ldots, t_0 + t_n$, то годовая реализованная доходность портфеля активов P может быть найдена на основе взвешивания по стоимости из уравнения

$$V_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{(1+y)^{t_i}} + \frac{V_n}{(1+y)^{t_n}}.$$

Для оценки эффективности управления портфелем P за T предыдущих периодов, выбрав эталонным портфель B, можно найти значение показателя Шарпа

$$k_s = \frac{\bar{d}}{\sigma_d},$$

где $\bar{d}$ – среднее значение избыточной доходности $d^t = R_P^t - R_B^t$, $t = 1, 2, \ldots, T$;

σ_d – стандартное отклонение избыточной доходности (R_P^t и R_B^t – реализованные доходности портфелей P и B за период t).

Эффективность управления портфелем P может оцениваться с помощью показателя Трейнора

$$k_{T_r} = \frac{\bar{R}_P - \bar{r}_f}{\hat{\beta}_P},$$

где $\bar{R}_P$ – среднее значение реализованной доходности портфеля P;

$\bar{r}_f$ – среднее значение безрисковой процентной ставки;

$\hat{\beta}_P$ – оценка бета-коэффициента портфеля P относительно рыночного индекса.

22.1. Начальная стоимость портфеля активов составляет 10 млн долл. Данные об управлении этим портфелем за 1,5 года приведены ниже.

t_i, лет	0,5	0,75	1,5
V_i, млн долл.	11	12	13
Q_i, млн долл.	1	–1	–

Найти:

а) реализованную доходность портфеля за 1,5 года;

б) эффективную годовую реализованную доходность портфеля;

в) годовую реализованную доходность портфеля, взвешенную по стоимости.

22.2. Начальная стоимость портфеля активов составляет 200 тыс. долл. Данные об управлении этим портфелем за 2 года приведены ниже.

t_i, лет	0,5	0,75	1,5	2,0
V_i, тыс.долл.	160	100	210	220
Q_i, тыс.долл.	–50	–50	100	–

Найти:

а) реализованную доходность портфеля за 2 года;

б) эффективную годовую реализованную доходность портфеля;

в) годовую реализованную доходность портфеля, взвешенную по стоимости.

22.3. Данные о доходностях двух портфелей активов и доходности индекса акций SP-500 за 10 мес. приведены ниже.

t	R_1^t, %	R_2^t, %	R_I^t, %	r_f^t, %
1	–8,5	–3,4	7,9	6
2	4,0	0,8	6,6	6
3	–14,3	–32,4	–10,3	6
4	–18,9	–24,6	–25,0	6
5	14,7	44,8	5,8	6
6	26,5	35,1	21,5	6
7	37,2	33,1	0,7	6
8	23,8	12,9	5,3	6
9	–7,2	–15,6	10,2	6
10	6,6	14,5	0,5	6

Сравнить эффективности управления портфелями активов: а) на основе показателей Шарпа; б) на основе показателей Трейнора.

22.4. Данные о доходностях двух портфелей активов и доходности индекса акций SP-500 за 6 мес. приведены ниже.

t	R_1^t, %	R_2^t, %	R_I^t, %	r_f^t, %
1	8,5	–3,4	7,9	3
2	4,0	0,8	6,6	3
3	–14,3	–22,4	–10,3	3
4	–18,9	–24,6	–25,0	3
5	14,7	44,8	5,8	3
6	26,5	35,1	21,5	3

Сравнить эффективности управления портфелями активов: а) на основе показателей Шарпа; б) на основе показателей Трейнора.

22.5. Показатели портфеля *P*, эталонного портфеля *B* и нового актива *A*:

$$\overline{R}_P = 0{,}16;\quad \overline{R}_B = 0{,}154;\quad \overline{R}_A = 0{,}05;$$

$$\sigma_B = 0{,}2;\quad \sigma_A = \sigma_P = 0{,}4;\quad \rho_{P,B} = 0{,}5;\quad \rho_{P,A} = -0{,}2;\quad \rho_{A,B} = 0.$$

Определить показатели Шарпа для:

а) портфеля *P*;

б) портфеля, образовавшегося после покупки актива *A*, стоимость которого составляет 1,5% стоимости портфеля *P*.

22.6. Показатели портфеля *P*, эталонного портфеля *B* и нового актива *A*:

$$\overline{R}_P = 0{,}16;\quad \overline{R}_B = 0{,}10;\quad \overline{R}_A = 0{,}10;$$

$$\sigma_P = \sigma_B = \sigma_A;\quad \rho_{P,B} = \rho_{B,A} = 0{,}5;\quad \rho_{P,A} = -0{,}2.$$

При какой цене нового актива имеет смысл его покупать?

Форвардные и фьючерсные контракты. Своны

3.1. ПРЕДПОЛАГАЕМЫЕ ФОРВАРДНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

Рассматриваются чисто дисконтные облнгацнн с разными сроками до их погашения, выпущенные эмитентами одного и того же кредитиого рейтинга.

Текущая процентная ставка $\tilde{r}_t(\Theta)$ на срок Θ лет при непрерывном начнсленнн должиа удовлетворять равеиству

$$1 \cdot e^{-\tilde{r}_t(\Theta)\Theta} = B_t(t+\Theta),$$

где $B_t(t+\Theta)$ – текущая стоимость чнсто дисконтной облигацин номиналом в одну денежную единицу с датой погашения $t+\Theta$.

Предполагаемой форвардной процентной ставкой в текущий момент t на будущнй пернод от момента s до момента $s+\Theta$ называется ставка $\tilde{f}_t(s,\Theta)$ такая, что

$$e^{\tilde{f}_t(s,\Theta)\Theta} = \frac{B_t(s)}{B_t(s+\Theta)}.$$

Имеет место следующее равенство:

$$\tilde{f}_t(s,\Theta) = \frac{1}{\Theta}(\tilde{r}_t(s+\Theta-t)(s+\Theta-t) - \tilde{r}_t(s-t)(s-t).$$

Если денежную сумму Q инвестировать на $s-t$ лет под процентную ставку $\tilde{r}_t(s-t)$, а затем всю накопленную сумму реинвестировать под предполагаемую форвардиую процентиую ставку $\tilde{f}_t(s,\Theta)$ на Θ лет, то получнм такую же сумму, как при инвести-

рованни суммы Q на $s+\Theta-t$ лет под процентную ставку $\tilde{r}_t(s+\Theta-t)$, т.е.

$$Q e^{\tilde{r}_t(s-t)(s-t)} e^{\tilde{f}_t(s,\Theta)\Theta} = Q e^{\tilde{r}_t(s+\Theta-t)(s+\Theta-t)}.$$

Предполагаемая форвардная процентная ставка $f_t\{m,s,\Theta\}$ прн начислении процентов m раз в год определяется равенством

$$f_t\{m,s,\Theta\} = m\left\{e^{\frac{\tilde{f}_t(s,\Theta)}{m}} - 1\right\}.$$

Еслн известна кривая рыночных доходностей $r = \tilde{r}_t(\Theta), \Theta > 0$, то для каждого момента $s > t$ можно рассмотреть крнвую предполагаемых форвардиых процентных ставок $f = \tilde{f}_t(s,\Theta)$.

1.1. На рынке имеются чисто днсконтные облигации четырех видов, показателн которых приведены ииже.

Облнгацня	Номинал, долл.	Срок до погашения, лет	Рыночная цена, долл.
1	100	2,0	89,50
2	200	3,0	164,80
3	100	3,5	81,50
4	200	5,0	150,20

Найтн все возможные предполагаемые форвардные процентные ставки при непрерывном начисленнн.

1.2. На рынке имеются чнсто днсконтные облнгацнн трех видов, данные по которым приведены ннже.

Облигация	Номнная, долл.	Срок до погашения, лет	Рыночная цена, долл.
1	100	2,0	89,00
2	150	4,0	118,45
3	200	6,0	152,25

Найти предполагаемые форвардные процентные ставки при начислеинн процентов дважды в год.

1.3. Даны три купонные облигацни с полугодовымн купоиами, показателн которых приведены ннже.

Облигация	Номннал, долл.	Срок до погашения,лет	Купонная ставка, %	Рыночная цена, долл.
1	100	0,5	0,0	97,04
2	100	1,0	6,0	98,95
3	100	2,0	8,0	98,90

Найти текущие рыночные процентиые ставки $\tilde{r}_t(0{,}5)$; $\tilde{r}_t(1{,}0)$; $\tilde{r}_t(1{,}5)$; $\tilde{r}_t(2{,}0)$ и все возможные предполагаемые форвардные процеитные ставкн при непрерывном начисленни.

1.4. Известны рыночные доходностн прн иепрерывном начислении:

Срок (Θ), годы	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25
Процентная ставка $(\tilde{r}_t(\Theta))$,%	5,0	5,2	6,0	5,8	5,9	6,2	6,3	6,4	6,4

Найти предполагаемые форвардные процентиые ставки $\tilde{f}_t(t+0{,}25;\Theta)$, $\tilde{f}_t(t+0{,}5;\Theta)$.

На одном рисунке построить кривую рыночных доходностей $r=\tilde{r}_t(\Theta)$ и кривые предполагаемых форвардиых процентных ставок $f=\tilde{f}_t(t+0{,}25;\Theta)$, $f=\tilde{f}_t(t+0{,}5;\Theta)$.

1.5. Даны предполагаемые форвардные процентные ставки при непрерывном начнсленнн

Срок (Θ), годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Форвардная процентная ставка $(\tilde{f}_t(t+0{,}5;\Theta))$, %	6,5	6,8	6,9	7,0	7,3

Найти рыночные процентные ставки при непрерывном начислении, если $\tilde{r}_t(0{,}5)=0{,}06$.

1.6. Известны рыночные доходности прн начисленнн процентов 2 раза в год:

Срок (Θ), годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Процентная ставка $(r_t\{2,\Theta\})$, %	8,0	8,5	8,2	7,8	7,5	8,0

Найти предполагаемые форвардиые процентные ставки $f_t(2;\ t+0{,}5;\ \Theta)$.

На одном рисуике построить кривую рыночных доходностей $r = r_t\{2, \Theta)$ и $f = f_t(2;\ t + 0{,}5;\ \Theta)$.

1.7. Известны рыночная процентная ставка $r_t\{4; 2\} = 5\%$ н предполагаемая форвардная процентная ставка $f_t\{4; t + 2; 1\} = 6\%$. Найтн рыночную процентиую ставку $r_t\{4; 3\}$.

1.8. Дана облнгация, по которой через $t_1, t_2, \ldots, t_n$ лет после текущего момента должны выплачиваться денежные суммы $C_{t_1}, C_{t_2}, \ldots, C_{t_n}$ соответственно.

Доказать, что текущая рыночная стоимость облнгацин P удовлетворяет равеиству

$$P=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{t_k}}{\left(1+r_t\{1,t_1\}\right)^{t_1}\left(1+f_t\{1,t+t_1,t_k-t_1\}\right)^{t_k-t_1}}.$$

3.2. ФОРВАРДНЫЕ КОНТРАКТЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Форвардный контракт – это соглашение купнть или продать некоторые активы в определенный момеит в будущем по заранее установленной цене.

Цена K, по которой стороны согласились купить и соответственно продать актнвы, называется ***ценой поставки*** (передачи) активов илн ***ценой исполнения*** форвардного контракта.

В момент T исполнения форвардного контракта выигрыш (доход) от длинной позиции составляет $S_T - K$, а от короткой позиции $K - S_T$, где S_T – спот-цена исходиых актнвов на дату T.

В дальнейшем предполагается, что форвардный и спот-рынки являются совершеиными, по форвардным сделкам отсутствует кредитный риск и иет арбитражных возможностей.

В этих условиях все форвардные контракты на один н тот же вид активов с фиксированной датой поставкн T должны заключаться по одной и той же цене поставки.

Цеиа поставки, по которой в текущий момент t заключаются форвардные контракты иа активы данного вида с датой исполнения T, называется ***форвардной ценой активов на срок $T - t$ лет*** и обозначается через $F_t(T)$.

Текущие стоимости длнниой н короткой позиций в форвардном контракте оцениваются следующнм образом:

$$f_{\text{дл}} = (F_t(T) - K)\, e^{-\tilde{r}(T-t)} \text{ и } f_{\text{кор}} = (K - F_t(T))\, e^{-\tilde{r}(T-t)},$$

где $\tilde{r}$ – безрнсковая процентиая ставка на $T - t$ лет при непрерывном начислении.

2.1. Инвестор заннмает короткую позицию по двум едииицам исходных активов при цене поставки 60 долл. и длинную позицию на одну еднннцу нсходиых активов при цене поставки 59 долл.

Определить доход инвестора на момент поставки, если цена исходных активов в этот момент равнялась 55 долл.

2.2. Инвестор купил одну единнцу исходных активов и занял короткую позицию на две единицы этих актнвов прн цене поставки 100 долл.

Каков доход инвестора на момент поставки актнвов, еслн исходные активы не приносят доходов, а их цена на момент поставки равна 90 долл.?

2.3. Инвестор произвел короткую продажу двух единиц исходных активов и занял длинную позицию на одну единицу этих активов с ценой поставки 1000 руб.

Каков доход инвестора на момент поставки, если активы обладают постоянной дивидендной доходностью в 4%, а их цена на момент поставки 980 руб.?

2.4. Определить стоимость длиной позицин в форвардном контракте иа 10 000 т сырой нефти при цене поставки 3200 руб./т, когда до момента поставкн остается 5 мес., а форвардная цена сырой нефтн составляет 3160 руб., считая, что безрнсковая процентная ставка на 5 мес. прн иепрерывном начнслении равна 28%.

2.5. Определить стоимость короткой позиции в форвардном контракте на единицу активов с ценой поставки 80 долл., когда до момента поставки остается 6 мес., а форвардная цена активов составляет 100 долл., еслн безрнсковая процентная ставка на 6 мес. прн непрерывиом начислении равна 8%.

2.6. Инвестор занимает короткую позицию на одну едииицу нсходных активов с ценой поставки 32 руб. и длинную позицию на две еднннцы этих актнвов с ценой поставки 31 руб.

Определнть общую стонмость позицин инвестора, когда до момента поставки остается 4 мес., а форвардная цена активов составляет 30 руб., еслн безрнсковая процентная ставка на 4 мес. прн непрерывном начисленин равна 20%.

2.7. Инвестор заннмает длинную позицию на единицу исходных активов с ценой поставки 100 долл.

Определить прибыльную (без риска) стратегию, если текущая форвардная цена активов равна 105 долл.

2.8. Инвестор заннмает длинную позицию на 5 единиц активов с поставкой через 6 мес. н короткую позицию на 10 единиц этнх же активов с поставкой через 8 мес. Цены исполнення соответственно равны 90 и 95 долл.

Оценить текущую стоимость общей позиции инвестора, если форвардные цеиы активов на 6 н 8 мес. равиы 95 н 94 долл., а безрнсковая процеитная ставка для всех сроков прн непрерывном начисленни составляет 8%.

3.3. ФОРВАРДНЫЕ ЦЕНЫ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ С ИЗВЕСТНЫМИ ДОХОДАМИ

Фииансовые актнвы – это активы, которые большинством участиков рынка рассматрнваются как средство инвестирования, а не средство потребления.

Предполагается, что рынкн являются совершенными, можно неограниченно кредитовать и брать ссуды под безрнсковые процентные ставки н по форвардным сделкам отсутствует дефолт-риск.

1. Прн отсутствии арбитражных возможностей форвардная цена $F_t(T)$ чисто дисконтной облигации без дефолт-риска на срок $T - t$ лет определяется равенством

$$F_t(T) = Ae^{-\tilde{f}_t(T,T^*-T)(T^*-T)},$$

где A – номинал облигации;
T^* – дата погашения облигации;
$\tilde{f}_t(T, T^*-T)$ – предполагаемая форвардная процентная ставка, наблюдаемая в момент t на период от T до T^*;

$$\left(\tilde{f}_t(T,T^*-T) = \frac{\tilde{r}_t(T^*-t)(T^*-t)-\tilde{r}_t(T-t)(T-t)}{T^*-T}\right).$$

2. Форвардный контракт на рыночную процентную ставку, начисляемую m раз в год, – это обязательство разместить (соответственно принять) на депозит в будущий момент T заданную денежную сумму Q на срок $^1/_m$ лет под заранее установленную процентную ставку.

Замечание. Форвардный контракт на рыночную процентную ставку часто называют соглашением о форвардной процентной ставке.

При отсутствии арбитражных возможностей форвардная процентная ставка $F_t(T)$ обязана совпадать с предполагаемой форвардной процентной ставкой $f_t(m, T, ^1/_m)$, т.е.

$$\left(1+\frac{r_t(m,T-t)}{m}\right)^{(T-t)m}\left(1+\frac{f_t(m,T,\frac{1}{m})}{m}\right)=\left(1+\frac{r_t(m,T+\frac{1}{m}-t)}{m}\right)^{(T-t)m+1}.$$

3. Если известна приведенная стоимость доходов, поступающих от активов, то при отсутствии арбитражных возможностей форвардная цена активов $F_t(T)$ на срок $T-t$ лет определяется равенством

$$F_t(T) = (S_t - I_t)\,e^{\tilde{r}(T-t)},$$

где S_t – спот-цена активов в текущий момент t;
I_t – приведенная стоимость доходов, поступающих от активов за время от t до T;
$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка на срок $T-t$ лет при непрерывном начислении.

4. Финансовые активы, доходы по которым выплачиваются в виде самих этих активов, обладают постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, если за любое время τ единица этих активов за счет поступающих доходов превращается в $e^{\tilde{q}\tau}$ единиц этих активов.

При отсутствии арбитражных возможностей форвардная цена активов с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ определяется равенством

$$F_t(T) = S_t e^{(\tilde{r}-\tilde{q})(T-t)},$$

где S_t – спот-цена активов в текущий момент t;
$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка на срок $T-t$ лет при непрерывном начислении;
T – дата поставки активов.

3.1. Дана чисто дисконтная облигация без дефолт-риска номиналом 2000 руб. когда до ее погашения остается 9 мес. Найти текущую форвардную цену облигации, если до даты передачи остается 6 мес., а безрисковые процентные ставки на 6 и 9 мес. при непрерывном начислении равны 15 и 16% соответственно.

Построить прибыльную арбитражную стратегию, если рыночная форвардная цена облигации оказалась равной 1850 руб.

3.2. Доказать, что стоимость длинной позиции в форвардном контракте на чисто дисконтную облигацию без дефолт-риска определяется равенством

$$f_{дл} = Ae^{-\tilde{r}_t(T^*-t)(T^*-t)} - Ke^{-\tilde{r}_t(T-t)(T-t)},$$

где A – номинал облигации;
T^* – дата погашения облигации;
K – цена поставки облигации;
T – дата поставки облигации.

3.3. Дан форвардный контракт на рыночную процентную ставку, начисляемую 2 раза в год.

Определить форвардную процентную ставку через 6 мес., если рыночные процентные ставки на 6 и 12 мес. соответственно равны 8 и 10% (при начислении 2 раза в год).

3.4. Дан форвардный контракт на рыночную процентную ставку, начисляемую 4 раза в год, с уровнем поставки 8% и объемом 100 000 руб.

Определить стоимость короткой позиции в форвардном контракте, если до его истечения остается 10 мес., а рыночные процентные ставки на 10 и 13 мес. равны соответственно 9 и 9,5%.

3.5. Рыночные процентные ставки при начислении 2 раза в год на 8 и 14 мес. равны 6 и 7,5% соответственно.

Определить арбитражную стратегию, если рыночная форвардная процентная ставка через 8 мес. на полгода равна 9%.

3.6. Найти форвардную цену акции, не приносящей дивидендов, с поставкой через 3 мес., если текущая цена акции 80 долл., а безрисковая процентная ставка на 3 мес. при непрерывном начислении составляет 8%.

Определить прибыльную арбитражную стратегию, если рыночная форвардная цена акции равна 79 долл.

3.7. Найти форвардную цену акции с поставкой через 12 мес., по которой дивиденды в размере 5 долл. ожидаются через 4 и 8 мес., если текущая цена акции 120 долл., а безрисковые процентные ставки для всех сроков при непрерывном начислении равны 7%.

Определить стоимость длинной позиции в форвардном контракте на 100 акций через 2 мес., если цена акции окажется равной 110 долл., а безрисковые процентные ставки не изменятся.

3.8. Найти форвардную цену акции с поставкой через 8 мес., по которой дивиденды в размере 4 долл. ожидаются через 4 мес., если текущая цена акции 180 долл., а безрисковые процентные ставки на 4 и 8 мес. при непрерывном начислении равны 5 и 8% соответственно.

Построить прибыльную арбитражную стратегию, если форвардная цена акции на рынке оказалась равной: 1) 180 долл.; 2) 188 долл.

3.9. Найти шестимесячный форвардный обменный курс американского доллара, если текущий обменный курс 30,10 руб. за 1 долл., а безрисковые процентные ставки в России и США на срок 6 мес. при непрерывном начислении равны 15 и 6% соответственно.

Определить прибыльную арбитражную стратегию, если шестимесячный форвардный обменный курс на рынке оказался равным: 1) 31 руб.; 2) 32 руб.

3.4. ФОРВАРДНЫЕ ЦЕНЫ ТОВАРОВ

При отсутствии арбитражных возможностей форвардная цена любого товара с датой поставки T удовлетворяет неравенству

$$F_t(T) \le (S_t + U_t)e^{\tilde{r}(T-t)},$$

где S_t – спот-цена единицы товара в текущий момент t;
U_t – приведенная стоимость издержек на хранение (охрану) единицы товара в течение $T-t$ лет;
$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка на период от t до T при непрерывном начислении.

Если большинство участников рынка рассматривает данный товар как средство инвестирования, то форвардная цена этого товара определяется равенством

$$F_t(T) = (S_t + U_t)e^{\tilde{r}(T-t)}.$$

Положительное число $\tilde{\alpha}$, удовлетворяющее равенству

$$F_t(T)e^{\tilde{\alpha}(T-t)} = (S_t + U_t)e^{\tilde{r}(T-t)},$$

называется мерой физической полезности единицы данного товара в течение $T-t$ лет.

При известной мере физической полезности товара $\tilde{\alpha}$ форвардная цена товара с датой поставки T может быть найдена следующим образом:

$$F_t(T) = (S_t + U_t)e^{(\tilde{r}-\tilde{\alpha})(T-t)}.$$

4.1. Найти 10-месячную форвардную цену унции серебра, если текущая цена равна 10 долл. за унцию, затраты на хранение составляют 0,08 долл. в квартал и выплачиваются вперед, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении – 10%.

Указать прибыльную арбитражную стратегию, если на рынке 10-месячная форвардная цена унции серебра оказалась равной: 1) 11 долл.; 2) 12 долл.

4.2. Найти 11-месячную форвардную цену унции золота, если текущая спот-цена равна 400 долл. за унцию, затраты на хранение составляют 10 долл. в год и оплачиваются поквартально вперед, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении – 7%.

4.3. Определить меру физической полезности 1 кг меди за 10 мес., если 10-месячная форвардная цена меди равна 20,5 руб., текущая спот-цена меди – 18 руб., затраты на хранение 1 кг меди составляют 0,5 руб. и оплачиваются в конце срока хранения, а безрисковая процентная ставка на 10 мес. при непрерывном начислении равна 15%.

4.4. Найти шестимесячную форвардную цену меди, если текущая цена меди равна 20 руб./кг, затраты на хранение составляют 0,6 руб. и выплачиваются в конце срока хранения, безрисковая процентная ставка на 6 мес. при непрерывном начислении составляет 18%, а мера физической полезности 1 кг меди за 6 мес. – 1,5%.

4.5. $F_t(T_1)$ и $F_t(T_2)$ – форвардные цены товара с датами поставок соответственно T_1 и T_2, $T_2 > T_1$. Издержки на хранение единицы товара за время τ составляют $u\tau$ и выплачиваются вперед.

Доказать, что при отсутствии арбитражных возможностей выполняется неравенство

$$F_t(T_2) \le (F_t(T_1) + u(T_2 - T_1))e^{\tilde r(T_2 - T_1)},$$

где $\tilde r$ – безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении, не меняющаяся в течение времени.

3.5. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ДИСКОНТИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ И ФОРВАРДНЫЕ ЦЕНЫ АКТИВОВ

Примитивной ценной бумагой называется требование на получение в определенный будущий момент денежного выигрыша, являющегося случайной величиной.

Предположим, что на рынке имеются примитивные ценные бумаги n видов, по которым в будущий момент T должны соответственно выплачиваться выигрыши

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$

удовлетворяющие условиям $M\xi_k^2 < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ($M\xi$ – математическое ожидание случайной величины ξ).

Случайная величина D_t^T называется ***стохастическим дисконтирующим множителем*** на период от t до T, если

$$p_t^T(\xi_k) = M(\xi_k D_t^T), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $p_t^T(\xi_k)$ – текущая стоимость требования на получение в момент T выигрыша ξ_k.

Если рынок примитивных ценных бумаг является совершенным, то при отсутствии арбитражных возможностей имеют место следующие утверждения.

1. Текущая стоимость требования на получение в момент T выигрыша ξ, являющегося линейной комбинацией выигрышей $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, удовлетворяет равенству

$$p_t^T(\xi) = M(\xi D_t^T).$$

2. Форвардная цена активов на срок $T - t$ лет определяется равенством

$$F_t(T) = M(S_T D_t^T)e^{\tilde r_t(T-t)(T-t)},$$

где S_T – спот-цена исходных активов на момент T;
D_t^T – стохастический дисконтирующий множитель на период от t до T;
$\tilde r_t(T-t)$ – безрисковая процентная ставка на срок $T - t$ лет при непрерывном начислении.

5.1. На рынке имеются примитивные ценные бумаги трех видов, по которым через полгода должны выплачиваться случайные выигрыши ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Найти стохастический дисконтирующий множитель $D_t^{t+0,5}$, если

$$p_t^{t+0,5}(\xi_1)=10,\quad p_t^{t+0,5}(\xi_2)=13,\quad p_t^{t+0,5}(\xi_3)=10,$$

$$M\xi_1^2=M\xi_2^2=M\xi_3^2=0,4;\quad M(\xi_1\xi_2)=M(\xi_1\xi_3)=M(\xi_2\xi_3)=0,1.$$

5.2. На рынке имеются примитивные ценные бумаги трех видов, по которым через 0,25 года должны выплачиваться случайные выигрыши ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Найти текущие цены этих требований, если стохастический дисконтирующий множитель

$$D_t^{t+0,25}=4\xi_1+\xi_2-\xi_3,$$

где $M\xi_1^2=M\xi_2^2=M\xi_3^2=0,4;\quad M(\xi_1\xi_2)=M(\xi_1\xi_3)=M(\xi_2\xi_3)=0,1.$

5.3. Найти текущую стоимость требования на получение через 8 мес. выигрыша ξ, когда безрисковая процентная ставка на 8 мес. при непрерывном начислении равна 6%, если:

$$\text{а) } M\xi=20\text{ руб., }\operatorname{cov}\left(\xi, D_t^{t+8/12}\right)=0,5\text{ руб.;}$$

$$\text{б) } M\xi=20\text{ руб., }\operatorname{cov}\left(\xi, D_t^{t+8/12}\right)=-0,5\text{ руб.}$$

5.4. Найти форвардную цену акции на срок 6 мес., когда безрисковая процентная ставка на 6 мес. при непрерывном начислении равна 6%, если

$$M(S_{t+0,5})=100,\quad \sigma(S_{t+0,5})=10,\quad \sigma(D_t^{t+0,5})=1,$$

$$\rho(S_{t+0,5}, D_t^{t+0,5})=0,6\text{ (коэффициент корреляции).}$$

($S_{t+0,5}$ – цена акции;
$D_t^{t+0,5}$ – стохастический дисконтирующий множитель).

5.5. Найти форвардную цену акции на срок 9 мес., когда безрисковая процентная ставка на 9 мес. при непрерывном начислении равна 8%, если

$$M(S_{t+0,75})=80,\quad \sigma(S_{t+0,75})=20,\quad \sigma(D_t^{t+0,75})=1,5,$$

$$\rho(S_{t+0,75}, D_t^{t+0,75})=-0,8\text{ (коэффициент корреляции).}$$

5.6. Вывести формулу для форвардной цены чисто дисконтной облигации, используя стохастический дисконтирующий множитель.

3.6. ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ

Фьючерсные контракты – это стандартизированные форвардные контракты, торговля которыми производится на специальных биржах.

По условиям фьючерсных торгов при открытии той или иной фьючерсной позиции инвестор обязан перевести определенное обеспечение (***первоначальную маржу***) на специальный счет, а в конце каждого рабочего дня биржи проводится переоценка фьючерсной позиции по рыночной стоимости.

Переоценка фьючерсной позиции по рыночной стоимости осуществляется следующим образом:

- если фьючерсная цена закрытия Φ_2 оказывается больше фьючерсной цены закрытия предыдущего дня Φ_1, то денежная сумма $A(\Phi_2-\Phi_1)$, где A – объем фьючерсного контракта, снимается со счета маржи стороны, занимающей короткую позицию, и переводится на счет маржи стороны с длинной позицией;
- если $\Phi_2<\Phi_1$, то денежная сумма $A(\Phi_1-\Phi_2)$ снимается со счета маржи стороны с длинной позицией и переводится на счет маржи стороны с короткой позицией.

После переоценки фьючерсной позиции по рыночной стоимости могут возникнуть лишь следующие три случая:

- остаток счета маржи превышает величину первоначальной маржи;

• остаток счета маржи меньше величины первоначальной маржи, но больше определенной величины, называемой маржей поддержки;

• остаток счета маржи меньше величины маржи поддержки.

В первом случае инвестор может снять излишек со счета маржи, а в третьем случае он обязан внести дополнительное обеспечение (*вариационную маржу*) так, чтобы сумма на счете маржи оказалась равной величине первоначальной маржи.

Инвестор, открывший ту или иную фьючерсную позицию, может в любой момент ее закрыть, заняв в этот момент позицию, противоположную открытой.

Если по счету маржи не начисляются проценты, то доход от сохранения длинной или короткой позиции во фьючерсном контракте составит соответственно

$$A(Ф_{зак} - Ф_{отк}) \quad или \quad A(Ф_{отк} - Ф_{зак}),$$

где $Ф_{отк}$ и $Ф_{зак}$ – фьючерсные цены, при которых позиция была открыта и закрыта соответственно.

6.1. В понедельник 3 сентября 2001 г. была открыта короткая позиция во фьючерсном контракте на 10 000 акций при фьючерсной цене 50 руб. (за одну акцию). Короткая позиция была закрыта 12 сентября 2001 г. при фьючерсной цене 49,76 руб.

Определить величину дохода инвестора, если по счету маржи проценты не начислялись.

6.2. При условиях задачи 6.1 выяснить, как проходила переоценка фьючерсной позиции по рыночной стоимости, если первоначальная маржа для данного контракта составляла 10 000 руб., маржа поддержки равна 8000 руб., а фьючерсные цены закрытия биржи следующие:

Дата торгов	03.09	04.09	05.09	06.09	07.09	10.09	11.09	12.09
Фьючерсная цена, руб.	50,20	50,40	49,90	49,79	50,20	50,50	49,70	49,76

Считать, что проценты по счету маржи не начислялись и излишки со счета не снимались.

6.3. При условиях задачи 6.2 выяснить, как будет происходить процедура переоценки фьючерсной позиции по рыночной стоимости, если по счету маржи начислялись проценты из расчета 8% годовых (при непрерывном начислении).

6.4. В понедельник 2 июля 2001 г. была занята длинная позиция на 100 унций золота при фьючерсной цене 400 долл. за унцию. Первоначальная маржа составляет 2000 долл., а маржа поддержки установлена в 1500 долл. Длинная позиция была закрыта в четверг 12 июля по цене открытия биржи.

Как проходила переоценка фьючерсной позиции по рыночной стоимости, если проценты по счету маржи не начислялись, излишки со счета не снимались, а фьючерсные цены закрытия следующие:

Дата торгов	02.07	03.07	04.07	05.07	06.07	09.07	10.07	11.07	12.07
Фьючерсная цена, долл.	397,00	396,10	398,20	392,40	397,80	398,40	399,25	398,60	397,45*

*Цена открытия.

3.7. ФЬЮЧЕРСНЫЕ И ФОРВАРДНЫЕ ЦЕНЫ ТОВАРОВ

Если рынки являются совершенными и по форвардным сделкам риск дефолта незначителен, а инвесторы обладают достаточным капиталом, чтобы выполнить все требования по марже, то при отсутствии арбитражных возможностей имеют место следующие утверждения.

1. ***Теорема Кокса–Ингерсолла–Росса.*** Фьючерсная цена активов на n дней совпадает со стоимостью требования на получение в конце дня $t + n$ выигрыша в размере

$$S_{t+n} e^{\tilde{r}_t(1)\tau} e^{\tilde{r}_{t+1}(1)\tau} \ldots e^{\tilde{r}_{t+n-1}(1)\tau},$$

где S_{t+n} – спот-цена исходных активов на конец дня $t + n$;

$\tilde{r}_{t+i}(1)$ – годовая безрисковая процентная ставка на один день при непрерывном начислении, наблюдаемая в конце дня $t + i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$;

$\tau = {}^1/_{365}$ года.

2. Фьючерсная цена активов на n дней $\Phi_t(t+n)$ удовлетворяет равенству

$$\Phi_t(t+n) = M(S_{t+n} R_t D_t^{t+n}),$$

где $R_t = e^{\tilde{r}_t(1)\tau} e^{\tilde{r}_{t+1}(1)\tau} \dots e^{\tilde{r}_{t+n-1}(1)\tau}$;

D_t^{t+n} – стохастический дисконтирующий множитель на период от t до $t+n$.

3. Если $F_t(t+n)$ и $\Phi_t(t+n)$ – форвардная и фьючерсная цены одних и тех же активов на срок n дней, то

$$\Phi_t(t+n) - F_t(t+n) = \operatorname{cov}\left\{S_{t+n},\ (R_t - e^{\tilde{r}_t(n)n\tau}) D_t^{t+n}\right\},$$

где $\tilde{r}_t(n)$ – годовая безрисковая процентная ставка на n дней при непрерывном начислении.

Из последнего утверждения следует, что при детерминированных процентных ставках $\tilde{r}_t(1)$, $\tilde{r}_{t+1}(1)$, ..., $\tilde{r}_{t+n-1}(1)$ форвардная и фьючерсная цены одних и тех же активов на срок n дней должны совпадать.

7.1. По условиям фьючерсного контракта на 8%-ную облигацию с полугодовыми купонами через 15 мес. должна передаваться облигация номиналом 1000 руб., до погашения которой остается 3 года.

Найти фьючерсную цену облигации, если безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков, не меняются в течение времени и равны 7% при непрерывном начислении.

7.2. По условиям фьючерсного контракта на 8%-ную облигацию с полугодовыми купонами через 15 мес. должна передаваться облигация номиналом 1000 руб., до погашения которой остается 5 лет.

Найти фьючерсную цену облигации, если безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков, не меняются в течение времени и равны 9% при непрерывном начислении.

7.3. Найти фьючерсную цену активов на срок 10 дней, если безрисковая процентная ставка на 10 дней при непрерывном начислении равна 6%, $M(S_{t+10}R_t) = 100$ и а) $\operatorname{cov}(S_{t+10}R_t, D_t^{t+10}) = 2$; б) $\operatorname{cov}(S_{t+10}R_t, D_t^{t+10}) = -2$.

7.4. Найти форвардную и фьючерсную цены активов на срок 10 дней, если $M(S_{t+10}D_t^{t+10}) = 100$, $M(R_t) = 1{,}002$, $\operatorname{cov}(S_{t+10}D_t^{t+10}, R_t) = -2$, а безрисковая процентная ставка на 10 дней при непрерывном начислении равна 6%.

3.8. СПЕКУЛЯТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ НА ФЬЮЧЕРСНЫХ РЫНКАХ

Спекулятивные стратегии на фьючерсных рынках строятся на основе прогнозирования будущих фьючерсных цен так, чтобы получить положительную прибыль, если прогноз оправдается.

1. Инвестор, считающий, что между моментами t_1 и t_2 фьючерсная цена $\Phi_t(T)$ некоторых активов будет расти (снижаться), в момент t_1 может занять длинную (короткую) позицию во фьючерсном контракте.

Если прогноз инвестора оправдается, то, закрыв свою позицию в момент t_2, он получит положительную прибыль.

2. Инвестор, считающий, что между моментами t_1 и t_2 межвременной спред $\Phi_t(T_2) - \Phi_t(T_1)$, $T_2 > T_1$, между фьючерсными ценами активов с разными датами поставки будет расти (снижаться), может занять длинную (короткую) позицию в долгосрочном фьючерсном контракте и короткую (длинную) позицию в краткосрочном контракте.

Если прогноз инвестора оправдается, то, закрыв свои позиции в момент t_2, он получит положительную прибыль.

3. Инвестор, предполагающий, что между моментами t_1 и t_2 будет расти (снижаться) отношение фьючерсных цен $\dfrac{F_t(T_1)}{\Phi_t(T_2)}$ на разные активы, в момент t_1 может занять длинную (короткую) позицию в N_1 фьючерсных контрактах на активы первого вида и

короткую (длинную) позицию в N_2 фьючерсных контрактах на активы второго вида так, чтобы

$$N_1 A_1 F_t(T_1) \approx N_2 A_2 \Phi_t(T_2),$$

где A_1 и A_2 – объемы контрактов.

Если прогноз инвестора оправдается, то, закрыв свои позиции в момент t_2, он получит положительную прибыль.

8.1. Фьючерсная цена акции с поставкой через 4 мес. равна 200 руб. Объем одного контракта составляет 1000 акций.

Какую стратегию должен выбрать инвестор, считающий, что в течение 1 мес. фьючерсная цена будет падать?

Какова прибыль от стратегии, использующей 10 фьючерсных контрактов, если через месяц фьючерсные цены окажутся равными: а) 205 руб.; б) 196 руб.?

8.2. Фьючерсная цена акции с поставкой через 1 мес. равна 50 руб., а с поставкой через 2 мес. – 52 руб. Инвестор занял длинную позицию в трех краткосрочных фьючерсных контрактах и короткую позицию в пяти долгосрочных фьючерсных контрактах.

Какова прибыль инвестора, если через 3 дня фьючерсные цены акции оказались равными 50,20 руб. и 51,75 руб. соответственно (объем одного контракта составляет 100 акций)?

8.3. Фьючерсная цена акции с поставкой через 2 мес. равна 120 руб., а с поставкой через 3 мес. – 118 руб. Объем одного контракта – 200 акций. Инвестор занял короткую позицию в 10 краткосрочных фьючерсных контрактах и длинную позицию в пяти долгосрочных контрактах.

Какова прибыль инвестора, если через 5 дней фьючерсные цены акции оказались равными 118 руб. и 120 руб. соответственно?

8.4. Текущие фьючерсные цены двух видов активов равны 360 и 4,8 руб. соответственно. Объемы контрактов на эти виды активов – 100 и 1000 единиц.

Какую стратегию может применить инвестор, считающий, что в течение 1 мес. отношение фьючерсных цен будет расти?

Какова прибыль от выбранной стратегии, если через 1 мес. фьючерсные цены этих активов окажутся равными: а) 356 и 4,60 руб. б) 362 и 4,90 руб.?

8.5. Текущие фьючерсные цены двух видов активов равны 360 и 5 руб. соответственно. Объемы контрактов на эти виды активов – 100 и 1000 единиц.

Какую стратегию может применить инвестор, считающий, что в течение 1 мес. отношение фьючерсных цен будет снижаться?

Какова прибыль от выбранной стратегии, если через 1 мес. фьючерсные цены этих активов окажутся равными: а) 356 и 4,8 руб.; б) 362 и 5,4 руб.?

3.9. ХЕДЖИРОВАНИЕ ПОЗИЦИЙ ПО ИСХОДНЫМ АКТИВАМ С ПОМОЩЬЮ ФЬЮЧЕРСНЫХ КОНТРАКТОВ

Рассматриваются следующие две возможные ситуации:

- инвестор в момент t_0 владеет некоторыми активами и собирается их продать в будущий момент t;
- инвестор в момент t_0 узнает, что ему придется в будущий момент t купить некоторые активы.

Для хеджирования единицы активов в первой или второй ситуации инвестор может в момент t_0 занять короткую или длинную позицию во фьючерсном контракте на единицу других активов.

В этом случае доходность одной хеджируемой позиции $r_{кор}$ или $r_{дл}$ может быть найдена следующим образом:

$$r_{кор} = r_s - r_F \frac{\Phi_{t_0}(T)}{S_{t_0}} \quad \text{или} \quad r_{дл} = r_F \frac{\Phi_{t_0}(T)}{S_{t_0}} - r_s,$$

где r_s – доходность исходных активов;
r_F – доходность фьючерсной позиции;
$\Phi_{t_0}(T)$ – фьючерсная цена хеджирующих активов в момент t_0;
S_{t_0} – спот-цена исходных активов в момент t_0.

Отношение количества хеджируемых позиций к объему всей позиции инвестора по исходным активам называют ***показателем хеджирования.***

Оптимальный показатель хеджирования k^*, при котором минимизируется дисперсия доходности, определяется равенством

$$k^* = \frac{S_{t_0}}{\Phi_{t_0}(T)} \cdot \frac{\mathrm{cov}(r_s, r_F)}{\sigma_F^2},$$

где $\mathrm{cov}(r_s, r_F)$ – ковариация между доходностями исходных активов и фьючерсной позиции;
σ_F^2 – дисперсия доходности одной фьючерсной позиции.

Для хеджирования той или иной позиции по исходным активам можно использовать одновременно несколько фьючерсных контрактов, причем на различные виды активов. Если для хеджирования единицы исходных активов используется n фьючерсных контрактов, то придется рассмотреть искусственные ценные бумаги n видов, удовлетворяющие следующим условиям:

• ожидаемые доходности ценных бумаг совпадают с ожидаемыми доходностями хеджируемых позиций;

• ковариационная матрица доходностей ценных бумаг имеет вид $\Lambda = (\sigma_{ij})$, где

$$\sigma_{ij} = \sigma_S^2 - \frac{\Phi_{t_0}^i(T_i)}{S_{t_0}} \mathrm{cov}(r_S, r_F^i) - \frac{\Phi_{t_0}^j(T_j)}{S_{t_0}} \mathrm{cov}(r_S, r_F^j) + \frac{\Phi_{t_0}^i(T_i)\Phi_{t_0}^j(T_j)}{S_{t_0}^2} \mathrm{cov}(r_F^i, r_F^j), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для определения оптимальной стратегии хеджирования достаточно найти портфель искусственных ценных бумаг при запрещенных коротких продажах $\overline{\Theta}_{\text{хедж}} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$, удовлетворяющий тому или иному критерию оптимальности.

9.1. Компания собирается продать через неделю определенное количество активов A, текущая цена которых 100 руб. Для хеджирования своей позиции финансовый директор компании решает использовать фьючерсные контракты на активы B, текущая фьючерсная цена которых 80 руб.

Найти оптимальный показатель хеджирования, если стандартное отклонение недельной доходности фьючерсной позиции равно 0,3, а ковариация между доходностью активов A и доходностью фьючерсной позиции по активам B равна 0,02.

9.2. Компания через 1 мес. должна закупить 500 тыс. л дизельного топлива, а для хеджирования своей позиции решает использовать фьючерсные контракты на сырую нефть. Объем одного фьючерсного контракта на сырую нефть составляет 20 000 л.

Найти оптимальный показатель хеджирования, если стандартное отклонение изменения цены дизельного топлива за 1 мес. равно 0,04, стандартное отклонение изменения фьючерсной цены нефти за 1 мес. – 0,05, а коэффициент корреляции между этими изменениями равен 0,8.

Сколько фьючерсных контрактов потребуется для хеджирования?

9.3. Текущая цена активов A равна 150 руб., текущая фьючерсная цена активов B – 160 руб. Найти оптимальный показатель хеджирования активов A фьючерсными контрактами на активы B, если исторические данные о недельных доходностях приведены ниже.

Номер недели	1	2	3	4	5	6	7	8
Доходность активов (A)	0,10	0,20	0,15	0,16	–0,18	–0,22	–0,14	–0,22
Доходность фьючерсной позиции	0,15	0,18	–0,10	0,12	0,06	–0,08	–0,15	–0,10

9.4. Инвестор занимает длинную позицию по активам, текущая цена которых составляет 200 руб., а ожидаемая недельная доходность – 4%. Для хеджирования этой позиции инвестор предполагает использовать фьючерсные контракты на три вида активов, текущие фьючерсные цены которых 210, 220 и 240 руб., а ожидаемые доходности фьючерсных позиций 10, 12 и 10% соответственно. Ковариационная матрица между доходностями имеет вид

$$\Lambda(r_S, r_F^1, r_F^2, r_F^3) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Определить:

а) ожидаемые доходности хеджируемых позиций и ковариационную матрицу этих доходностей;

б) стратегию хеджирования при минимизации дисперсии совокупной доходности;

в) стратегию хеджирования, минимизирующую дисперсию совокупной доходности, при заданном уровне ожидаемой доходности 7%;

г) стратегию хеджирования, минимизирующую дисперсию совокупной доходности, при заданном уровне ожидаемой доходности, равном 9%, если можно использовать безрисковый актив с доходностью 5%.

9.5. Инвестор занимает короткую позицию по активам, текущая цена которых составляет 200 руб., а ожидаемая недельная доходность – 10%. Для хеджирования этой позиции инвестор предполагает использовать фьючерсные контракты на два вида активов, текущие фьючерсные цены которых 220 и 240 руб., а ожидаемые доходности фьючерсных позиций 6 и 7% соответственно. Ковариационная матрица между доходностями имеет вид

$$\Lambda(r_S, r_F^1, r_F^2) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Определить:

а) ожидаемые доходности хеджируемых позиций и ковариационную матрицу этих доходностей;

б) стратегию хеджирования при минимизации дисперсии совокупной доходности.

3.10. ХЕДЖИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЕЙ АКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ФЬЮЧЕРСНЫХ КОНТРАКТОВ НА ИНДЕКС АКЦИЙ

По условиям фьючерсного контракта на рыночный индекс акций сторона, занявшая в момент t_0 короткую или длинную позицию, получит в момент исполнения контракта T денежную сумму в размере

$$L\{\Phi_{t_0}(T) - I(T)\} \text{ или } L\{I(T) - \Phi_{t_0}(T)\},$$

где L – объем контракта (денежная сумма, установленная биржей для данного контракта);

$\Phi_{t_0}(T)$ – фьючерсная цена индекса акций в момент t_0;

$I(T)$ – значение (цена) индекса акций в момент исполнения контракта T.

При отсутствии арбитражных возможностей фьючерсную цену индекса акций можно оценивать, считая ее форвардной ценой активов с постоянной дивидендной доходностью:

$$\Phi_t(T) = I(t)e^{(\tilde{r}-\tilde{q})(T-t)},$$

где $I(t)$ – текущее значение индекса акций;

$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка на $T - t$ лет при непрерывном начислении;

$\tilde{q}$ – постоянная непрерывная дивидендная доходность индекса акций.

Если инвестор владеет некоторым портфелем акций, то для хеджирования рыночного риска он может занять короткую позицию в нескольких фьючерсных контрактах на индекс акций.

Чтобы дисперсия доходности хеджируемой позиции была минимальной, число фьючерсных контрактов N должно удовлетворять соотношению

$$N \approx \frac{P(t_0)}{L\Phi_{t_0}(T)}\beta_P,$$

где $P(t_0)$ – стоимость портфеля акций в момент t_0;

β_p – бета-коэффициент портфеля акций относительно рассматриваемого индекса акций $\left(\beta_p = \frac{\text{cov}(r_I, r_p)}{\sigma_I^2}\right)$.

10.1. Компания владеет портфелем акций стоимостью 2,1 млн долл. и собирается его хеджировать с помощью фьючерсных контрактов на индекс акций SP-500 (L = 250 долл.).

Найти оптимальное количество фьючерсных контрактов для хеджирования, если текущая фьючерсная цена индекса равна 300, бета-коэффициент портфеля акций – 1,5.

Определить доход (убыток) инвестора, если через 1 мес. стоимость портфеля акций упадет до 2 млн долл., а фьючерсная цена индекса – до 290.

10.2. Фирма собирается хеджировать в течение 1 мес. будущую покупку портфеля акций, исходные данные которого приведены ниже.

Акция	1	2	3	4	5	6
Цена акции	19,25	28,75	26,25	41,50	38,00	27,50
Бета-коэффициент акции	1,45	0,80	1,10	0,95	1,20	1,32
Количество акций в портфеле	4000	1500	1100	6000	8000	4000

Определить оптимальное количество фьючерсных контрактов на индекс акций (L = 500 долл.), если текущая фьючерсная цена индекса акций равна 320.

Оценить чистый доход инвестора, если через 1 мес. цены акций окажутся равными 20,50; 30,20; 25,10; 42,00; 37,75; 28,50 соответственно, а фьючерсное значение индекса возрастет до 321.

10.3. Инвестор владеет портфелем акций, данные которого приведены в ниже.

Акция	1	2	3	4	5
Количество акций	1200	1000	10 000	5000	3000
Цена акции	100	120	110	90	80
Бета-коэффициент акции	1,50	1,40	1,80	1,30	1,60

Определить оптимальное количество фьючерсных контрактов на индекс акций (L = 800 долл.) для хеджирования исходной позиции, если текущая фьючерсная цена индекса акций равна 220.

Оценить чистый доход инвестора, если через 2 мес. цены акций окажутся равными 90; 110; 100; 110; 105 соответственно, а фьючерсная цена индекса возрастет до 222.

10.4. Инвестор владеет портфелем акций, текущая стоимость которого составляет 2 000 000 долл. Для хеджирования портфеля в течение 3 мес. инвестор решает использовать четырехмесячные фьючерсные контракты на рыночный индекс акций (L = 250 долл.). Текущее значение индекса акций равно 900, непрерывная дивидендная доходность индекса акций – 4%, а бета-коэффициент портфеля акций относительно данного индекса – 1,4.

Определить:

1) количество фьючерсных контрактов, которое необходимо для хеджирования, если безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении равна 10%;

2) доход от хеджируемой позиции, если значение индекса акций через 3 мес. окажется равным 860.

10.5. Инвестор владеет портфелем акций, текущая стоимость которого составляет 2 млн долл. Для хеджирования портфеля акций в течение 2 мес. инвестор решает использовать четырехмесячные фьючерсные контракты на рыночный индекс акций (L = 500 долл.). Текущее значение индекса акций равно 1000, непрерывная дивидендная доходность индекса акций – 5%, а бета-коэффициент портфеля акций относительно данного индекса – 1,5.

Определить:

1) количество фьючерсных контрактов, которое необходимо для хеджирования, если безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении равна 10%;

2) доход от хеджируемой позиции, если значение индекса акций через 3 мес. окажется равным 980.

10.6. Инвестор владеет портфелем акций и занимает короткую позицию в N фьючерсных контрактах на рыночный индекс акций.

Доказать, что бета-коэффициент всего инвестиционного портфеля относительно данного индекса акций можно считать равным

$$\beta_p - N\,L\,\frac{\Phi_{t_0}(T)}{P(t_0)},$$

где β_p – бета-коэффициент портфеля акций;
$\Phi_{t_0}(T)$ – текущая фьючерсная цена индекса акций;
$P(t_0)$ – текущая стоимость портфеля акций.

3.11. ХЕДЖИРОВАНИЕ ПРОЦЕНТНОГО РИСКА С ПОМОЩЬЮ ФЬЮЧЕРСНЫХ КОНТРАКТОВ

Рассматривается фьючерсный контракт на некоторую облигацию без дефолт-риска, дата исполнения которого T.

Если сразу же после текущего момента t все безрисковые процентные ставки изменятся на одну и ту же величину $\Delta\tilde{r}$, то относительное изменение фьючерсной цены облигации $\frac{\Delta\Phi_t(T)}{\Phi_t(T)}$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\Delta\Phi_t(T)}{\Phi_t(T)} \approx -\left\{\tilde{D}_S-(T-t)\right\}\Delta\tilde{r},$$

где $\tilde{D}_S$ – дюрация потока платежей по облигации, поступающих после даты исполнения фьючерсного контракта.

Замечание. Можно считать, что величина $\tilde{D}_S-(T-t)$ совпадает (приближенно) с дюрацией исходной облигации на дату поставки при непрерывном начислении.

Для хеджирования портфеля облигаций без дефолт-риска стоимостью $P(t)$, дюрация которого при непрерывном начислении равна D_p, следует занять короткую позицию в N фьючерсных контрактах на рассматриваемую облигацию, где

$$N \approx \frac{P(t)}{\Phi_t(T)}\cdot\frac{D_p}{\tilde{D}_S-(T-t)}.$$

В этом случае в течение короткого времени будет обеспечена защита портфеля облигаций от параллельных сдвигов кривой рыночных доходностей.

11.1. Инвестор владеет портфелем облигаций стоимостью 1 млн долл. Дюрация портфеля облигаций равна 3,2 года. Для хеджирования процентного риска инвестор решает использовать фьючерсные контракты на трехмесячные казначейские векселя номиналом 1 млн долл. (в момент поставки до погашения векселя остается 3 мес.).

Сколько контрактов необходимо для хеджирования в начальный момент, если текущая фьючерсная цена казначейского векселя равна 900 тыс. долл.?

11.2. Инвестор знает, что через полгода он получит 5 млн долл., которые инвестирует в облигацию без дефолт-риска. В данный момент дюрация этой облигации равна 5,7 года. Для хеджирования процентного риска инвестор использует фьючерсный контракт на другую облигацию, дюрация которой составляет 8,8 года. Безрисковая процентная ставка на полгода при непрерывном начислении равна 6%.

Сколько фьючерсных контрактов необходимо для хеджирования, если текущая фьючерсная цена облигации составляет 880 тыс. долл.?

11.3. Инвестор владеет портфелем облигаций, стоимость которого 700 тыс. долл., а дюрация – 5,4 года (при непрерывном начислении). Для хеджирования процентного риска инвестор решает использовать полуторагодичные фьючерсные контракты на облигацию, поток платежей по которой приведен ниже.

Срок платежа, годы	1	2	3	4
Размер платежа, тыс. долл.	8	8	8	100

Сколько фьючерсных контрактов необходимо для хеджирования, если все безрисковые процентные ставки одинаковы и равны 10% (при непрерывном начислении)?

11.4. Инвестор владеет портфелем облигаций, поток платежей по которому приведен ниже.

Срок платежа, годы	0,5	1,0	1,5	2,0
Размер платежа, тыс. долл.	10	12	15	400

В текущий момент все безрисковые процентные ставки одинаковы и равны 7% при непрерывном начислении. Для хеджирования процентного риска инвестор использует восьмимесячные фьючерсные контракты на трехмесячные казначейские векселя номиналом 1000 тыс. долл.

Определить оптимальное количество фьючерсных контрактов для хеджирования.

Найти чистый доход инвестора через полгода, если через 0,3 года после текущего момента безрисковые процентные ставки возрастут до 10%.

3.12. ОБЛИГАЦИИ С ПЛАВАЮЩИМИ КУПОННЫМИ СТАВКАМИ

Пусть $\rho(m)$ - некоторая рыночная процентная ставка при начислении m раз в год.

Если до погашения облигации с плавающей купонной ставкой $f = \lambda\rho(m) + \Delta$ остается n купонных платежей, то поток платежей по облигации имеет следующий вид:

$$\frac{A}{m}(\lambda\rho_0(m)+\Delta), \ldots, \frac{A}{m}(\lambda\rho_{k-1}(m)+\Delta), \ldots, \frac{A}{m}(\lambda\rho_{n-1}(m)+\Delta)+A,$$

где A – номинальная стоимость облигации;

$\rho_{k-1}(m)$ – значение рыночной процентной ставки, наблюдаемое в начале k-го купонного периода.

Замечание. Для облигации с рыночной купонной ставкой $\lambda = 1$, $\Delta = 0$; для облигации с инверсно плавающей купонной ставкой $\lambda = -1$, $\Delta > 0$.

Основные утверждения об облигациях с плавающими купонными ставками при отсутствии арбитражных возможностей.

1. Стоимость облигации с рыночной купонной ставкой в моменты оплаты купонов равна ее номинальной стоимости.

2. Текущая стоимость Q облигации с рыночной купонной ставкой, купоны по которой оплачиваются m раз в год, удовлетворяет равенству

$$Q = \left[A + A\frac{1}{m}\rho_0(m)\right]e^{-\tilde{z}_1\tau},$$

где A – номинал облигации;

$\rho_0(m)$ – значение рыночной процентной ставки, наблюдаемое в начале первого купонного периода;

$\tilde{z}_1$ – текущая ставка дисконтирования при непрерывном начислении на срок τ лет;

τ – срок до очередного купонного платежа.

3. Текущая стоимость Q облигации с плавающей купонной ставкой $f = \lambda\rho(m) + \Delta$ может быть определена по формуле

$$Q = \lambda\left\{A + A\frac{\rho_0(m)}{m}\right\}e^{-\tilde{z}_1\tau} - $$
$$-(\lambda-1)Ae^{-\tilde{z}_n\left(\tau+\frac{n-1}{m}\right)} + \sum_{k=1}^{n} A\frac{\Delta}{m}e^{-\tilde{z}_k\left(\tau+\frac{k-1}{m}\right)},$$

где τ – срок до очередного купонного платежа;

n – число купонных платежей до погашения облигации;

$\tilde{z}_k$ – текущая ставка дисконтирования при непрерывном начислении на срок $\tau + \dfrac{k-1}{m}$ лет, $k = 1, 2, \ldots, n$.

12.1. Дана облигация с инверсно плавающей купонной ставкой $f = 12\% - \rho(2)$, когда до ее погашения остается пять купонных платежей. Номинальная стоимость облигации равна 300 руб., купоны оплачиваются дважды в год.

Определить поток платежей по облигации, если ставка-ориентир принимала значения, указанные ниже.

Номер купонного периода	1	2	3	4	5
Ставка-ориентир на начало периода, %	4,00	4,50	4,20	4,15	3,80

12.2. Дана облигация номинальной стоимостью 1000 руб. с рыночной купонной ставкой, купоны по которой оплачиваются 2 раза в год.

Найти текущую стоимость облигации, когда до очередного купонного платежа остается 4 мес., если значение ставки-ориентира в начале первого купонного периода было 7,5%, а ставка дисконтирования на 4 мес. равна 7% (при непрерывном начислении).

12.3. Дана облигация номинальной стоимостью 5000 руб. с рыночной купонной ставкой, купоны по которой оплачиваются 4 раза в год.

Найти текущую стоимость облигации, когда до очередного купонного платежа остается 2 мес., если значение ставки-ориентира в начале первого купонного периода было 10%, а ставка дисконтирования на 2 мес. равна 6% (при непрерывном начислении).

12.4. Дана облигация номинальной стоимостью 200 руб. с плавающей купонной ставкой $f = \rho(4) + 20$ б.п., купоны по которой оплачиваются 4 раза в год, когда до погашения остается четыре купонных платежа, а до очередного платежа – 2 мес.

Найти текущую стоимость облигации, если значение ставки-ориентира в начале первого купонного периода было 8%, а подходящие ставки дисконтирования при непрерывном начислении на 2, 5, 8 и 11 мес. равны 10,0; 10,2; 10,5; 11,00 % соответственно.

12.5. Найти стоимость облигации при условиях задачи 12.4, считая ее облигацией с инверсно плавающей купонной ставкой $f = 20\% - \rho(4)$.

12.6. Дана облигация номинальной стоимостью 1000 руб. с плавающей купонной ставкой $f = 2\rho(2) + 60$ б.п., купоны по которой оплачиваются 2 раза в год, когда до погашения остается пять купонных платежей, а до очередного платежа – 3 мес.

Найти текущую стоимость облигации, если значение ставки-ориентира в начале первого купонного периода было 9%, а подходящие ставки дисконтирования при непрерывном начислении на 3, 9, 15, 21 и 27 мес. равны 9,2; 9,4; 9,2; 9,3; 9,2% соответственно.

12.7. Доказать, что дюрация облигации с рыночной купонной ставкой равна сроку до очередного купонного платежа, если на рынке отсутствуют арбитражные возможности.

3.13. ПРОЦЕНТНЫЕ СВОПЫ

Процентный своп – это соглашение об обмене потока будущих процентных платежей от некоторой условной денежной суммы при фиксированной процентной ставке на процентные платежи от той же денежной суммы при плавающей процентной ставке.

Двум компаниям А и В взаимовыгодно заключить процентный свопoвый контракт, если выполняются следующие условия.

1. Компаниям предлагаются процентные ставки по займам (при начислении процентов m раз в год):

Компания	Процентная ставка	
	фиксированная	плавающая
А	$r_\phi^A(m)$	$\rho(m)+\Delta^A$
В	$r_\phi^B(m)$	$\rho(m)+\Delta^B$

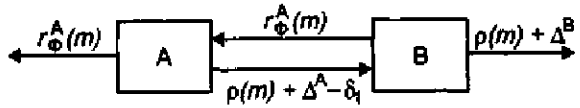
Здесь $\rho(m)$ – рыночная процентная ставка;
Δ^A, Δ^B – фиксированные надбавки к рыночной процентной ставке.

2. $r_\phi^A(m) < r_\phi^B(m)$, $\Delta^A < \Delta^B$;

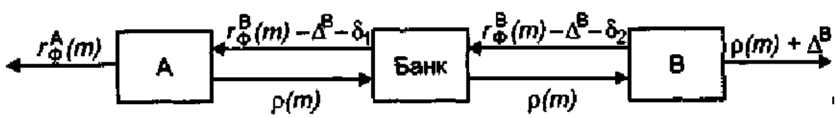
$r_\phi^B(m) - r_\phi^A(m) > \Delta^B - \Delta^A$.

3. Компании А необходим заем денежной суммы Q с плавающей процентной ставкой, а компании В – заем суммы Q с фиксированной процентной ставкой.

Если $\delta_1+\delta_2=r_{\text{ф}}^{\text{B}}(m)-r_{\text{ф}}^{\text{A}}(m)-(\Delta^{\text{B}}-\Delta^{\text{A}})$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, то компании А и В могут обеспечить себе чистые процентные выигрыши соответственно δ_1 и δ_2 при следующей схеме процентных платежей.



Если же $\delta_1+\delta_2+\mu=r_{\text{ф}}^{\text{B}}(m)-r_{\text{ф}}^{\text{A}}(m)-(\Delta^{\text{B}}-\Delta^{\text{A}})$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, $\mu>0$, то компании А и В смогут обеспечить себе чистые процентные выигрыши соответственно δ_1 и δ_2 при условии, что маржа посредника равна μ:



Для организации рынка процентных свопов финансовые институты проводят котировку фиксированных процентных ставок для возможных процентных свопов в следующем виде:

Количество расчетных периодов	Фиксированная процентная ставка	
	выплачиваемая в обмен на рыночную ставку $\rho(m)$	получаемая в обмен на рыночную ставку $\rho(m)$
1	$r_{\text{ф}}^1(m,1)$	$r_{\text{ф}}^2(m,1)$
2	$r_{\text{ф}}^1(m,2)$	$r_{\text{ф}}^2(m,2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	$r_{\text{ф}}^1(m,l)$	$r_{\text{ф}}^2(m,l)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$r_{\text{ф}}^1(m,n)$	$r_{\text{ф}}^2(m,n)$

Заметим, что

$$r_{\text{ф}}^1(m,1)=r_{\text{ф}}^2(m,1)=\rho_0(m),$$

а величина

$$\mu_l=r_{\text{ф}}^2(m,l)-r_{\text{ф}}^1(m,l)$$

составляет маржу посредника для контрактов на срок, состоящий из l расчетных периодов.

13.1. Компании А необходим заем в размере 1000 руб. на 2 года с плавающей процентной ставкой, а компании В необходим заем в том же размере и на тот же срок с фиксированной ставкой. Процентные ставки при начислении процентов дважды в год, предлагаемые компаниям А и В, приведены ниже.

Компания	Процентная ставка, %	
	фиксированная	плавающая
А	7,2	$\rho(2)+0{,}2$
В	8,0	$\rho(2)+0{,}5$

Предложить обмен платежами между компаниями А и В, одинаково выгодный обеим компаниям.

Определить поток денежных сумм, выплачиваемых компанией А компании В, если ставка-ориентир $\rho(2)$ принимала следующие значения:

Номер расчетного периода	1	2	3	4
Ставка-ориентир на начало периода, %	7,0	7,2	7,3	7,5

13.2. При условиях задачи 13.1 предложить обмен платежами между компаниями А и В и посредником так, чтобы эти компании имели одинаковый процентный выигрыш, а маржа посредника составила 0,1%.

13.3. При условиях задачи 13.1 предложить обмен платежами между компаниями А и В и посредником так, чтобы процентный выигрыш компании А был вдвое больше процентного выигрыша компании В, а маржа посредника составила 0,2%.

13.4. Компании А необходим заем с плавающей процентной ставкой, а компании В необходим заем в том же размере и на тот же срок с фиксированной процентной ставкой. Процентные ставки, предлагаемые компаниям А и В, приведены ниже.

Компания	Процентная ставка, %	
	фиксированная	плавающая
А	8,6	$\rho(2) + 0,4$
В	9,5	$\rho(2) + 0,7$

Предложить обмен платежами между компаниями А и В и посредником так, чтобы эти компании имели одинаковый процентный выигрыш, а маржа посредника составила 0,2%.

13.5. Компания берет заем в размере 100 тыс. долл. на 3 года под плавающую процентную ставку $\rho(1)$ + 40 б.п. Банк готов в течение трех лет платить рыночную процентную ставку $\rho(1)$ в обмен на фиксированную процентную ставку 8%.

Как с помощью процентного свопа преобразовать заем с плавающей процентной ставкой в заем с фиксированной процентной ставкой?

Сколько процентов придется платить компании?

13.6. Компания берет заем в размере 100 тыс. долл. на 4 года под фиксированную процентную ставку 10% (при начислении процентов дважды в год). Банк готов в течение четырех лет получать рыночную процентную ставку $\rho(2)$ в обмен на 9,4% при обмене платежами дважды в год.

Как преобразовать заем с фиксированной процентной ставкой в заем с плавающей процентной ставкой?

3.14. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ПРОЦЕНТНЫХ СВОПОВ

Рассматривается процентный своп, в котором компания Х согласилась в течение определенного времени m раз в год обмениваться платежами по следующей схеме:

- получать проценты от денежной суммы Q по фиксированной процентной ставке $r_ф(m)$;
- платить проценты от денежной суммы Q по рыночной процентной ставке $\rho(m)$.

Имеют место следующие утверждения.

1. В момент заключения данного свопового контракта его стоимость для компании Х равна нулю.

2. В любой момент поток платежей, поступающих компании Х, совпадает с потоком платежей от инвестиционного портфеля, состоящего из покупки облигации номиналом Q с фиксированной купонной ставкой $r_ф(m)$, купоны по которой оплачиваются m раз в год, и короткой продажи облигации номиналом Q с рыночной купонной ставкой $\rho(m)$.

3. При отсутствии арбитражных возможностей текущая стоимость процентного свопа $V(t)$ для компании Х может быть определена по формуле

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n} Q\frac{r_ф(m)}{m}e^{-\tilde{z}_i\left(\tau+\frac{i-1}{m}\right)}+Qe^{-\tilde{z}_n\left(\tau+\frac{n-1}{m}\right)}-\left\{Q+Q\frac{\rho_0(m)}{m}\right\}e^{-\tilde{z}_1\tau},$$

где $\tilde{z}_i$ – текущая ставка дисконтирования на $\tau+\dfrac{i-1}{m}$ лет при непрерывном начислении, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$;

τ – срок до очередного обмена платежами;

$\rho_0(m)$ – значение рыночной процентной ставки, наблюдаемое в момент последнего обмена платежами.

4. При отсутствии арбитражных возможностей стоимость облигации с фиксированной купонной ставкой $r_ф^2(m,l)$, до погашения которой остается l расчетных периодов, равна ее номиналу ($r_ф^2(m,l)$ – котировка фиксированной процентной ставки, которую финансовые институты готовы получать в течение l расчетных периодов в обмен на рыночную процентную ставку $\rho(m)$).

На основе последнего утверждения можно определить ставки дисконтирования $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_n$, используемые для оценки текущей стоимости процентного свопа.

Текущую стоимость рассматриваемого процентного свопа можно найти, представив его в виде последовательности форвардных контрактов на процентную ставку $\rho(m)$.

При отсутствии арбитражных возможностей:

$$V(t)=\frac{Q}{m}\{r_{\phi}(m)-\rho_0(m)\}e^{-\tilde{z}_1\tau}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\frac{Q}{m}\{r_{\phi}(m)-F_{k-1}\}e^{-\tilde{z}_k\left(\tau+\frac{k-1}{m}\right)},$$

где F_{k-1} – форвардная процентная ставка на начало k-го расчетного периода, $k = 2, 3, \ldots, n$.

Замечание. Форвардные процентные ставки удовлетворяют соотношениям

$$e^{\tilde{z}_{k-1}\left(\tau+\frac{k-2}{m}\right)}\left(1+\frac{F_{k-1}}{m}\right)=e^{\tilde{z}_k\left(\tau+\frac{k-1}{m}\right)},\quad k=2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

14.1. Компания согласилась получать 4 раза в год проценты от денежной суммы 120 млн руб. по фиксированной процентной ставке 9% в обмен на проценты от той же суммы по плавающей процентной ставке $\rho(4)$. До окончания срока контракта остается 1,2 года, а значение процентной ставки $\rho(4)$ в начале первого расчетного периода было 9,8%.

Определить текущую стоимость процентного свопа, если ставки дисконтирования при непрерывном начислении приведены ниже.

Срок, годы	0,2	0,45	0,7	0,95	1,2
Ставка дисконтирования, %	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0

14.2. Компания согласилась платить проценты 2 раза в год от суммы 90 млн долл. по фиксированной процентной ставке 6% в обмен на проценты от той же суммы по рыночной ставке $\rho(2)$. До окончания срока контракта остается 1,8 года, а значение процентной ставки в начале первого расчетного периода равнялось 6,2%.

Найти текущую стоимость процентного свопа, если известны котировки фиксированной процентной ставки, выплачиваемой в обмен на рыночную ставку $\rho(2)$.

Число расчетных периодов	1	2	3	4
Фиксированная процентная ставка, %	5,8	5,9	6,2	6,4

14.3. Компания согласилась платить проценты 2 раза в год от суммы 6 млн долл. по шестимесячной ставке LIBOR в обмен на проценты от той же суммы по фиксированной процентной ставке 8%. До окончания срока контракта остается 25 мес., а значение ставки LIBOR в момент последнего обмена платежами равнялось 7,4%. Котировки фиксированной процентной ставки, получаемой в обмен на шестимесячную ставку LIBOR, имеют следующий вид:

Срок, мес.	6	12	18	24	30
Фиксированная процентная ставка, %	7,5	7,6	7,6	7,7	7,8

Определить:

1) текущую стоимость процентного свопа для данной компании;

2) форвардные ставки LIBOR на 1, 7, 13 и 19 мес.

14.4. Компания получает 4 раза в год проценты от суммы 50 млн долл. по фиксированной процентной ставке 7% в обмен на проценты от той же суммы по рыночной процентной ставке $\rho(4)$. До окончания срока контракта остается 0,85 года, а значение процентной ставки $\rho(4)$ в начале первого расчетного периода равнялось 7,2%.

Найти текущую стоимость процентного свопа, если текущая ставка дисконтирования на 0,1 года при непрерывном начислении составляла 6,5%, а форвардные процентные ставки в начале 2-го, 3 и 4-го расчетных периодов соответственно равны 6,6; 6,4; 6,3%.

14.5. Компания платит дважды в год проценты от суммы 150 млн долл. по фиксированной процентной ставке 8% в обмен на проценты от той же суммы по шестимесячной ставке LIBOR. До окончания срока контракта остается 1,2 года, а значение процентной ставки LIBOR в начале первого расчетного периода равнялось 8,2%.

Найти текущую стоимость процентного свопа для данной компании, если текущая ставка дисконтирования на 0,2 года при непрерывном начислении составляет 7%, а форвардные ставки LIBOR через 0,2 и 0,7 года соответственно равны 8,5 и 9%.

14.6. Банк согласился в течение 5 лет 2 раза в год получать проценты от 20 млн руб. по фиксированной процентной ставке 10% в обмен на проценты от той же суммы по рыночной процентной ставке $\rho(2)$.

Оценить убытки банка, если через 3 года партнер банка по процентному свопу прекратит платежи, считая, что значение рыночной процентной ставки на начало шестого расчетного периода равно 9,2%, а ставки дисконтирования в конце этого расчетного периода одинаковы для всех сроков и составляют 8,6% (при начислении процентов 2 раза в год).

14.7. Инвестор владеет 8%-ной облигацией номиналом 10 000 долл. с годовыми купонами, до погашения которой остается 5 лет. Для хеджирования процентного риска инвестор согласился принять участие в свопе: платить проценты от 5000 долл. один раз в год в течение 4 лет по фиксированной процентной ставке 7% в обмен на проценты от 5000 долл. по рыночной процентной ставке $\rho(1)$.

Оценить средневзвешенную дюрацию инвестиционного портфеля, если ставки дисконтирования для всех сроков равны 7% (при начислении процентов один раз в год).

14.8. Инвестор владеет 8%-ной облигацией номиналом 10 000 долл. с полугодовыми купонами, до погашения которой остается 3 года. Для хеджирования процентного риска инвестор согласился участвовать в свопе: платить проценты 2 раза в год в течение двух лет от 8000 долл. по фиксированной процентной ставке 7% в обмен на проценты от 8000 долл. по рыночной процентной ставке $\rho(2)$.

Оценить средневзвешенную дюрацию инвестиционного портфеля, если ставки дисконтирования при начислении процентов дважды в год приведены ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Процентная ставка, %	7,2	7,3	7,2	7,0	6,9	6,87

3.15. ВАЛЮТНЫЕ СВОПЫ И ИХ ОЦЕНКА

Классический валютный своп предполагает обмен платежами в разных валютах по следующей схеме:

- в течение установленного времени m раз в год одна компания платит другой компании проценты от суммы Q_2 во второй валюте по фиксированной процентной ставке $q_2(m)$, а получает от нее проценты от суммы Q_1 в первой валюте по фиксированной процентной ставке $q_1(m)$;
- по истечении срока контракта первая компания выплачивает второй компании сумму Q_2 во второй валюте, а получает от нее сумму Q_1 в первой валюте.

Компаниям A и B выгодно заключить валютные своповые контракты с посредником, если выполняются следующие условия.

1. Компаниям A и B предлагаются фиксированные процентные ставки по займам в двух разных валютах:

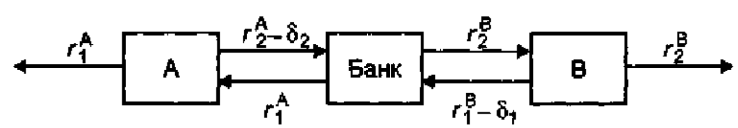
Компания	Процентная ставка	
	Первая валюта	Вторая валюта
A	r_1^A	r_2^A
B	r_1^B	r_2^B

2. Соблюдаются соотношения

$$r_1^B > r_1^A, \quad r_2^B > r_2^A;$$
$$r_1^B - r_1^A > r_2^B - r_2^A.$$

3. Компании A необходим заем во второй валюте размером Q_2, а компании B необходим заем в первой валюте размером Q_1, причем $Q_1 = c\,Q_2$ (c – текущий обменный курс).

Если $\delta_1 + \delta_2 + \mu = r_1^B - r_1^A - (r_2^B - r_2^A)$, то при процентных платежах, приведенных на рисунке, компания A обеспечивает себе про-



центный выигрыш δ_2, компания В обеспечивает себе процентный выигрыш δ_1, а маржа посредника составит μ.

Рассмотрим валютный своп, в котором компания X согласилась m раз в год платить проценты от суммы Q_2 во второй валюте по фиксированной процентной ставке $q_2(m)$ и выплатить сумму Q_2 в конце срока контракта в обмен на проценты от суммы Q_1 в первой валюте по фиксированной процентной ставке $q_1(m)$ и основную сумму Q_1 в конце срока контракта.

Поток платежей, поступающих компании X, совпадает с потоком платежей от инвестиционного портфеля, состоящего из покупки купонной облигации номиналом Q_1 с купонами, оплачиваемыми m раз в год по ставке $q_1(m)$, и короткой продажи купонной облигации номиналом Q_2 с купонами, оплачиваемыми m раз в год по ставке $q_2(m)$.

При отсутствии арбитражных возможностей имеют место следующие утверждения.

1. Текущая стоимость валютного свопа $V(t)$ для компании X должна удовлетворять равенству

$$V(t) = B_1(t) - B_2(t)c_t,$$

где $B_1(t)$ и $B_2(t)$ – текущая стоимость покупаемой и продаваемой облигации соответственно;

c_t – текущий обменный курс.

2. Если можно не учитывать риск дефолта, то текущую стоимость валютного свопа можно оценивать, представляя его в виде последовательности форвардных контрактов на обменный курс:

$$V(t) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}[Q_1 q_1(m) - Q_2 q_2(m)F_k]e^{-\tilde{r}_k^1\left(\tau+\frac{k-1}{m}\right)} +$$
$$+(Q_1 - Q_2 F_n)e^{-\tilde{r}_n^1\left(\tau+\frac{n-1}{m}\right)},$$

где F_k – форвардный обменный курс на срок $\tau+\dfrac{k-1}{m}$ лет, $k = 1, 2, \ldots, n$;

$\tilde{r}_k^1$ – безрисковая процентная ставка на срок $\tau+\dfrac{k-1}{m}$ лет при непрерывном начислении в стране с первой валютой, $k = 1, 2, \ldots, n$;

τ – срок очередного обмена платежами.

Замечание. Форвардный обменный курс F_k можно определить по формуле

$$F_k = c_t e^{\left(\tilde{r}_k^1 - \tilde{r}_k^2\right)\left(\tau+\frac{k-1}{m}\right)},$$

где $\tilde{r}_k^2$ – безрисковая процентная ставка на срок $\tau+\dfrac{k-1}{m}$ лет при непрерывном начислении в стране со второй валютой, $k = 1, 2, \ldots, n$.

15.1. Компаниям А и В предлагаются следующие фиксированные процентные ставки по займам в рублях и в долларах.

Компания	Процентная ставка по займам, %	
	в руб.	в долл.
А	15,6	6,0
В	16,1	6,2

Компании А необходим заем на 5 лет в размере 100 тыс. долл., а компании В – заем на тот же срок в размере 3 млн руб. (текущий обменный курс – 30 руб. за 1 долл.).

Построить обмен платежами между компаниями А и В и посредником так, чтобы этот обмен был одинаково выгоден компаниям, а маржа посредника составила 0,06%.

Каков будет чистый платеж посреднику (в рублях) через 2 года при обменном курсе: а) 29,5 руб.; б) 30 руб.; в) 36 руб.

15.2. Компания согласилась:

• дважды в год получать проценты от суммы 100 млн долл. по фиксированной процентной ставке 6% в обмен на проценты от суммы 60 млн английских фунтов стерлингов по фиксированной процентной ставке 5%;

• произвести обмен основных сумм в конце срока контракта.

Оценить стоимость валютного свопа, когда до окончания его срока остается 1,5 года, а текущий обменный курс – 1,8 долл. за 1 фунт, если безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении в Великобритании и США приведены ниже.

Страна	Безрисковая процентная ставка, %, по срокам, годы		
	0,5	1,0	1,5
Великобритания	10,0	10,5	10,8
США	5,2	5,8	6,2

15.3. Компания согласилась:

• один раз в год получать проценты от суммы 10 млн руб. по фиксированной процентной ставке 16% в обмен на проценты от суммы 50 млн японских иен по фиксированной процентной ставке 5%;

• произвести обмен основных сумм по окончании срока контракта.

Определить стоимость валютного свопа, когда до окончания его срока остается 3 года, а текущий обменный курс 5 японских иен за 1 руб., если безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении в России и Японии приведены ниже.

Страна	Безрисковая процентная ставка, %, по срокам, годы		
	1,0	2,0	3,0
Россия	12,0	11,8	12,3
Япония	4,2	4,3	4,5

15.4. Компания согласилась:

• дважды в год выплачивать проценты от суммы 1 млн долл. по фиксированной процентной ставке 7% в обмен на проценты от суммы 150 млн японских иен по ставке 10%;

• произвести обмен основными суммами по окончании срока контракта.

Определить стоимость валютного свопа, когда до окончания его срока остается 2 года, если безрисковые процентные ставки

при непрерывном начислении в США и форвардные обменные курсы приведены ниже.

Показатели	Срок, годы			
	0,5	1,0	1,5	2,0
Процентная ставка, %	6,0	7,0	8,0	8,5
Форвардный обменный курс, иен/долл.	150,0	148,0	146,0	145,0

15.5. Компания согласилась:

• дважды в год выплачивать проценты от суммы 10 млн руб. по фиксированной процентной ставке 11,7% в обмен на проценты от суммы 380 тыс. долл. по ставке 8%;

• произвести обмен основными суммами по окончании срока контракта.

Определить стоимость валютного свопа, когда до окончания его срока остается 4 года, при следующих безрисковых процентных ставках в России (при непрерывном начислении) и форвардных обменных курсах.

Показатели	Срок, годы			
	1,0	2,0	3,0	4,0
Процентная ставка, %	15,20	15,00	14,80	14,50
Форвардный обменный курс, руб/долл.	29,80	29,60	29,50	28,00

15.6. Финансовый институт договорился с компанией В:

• в течение 10 лет получать один раз в год проценты от 10 млн швейцарских франков по фиксированной процентной ставке 3% в обмен на проценты от 7 млн долл. по ставке 8%;

• произвести обмен основными суммами через 10 лет.

Оценить убытки финансового института через 6 лет, если компания В в конце шестого года прекратит платежи, когда обменный курс составляет 0,80 долл. за один франк, а безрисковые процентные ставки при начислении один раз в год для всех сроков в Швейцарии и США соответственно равны 3 и 8%.

Инвестиции в производные финансовые инструменты

4.1. КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЦИОНЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Европейский опцион «колл» («пут») предоставляет его держателю право купить (соответственно продать) определенное количество некоторых активов по заранее установленной цене в момент истечения срока контракта.

Американский опцион «колл» («пут») предоставляет его держателю право купить (соответственно, продать) определенное количество исходных активов по заранее установленной цене в любое время вплоть до момента истечения срока контракта.

Держатель опциона занимает ***длинную позицию*** в опционном контракте, а сторона, выпустившая или подписавшая опцион, – ***короткую позицию***.

Выигрыш или доход стороны с длинной позицией в европейских опционах «колл» и «пут» на момент исполнения опциона определяются следующими равенствами:

$$d_c = \max\{S_T - X, 0\} \text{ и } d_p = \max\{X - S_T, 0\},$$

где S_T – спот-цена исходных активов на момент истечения опциона T;

X – цена исполнения опциона.

Если инвестор в будущий момент T хочет продать некоторые активы и приобрел европейский опцион «пут» стоимостью p на

эти активы с датой истечения T, то прибыль инвестора можно оценить следующим образом:

$$\pi_{кор}(S_T) = \begin{cases} X - (S - D + p)e^{\tilde{r}(T-t)}, & \text{если } S_T \le X, \\ S_T - (S - D + p)e^{\tilde{r}(T-t)}, & \text{если } S_T > X, \end{cases}$$

где S – цена исходных активов в текущий момент t;

D – приведенная стоимость доходов, поступающих от исходных активов за время от t до T;

$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка на срок $T - t$ лет при непрерывном начислении.

Если же инвестор планирует в будущий момент T купить некоторые активы и приобрел европейский опцион «колл» стоимостью c на эти активы с датой истечения T, то прибыль инвестора составит:

$$\pi_{дл}(S_T) = \begin{cases} -S_T + (S - c - D)e^{\tilde{r}(T-t)}, & \text{если } S_T \le X, \\ -X + (S - c - D)e^{\tilde{r}(T-t)}, & \text{если } S_T > X. \end{cases}$$

1.1. Инвестор занимает длинные позиции в европейских опционах «колл» и «пут» на одни и те же активы с ценой исполнения X.

Определить выигрыш инвестора, если даты истечения опционов совпадают, а спот-цена исходных активов на дату истечения опционов равна S_T.

1.2. Доказать, что портфель соответственно из длинной и короткой позиций в европейских опционах «колл» и «пут» на одни и те же активы при одинаковых ценах исполнения и датах истечения эквивалентен длинной позиции в соответствующем форвардном контракте.

1.3. Инвестор занимает длинные позиции в европейских опционах «колл» и «пут» на одни и те же активы с ценами исполнения X_1 и X_2 соответственно.

Определить выигрыш инвестора, если даты истечения опционов совпадают, а спот-цена исходных активов на момент исполнения опционов равна S_T.

1.4. Инвестор занимает соответственно длинную и короткую позиции в европейских опционах «колл» и «пут» с ценами исполнения X_1 и X_2.

Определить выигрыш инвестора, если даты истечения опционов совпадают, а спот-цена исходных активов на дату истечения опционов равна S_T.

1.5. Инвестор через 6 мес. собирается продать бездивидендную акцию, текущая стоимость которой составляет 100 долл. Текущая стоимость шестимесячного европейского опциона «пут» на акцию с ценой исполнения 98 долл. равна 3 долл., а безрисковая процентная ставка на 6 мес. при непрерывном начислении составляет 8%.

Оценить прибыль от хеджирования исходной позиции, если спот-цена акции через 6 мес. окажется равной: а) 110 долл.; б) 90 долл.

1.6. Инвестор планирует через 8 мес. купить акцию, текущая стоимость которой равна 80 долл. Через 4 мес. обещают выплатить по акции дивиденды в размере 2 долл. Текущая стоимость восьмимесячного европейского опциона «колл» на акцию с ценой исполнения 80 долл. равна 2 долл., а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении составляет 6%.

Оценить прибыль от хеджирования исходной позиции, если спот-цена акции через 8 мес. окажется равной: а) 78 долл.; б) 88 долл.

4.2. ПАРИТЕТ ЦЕН ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ

Предполагается, что рынки являются совершенными, можно брать ссуды неограниченно и кредитовать под безрисковые процентные ставки и отсутствуют прибыльные арбитражные возможности.

Если c и p – стоимости европейских опционов «колл» и «пут» на одни и те же активы с ценой исполнения X, дата истечения которых T, то имеет место паритет цен:

$$c - p = S - D - Xe^{-\bar{r}(T-t)},$$

где S – стоимость исходных активов в текущий момент t;
D – приведенная стоимость доходов, поступающих от исходных активов за время от t до T;
$\bar{r}$ – безрисковая процентная ставка на срок $T - t$ лет при непрерывном начислении.

Текущие цены европейских опционов «колл» и «пут» на исходные активы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\max\{S - D - Xe^{-\bar{r}(T-t)},\ 0\} < c < S - D,$$
$$\max\{D + Xe^{-\bar{r}(T-t)} - S,\ 0\} < p < Xe^{-\bar{r}(T-t)}.$$

Паритет цен европейских опционов на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью имеет следующий вид:

$$c - p = Se^{-\bar{q}(T-t)} - Xe^{-\bar{r}(T-t)}.$$

При этом

$$\max\{Se^{-\bar{q}(T-t)} - Xe^{-\bar{r}(T-t)},\ 0\} < c < Se^{-\bar{q}(T-t)},$$
$$\max\{Xe^{-\bar{r}(T-t)} - Se^{-\bar{q}(T-t)},\ 0\} < p < Xe^{-\bar{r}(T-t)}.$$

2.1. Дан шестимесячный европейский опцион «пут» на акцию, по которой через 2 и 4 мес. ожидаются дивиденды по 2 долл. каждый раз. Определить нижнюю и верхнюю границы для стоимости опциона, если текущая цена исходной акции равна 48 долл., цена исполнения опциона – 48 долл., а безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и составляют 8% при непрерывном начислении.

Указать прибыльную арбитражную стратегию, если рыночная цена опциона равна 1,8 долл.

2.2. Дан десятимесячный европейский опцион «колл» на акцию, по которой через 4 и 8 мес. ожидаются дивиденды в размерах 2 и 3 долл. соответственно. Цена исполнения опциона составляет 96,90 долл. Определить нижнюю и верхнюю границы для стоимости опциона, если текущая спот-цена исходной акции равна 100 долл., а безрисковые процентные ставки на 4, 8 и 10 мес. при непрерывном начислении составляют 6, 6,5 и 7% соответственно.

Указать прибыльную арбитражную стратегию, если рыночная цена данного опциона равна 3 долл.

2.3. Стоимость шестимесячного европейского опциона «колл» на акцию с ценой исполнения 30 долл. равна 2 долл. Текущая цена акции составляет 29 долл., дивиденды ожидаются через 2 и 5 мес. в размере 2,5 долл. каждый раз.

Определить стоимость соответствующего европейского опциона «пут», если безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% при непрерывном начислении.

Указать прибыльную арбитражную стратегию, если рыночная цена европейского опциона «пут» составляет: 1) 3 долл.; 2) 8 долл.

2.4. Трехмесячные европейские опционы «колл» и «пут» на акцию с одной и той же ценой исполнения 20 долл. продаются за 3 долл. Текущая цена акции – 19 долл., а дивиденды в размере 1 долл. ожидаются через 1 мес.

Указать прибыльную арбитражную стратегию, если безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% при непрерывном начислении.

2.5. Стоимость пятимесячного европейского опциона «колл» на обмен 1000 английских фунтов стерлингов на доллары с ценой исполнения 1,80 долл. равна 10 долл.

Определить стоимость соответствующего европейского опциона «пут», если текущий обменный курс – 1,78 долл., а безрисковые процентные ставки на 5 мес. в Великобритании и в США при непрерывном начислении составляют 4 и 6% соответственно.

2.6. При условиях задачи 2.5 указать прибыльную арбитражную стратегию, если рыночная цена европейского опциона «пут» на обмен 1000 английских фунтов равна 16 долл.

2.7. Дан восьмимесячный европейский опцион «колл» на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ = 4%.

Определить нижнюю границу стоимости опциона, если текущая цена активов равна 200 долл., цена исполнения опциона – 195 долл., а безрисковая процентная ставка на 8 мес. при непрерывном начислении составляет 12%.

4.3. АРБИТРАЖНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЦЕНАМИ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ ОДНОГО ВИДА

Если рынок является совершенным и отсутствуют прибыльные арбитражные возможности, то имеют место следующие утверждения.

1. Пусть c_1 и c_2 (p_1 и p_2) – цены европейских опционов «колл» («пут») на одни и те же активы с ценами исполнения X_1 и X_2 соответственно. Если T – дата истечения опционов, то при $X_1 < X_2$ выполняются неравенства

$$c_1 > c_2, \quad c_1 + X_1 e^{-\tilde{r}(T-t)} < c_2 + X_2 e^{-\tilde{r}(T-t)};$$

$$p_1 < p_2, \quad -p_1 + X_1 e^{-\tilde{r}(T-t)} < -p_2 + X_2 e^{-\tilde{r}(T-t)}.$$

2. Пусть c_1, c_2 и c_3 (p_1, p_2 и p_3) – цены трех европейских опционов «колл» («пут») на один и те же активы с ценами исполнения X_1, X_2 и X_3. Если T – дата истечения опционов, а $X_1 < X_3$, $X_2 = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_3$, где $0 < \lambda < 1$, то

$$c_2 < \lambda c_1 + (1-\lambda) c_3, \quad p_2 < \lambda p_1 + (1-\lambda) p_3.$$

3. Пусть c и p – стоимости европейских опционов «колл» и «пут» на портфель активов, определяемый вектором $\overline{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$, где $\Theta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, с ценой исполнения X и датой истечения T.

Если

$$X = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i X_i,$$

то

$$c < \sum_{i=1}^{n} \Theta_i c_i, \quad p < \sum_{i=1}^{n} \Theta_i p_i,$$

где c_i и p_i – стоимости европейских опционов «колл» и «пут» на активы i-го вида с ценой исполнения X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) при дате истечения T.

3.1. Стоимость восьмимесячного европейского опциона «колл» с ценой исполнения 90 долл. равна 9 долл.

Найти нижнюю и верхнюю границы для восьмимесячного европейского опциона «колл» на те же самые активы с ценой исполнения 95 долл., если безрисковая процентная ставка на 8 мес. при непрерывном начислении составляет 10%.

3.2. Стоимость десятимесячного европейского опциона «пут» с ценой исполнения 95 долл. равна 1,20 долл.

Определить нижнюю и верхнюю границы для этого опциона на те же самые активы с ценой исполнения 102 долл., если безрисковая процентная ставка на 10 мес. при непрерывном начислении составляет 8%.

3.3. Стоимости трехмесячных европейских опционов «колл» на некоторые активы с ценами исполнения 95, 102 и 105 долл. равны 6,40; 3,20 и 2,25 долл. соответственно.

Найти нижние и верхние границы для стоимостей этих опционов на те же самые активы с ценами исполнения 100 и 103 долл.

3.4. Стоимости двухмесячных европейских опционов «пут» на некоторые активы с ценами исполнения 90, 98 и 102 долл. равны 3, 4 и 5 долл. соответственно.

Определить нижние и верхние границы для стоимостей этих опционов на те же самые активы с ценами исполнения 95 и 100 долл.

3.5. Портфель активов определяется вектором $\overline{\Theta} = (0,5;\ 0,25;\ 0,25)$. Стоимости четырехмесячных европейских опционов «колл» на активы данного портфеля с ценами исполнения 90, 96 и 100 долл. равны 4, 3 и 1 долл. соответственно.

Установить верхнюю границу стоимости четырехмесячного европейского опциона «колл» на портфель активов с ценой исполнения 94 долл.

3.6. Портфель активов определяется вектором $\overline{\Theta} = \left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{2}\right)$. Стоимости шестимесячных европейских опционов «пут» на активы данного портфеля с ценами исполнения 92, 90, 94 и 100 долл. равны 5, 6, 8 и 10 долл. соответственно.

Определить верхнюю границу для стоимости шестимесячного европейского опциона «пут» на данный портфель активов с ценой исполнения 95,75 долл.

3.7. Стоимости трехмесячных европейских опционов «колл» на некоторые активы с ценами исполнения 95, 105 и 102 долл. равны 6,40; 1,25 и 3,50 долл.

Определить арбитражную стратегию и оценить прибыль от этой стратегии, если безрисковая процентная ставка на 3 мес. при непрерывном начислении составляет 8%.

4.4. СПЕКУЛЯТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ НА РЫНКЕ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ

Во всех стратегиях используются европейские опционы на одни и те же исходные активы.

1. ***Спред «быков»***: покупка европейского опциона «колл» («пут») с ценой исполнения X_1, продажа европейского опциона «колл» («пут») с ценой исполнения X_2, где $X_2 > X_1$ (даты истечения опционов совпадают).

2. ***Спред «медведей»***: продажа европейского опциона «колл» («пут») с ценой исполнения X_1, покупка европейского опциона «колл» («пут») с ценой исполнения X_2, где $X_2 > X_1$ (даты истечения опционов совпадают).

3. ***Спред «бабочка»***: покупка европейских опционах «колл» («пут») с ценами исполнения X_1 и X_3, $X_3 > X_1$, и продажа двух европейских опционов с ценой исполнения $X_2 = \dfrac{X_1 + X_3}{2}$ (даты истечения у всех опционов одинаковы).

4. Стратегии, в которых используются опционы с одной и той же ценой исполнения, но с разными датами истечения, называют ***календарными спредами***.

5. ***Стредл***: покупка (продажа) европейских опционов «колл» и «пут» с одной и той же ценой исполнения при совпадающих датах истечения.

6. ***Стренгл***: покупка (продажа) европейских опционов «колл» и «пут» с разными ценами исполнения, но с одной и той же датой истечения.

4.1. Стоимости шестимесячных европейских опционов «колл» с ценами исполнения 10 и 12 долл. равны 1,0 и 0,8 долл. соответственно.

Построить спреды «быков» и «медведей» из данных опционов. Какова зависимость прибыли от спот-цены активов на дату истечения опционов, если безрисковая процентная ставка на 6 мес. при непрерывном начислении составляет 10%?

4.2. Стоимости пятимесячных европейских опционов «колл» с ценами исполнения 15, 17,5 и 20 долл. равны 4, 2 и 0,5 долл. соответственно.

Построить спред «бабочка» из данных опционов. Какова зависимость прибыли от спот-цены активов на дату истечения опционов, если безрисковая процентная ставка на 5 мес. при непрерывном начислении составляет 8%?

4.3. Инвестиционный портфель включает спреды «быков» и «медведей», составленные из европейских опционов «пут».

Какова прибыль от инвестиционного портфеля на дату истечения опционов?

4.4. Стоимость шестимесячного европейского опциона «пут» с ценой исполнения 50 долл. равна 3 долл., стоимость семимесячного европейского опциона «пут» с ценой исполнения 50 долл. – 5 долл. Календарный спред составлен из короткой позиции в шестимесячном опционе и длинной позиции в семимесячном опционе.

Какова прибыль от календарного спреда через 6 мес., если безрисковая процентная ставка на этот период при непрерывном начислении составляет 8%?

4.5. Стоимости шестимесячных европейских опционов «колл» и «пут» с ценой исполнения 50 долл. равны 6 и 4 долл. соответственно. Безрисковая процентная ставка на 6 мес. при непрерывном начислении составляет 6%.

Определить:

а) прибыль на дату истечения опционов от стредла, составленного из длинных позиций;

б) значения спот-цены исходных активов, при которых прибыль от стредла равна 0.

4.6. Стоимости восьмимесячных европейских опционов «колл» и «пут» с ценами исполнения 50 и 52 долл. равны 2 и 3 долл. соответственно.

Какова прибыль от стренгла, составленного из длинных позиций, если безрисковая процентная ставка на 8 мес. при непрерывном начислении составляет 6%?

При каких значениях спот-цены исходных активов инвестор будет нести убытки?

4.7. Стоимости пятимесячных европейских опционов «колл» с ценами исполнения 20, 30, 40 и 50 долл. равны 5, 3, 2 и 1 долл. соответственно. Безрисковая процентная ставка на 5 мес. при непрерывном начислении равна 6%. Спред «кондор» состоит из покупки опционов с ценами исполнения 20 и 50 долл. и продажи опционов с ценами исполнения 30 и 40 долл.

Определить:

а) прибыль от спреда на дату истечения опционов;

б) диапазон изменения спот-цены активов, чтобы прибыль от спреда «кондор» была положительной.

4.5. АРБИТРАЖНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕН АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ

При стандартных предположениях о рынках имеют место следующие утверждения.

1. Стоимость того или иного американского опциона не может быть меньше стоимости аналогичного европейского опциона.

2. Американский опцион «колл» на активы, не приносящие доходов, не оптимально исполнять досрочно, т. е. до даты его истечения. В этом случае стоимость американского опциона «колл» совпадает со стоимостью аналогичного европейского опциона.

3. Дан американский опцион «колл» с датой истечения T на акцию, по которой в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, где $t = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T$, должны выплачиваться дивиденды в размерах $D_1, D_2, \ldots D_n$ соответственно.

Такой опцион не оптимально исполнять в любой момент τ, где $t_i < \tau < t_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Если же $D_i \le X(1-e^{-\tilde{r}_i(t_{i+1}-t_i)})$, где $\tilde{r}_i$ – безрисковая процентная ставка на период $[t_i, t_{i+1}]$ при непрерывном начислении, то американский опцион «колл» не оптимально исполнять в момент t_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

4. Если C и P – стоимости американских опционов «колл» и «пут» на одни и те же активы с ценой исполнения X, дата истечения которых T, а безрисковая процентная ставка одинакова для всех сроков, то

$$S - D - X < C - P < S - Xe^{-\tilde{r}(T-t)},$$

где S – спот-цена исходных активов в текущий момент t;
D – приведенная стоимость доходов, поступающих от исходных активов за период $[t, T]$.

5.1. Дан 12-месячный американский опцион «колл» на акцию, по которой через 3 и 8 мес. ожидаются дивиденды в размерах 3 и 2 долл. соответственно. Цена исполнения опциона равна 200 долл.

Доказать, что опцион не оптимально исполнять досрочно, если безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении одинакова для всех сроков, не меняется в течение времени и равна 8%.

5.2. Дан восьмимесячный американский опцион «колл» на акцию, по которой через 2 и 6 мес. ожидаются дивиденды одного и того же размера. Цена исполнения опциона равна 150 долл.

Определить величину выплачиваемых дивидендов, при которой досрочное исполнение опциона было бы не оптимально, если безрисковая процентная ставка одинакова для всех сроков, не меняется в течение времени и равна 6% при непрерывном начислении.

5.3. Дан шестимесячный американский опцион «колл» на бездивидендную акцию, цена исполнения которого равна 90 долл. Текущая стоимость исходной акции равна 92 долл.

Определить нижнюю границу для стоимости опциона, если безрисковая процентная ставка на 6 мес. при непрерывном начислении составляет 7%.

5.4. Дан 11-месячный американский опцион «колл» на акцию, по которой через 2 и 5 мес. ожидаются дивиденды в размерах 1,5 и 3 долл. соответственно. Цена исполнения опциона равна 120 долл.

Определить нижнюю границу для стоимости американского опциона, если безрисковая процентная ставка одинакова для всех сроков, не меняется в течение времени и равна 6% при непрерывном начислении, а текущая стоимость исходной акции равна 121 долл.

5.5. Стоимость восьмимесячного американского опциона «пут» на акцию, по которой через 2 и 6 мес. ожидаются дивиденды по 1 долл. каждый раз, равна 2 долл. Цена исполнения опциона составляет 50 долл.

Определить верхнюю и нижнюю границы для стоимости аналогичного американского опциона «колл», если текущая спот-цена акции – 52 долл., а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении равна 8%.

5.6. Стоимость шестимесячного американского опциона «колл» на акцию, по которой через 2 и 5 мес. ожидаются дивиденды по 0,5 долл. каждый раз, равна 2 долл. Цена исполнения опциона – 30 долл.

Определить верхнюю и нижнюю границы для стоимости аналогичного американского опциона «пут», если текущая цена акции равна 29 долл., а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении составляет 9%.

5.7. Пусть C и P – цены американских опционов «колл» и «пут» на одни и те же активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$. Доказать, что

$$Se^{-\tilde{q}(T-t)} - X \le C - P \le S - Xe^{-\tilde{r}(T-t)},$$

где X – цена исполнения опционов;
S – спот-цена активов в текущий момент t;
T – дата истечения опционов;
$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении.

4.6. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ «ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА»

Финансовый инструмент, производный от некоторых исходных активов, называется ***производным финансовым инструментом «европейского типа»***, если существует функция $F(z)$ такая, что в заданный момент T стоимость производного инструмента равна $F(S_T)$, где S_T – стоимость исходных активов в момент T. (Функция $F(z)$ называется ***платежной функцией производного финансового инструмента.***)

В простейшей модели эволюции цены исходных активов предполагается, что цена исходных активов в текущий момент t известна и равна S, а к моменту T может подняться до величины Su ($u > 1$) с вероятностью π или опуститься до величины Sd ($0 < d < 1$) с вероятностью $1 - \pi$.

Если на рынке исходных активов отсутствуют арбитражные возможности, то

$$d < \left(\frac{1+r}{1+q}\right)^{T-t} < u,$$

где r – безрисковая процентная ставка на $T - t$ лет;
q – постоянная дивидендная доходность исходных активов.

В условиях простейшей модели эволюции цены исходных активов текущая стоимость П производного финансового инструмента «европейского типа» оценивается следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\{\pi^* F(Su) + (1-\pi^*)F(Sd)\},$$

где $\pi^* = \dfrac{\left(\dfrac{1+r}{1+q}\right)^{T-t} - d}{u-d}$.

Если вероятность подъема цены в простейшей модели эволюции цены исходных активов равна π^*, то ожидаемая доходность инвестиции в исходные активы совпадает с безрисковой процентной ставкой. Иными словами, π^* является вероятностью подъема цены исходных активов в мире, «нейтральном к риску».

6.1. Цена акции, не приносящей дивидендов, равна 33 долл. Через 3 мес. цена акции может подняться до 38 долл. или снизиться до 32 долл.

Определить стоимости трехмесячных европейских опционов «колл» и «пут» на данную акцию с ценой исполнения 35 долл., если безрисковая процентная ставка на 3 мес. составляет 8%.

6.2. Цена акции с постоянной дивидендной доходностью 3% равна 50 долл. Через полгода цена акции может подняться до 54 долл. или снизиться до 48 долл. Определить стоимости шестимесячных европейских опционов «колл» и «пут» на данную акцию с ценой исполнения 50 долл., если безрисковая процентная ставка на 6 мес. составляет 8%.

6.3. Текущая цена английского фунта стерлингов в США равна 1,8 долл. Через 4 мес. цена одного фунта может подняться до 1,82 долл. или снизиться до 1,75 долл.

Определить стоимость четырехмесячного европейского опциона «пут» на 1000 фунтов стерлингов при цене исполнения 1,81 долл., если безрисковые процентные ставки на 4 мес. в США и Великобритании составляет 6 и 4% соответственно.

6.4. Текущая цена акции с постоянной дивидендной доходностью 5% равна 20 долл. Через полгода цена акции может подняться до 23 долл. или снизиться до 15 долл.

Оценить стоимость шестимесячного финансового инструмента «европейского типа», производного от данной акции, если безрисковая процентная ставка на 6 мес. составляет 8% , а платежная функция производного инструмента имеет вид

а) $F(z) = \max\{2z - 35, 0\}$; б) $F(z) = \dfrac{z^2}{z+10}$.

6.5. Инвестор приобрел 10 бездивидендных акций, цена которых через 6 мес. может подняться до 96 долл. или снизиться до 92 долл.

Сколько шестнмесячных европейских опционов «колл» на даниую акцию с ценой нсполнения 94 долл. следует купнть илн продать, чтобы хеджировать исходиую позицию?

6.6. Инвестор приобрел 20 четырехмесячиых европейских опционов «пут» на акцию с постояиной дивидендной доходностью 3%. Цена исполнения опционов равна 80 долл.

Сколько акций иеобходимо купить или продать, чтобы хеджировать исходную позицию, если через 4 мес. цена акции может подняться до 84 долл. или снизиться до 78 долл.?

4.7. ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ «ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА» В УСЛОВИЯХ БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

В текущий момент t рассматривается фннансовый нНструмент «европейского типа», производный от исходиых активов с дивндендной доходностью q, стоимость которого в момеит T равна значению платежной функции $F(S_T)$.

Если спот-цена исходных активов на временном промежутке $[t, T]$ определяется n-этапиой бнномиальной моделью, то

$$S_t = S;$$

$$S_{t+kh} = S_{t+(k-1)h}\varepsilon_k, \quad h = \frac{T-t}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ – независнмые, одинаково распределеиные случайные величниы, причем

$$\varepsilon_k = \begin{cases} u & \text{с вероятностью } \pi, \\ d & \text{с вероятностью } 1-\pi. \end{cases}$$

Если рыики являются совершенными, безрисковая процентная ставка одинакова для всех сроков, ие меияется в течеиие времени н равиа r, то при отсутствии прибыльных арбитражных возможностей имеют место следующие утверждения.

1. Пусть $\Pi_k(i)$ – стоимость производного фннансового инструмента в момент $t + kh$ прн условии, что цена исходных активов до этого момента поднималась i раз, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Тогда

$$\Pi_n(i) = F(Su^i d^{n-i}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

$$\Pi_k(i) = \frac{1}{(1+r)^h}\{\pi^*\Pi_{k+1}(i+1) + (1-\pi^*)\Pi_{k+1}(i)\},$$

где $\pi^* = \dfrac{\left(\dfrac{1+r}{1+q}\right)^h - d}{u-d}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

2. В условиях биномиальной моделн стоимость финансового инструмента «европейского типа», производиого от активов с постояиной дивидендной доходиостью, можио оценнвать, снтая инвестиционную среду нейтральной к риску.

Иными словами, текущая стоимость производного инструмеита определяется равенством

$$\Pi = \frac{\overline{F(S_T)}}{(1+r)^{T-t}},$$

где $\overline{F(S_T)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (\pi^*)^i (1-\pi^*)^{n-i} F(Su^i d^{n-i})$ – ожидаемая стонмость производного финансового инструмента на момент T в мире, нейтральном к риску;

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad \pi^* = \frac{\left(\dfrac{1+r}{1+q}\right)^h - d}{u-d}.$$

3. ***Теорема* Кокса–Росса–Рубинштейна.** Для европейских опциоиов на активы с постоянной дивидендной доходиостью q в условиях n-этапной биномиальной модели имеют место следующие формулы:

$$c=\frac{S}{(1+q)^{T-t}}B(n,k,\tilde{\pi})-\frac{X}{(1+r)^{T-t}}B(n,k,\pi^*);$$

$$p=\frac{X}{(1+r)^{T-t}}\left[1-B(n,k,\pi^*)\right]-\frac{S}{(1+q)^{T-t}}\left[1-B(n,k,\tilde{\pi})\right]$$

$$\pi^*=\frac{\left(\frac{1+r}{1+q}\right)^h-d}{u-d},\quad \tilde{\pi}=u\pi^*\left(\frac{1+q}{1+r}\right)^h,\quad h=\frac{T-t}{n},\quad k=\left[\frac{\ln X/S-n\ln d}{\ln u-\ln d}\right]+1,$$

где $B(n, k, \pi^*)$ и $B(n, k, \tilde{\pi})$ – вероятность того, что в n независимых испытаниях число успехов окажется больше или равно k, если вероятность успеха в одном испытании равна π^* и $\tilde{\pi}$.

7.1. Даны трехмесячные европейские опционы «колл» и «пут» на бездивидендную акцию при цене исполнения 80 долл., когда текущая цена акции равна 80 долл., а безрисковая процентная ставка для всех сроков составляет 6%.

Определить стоимости опционов в условиях биномиальной модели с параметрами u = 1,02 и d = 0,95, если:

а) биномиальная модель двухэтапная;

б) биномиальная модель трехэтапная.

Использовать рекуррентные соотношения для стоимостей опционов.

7.2. Даны четырехмесячные европейские опционы «колл» и «пут» на активы с постоянной дивидендной доходностью 3% при цене исполнения 196 долл., когда текущая цена акции равна 200 долл., а безрисковая процентная ставка для всех сроков составляет 10%.

Определить стоимости опционов на основе рекуррентных соотношений, если цена исходной акции определяется четырехэтапной биномиальной моделью с параметрами u = 1,07 и d = 0,93.

7.3. Определить стоимости европейских опционов при условиях задачи 7.2, если дисконтировать ожидаемую стоимость опционов на дату их истечения.

7.4. Даны четырехмесячные европейские опционы «колл» и «пут» на 1000 английских фунтов стерлингов с ценой исполнения 1,6 долл., когда текущий обменный курс – 1,61 долл. за один фунт, а безрисковые процентные ставки для всех сроков в США и в Великобритании равны 8 и 6% соответственно.

Найти стоимости опционов, если обменный курс определяется шестиэтапной биномиальной моделью с параметрами u = 1,02 и d = 0,98.

7.5. Определить стоимости европейских опционов при условиях задачи 7.4 с помощью формул Кокса–Росса–Рубинштейна.

7.6. Дан шестимесячный финансовый инструмент «европейского типа», производный от акции с постоянной дивидендной доходностью 2% . Платежная функция финансового инструмента имеет вид $F(z)=\frac{z^2}{z+10}$.

Найти стоимость финансового инструмента, если текущая цена акции 20 долл., безрисковая процентная ставка для всех сроков равна 6%, а цена акции определяется четырехэтапной биномиальной моделью с параметрами u = 1,08 и d = 0,94.

4.8. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ В УСЛОВИЯХ БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Рассматриваются американские опционы «колл» и «пут» на активы с постоянной дивидендной доходностью q, цена исполнения которых X, а дата истечения T.

Предполагается, что рынки удовлетворяют стандартным условиям, а стоимость исходных активов определяется n-этапной биномиальной моделью с параметрами u и d.

Если $C_k(i)$ и $P_k(i)$ – стоимости американских опционов «колл» и «пут» в момент $t + kh$ $\left(h = \frac{T-t}{n}\right)$ при условии, что до этого момента американские опционы не исполнялись, а цена исходных активов поднималась i раз, то имеют место следующие равенства:

$$C_n(i) = \max\{Su^i d^{n-i} - X, 0\},$$

$$P_n(i) = \max\{X - Su^i d^{n-i}, 0\}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$C_k(i) = \max\left\{Su^i d^{k-i} - X, \; \frac{1}{(1+r)^h}\left\{\pi^* C_{k+1}(i+1) + (1-\pi^*) C_{k+1}(i)\right\}\right\},$$

$$P_k(i) = \max\left\{X - Su^i d^{k-i}, \; \frac{1}{(1+r)^h}\left\{\pi^* P_{k+1}(i+1) + (1-\pi^*) P_{k+1}(i)\right\}\right\},$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

где S – стоимость исходных активов в текущий момент

r – безрисковая процентная ставка, не меняющаяся во времени;

$$\pi^* = \frac{\left(\frac{1+r}{1+q}\right)^h - d}{u-d}$$ – вероятность подъема цены на одном этапе в мире, нейтральном к риску.

8.1. Даны шестимесячные американские опционы «колл» и «пут» на активы с постоянной дивидендной доходностью q = 6% при цене исполнения 200 долл. Текущая цена исходных активов – 190 долл., а безрисковая процентная ставка – 12%.

Определить стоимости американских опционов в условиях двухэтапной биномиальной модели с параметрами u = 1,12 и d = 0,97.

8.2. Определить стоимости четырехмесячных опционов всех видов на бездивидендную акцию при цене исполнения 60 долл., если цена исходной акции определяется четырехэтапной биномиальной моделью с параметрами: u = 1,3 и d = 0,75, а безрисковая процентная ставка составляет 10% и не меняется во времени. Текущая цена акции равна 60 долл.

8.3. Определить стоимости восьмимесячных опционов всех видов на акцию с постоянной дивидендной доходностью 12% при цене исполнения 100 долл., если цена исходной акции определяется четырехэтапной биномиальной моделью с параметрами: u = 1,22 и d = 0,82, текущая цена акции 98 долл., а безрисковая процентная ставка равна 8% и не меняется во времени.

8.4. Найти стоимости восьмимесячных опционов всех видов на 1000 канадских долларов при цене исполнения 0,75 долл., если обменный курс определяется четырехэтапной биномиальной моделью с параметрами u = 1,02 и d = 0,98, текущий обменный курс – 0,75 долл., а безрисковые процентные ставки в США и Канаде равны 7 и 9% соответственно.

4.9. ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ. ВИНЕРОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Случайной величиной является функция $\xi(\omega)$, определенная на некотором пространстве элементарных событий Ω, $\omega \in \Omega$, такая, что для каждого числа $x \in R$ задана вероятность события $\{\xi(\omega) < x\}$.

На временном промежутке $[t, T]$ задан ***случайный процесс***

$$\xi = (\xi_\tau(\omega))_{\tau \in [t, T]},$$

если каждому моменту $\tau \in [t, T]$ поставлена в соответствие случайная величина $\xi_\tau(\omega)$.

Случайная величина $\xi_\tau(\omega)$, соответствующая моменту времени $\tau \in [t, T]$, называют ***сечением случайного процесса*** ξ в момент τ.

Траекторией (или реализацией) случайного процесса ξ является функция $\tau \to \xi_\tau(\omega)$ при фиксированном элементарном событии $\omega \in \Omega$.

Процесс *случайного блуждания*

$$\eta^{\Delta}=\left\{\eta_{\tau}^{\Delta}(\omega)\right\}_{\tau\in[0,+\infty)} \text{ (}\Delta\text{ – некоторое положительное число)}$$

определяется следующим образом:

$$\eta_{\tau}^{\Delta}(\omega)=\begin{cases} S, & \text{если } 0\le\tau<\Delta,\\ S+\sum\limits_{k=1}^{[\tau/\Delta]}\mu_k^{\Delta}(\omega), & \text{если } \tau\ge\Delta,\end{cases} \quad (S\text{ – некоторое число}),$$

где $\mu_1^{\Delta}(\omega),\ \mu_2^{\Delta}(\omega),\ \ldots,\ \mu_k^{\Delta}(\omega),\ldots$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mu_k^{\Delta}(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\Delta} & \text{с вероятностью } 1/2,\\ -\sqrt{\Delta} & \text{с вероятностью } 1/2.\end{cases}$$

Случайный процесс $\xi=(\xi_{\tau}(\omega))_{\tau\in[t,\,T]}$ является ***процессом с независимыми приращениями***, если для любых моментов $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$, где $t\le\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n\le T$, случайные величины

$$\xi_{\tau_2}-\xi_{\tau_1},\ \ \xi_{\tau_3}-\xi_{\tau_2},\ \ \ldots,\ \xi_{\tau_n}-\xi_{\tau_{n-1}}$$

независимы.

Функция

$$F_{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$$
$$=P\left\{\xi_{\tau_1}(\omega)<x_1,\xi_{\tau_2}(\omega)<x_2,\ldots,\xi_{\tau_n}(\omega)<x_n\right\},$$

где $\quad t\le t_1<t_2<\ldots<t_n\le T,$

называется ***n-мерной функцией распределения случайного процесса*** $\xi=(\xi_{\tau}(\omega))_{\tau\in[t,\,T]}$.

Математическое ожидание (соответственно дисперсия) случайного процесса $\xi=(\xi_{\tau}(\omega))_{\tau\in[t,\,T]}$ в момент τ определяется как математическое ожидание (дисперсия) сечения этого процесса в момент τ.

Винеровский случайный процесс – это случайный процесс $w=(w_{\tau}(\omega))_{\tau\in[0,\,+\infty)}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $w_0(w)=0$;
- приращения случайного процесса w независимы;
- при $0\le\tau<s$ приращение w_s-w_{τ} распределено нормально с параметрами $(0,\ s-\tau)$;
- все траектории случайного процесса w непрерывны на промежутке $[0,+\infty)$.

9.1. Дан случайный процесс $\xi=(\xi_{\tau}(\omega))_{\tau\in[0,\,\infty)}$, где

$$\xi_{\tau}(\omega)=\eta(\omega)\tau+1,\quad \eta(\omega)=\begin{cases}1 & \text{с вероятностью } 1/4,\\ -1 & \text{с вероятностью } 3/4.\end{cases}$$

Построить все траектории случайного процесса ξ. Каковы сечения случайного процесса?

9.2. Дан случайный процесс $\xi=(\xi_{\tau}(\omega))_{\tau\in[0,\,\infty)}$, где

$$\xi_{\tau}(\omega)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\le\tau\le\eta(\omega),\\ -1, & \text{если } \tau>\eta(\omega),\end{cases}$$

$\eta(\omega)$ – неотрицательная случайная величина.

Каковы траектории случайного процесса?

9.3. Дан случайный процесс $\xi=(\xi_{\tau}(\omega))_{\tau\in[0,\,\infty)}$, где

$$\xi_{\tau}(\omega)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\le\tau\le\eta_1(\omega),\\ \dfrac{\tau-\eta_1(\omega)}{\eta_2(\omega)-\eta_1(\omega)}, & \text{если } \eta_1(\omega)<\tau\le\eta_2(\omega),\\ 1, & \text{если } \tau>\eta_2(\omega),\end{cases}$$

$h_1(w)$ и $h_2(w)$ – случайные величины, причем $0<h_1(w)<h_2(w)$.

Каковы траектории случайного процесса?

9.4. Дан винеровский случайный процесс $w=(w_{\tau}(\omega))_{\tau\in[0,\,\infty)}$. Найти вероятности

$$P\{w_1(\omega)<2\};\ \ P\{1\le w_{1,5}(\omega)<2\}\ \text{ и }\ P\{w_2(\omega)>3\}.$$

9.5. Дан процесс случайного блуждания $\eta^{\Delta} = \left(\eta_{\tau}^{\Delta}(\omega)\right)_{\tau\in[0,+\infty)}$, где $\eta_0^{\Delta}(\omega) = 0$.

Найти $M\left(\eta_{\tau}^{\Delta}(\omega)\right)$ и $D\left(\eta_{\tau}^{\Delta}(\omega)\right)$.

9.6. На одном рисунке изобразить траектории случайных блужданий:

$$\eta^1 = \left(\eta_{\tau}^1(\omega)\right)_{\tau\in[0,+\infty)},\ \eta^{1/2} = \left(\eta_{\tau}^{1/2}(\omega)\right)_{\tau\in[0,+\infty)}$$

$$\text{и } \eta^{1/4} = \left(\eta_{\tau}^{1/4}(\omega)\right)_{\tau\in[0,+\infty)},$$

где $\eta_0^1(\omega) = \eta_0^{1/2}(\omega) = \eta_0^{1/4}(\omega) = 0$.

Найти $M\left(\eta_{\tau}^{\Delta}(\omega)\right)$ и $D\left(\eta_{\tau}^{\Delta}(\omega)\right)$, где $\Delta = 1$, $1/2$ и $1/4$.

9.7. Дан винеровский случайный процесс $w = (w_{\tau}(\omega))_{\tau\in[0,\infty)}$. Доказать, что $\mathrm{cov}(w_{\tau}, w_s) = \min\{\tau, s\}$.

4.10. ПРОЦЕСС ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Случайный процесс $\xi = (S_{\tau}(\omega))_{\tau\in[t,\infty)}$ называется ***процессом геометрического броуновского движения***, если

$$\ln S_{\tau}(\omega) = \ln S + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t) + \sigma(w_{\tau}(\omega) - w_t(\omega)),$$

где S, a и σ – некоторые числа, причем $S > 0$ и $\sigma > 0$ (a – показатель смещения случайной величины $S_{\tau}(\omega)$, а σ – годовая волатильность этой случайной величины);
$w = (w_{\tau}(\omega))_{\tau\in[0,\infty)}$ – винеровский случайный процесс.

Сечение $S_{\tau}(\omega)$ геометрического броуновского движения в любой момент τ, $\tau \in [t, \infty)$, распределено логнормально с параметрами:

$$\left\{\ln S + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t),\ \ \sigma^2(\tau - t)\right\},$$

причем $M[S_{\tau}(\omega)] = Se^{a(\tau-t)}$, $D[S_{\tau}(\omega)] = S^2 e^{2a(\tau-t)}\left[e^{\sigma^2(\tau-t)} - 1\right]$.

При достаточно большом n процесс геометрического броуновского движения $\xi = (S_{\tau}(\omega))_{\tau\in[t,\infty)}$ можно аппроксимировать n-этапной биномиальной моделью с параметрами

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{h_n}},\quad d_n = e^{-\sigma\sqrt{h_n}},\quad \pi_n = \frac{e^{ah_n} - d_n}{u_n - d_n},$$

где $h_n = \dfrac{T-t}{n}$.

Если стоимость некоторого финансового актива определяется процессом геометрического броуновского движения, то годовую волатильность стоимости финансового актива можно оценить на основе исторической информации о ценах этого актива.

Предполагая, что известны цены финансового актива:

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_m$$

соответственно в моменты τ_0, $\tau_0 + \Delta\tau$, $\tau_0 + 2\Delta\tau$, ..., $\tau_0 + m\Delta\tau$, положим

$$u_i = \ln\frac{S_i}{S_{i-1}},\quad i = 1, 2, \dots, m,\quad \bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i}{m},\quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(u_i - \bar{u})^2}{m}.$$

Тогда

$$\sigma \approx \frac{s}{\sqrt{\Delta\tau}}.$$

10.1. Цена активов определяется геометрическим броуновским движением с показателем смещения $a = 0{,}01$ и годовой волатильностью $\sigma = 20\%$. Текущая цена активов равна 10 долл.

Определить:

а) ожидаемые значения цены активов через 0,5; 1,0 и 1,5 года;

б) вероятности $P\{9{,}8 \le S_{t+1,0} \le 10{,}2\}$ и $P\{10{,}1 \le S_{t+1,5} \le 10{,}3\}$.

10.2. Цена активов определяется геометрическим броуновским движением с показателем смещения $a = 0{,}1$ и годовой волатильностью $\sigma = 20\%$. Текущая цена активов равна 50 долл.

Определить:

а) ожидаемые значения цены активов через 0,4; 0,8 и 1,2 года;

б) вероятности $P\{50{,}5 \le S_{t+0,4} \le 52\}$ и $P\{49 \le S_{t+0,8} \le 51\}$.

10.3. Оценить годовую волатильность активов, если известны цены (S_i) этих активов за 11 последовательных рабочих дней биржи.

i	S_i	i	S_i	i	S_i
0	20	4	$20\frac{1}{2}$	8	$20\frac{7}{8}$
1	$20\frac{1}{8}$	5	$20\frac{1}{4}$	9	$20\frac{3}{4}$
2	$19\frac{1}{8}$	6	$20\frac{7}{8}$	10	$20\frac{3}{4}$
3	20	7	$20\frac{7}{8}$		

10.4. Оценить годовую волатильность активов, если известны цены (S_i) этих активов за 15 последовательных рабочих дней биржи.

i	S_i	i	S_i	i	S_i
0	100,00	5	104,50	10	104,88
1	105,12	6	105,62	11	104,75
2	103,45	7	106,34	12	105,21
3	102,80	8	105,85	13	105,28
4	103,42	9	104,24	14	104,35

10.5. Определить стоимости трехмесячных опционов всех видов на акцию с постоянной дивидендной доходностью $q = 8\%$, цена исполнения которых составляет 51 долл., если текущая спот-цена акции равна 52 долл., а волатильность стоимости акции – 30%. Безрисковая процентная ставка одинакова для всех сроков, не меняется во времени и равна 12%. Использовать биномиальную модель с числом этапов:

а) $n = 3$;

б) $n = 5$.

10.6. Определить стоимости опционов при условиях задачи 10.5, если волатильность стоимости исходной акции равна 50%.

4.11. МОДЕЛЬ БЛЭКА–ШОУЛСА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ

Рассматриваются европейские опционы «колл» и «пут» на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

- рынки европейских опционов на данные активы и спот-рынок исходных активов являются совершенными;
- можно неограниченно кредитовать и брать ссуды под безрисковую процентную ставку $\tilde{r}$ при непрерывном начислении, которая одинакова для всех сроков и не меняется в течение времени;
- стоимость исходных активов определяется геометрическим броуновским движением движения $\xi = (S_\tau(\omega))_{\tau\in[t,\infty)}$, где

$$\ln\{S_\tau(\omega)\} = \ln S + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t) + \sigma\{w_\tau(\omega) - w_t(\omega)\};$$

- на рынках отсутствуют прибыльные арбитражные возможности.

В модели Блэка–Шоулса стоимости европейских опционов «колл» и «пут» с ценой исполнения X, дата истечения которых T, находятся по формулам

$$c = Se^{-\tilde{q}(T-t)}N(d_1) - Xe^{-\tilde{r}(T-t)}N(d_2),$$
$$p = Xe^{-\tilde{r}(T-t)}N(-d_2) - Se^{-\tilde{q}(T-t)}N(-d_1),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln S/X + (T-t)\left(\tilde{r} - \tilde{q} + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$N(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du, \quad z \in R.$$

11.1. Цена исходных активов на временном промежутке [0,5; 2,0] определяется n-этапной биномиальной моделью с параметрами

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{h_n}}, \quad d_n = e^{-\sigma\sqrt{h_n}}.$$

Найти:

а) $B(n, k_n, \pi_n^*)$, $B(n, k_n, \tilde{\pi}_n)$ при n = 4, 6, 8;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} B(n, k_n, \pi_n^*)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B(n, k_n, \tilde{\pi}_n)$,

если S = 100 долл., X = 102 долл., σ = 30%, r = 10%, q = 8%.

11.2. Определить стоимости четырехмесячных европейских опционов «колл» и «пут» на акцию с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ = 4% при цене исполнения X = 350 долл., если S = 348 долл., $\tilde{r}$ = 7% и σ = 30%.

11.3. Определить текущие стоимости европейских опционов «колл» и «пут» на бездивидендную акцию, цена исполнения которых X = 50 долл., если S = 52 долл., $T - t$ = 3 мес., $\tilde{r}$ = 12% и σ = 30%.

11.4. Определить стоимости пятимесячных европейских опционов «колл» и «пут» на 500 английских фунтов стерлингов при цене исполнения 1,60 долл., если S = 1,60 долл., $\tilde{r}$ = 8%, $\tilde{r}_f$ = 11% (в Великобритании), σ = 14%.

11.5. Даны девятимесячные европейские опционы «колл» и «пут» на 1000 канадских долларов при цене исполнения 0,75 долл., когда S = 0,75 долл., $\tilde{r}$ = 7%, $\tilde{r}_f$ = 9% (в Канаде), σ = 4%.

Определить стоимости опционов в условиях четырехэтапной биномиальной модели и по формулам Блэка–Шоулса.

4.12. СВОЙСТВА СТОИМОСТЕЙ ЕВРОПЕЙСКИХ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ БЛЭКА–ШОУЛСА

В модели Блэка–Шоулса стоимости европейских опционов зависят от следующих факторов:

- цены исходных активов S в текущий момент t;
- дивидендной доходности исходных активов $\tilde{q}$;
- годовой волатильности исходных активов σ;
- безрисковой процентной ставки $\tilde{r}$

и определяются параметрами опционов:

- ценой исполнения X;
- временем, остающимся до даты истечения опционов, $T - t$.

Частные производные стоимостей европейских опционов по основным факторам имеют следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial S} = e^{-\tilde{q}(T-t)}N(d_1), \quad \frac{\partial p}{\partial S} = -e^{-\tilde{q}(T-t)}N(-d_1);$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{q}} = -(T-t)Se^{-\tilde{q}(T-t)}N(d_1), \quad \frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} = (T-t)e^{-\tilde{q}(T-t)}N(-d_1);$$

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)e^{-\tilde{q}(T-t)};$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{r}}=X(T-t)e^{-\tilde{r}(T-t)}N(d_2)\,,\quad \frac{\partial p}{\partial \tilde{r}}=-X(T-t)e^{-\tilde{r}(T-t)}N(-d_2);$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}=\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}N'(d_1)e^{-\tilde{q}(T-t)};$$

где $d_1=\dfrac{\ln S/X+(T-t)\left(\tilde{r}-\tilde{q}+\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$,

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{u^2}{2}}du,\quad N'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Частные производные стоимостей европейских опционов по параметрам опционов имеют вид

$$\frac{\partial c}{\partial X}=-e^{-\tilde{r}(T-t)}N(d_2);\quad \frac{\partial p}{\partial X}=e^{-\tilde{r}(T-t)}N(-d_2);$$

$$\frac{\partial c}{\partial (T-t)}=\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}e^{-\tilde{q}(T-t)}N'(d_1)-$$

$$-\tilde{q}Se^{-\tilde{q}(T-t)}N(d_1)+\tilde{r}Xe^{-\tilde{r}(T-t)}N(d_2);$$

$$\frac{\partial p}{\partial (T-t)}=\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}e^{-\tilde{q}(T-t)}N'(d_1)+$$

$$+\tilde{q}Se^{-\tilde{q}(T-t)}N(-d_1)-\tilde{r}Xe^{-\tilde{r}(T-t)}N(-d_2).$$

12.1. Дан трехмесячный европейский опцион «колл» на бездивидендную акцию, годовая волатильность которой равна 20%. Найти значения частых производных

$$\frac{\partial c}{\partial S},\ \frac{\partial^2 c}{\partial S^2},\ \frac{\partial c}{\partial \tilde{r}},\ \frac{\partial c}{\partial \sigma},$$

если текущая стоимость исходной акции равна 100 долл., а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении – 8%.

Цена исполнения опциона равна 100 долл.

12.2. Дан шестимесячный европейский опцион «пут» на акцию, непрерывная дивидендная доходность которой равна 6%, а годовая волатильность составляет 40%. Найти значения частых производных

$$\frac{\partial p}{\partial S},\ \frac{\partial^2 p}{\partial S^2},\ \frac{\partial p}{\partial \tilde{r}},\ \frac{\partial p}{\partial \sigma},$$

если текущая стоимость исходной акции равна 50 долл., а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении – 10%.

Цена исполнения опциона равна 50 долл.

12.3. Дан европейский опцион «колл» на акцию с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ = 12%, годовая волатильность которой составляет 20%.

Текущая стоимость акции равна 50 долл., цена исполнения опциона – 45 долл., а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 8%.

Определить стоимость опциона, если до даты его истечения остается 1, 2, 4, 6 и 12 мес.

12.4. Дан шестимесячный европейский опцион «пут» на бездивидендную акцию, годовая волатильность которой равна 35%. Цена исполнения опциона $X=120$ долл., текущая цена акции $S=118$ долл., а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 6%.

Найти значение частной производной $\dfrac{\partial p}{\partial X}$. Оценить приращение стоимости опциона, если цена его исполнения изменится на: а) ±1 долл.; б) ±2 долл.; в) ±5 долл.

12.5. Внутренняя стоимость опциона «колл» (европейского или американского) в текущий момент определяется в виде

$$\max\{S-X,0\},$$

где S – текущая спот-цена исходных активов;
X – цена исполнения опциона.

1. Показать, что внутренняя стоимость опциона «колл» на бездивидендную акцию не превосходит стоимости этого опциона.

2. Доказать, что временная стоимость $TV^c = c - \max\{S - X, 0\}$ европейского опциона «колл» достигает наибольшего значения при спот-цене исходных активов, равной цене исполнения опциона.

12.6. Временная стоимость европейского опциона «пут» определяется следующим образом:

$$TV^p = p - \max\{X - S, 0\},$$

где p – текущая стоимость опциона;
S – текущая спот-цена исходных активов;
X – цена исполнения опциона.

1. Показать, что временная стоимость европейского опциона «пут» на бездивидендную акцию может быть отрицательной.

2. Доказать, что временная стоимость европейского опциона «пут» достигает наибольшего значения при спот-цене исходных активов, равной цене исполнения опциона.

4.13. НЕЯВНАЯ (ПРЕДПОЛАГАЕМАЯ) ВОЛАТИЛЬНОСТЬ ИСХОДНЫХ АКТИВОВ

Стоимости европейских опционов «колл» и «пут», определенные по модели Блэка–Шоулса, представляет собой теоретические стоимости этих опционов.

Значение волатильности исходных активов, при котором теоретическая цена европейского опциона совпадает с его рыночной ценой, называется ***неявной волатильностью исходных активов***.

Если рыночная стоимость европейского опциона «колл» удовлетворяет условию

$$\max\left\{Se^{-\tilde{q}(T-t)} - Xe^{-\tilde{r}(T-t)},\ 0\right\} < c^{\text{рын}} < Se^{-\tilde{q}(T-t)},$$

то существует, и притом единственное, значение неявной волатильности.

Для отыскания неявной волатильности исходных активов необходимо решить уравнение

$$c^{\text{рын}} = Se^{-\tilde{q}(T-t)}N(d_1) - Xe^{-\tilde{r}(T-t)}N(d_2),$$

где $d_1 = \dfrac{\ln S/X + (T-t)\left(\tilde{r} - \tilde{q} + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$,

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du.$$

Замечание. Аналогичным образом можно найти неявную волатильность по рыночной стоимости европейского опциона «пут».

13.1. Рыночная стоимость 12-месячного опциона «колл» на акцию с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ = 6% при цене исполнения X = 50 долл. равна 4 долл.

Определить неявную волатильность исходной акции, если текущая цена акции равна 50 долл., а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении – 8%.

13.2. Рыночная стоимость пятимесячного опциона «пут» на бездивидендную акцию при цене исполнения 1220 долл. равна 92,60 долл.

Определить неявную волатильность исходной акции, если текущая цена акции равна 1200 долл., а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении – 9%.

13.3. Рыночная стоимость шестимесячного европейского опциона «пут» на акцию с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ = 4% при цене исполнения 16 долл. равна 1,5 долл. Текущая цена акции – 15 долл., а безрисковая процентная ставка $\tilde{r}$ = 6%.

Определить:

а) неявную волатильность исходной акции;

б) стоимости четырехмесячных европейских опционов на данную акцию с ценой исполнения X = 15 долл., когда текущая цена акции – 16 долл., а безрисковая процентная ставка $\tilde{r}$ = 7%.

13.4. Рыночная стоимость пятимесячного европейского опциона «колл» на бездивидендную акцию при цене исполнения 100 долл. равна 10,19 долл. Текущая цена акции – 100 долл., а безрисковая процентная ставка $\tilde{r}$ = 8%.

Найти:

а) неявную волатильность исходной акции;

б) стоимость четырехмесячного американского опциона «пут» на данную акцию с ценой исполнения 102 долл., когда текущая цена акции – 101 долл., а безрисковая процентная ставка $\tilde{r}$ = 9% (использовать четырехэтапную биномиальную модель).

13.5. Даны европейские опционы «колл» и «пут» на одни и те же активы с дивидендной доходностью $\tilde{q}$. Цена исполнения опционов X, а дата истечения T.

Доказать, что существует значение σ, при котором теоретические стоимости опционов совпадают с их рыночными стоимостями.

13.6. Дан двухмесячный американский опцион «колл» на обмен 1000 английских фунтов стерлингов с ценой исполнения 1,8 долл. Текущий обменный курс – 1,85 долл. Безрисковые процентные ставки в Великобритании и США при непрерывном начислении равны соответственно 8 и 6%.

Оценить волатильность исходных активов, если рыночная стоимость американского опциона равна 61,15 долл. (использовать четырехэтапную биномиальную модель).

4.14. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ НА ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ

Опционы на фьючерсные контракты принято называть ***фьючерсными опционами***.

Держатель фьючерсного опциона «колл» в момент его исполнения получает длинную позицию в исходном фьючерсном контракте и денежную сумму в размере разности между фьючерсной ценой на момент исполнения опциона и ценой его исполнения.

Держатель фьючерсного опциона «пут» в момент его исполнения получает короткую позицию в исходном фьючерсном контракте и денежную сумму в размере разности между ценой исполнения опциона и фьючерсной ценой.

Доход держателя европейских фьючерсных опционов «колл» и «пут» в момент его истечения составляет

$$\max\{\Phi_T - X,\ 0\} \text{ и } \max\{X - \Phi_T,\ 0\}.$$

Если активы, положенные в основу исходного фьючерсного контракта, обладают постоянной и непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, а их цена определяется геометрическим броуновским движением

$$\ln S_\tau = \ln S + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t) + \sigma\{w_\tau(\omega) - w_t(\omega)\},$$

то фьючерсная цена этих активов также определяется геометрическим броуновским движением

$$\ln \Phi_\tau = \ln \Phi + \left(\hat{a} - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t) + \sigma\{w_\tau(\omega) - w_t(\omega)\},$$

где $\Phi_t = \Phi, \quad \hat{a} = a - (\tilde{r} - \tilde{q})$.

При отсутствии арбитражных возможностей фьючерсный опцион эквивалентен обычному опциону на активы, дивидендная доходность которых совпадает с безрисковой процентной ставкой.

В частности, для европейских фьючерсных опционов на активы, цена которых определяется геометрическим броуновским движением, имеют место следующие формулы:

$$c = e^{-\tilde{r}(T-t)}\{\Phi N(d_1) - XN(d_2)\},$$

$$p = e^{-\tilde{r}(T-t)}\{XN(-d_2) - \Phi N(-d_1)\},$$

где $d_1 = \dfrac{\ln \Phi/X + (T-t)\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$

14.1. Найти стоимости фьючерсных опционов всех видов на акцию, волатильность которой равна 49,2 % при следующих данных: X = 70 долл., Φ = 66 долл., $T - t$ = 8 мес., $\tilde{r}$ = 7%.

14.2. Определить стоимости фьючерсных опционов всех видов на обмен 1000 английских фунтов при следующих данных: X = 1,6 долл., Φ = 1,62 долл., $T - t$ = 4 мес., $\tilde{r}$ = 8%, $\tilde{r}_f$ = 6% (в Великобритании), σ = 20%.

14.3. Пусть c и p – стоимости европейских фьючерсных опционов «колл» и «пут» на одни и те же активы с ценой исполнения X при дате истечения T.

Доказать, что $c = p$, если текущая фьючерсная цена активов совпадает с ценой исполнения опционов.

14.4. Пусть C и P – стоимости американских фьючерсных опционов «колл» и «пут» на одни и те же активы с ценой исполнения X при дате истечения T.

Доказать, что

$$\Phi e^{-\tilde{r}(T-t)} - X \le C - P \le \Phi - X e^{-\tilde{r}(T-t)},$$

где Φ – текущая фьючерсная цена исходных активов.

14.5. Найти стоимости трехмесячных фьючерсных опционов всех видов для следующих данных: $\Phi = X$ = 100 долл., σ = 30%, $\tilde{r}$ = 15%.

14.6. Стоимости европейских спот-опциона «колл» и фьючерсного опциона «колл» на одни и те же активы с ценой исполнения X и датой истечения T равны c и c^{Φ} соответственно. Дата исполнения фьючерсного контракта T^*, где $T^* \ge T$.

Доказать, что

а) $c = c^{\Phi}$, если $T^* = T$;

б) $c^{\Phi} > c$, если $T^* > T$, $\tilde{r} > \tilde{q}$;

в) $c^{\Phi} < c$, если $T^* > T$, $\tilde{r} < \tilde{q}$.

14.7. Стоимости европейских спот-опциона «пут» и фьючерсного опциона «пут» на одни и те же активы с ценой исполнения X и датой истечения T равны p и p^{Φ} соответственно. Дата исполнения фьючерсного контракта T^*, где $T^* \ge T$.

Доказать, что

а) $p = p^{\Phi}$, если $T^* = T$;

б) $p^{\Phi} < p$, если $T^* > T$, $\tilde{r} > \tilde{q}$;

в) $p^{\Phi} > p$, если $T^* > T$, $\tilde{r} < \tilde{q}$.

4.15. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ, ПРОИЗВОДНЫХ ОТ АКЦИЙ С ИЗВЕСТНЫМИ ДИВИДЕНДАМИ

Рассматривается финансовый инструмент, производный от акции, по которой в будущий момент τ ($0 < \tau < T$) обещают выплатить дивиденды в размере D (D – величина, на которую снижается цена исходной акции после выплаты дивидендов).

Для оценки стоимости производного финансового инструмента можно использовать модифицированную n-этапную биномиальную модель

$$S_t = S;$$
$$S_{t+kh_n} = S_{t+(k-1)h_n}\mu_k(\omega), \quad k \ne l;$$
$$S_{t+lh_n} = S_{t+(l-1)h_n}\mu_l(\omega) - D,$$

где $t+(l-1)h < \tau \le t+lh_n$, $h_n = \dfrac{T-t}{n}$,

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, причем

$$\mu_k = \begin{cases} u_n = e^{\sigma\sqrt{h_n}} & \text{с вероятностью } \pi_n, \\ d_n = e^{-\sigma\sqrt{h_n}} & \text{с вероятностью } 1-\pi_n \end{cases}$$

(σ – годовая волатильность стоимости акции).

Пусть $\Pi_k(Y)$, где k = 0, 1, 2, ..., n, – стоимость производного финансового инструмента в момент $t + kh_n$ при условии, что цена исходной акции в этот момент равна Y.

Если производный финансовый инструмент является инструментом «европейского типа» с платежной функцией $F(z)$, то

$$\Pi_n(Y) = F(Y);$$

$$\Pi_k(Y) = \frac{1}{(1+r)^{h_n}} \left\{ \pi_n^* \Pi_{k+1}(Yu_n) + (1-\pi_n^*)\Pi_{k+1}(Yd_n) \right\},$$

$$k \neq l-1, \quad k \neq n;$$

$$\Pi_{l-1}(Y) = \frac{1}{(1+r)^{h_n}} \left\{ \pi_n^* \Pi_l(Yu_n - D) + (1-\pi_n^*)\Pi_l(Yd_n - D) \right\},$$

где r – безрисковая процентная ставка;

$\pi_n^* = \dfrac{(1+r)^{h_n} - d_n}{u_n - d_n}$ – вероятность подъема цены исходиой акции в мире, нейтральном к риску.

Кроме того, стоимость финансового инструмента «европейского тнпа» можно оценивать, еслн считать инвестиционную среду нейтральной к риску, т.е.

$$\Pi = \frac{\overline{F(S_T)}}{(1+r)^{T-t}},$$

где $\overline{F(S_T)}$ – ожидаемая коиечная стонмость пронзводного инструмента в мире, иейтральном к рнску.

Моднфицированную биномиальную модель можно использовать для оценки стоимостей американских опциоиов иа акции с известными дивидендами.

Стоимость европейских опционов на акцню с известными дивидендами можно определять по приблнженным формулам

$$c \approx S^* N(d_1) - Xe^{-\tilde{r}(T-t)} N(d_2);$$

$$p \approx Xe^{-\tilde{r}(T-t)} N(-d_2) - S^* N(-d_1),$$

где $S^* = S - I$, I – приведенная стоимость дивидендов, выплачиваемых по акции за время от t до T;

$$d_1 = \frac{\ln S^*/X + (T-t)\left(\tilde{r} + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

15.1. Определить стонмости опцнонов всех вндов на акцию, по которой дивиденды в размере 2 долл. ожидаются через 2 мес., еслн X = 60 долл., S = 60 долл., $T - t$ = 4 мес., r = 10% и σ = 60% (использовать четырехэтапную бииомиальную модель).

15.2. Оценить стоимость четырехмесячного американского опциона «колл» иа акцию, по которой через 1,5 мес. должны выплачиваться дивиденды в размере 2,5 долл., если X = 29 долл., S = 30 долл., r = 5% и σ = 25% (использовать восьмиэтапную биномиальную модель).

15.3. Определить стоимости шестнмесячных европейских опционов «колл» и «пут» на акцию, по которой через 2 и 5 мес. должны выплачиваться дивидеиды в размере 1 долл. (каждый раз), если X = 40 долл., S = 40 долл., $\tilde{r}$ = 9% и σ = 30%.

15.4. Построить модифицированную бииомиальиую модель эволюции стонмости акции, по которой в моменты τ_1 и τ_2, где $\tau_1 < \tau_2$, выплачиваются дивиденды соответственно в размерах D_1 и D_2.

Найти сечения модифицированной биномиальной модели.

15.5. Определить стоимости шестимесячных европейских опционов на акцню, по которой через 2 и 5 мес. должны выплачиваться дивиденды в размере 4 долл. (каждый раз), если X = 100 долл., S = 100 долл., r = 10% и σ = 40%. При этом:

а) использовать шестиэтапную биномиальную модель;

б) использовать формулы Блэка–Шоулса.

15.6. На основе шестнэтапной бииомнальной модели определить стоимости опциоиов прн условиях задачи 15.5, считая их американскимн.

4.16. ПРОСТЕЙШИЕ СХЕМЫ ХЕДЖИРОВАНИЯ ОПЦИОННЫХ ПОЗИЦИЙ

Если фннансовый институт продает на внебиржевом рынке тот илн нной опцион, то он подвергается рыночному рнску.

Фннансовый институт может полностью исключить рыночиый риск, купив биржевой опцнон, аналогичный проданному. Одиако такая стратегия не всегда осуществима.

Для хеджирования рыночного риска, возникающего при той или иной опционной позиции, можно использовать следующие простейшие стратегии.

1. ***Продажа обеспеченного опциона «колл».*** Данная стратегия предполагает, наряду с продажей опциона «колл» на внебиржевом рынке, еще и покупку активов, лежащих в основе этого опциона.

2. ***Продажа защищенного опциона «пут».*** Такая стратегия предполагает, наряду с продажей опциона «пут» на внебиржевом рынке, короткую продажу активов, лежащих в основе проданного опциона.

3. ***Стратегия «предотвращения потерь».*** Эта стратегия при продаже того или иного опциона предполагает: покупку исходных активов всякий раз, когда цена исходных активов, поднимаясь, достигает величины $X + \delta$ (X – цена исполнения опциона, δ – заданное положительное число), и продажу исходных активов, когда их цена, снижаясь, достигает величины $X - \delta$.

16.1. Финансовый институт продал за 2 долл. двухмесячный обеспеченный европейский опцион «колл» с ценой исполнения 52 долл. на активы, не приносящие доходов. Текущая спот-цена исходных активов – 52 долл.

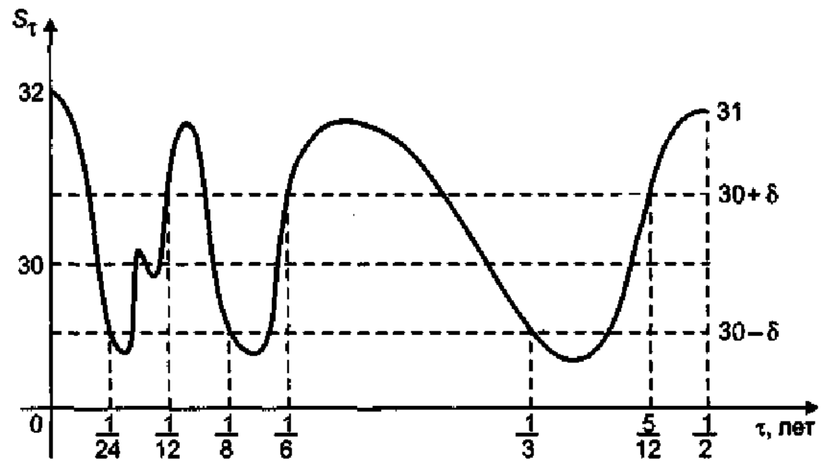
Определить чистые приведенные затраты при данной стратегии, если безрисковая процентная ставка на 2 мес. при непрерывном начислении составляет 8%, а спот-цена исходных активов на момент истечения опциона равна: а) 51 долл.; б) 53 долл.; в) 50 долл.; г) 49 долл.

16.2. Финансовый институт продал за 5 долл. трехмесячный защищенный европейский опцион «пут» с ценой исполнения 100 долл. на активы, не приносящие доходов. Текущая спот-цена исходных активов равна 102 долл.

Определить чистые приведенные затраты при данной стратегии, если безрисковая процентная ставка на 3 мес. при непрерывном начислении составляет 10%, а спот-цена исходных активов на момент истечения равна: а) 98 долл.; б) 108 долл.; в) 112 долл.

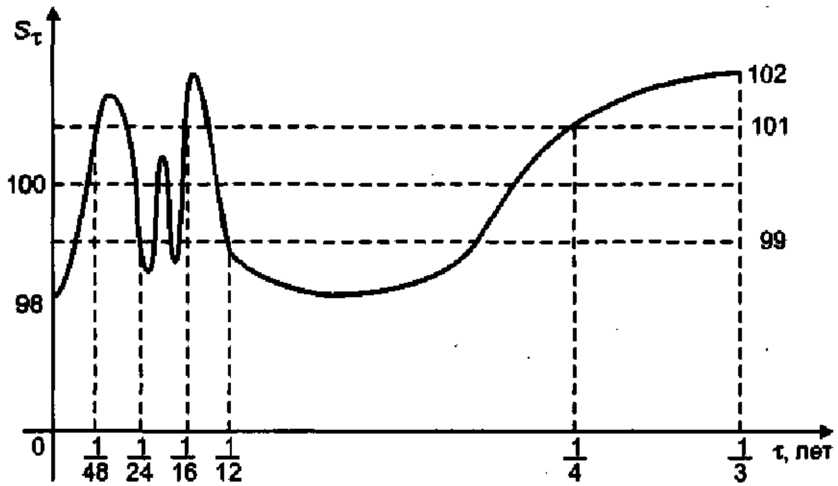
16.3. Финансовый институт продал за 3 долл. шестимесячный европейский опцион «колл» с ценой исполнения 30 долл. на активы, не приносящие доходов. Текущая спот-цена исходных активов – 32 долл. Для хеджирования своей позиции финансовый институт использует стратегию «предотвращения потерь» (δ = 0,2 долл.).

Определить чистые приведенные затраты на данную стратегию без учета трансакционных расходов, если безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении равна 10%, а траектория спот-цены исходных активов изображена на рисунке.

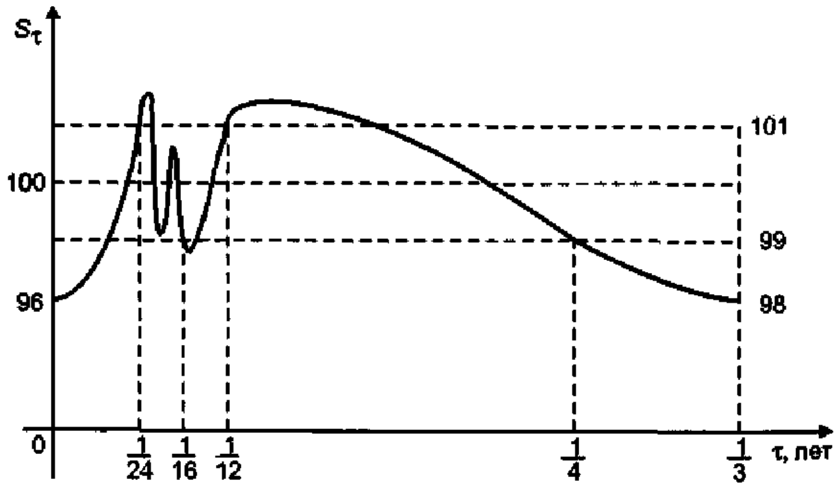


16.4. Финансовый институт продал за 4 долл. четырехмесячный опцион «пут» с ценой исполнения 100 долл. на активы, не приносящие доходов. Текущая спот-цена исходных активов – 98 долл. Для хеджирования своей позиции финансовый институт использует стратегию «предотвращения потерь» (δ = 1 долл.).

Определить чистые приведенные затраты на данную стратегию без учета трансакционных расходов, если безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении равна 12%, а траектория спот-цены исходных активов изображена на рисунках.



а



б

16.5. Финансовый институт продал на внебиржевом рынке европейский опцион «колл». Описать стратегию «предотвращения потерь», если спот-цена исходных активов меньше цены исполнения опциона.

Как оцениваются чистые приведенные затраты на эту стратегию?

16.6. Финансовый институт продал на внебиржевом рынке европейский опцион «пут». Описать стратегию «предотвращения потерь», если спот-цена исходных активов больше цены исполнения опциона.

Как оцениваются чистые приведенные затраты на эту стратегию?

4.17. ДЕЛЬТА-КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ. ДЕЛЬТА-ХЕДЖИРОВАНИЕ

Дельта-коэффициентом (Δ) финансового инструмента, производного от некоторых исходных активов, называется частная производная стоимости этого инструмента по текущей спот-цене исходных активов, т.е.

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}.$$

Дельта-коэффициенты важнейших производных финансовых инструментов.

1. Дельта-коэффициент самих исходных активов всегда равен 1.

2. Дельта-коэффициент фьючерсного контракта на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ определяется по формуле

$$\Delta = e^{(\tilde{r}-\tilde{q})(T^*-t)},$$

где T^* – дата исполнения фьючерсного контракта;

$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении.

3. Дельта-коэффициенты европейских опционов «колл» и «пут» на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, стоимость которых определяется геометрическим броуновским движением, находятся из следующих равенств:

$$\Delta_c = e^{-\tilde{q}(T-t)}N(d_1), \quad \Delta_p = -e^{-\tilde{q}(T-t)}N(-d_1),$$

где $d_1 = \dfrac{\ln S/X + (T-t)\left(\tilde{r} - \tilde{q} + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$.

4. Дельта-коэффициенты американских опционов «колл» и «пут» на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, стоимость которых определяется геометрическим броуновским движением, можно найти приближенно с помощью n-этапной биномиальной модели

$$\Delta_c \approx \frac{C_1(1) - C_1(0)}{S(u_n - d_n)}, \quad \Delta_p \approx \frac{P_1(1) - P_1(0)}{S(u_n - d_n)},$$

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{h_n}}, \quad d_n = e^{-\sigma\sqrt{h_n}}, \quad h_n = \frac{T-t}{n},$$

где $C_1(1)\,(P_1(1))$ – стоимость американского опциона «колл» («пут») в момент $t + h_n$ при условии, что цена исходных активов к этому моменту поднялась;

$C_1(0)\,(P_1(0))$ – стоимость американского опциона «колл» («пут») в момент $t + h_n$ при условии, что цена исходных активов к этому моменту снизилась.

Основные свойства дельта-коэффициентов производных финансовых инструментов.

1. Если спот-цена исходных активов мгновенно изменится на величину ΔS, а все остальные факторы, влияющие на стоимость (П) производного финансового инструмента, останутся неизменными, то

$$\Delta\Pi = \Pi(S + \Delta S) - \Pi(S) \approx \Delta \cdot \Delta S + \alpha\,\Delta S,$$

где α – бесконечно малая функция при $\Delta S \to 0$.

2. Дельта-коэффициент портфеля, состоящего из длинных и коротких позиций по финансовым инструментам, производным от одних и тех же исходных активов, является линейной комбинацией дельта-коэффициентов финансовых инструментов, образующих этот портфель.

3. Если портфель производных финансовых инструментов является дельта-нейтральным (т.е. дельта-коэффициент портфеля равен нулю), а спот-цена исходных активов мгновенно изменится на величину ΔS (при неизменных всех остальных факторах), то $\Delta\Pi \approx 0$.

Дельта-хеджирование. Предполагается, что финансовый институт продал на внебиржевом рынке некоторый опцион. Дельта-хеджирование опционной позиции сводится к следующим действиям:

1. Выбирается биржевой финансовый инструмент, производный от рассматриваемых исходных активов.

2. Покупаются или продаются биржевые финансовые инструменты с тем, чтобы начальная опционная позиция стала дельта-нейтральной. (Чтобы портфель был дельта-нейтральным, в нем должно находиться $\left(-\dfrac{\Delta}{\Delta_\delta}\right)$ биржевых инструментов.)

3. Сформированный инвестиционный портфель периодически ребалансируется, т.е. через определенный период осуществляют покупку или продажу биржевых финансовых инструментов для восстановления дельта-нейтральности инвестиционного портфеля.

17.1. Дан инвестиционный портфель, состоящий из длинной позиции в шестимесячном фьючерсном контракте на 500 бездивидендных акций и короткой позиции по четырехмесячному европейскому опциону «пут» на 200 этих же акций с ценой исполнения 50 долл. Текущая цена акции – 49 долл., годовая волатильность стоимости акции – 25%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении – 12%.

Определить:

а) дельта-коэффициент инвестиционного портфеля;

б) количество исходных акций, которые необходнмо купить или продать, чтобы данный инвестиционный портфель стал дельта-нейтральным.

17.2. Определить дельта-коэффициенты пятимесячных европейских фьючерсных опционов «колл» и «пут» на акцию с ценой исполнения 200 долл., если текущая фьючерсная цена акции равна 202 долл., волатильность акции оценивается в 25%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 7%.

17.3. Банк продал двухмесячный американский опцион «колл» на 50 000 бездивидендных акций с ценой исполнения 100 долл. Текущая спот-цена акции равна 98 долл., волатильность акции оценивается в 40%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 6%.

Определить:

а) дельта-коэффициент опциона, проданного банком;

б) количество акций, которые необходимо купить или продать, чтобы нейтрализовать опционную позицию.

17.4. Дан европейский опцион «колл» на акцию с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$.

Требуется:

а) исследовать зависимость дельта-коэффициента опциона от спот-цены исходной акции (при прочих неизменных факторах) и построить график функции $\Delta = \Delta_c(S)$;

б) исследовать зависимость дельта-коэффициента опциона от срока его истечения (при прочих неизменных факторах), если $\tilde{q} = 0$, и построить график функции $\Delta = \Delta_c(T - t)$.

17.5. Дан европейский опцион «пут» на акцию с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$.

Требуется:

а) исследовать зависимость дельта-коэффициента опциона от спот-цены исходной акции (при прочих неизменных факторах) и построить график функции $\Delta = \Delta_p(S)$;

б) исследовать зависимость дельта-коэффициента опциона от срока его истечения (при прочих неизменных факторах), если $\tilde{q} = 0$, и построить график функции $\Delta = \Delta_p(T - t)$.

17.6. Инвестиционный портфель состоит из длинной позиции в 100 000 опционов «колл» на японские иены с дельта-коэффициентом 0,53, короткой позиции в 200 000 опционов «колл» на японские иены с дельта-коэффициентом 0,47 и короткой позиции в 50 000 опционов «пут» на японские иены с дельта-коэффициентом –0,51.

Определить:

а) дельта-коэффициент портфеля;

б) количество японских иен, которые необходимо купить или продать, чтобы нейтрализовать инвестиционный портфель;

в) количество шестимесячных фьючерсных контрактов на японские иены, которые необходимо купить или продать для нейтрализации исходной позиции, если безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении в США и Японии составляют 8 и 10% соответственно, а один фьючерсный контракт предполагает покупку или продажу 1000 японских иен?

17.7. Финансовый институт продал шестимесячный американский опцион «пут» на 10 000 акций с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q} = 6\%$. Цена исполнения опциона равна 60 долл., текущая спот-цена акции – 58 долл., годовая волатильность стоимости акции – 40%, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении – 8%.

Определить:

а) дельта-коэффициент проданного опциона на основе шестиэтапной биномиальной модели;

б) количество акций, которые необходимо купить или продать, чтобы нейтрализовать исходную позицию.

17.8. Финансовый институт продал пятинедельный европейский опцион «колл» на 50 000 бездивидендных акций при цене исполнения 49 долл. Текущая цена акции равна 50 долл., волатильность акции оценивается в 30%, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении составляет 9%.

Оценить чистые приведенные затраты на дельта-хеджирование опционной позиции с помощью исходных акций, если ребалансировка проводилась еженедельно, а спот-цена акции менялась так, как показано ниже.

Номер недели	0	1	2	3	4	5
Спот-цена акции, долл.	50,0	49,7	52,0	50,0	48,5	48,2

17.9. Финансовый институт продал четырехнедельный европейский опцион «пут» на 100 000 акций с непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ = 4%. Цена исполнения равна 75 долл., текущая цена акции – 74 долл., волатильность акции оценивается в 20%, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении составляет 8%.

Оценить чистые приведенные затраты на дельта-хеджирование опционной позиции с помощью исходных акций, если ребалансировка проводилась еженедельно, а спот-цена акции менялась так, как показано ниже.

Номер недели	0	1	2	3	4
Спот-цена акции, долл.	74,0	75,6	72,4	76,8	72,0

4.18. ГАММА-КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ. ГАММА-ХЕДЖИРОВАНИЕ

Гамма-коэффициентом Г производного финансового инструмента называется частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 П}{\partial S^2}$ стоимости этого инструмента по спот-цене исходных активов, т.е.

$$Г = \frac{\partial^2 П}{\partial S^2}.$$

Гамма-коэффициенты важнейших производных финансовых инструментов.

1. Гамма-коэффициенты исходных активов, а также фьючерсных контрактов на эти активы равны нулю.

2. Гамма-коэффициенты европейских опционов «колл» и «пут» на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, цена которых определяется геометрическим броуновским движением, можно определить по формуле

$$Г_c = Г_p = \frac{N'(d_1)\, e^{-\tilde{q}(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}},$$

где $N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2}$, $d_1 = \frac{\ln S/X + (T-t)\left(\tilde{r} - \tilde{q} + \sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$.

3. Гамма-коэффициенты американских опционов «колл» и «пут» на активы с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, цена которых определяется геометрическим броуновским движением, можно найти приближенно с помощью n-этапной биномиальной модели:

$$Г_c \approx \frac{2\left[\frac{C_2(2) - C_2(1)}{u_n^2 - 1} - \frac{C_2(0) - C_2(1)}{d_n^2 - 1}\right]}{S^2\left(u_n^2 - d_n^2\right)};$$

$$Г_p \approx \frac{2\left[\frac{P_2(2) - P_2(1)}{u_n^2 - 1} - \frac{P_2(0) - P_2(1)}{d_n^2 - 1}\right]}{S^2\left(u_n^2 - d_n^2\right)},$$

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{h_n}}, \quad d_n = e^{-\sigma\sqrt{h_n}}, \quad h_n = \frac{T-t}{n},$$

где $C_2(i)$ и $P_2(i)$ – стоимости американских опционов «колл» и «пут» в момент $t + 2h_n$ при условии, что спот-цена исходных активов к этому моменту поднималась i раз, i = 0, 1, 2.

Основные свойства гамма-коэффициентов производных финансовых инструментов.

1. Гамма-коэффициент производного финансового инструмента оценивает чувствительность дельта-коэффициента этого финансового инструмента к изменениям спот-цены исходных активов.

2. Если спот-цена исходных активов мгновенно изменится на величину ΔS, а все остальные факторы, влияющие на стоимость (П) производного финансового инструмента, останутся неизменными, то

$$\Delta П = \Delta \cdot S + \frac{\Gamma}{2}(\Delta S)^2 + \alpha(\Delta S)^2,$$

где α – бесконечно малая функция при $\Delta S \to 0$.

3. Гамма-коэффициент портфеля, состоящего из длинных и коротких позиций по финансовым инструментам, производным от одних и тех же исходных активов, равен линейной комбинации гамма-коэффициентов финансовых инструментов, образующих этот портфель.

4. Портфель финансовых инструментов, производных от одних и тех же исходных активов, называется дельта- и гамма-нейтральным, если дельта- и гамма-коэффициенты этого портфеля равны нулю.

Если инвестиционный портфель является дельта- и гамма-нейтральным, то при небольших изменениях спот-цены исходных активов и неизменных всех остальных факторах риска его стоимость практически не меняется.

Чтобы восстановить дельта- и гамма-нейтральность портфеля финансовых инструментов, производных от одних и тех же исходных активов, необходимо купить x биржевых финансовых инструментов первого вида и y биржевых финансовых инструментов второго вида (производных от исходных активов) так, чтобы

$$\begin{cases} \Delta_П + x\Delta_\delta^1 + y\Delta_\delta^2 = 0, \\ \Gamma_П + x\Gamma_\delta^1 + y\Gamma_\delta^2 = 0. \end{cases}$$

Гамма-хеджирование. Предполагается, что финансовый институт продал на внебиржевом рынке некоторый опцион. Гамма-хеджирование опционной позиции сводится к следующим действиям.

1. Выбираются два биржевых финансовых инструмента, производных от рассматриваемых исходных активов.
2. Покупаются или продаются биржевые инструменты двух видов с тем, чтобы начальная позиция стала дельта- и гамма-нейтральной.
3. Сформированный инвестиционный портфель периодически ребалансируется, т.е. через определенные периоды осуществляют покупку или продажу биржевых финансовых инструментов для восстановления дельта- и гамма-нейтральности портфеля.

18.1. Дан инвестиционный портфель, состоящий из длинной позиции в 500 шестимесячных фьючерсных контрактах на бездивидендную акцию и короткой позиции по 200 четырехмесячным европейским опционам «пут» на эту акцию с ценой исполнения 50 долл. Текущая цена акции равна 49 долл., годовая волатильность стоимости акции составляет 25%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении – 12%.

1. Определить дельта- и гамма-коэффициенты портфеля.
2. Как изменится стоимость портфеля, если спот-цена акции мгновенно изменится на величину $\Delta S = \pm 0{,}5$ долл., ± 1 долл., ± 2 долл.?

18.2. Определить гамма-коэффициенты пятимесячных европейских фьючерсных опционов «колл» и «пут» на акцию с ценой исполнения 200 долл., если текущая фьючерсная цена акции равна 202 долл., волатильность акции оценивается в 25%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 7%.

18.3. Банк продал 50 000 двухмесячных американских опционов «колл» на бездивидендную акцию с ценой исполнения 100 долл. Текущая спот-цена акции равна 98 долл., волатильность акции оценивается в 40%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 6%.

Оценить гамма-коэффициент опционов, проданных банком.

18.4. Финансовый институт владеет портфелем внебиржевых опционов на английские фунты стерлингов, данные по которому приведены ниже.

Вид опциона	Количество опционов в портфеле	Дельта-коэффициент опциона	Гамма-коэффициент опциона
«Колл»	1000	0,5	2,2
«Пут»	500	-0,4	1,3
«Колл»	2000	0,8	0,6

1. Определить дельта- и гамма-коэффициенты портфеля.

2. Как обеспечить дельта- и гамма-нейтральность позиции при покупке (продаже) фунтов стерлингов и биржевых опционов на фунты стерлингов с показателями $\Delta_\delta = 0{,}6$ и $\Gamma_\delta = 1{,}5$?

18.5. Финансовый институт продал 100 000 четырехнедельных европейских опционов «пут» на акцию с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q} = 8\%$ при цене исполнения 20 долл. Текущая цена акции равна 19 долл., волатильность акции оценивается в 40%, а безрисковая процентная ставка $\tilde{r} = 10\%$.

Как обеспечить дельта- и гамма-нейтральность позиции при покупке (продаже) исходных акций и биржевых трехмесячных европейских опционов «колл» на эти акции с ценой исполнения 21 долл.?

18.6. Дан портфель из 10 000 шестимесячных американских опционов «пут» на акцию с постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q} = 6\%$. Цена исполнения опциона – 60 долл., текущая спот-цена акции равна 58 долл., годовая волатильность стоимости акции – 40%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 8%.

1. Оценить дельта- и гамма-коэффициенты портфеля на основе шестиэтапной биномиальной модели.

2. Как изменится стоимость портфеля, если спот-цена акции мгновенно изменится на величину $\Delta S = \pm 0{,}5$ долл., ± 1 долл., ± 2 долл.?

18.7. Исследовать зависимость гамма-коэффициента европейских опционов на акцию с постоянной дивидендной доходностью от текущей спот-цены исходной акции и построить график функции $\Gamma = \Gamma(S)$.

18.8. Исследовать зависимость гамма-коэффициента европейских опционов на бездивидендную акцию от срока истечения опциона и построить график функции $\Gamma = \Gamma(T - t)$.

4.19. КОЭФФИЦИЕНТЫ Θ, ρ И Λ ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

Частная производная стоимости (П) производного финансового инструмента по времени t называется ***тета-коэффициентом*** этого инструмента, т.е. по определению

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Если исходные активы обладают постоянной непрерывной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, а их цена определяется геометрическим броуновским движением, то стоимость производного финансового инструмента П удовлетворяет дифференциальному уравнению Блэка–Шоулса

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + (\tilde{r} - \tilde{q}) S \frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = \tilde{r}\, \Pi.$$

В частности, для европейских опционов «колл» и «пут» имеют место следующие равенства:

$$\Theta_c = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} e^{-\tilde{q}(T-t)} N'(d_1) + \tilde{q} S e^{-\tilde{q}(T-t)} N(d_1) - \tilde{r} X e^{-\tilde{r}(T-t)} N(d_2);$$

$$\Theta_p = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} e^{-\tilde{q}(T-t)} N'(d_1) - \tilde{q} S e^{-\tilde{q}(T-t)} N(-d_1) + \tilde{r} X e^{-\tilde{r}(T-t)} N(-d_2).$$

Частная производная стоимости П производного финансового инструмента по безрисковой процентной ставке $\tilde{r}$ называется ***ρ-коэффициентом*** этого инструмента, т.е. по определению

$$\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{r}}.$$

Для фьючерсных контрактов иа активы с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$

$$\rho = S(T^* - t)e^{(\tilde{r}-\tilde{q})(T^*-t)},$$

где T^* – дата исполнения фьючерсиого контракта.

Для европейских опционов «колл» и «пут» на активы с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$, стоимость которых определяется геометрическим броуиовским движением:

$$\rho_c = X(T-t)e^{-\tilde{r}(T-t)}N(d_2);$$

$$\rho_p = -X(T-t)e^{-\tilde{r}(T-t)}N(-d_2).$$

Частиая производная стонмости П такого финансового инструмента по волатильности σ исходных активов называется ***вега-коэффициентом*** этого инструмента, т.е.

$$\Lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}.$$

Вега-коэффицненты европейских опциоиов «колл» и «пут» на активы с постоянной дивидеидиой доходностью $\tilde{q}$, стоимость которых определяется геометрическим броуновским движением, можно найти следующим образом:

$$\Lambda_c = \Lambda_p = S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)e^{-\tilde{q}(T-t)}.$$

19.1. Дан портфель из 10 000 восьмимесячных европейских опциоиов «пут» на бездивидендную акцию, цена нсполнения которых 50 долл. Текущая цена акции равна 48 долл., волатильиость акцин оценивается в 30%, а безрисковая процентная ставка составляет 8% (прн иепрерывном начислении).

Найти коэффициенты Θ, ρ н Λ этого портфеля.

19.2. Финансовый ннститут продал 100 000 шестннедельных европейских опциоиов «колл» на акцию с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ = 10% при цеие исполнення 20 долл. Текущая цена акцни равна 19 долл., волатильность акции оценивается в

40%, а безрисковая процентная ставка при иепрерывном начнслении $\tilde{r}$ = 8%.

1. Как обеспечнть Δ- и ρ-нейтральиость позиции с помощью нсходных акций н биржевых опционов на эти акции с показателями $\Delta_\delta = 2$, $\rho_\delta = 20$?

2. Как обеспечнть Δ- и Λ-иейтральность позиции с помощью исходных акций и биржевых опцнонов на эти акции с показателями $\Delta_\delta = 10$, и $\Lambda_\delta = 50$?

19.3. Как нзмеинтся стоимость опциоиов при условиях задачн 19.2 за одну иеделю, еслн:

1) спот-цена исходиой акции увеличится иа 0,1 долл., а безрисковая процентная ставка уменьшится на 0,5%;

2) спот-цена исходной акции уменьшится иа 0,2 долл., а ее волатильность увелнчится на 0,8%?

19.4. Финаисовый ннститут владеет портфелем внебиржевых опционов иа японские нены с данными, приведеннымн ииже.

Вид опциона	Позиция	Δ	Γ	ρ	Λ
«Колл»	–1000	1,8	0,6	2,0	1,8
«Пут»	2000	–0,9	0,4	–2,5	0,7
«Колл»	3000	1,5	0,3	1,8	0,4

Для хеджирования своей позиции финансовый институт может покупать или продавать японские иены и биржевые опцноны иа японскне нены с показателями: $\Delta_\delta = 1{,}2$; $\Gamma_\delta = 0{,}5$; $\rho_\delta = 0{,}8$ и $\Lambda_\delta = 0{,}8$.

1. Как обеспечнть Δ- и Γ-нейтральность позиции?
2. Как обеспечнть Δ- и ρ-нейтральность позиции?
3. Как обеспечнть Δ- н Λ-нейтральность позиции?

19.5. Исследовать зависимость вега-коэффициента европейских опцноиов иа акцию с постояиной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ от спот-цены этой акции и построить график функции $\Lambda = \Lambda(S)$.

19.6. Исследовать зависнмость тета-коэффициента европейского опциоиа «колл» иа бездивидендную акцню от спот-цены этой акции н построить график функцни $\Theta = \Theta_c(S)$.

19.7. Исследовать зависимость тета-коэффициента европейского опциона «пут» на бездныидендную акцию от спот-цены этой акции и построить графнк функции $\Theta = \Theta_p(S)$.

4.20. СТРАХОВАНИЕ ПОРТФЕЛЕЙ АКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПЦИОНОВ НА ИНДЕКСЫ АКЦИЙ

Выигрыш держателя европейского опциона «пут» на рыночный индекс акций в момент исполнения опциона равен

$$A\max\{X-S_T,\ 0\},$$

где A – фиксированная денежная сумма;

X – уровень (цена) исполнения опциона;

S_T – значение рыночного индекса акций на дату истечения опциона.

Чтобы застраховать хорошо диверсифицированный портфель акций от падений его стоимости на дату T, достаточно купить $\beta_p\dfrac{Q_t}{S_t}\cdot\dfrac{1}{A}$ европейских опционов «пут» на рыночный индекс акций с датой истечения T (β_p – бета-коэффициент портфеля относительно рассматриваемого индекса акций; Q_t – текущая стоимость портфеля акций; S_t – текущее значение рыночного индекса акций).

При этом уровень исполнения опционов должен определяться из условия

$$\frac{Q_{стр}-Q_t}{Q_t}+\tilde{q}(T-t)=\tilde{r}_f(T-t)+\beta_p\left[\frac{X-S_t}{S_t}+(\tilde{q}_I-\tilde{r}_f)(T-t)\right],$$

где $Q_{стр}$ – нижняя граница стоимости инвестиционного портфеля на дату T (определяется владельцем портфеля акций);

$\tilde{q}$ – непрерывная дивидендная доходность портфеля акций;

$\tilde{r}_f$ – безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении;

$\tilde{q}_I$ – непрерывная дивидендная доходность индекса акций.

Замечание. Покупку требуемых опционов «пут» на рыночный индекс акций можно воспроизвести искусственным путем. Для этого периодически покупаются или продаются определенные части исходного портфеля акций. Например, в начальный момент t придется продать часть портфеля акций, равную $e^{-\tilde{q}_I(T-t)}N(-d_1)$.

20.1. Текущая стоимость портфеля акций составляет 10 млн долл., дивидендная доходность портфеля $\tilde{q}=2\%$, а его бета-коэффициент относительно индекса акций SP–500 равен 1,6. Текущее значение этого индекса равно 500, его дивидендная доходность $\tilde{q}_I=3\%$, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении равна 5%.

1. Как построить страхование портфеля акций так, чтобы его стоимость через 1 год не упала ниже 9,8 млн долл. ($A=100$ долл.)?

2. Оценить затраты на страхование портфеля акций, если волатильность индекса акций оценивается в 20%.

20.2. Как построить страхование портфеля акций при условиях задачи 20.1 так, чтобы его стоимость через 6 мес. не упала ниже 9,9 млн долл.?

20.3. Текущая стоимость портфеля акций составляет 12 млн долл., дивидендная доходность портфеля акций $\tilde{q}=4\%$, а его бета-коэффициент относительно индекса акций SP–500 равен 1,8. Текущее значение этого индекса равно 450, его дивидендная доходность $\tilde{q}_I=3\%$, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении равна 6%.

1. Как построить страхование портфеля акций так, чтобы через 9 мес. его стоимость не упала ниже 11,5 млн долл. ($A=100$ долл.)?

2. Какую часть портфеля акций следует продать, чтобы обеспечить требуемое страхование на первом этапе, если волатильность индекса акций оценивается в 25%?

20.4. Текущая стоимость портфеля акций равна 20 млн долл., дивидендная доходность портфеля акций $\tilde{q}=6\%$, а его бета-коэффициент относительно рыночного индекса акций составляет 1,4. Текущее значение этого индекса равно 600, его дивидендная доходность $\tilde{q}_I=4\%$, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении равна 8%.

1. Как построить страхование портфеля акций так, чтобы через 3 мес. его стоимость не упала ниже 19 млн долл. ($A=200$ долл.)?

2. Какую часть портфеля акций следует продать, чтобы обеспечить требуемое страхование на первом этапе, если волатильность индекса акций оценивается в 50%?

4.21. БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Пусть $z_k(h)$ – форвардная процентная ставка на h лет, наблюдаемая в момент $t + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Биномиальная модель процентной ставки определяется следующими условиями:

$$z_0(h) = \delta_0;$$

если $z_{k-1}(h) = \delta_{k-1} e^{2i\sigma\sqrt{h}}$, то

$$z_k(h) = \begin{cases} \delta_k e^{2(i+1)\sigma\sqrt{h}} & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ \delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}} & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k,$$

где δ_k – наименьшее возможное значение процентной ставки в периоде $[t + kh, \; t + (k + 1)h]$, $k = 1, 2, \dots$;

σ – годовая волатильность рассматриваемой процентной ставки.

1. Оценка стоимости стандартной облигации в условиях биномиальной модели.

Дана купонная облигация номиналом A, купоны по которой оплачиваются m раз в год $\left(h = \frac{1}{m}\right)$, когда до ее погашения остается nh лет.

Если $B(k,i)$ – стоимость облигации в момент $t + kh$, после оплаты купона, при условии, что $z_k(h) = \delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$, где $k = 1, 2, \dots, n$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, то

$$B(n,i) = A, \quad i = 0,1,2,\dots,n;$$

$$B(k,i) = \frac{(B(k+1,i+1)+q_{k+1})\frac{1}{2} + (B(k+1,i)+q_{k+1})\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}},$$

где $k = 1, 2, \dots, n-1$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$;

q_{k+1} – купонный платеж в момент $t + (k + 1)h$.

2. Построение биномиальной модели процентной ставки при известной годовой волатильности процентной ставки σ.

Даны рыночные доходности $r_1, r_2, \dots, r_n$ при начислении процентов m раз в год соответственно на сроки $h, 2h, \dots, nh$ $\left(h = \frac{1}{m}\right)$.

Процентная ставка δ_0 выбирается равной r_1. Ставка δ_1 подбирается так, чтобы стоимость облигации с нулевым купоном, погашаемой через $2h$ лет, найденная по биномиальной модели с параметрами σ, δ_0 и δ_1, совпала с рыночной стоимостью этой облигации $\frac{A}{(1+hr_2)^2}$. Ставку δ_2 следует выбрать так, чтобы стоимость облигации с нулевым купоном, погашаемой через $3h$ лет, найденная по биномиальной модели с параметрами σ, δ_0, δ_1 и δ_2, совпала с ее рыночной стоимостью $\frac{A}{(1+hr_3)^3}$ и т.д.

21.1. Построить четырехэтапную биномиальную модель эволюции процентной ставки на полгода, если волатильность процентной ставки оценивается в 15%, а параметры δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 и δ_4 равны соответственно 7; 7,2; 7,5; 8; 8,2%.

21.2. При условиях биномиальной модели, построенной в задаче 21.1, найти стоимость 9%-ной купонной облигации номиналом 200 долл. с полугодовыми купонами, до погашения которой остается 2,5 года.

21.3. Построить биномиальную модель эволюции процентной ставки на полгода, если рыночные стоимости облигаций с нулевыми купонами номиналом 100 долл., погашаемых через 0,5, 1 и 1,5 года, равны соответственно 96,62; 92,77 и 88,82 долл., а годовая волатильность процентной ставки принимает значения: а) 18%, б) 25%.

21.4. Построить биномиальную модель процентной ставки на год, если волатильность процентной ставки равна 10%, а рыночные доходности на 1, 2, 3 и 4 года равны соответственно 6,00; 6,606; 7,272 и 8%.

21.5. В условиях биномиальной модели процентной ставки, построенной в задаче 21.4, найти стоимость 8%-ной купонной облигации номиналом 100 долл. с годовыми купонами, до погашения которой остается 4 года.

Сравнить найденную стоимость облигации со стоимостью, определяемой рыночными доходностями при условиях задачи 21.4.

21.6. Дана биномиальная модель процентной ставки на h лет с параметрами: σ, δ_0, δ_1, δ_2, … .

Найти математическое ожидание форвардной процентной ставки $z_k(h)$ и ее стандартное отклонение, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

4.22. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ НА ОБЛИГАЦИИ В УСЛОВИЯХ БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Дана облигация без дефолт-риска с купонами, оплачиваемыми m раз в год, до погашения которой остается n/m лет.

Эволюция процентной ставки на h лет $\left(h = 1/m\right)$ определяется биномиальной моделью с параметрами σ, δ_1, δ_2, …, δ_{n-1}.

Если $B(k, i)$ – стоимость облигации в момент $t + kh$ при условии, что форвардная процентная ставка $z_k(i)$ равна $\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, то

$$B(n,i) = A, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$B(k,i) = \frac{\left(B(k+1,i+1)+q_{k+1}\right)\frac{1}{2} + \left(B(k+1,i)+q_{k+1}\right)\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}},$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k.$$

1. ***Оценка стоимости европейских опционов «колл» и «пут» на купонную облигацию.*** Цена исполнения опционов X, дата истечения опционов $t + l/m$, $n > l$.

Если $c(k, i)$ и $p(k, i)$ – стоимости европейских опционов «колл» и «пут» в момент $t + k/m$ $(k \le l)$ при условии, что $z_k(i) = \delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, то

$$c(l,\ i) = \max\left\{B(l,\ i) - X,\ 0\right\};$$

$$p(l,\ i) = \max\left\{X - B(l,\ i),\ 0\right\},\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l;$$

$$c(k,\ i) = \frac{c(k+1,\ i+1)\cdot\frac{1}{2} + c(k+1,\ i)\cdot\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}};$$

$$p(k,\ i) = \frac{p(k+1,\ i+1)\cdot\frac{1}{2} + p(k+1,\ i)\cdot\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}};$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l-1,\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

2. ***Оценка стоимости бермудских опционов «колл» и «пут» на купонную облигацию.*** Бермудский опцион «колл» («пут») на данную облигацию предоставляет его держателю право купить (продать) облигацию в один из следующих моментов:

$$t + \frac{l_0}{m},\quad t + \frac{l_0+1}{m},\quad \ldots\quad,\ t + \frac{l}{m},\quad 0 < l_0 \le l < n,$$

по ценам соответственно равным X_{l_0}, X_{l_0+1}, …, X_l.

Если $\tilde{c}(k,i)$ и $\tilde{p}(k,i)$ – стоимости бермудских опционов «колл» и «пут» на купонную облигацию при условии, что $z_k(i) = \delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, то

$$\tilde{c}(l,\ i) = \max\{B(l,\ i) - X_l,\ 0\};$$

$$\tilde{p}(l,\ i) = \max\{X_l - B(l,\ i),\ 0\},\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l;$$

$$\tilde{c}(k,\ i) = \max\left\{B(k,\ i) - X_k,\ \frac{\tilde{c}(k+1,\ i+1)\cdot\frac{1}{2} + \tilde{c}(k+1,\ i)\cdot\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}}\right\};$$

$$\tilde{p}(k,\ i) = \max\left\{X_k - B(k,\ i),\ \frac{\tilde{p}(k+1,\ i+1)\cdot\frac{1}{2} + \tilde{p}(k+1,\ i)\cdot\frac{1}{2}}{1 + h\delta_k\, e^{2i\sigma\sqrt{h}}}\right\};$$

$k = l_0,\ l_0+1,\ \ldots,\ l-1,\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k;$

$$\tilde{c}(k,\ i) = \frac{\tilde{c}(k+1,\ i+1)\cdot\frac{1}{2} + \tilde{c}(k+1,\ i)\cdot\frac{1}{2}}{1 + h\delta_k\, e^{2i\sigma\sqrt{h}}};$$

$$\tilde{p}(k,\ i) = \frac{\tilde{p}(k+1,\ i+1)\cdot\frac{1}{2} + \tilde{p}(k+1,\ i)\cdot\frac{1}{2}}{1 + h\delta_k\, e^{2i\sigma\sqrt{h}}};$$

$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l_0-1;\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$

22.1. Дана 6%-ная купонная облигация с годовыми купонами номиналом 500 долл., до погашения которой остается 4 года.

Найти стоимости трехлетних европейских опционов «колл» и «пут» на данную облигацию с ценой исполнения 470 долл., если волатильность процентной ставки на 1 год оценивается в 20%, а параметры биномиальной модели процентной ставки d_0, d_1, d_2, d_3 равны соответственно 5,6; 5,9; 6,2 и 6,4%.

22.2. При условиях задачи 22.1 определить стоимости опционов, считая их бермудскими опционами, исполняемыми через 1, 2 и 3 года по цене 470 долл.

22.3. Дана 6%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами номиналом 500 долл., до погашения которой остается 2 года.

Найти стоимости полуторалетних европейских опционов «колл» и «пут» на данную облигацию с ценой исполнения 490 долл., если волатильность процентной ставки на полгода оценивается в 20%, а параметры биномиальной модели процентной ставки δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 равны соответственно 5,6; 5,9; 6,2 и 6,4%.

22.4. При условиях задачи 22.3 определить стоимость опционов, считая их бермудскими опционами, исполняемыми через 0,5, 1 и 1,5 года по цене 485 долл.

22.5. Дана 9%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами номиналом 1000 долл., до погашения которой остается 2,5 года.

Найти стоимости бермудских опционов «колл» и «пут» на данную облигацию, исполняемых через 1, 1,5 и 2 года по цене 1000 долл., если волатильность процентной ставки на полгода оценивается в 10%, а параметры биномиальной модели процентной ставки δ_0, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 равны соответственно 7,8; 8,2; 8,2; 7,8 и 7,6%.

4.23. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОБЛИГАЦИЙ СО ВСТРОЕННЫМИ ОПЦИОНАМИ

Дана облигация с купонами, оплачиваемыми m раз в год и до погашения которой остается n/m лет.

Эволюция процентной ставки на h лет $\left(h = \frac{1}{m}\right)$ определяется биномиальной моделью с параметрами σ, δ_1, δ_2, …, δ_{n-1} (σ – годовая волатильность процентной ставки; δ_k – наименьшее значение форвардной процентной ставки через k/m лет).

1. ***Отзывные облигации.*** Предполагается, что эмитент имеет право выкупить облигацию в один из моментов

$$t + \frac{l_0}{m},\quad t + \frac{l_0+1}{m},\quad \ldots\quad,\ t + \frac{n-1}{m}$$

по заранее установленным ценам X_{l_0}, X_{l_0+1}, … , X_{n-1}.

Если $\tilde{B}(k,i)$ – стоимость отзывной облигации в момент $t + \frac{k}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) при условии, что форвардная процентная ставка $z_k(i)$ принимает значение $\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$), то

$\tilde{B}(n,i) = A$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (A – номинал облигации);

$$\tilde{B}(k,i)=\min\left\{X_k,\ \frac{\left(\tilde{B}(k+1,\ i+1)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\tilde{B}(k+1,\ i)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}}\right\},$$

$k=l_0,\ l_0+1,\ \ldots,\ n-1,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k;$

$$\tilde{B}(k,i)=\frac{\left(\tilde{B}(k+1,\ i+1)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\tilde{B}(k+1,\ i)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}},$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l_0-1,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$

2. *Досрочно погашаемые облигации (облигации с офертой).* Предполагается, что держатель облигации имеет право продать ее эмитенту в один из моментов

$$t+\frac{l_0}{m},\quad t+\frac{l_0+1}{m},\quad \ldots\quad ,\ t+\frac{n-1}{m}$$

по заранее установленным ценам $X_{l_0}, X_{l_0+1}, \ldots, X_{n-1}$.

Если $\tilde{B}(k,i)$ – стоимость досрочно погашаемой облигации в момент $t+\frac{k}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) при условии, что $z_k(i)=\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$, ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$), то

$\tilde{B}(n,i)=A,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (A – номинал облигации);

$$\tilde{B}(k,i)=\max\left\{X_k,\ \frac{\left(\tilde{B}(k+1,\ i+1)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\tilde{B}(k+1,\ i)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}}\right\},$$

$k=l_0,\ l_0+1,\ \ldots,\ n-1,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k;$

$$\tilde{B}(k,i)=\frac{\left(\tilde{B}(k+1,\ i+1)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\tilde{B}(k+1,\ i)+q_{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}}{1+h\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}},$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l_0-1,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$

3. *Облигации со встроенными кэпами.* Кэп номиналом A на процентную ставку при уровне исполнения x представляет собой финансовый инструмент, по которому в моменты $\tau_1 = t + h, \ldots, \tau_k = t + kh, \ldots, \tau_n = t + nh$ обещают выплачивать следующие денежные суммы:

$$Ah\max\left\{r_t(h)-x,\ 0\right\},\ \ldots,\ Ah\max\left\{r_{\tau_{k-1}}(h)-x,\ 0\right\},\ \ldots,$$
$$Ah\max\left\{r_{\tau_{n-1}}(h)-x,\ 0\right\}.$$

Если $U(k, i)$ – стоимость кэпа в момент $t + (k + 1)h$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$) при условии, что $r_{t+kh}(h)=z_k(i)=\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$), то

$$U(n-1,i)=Ah\max\left\{\delta_{n-1}e^{2i\sigma\sqrt{h}}-x,\ 0\right\},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$$

$$U(k,i)=Ah\max\left\{\delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}-x,\ 0\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{U(k+1,\ i+1)}{1+h\delta_{k+1}e^{2(i+1)\sigma\sqrt{h}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{U(k+1,\ i)}{1+h\delta_{k+1}e^{2i\sigma\sqrt{h}}},$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$

Текущая стоимость кэпа определяется по формуле

$$U=\frac{U(0,0)}{1+h\delta_0}.$$

Покупка облигации со встроенным кэпом эквивалентна покупке соответствующей безопционной облигации с рыночной купонной ставкой и продаже кэпа на рассматриваемую рыночную процентную ставку. Стоимость облигации со встроенным кэпом равна разности между номиналом облигации и стоимостью кэпа, встроенного в эту облигацию.

4. *Облигации со встроенным флором.* Флор номиналом A на процентную ставку при уровне исполнения x представляет собой финансовый инструмент, по которому в моменты

$\tau_1 = t + h, \ldots, \tau_k = t + kh, \ldots, \tau_n = t + nh$ обещают выплачивать денежные суммы

$$Ah\max\left\{x - r_t(h),\ 0\right\}, \ldots,\ Ah\max\left\{x - r_{\tau_{k-1}}(h),\ 0\right\}, \ldots,$$
$$Ah\max\left\{x - r_{\tau_{n-1}}(h),\ 0\right\}.$$

Если $W(k, i)$ – стоимость кэпа в момент $t + (k + 1)h$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$), при условии, что $r_{t+kh}(h) = z_k(i) = \delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$), то

$$W(n-1, i) = Ah\max\left\{x - \delta_{n-1}e^{2i\sigma\sqrt{h}},\ 0\right\},\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$W(k, i) = Ah\max\left\{x - \delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}},\ 0\right\} +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{W(k+1,\ i+1)}{1 + h\delta_{k+1}e^{2(i+1)\sigma\sqrt{h}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{W(k+1,\ i)}{1 + h\delta_{k+1}e^{2i\sigma\sqrt{h}}},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-2,\quad i = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Текущая стоимость флора определяется по формуле

$$W = \frac{W(0,0)}{1 + h\delta_0}.$$

Покупка облигации со встроенным флором эквивалентна покупке соответствующей безопционной облигации с рыночной купонной ставкой и покупке флора на рассматриваемую рыночную процентную ставку. Стоимость облигации со встроенным флором равна сумме номинала облигации и стоимости флора, встроенного в эту облигацию.

23.1. Дана 6%-ная купонная облигация с годовыми купонами номиналом 500 долл., до погашения которой остается 4 года. Волатильность процентной ставки на 1 год оценивается в 20%, а параметры биномиальной модели процентной ставки δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 равны 5,6; 5,9; 6,2 и 5,8% соответственно.

Определить текущую стоимость облигации, если она может быть:

а) отозвана через 1 год по номиналу;

б) предъявлена к погашению через 1 год по номиналу.

23.2. Дана 6%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами номиналом 500 долл., до погашения которой остается 2 года. Волатильность процентной ставки на полгода оценивается в 20%, а параметры биномиальной модели процентной ставки δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 равны 5,6; 5,9; 5,8 и 5,6% соответственно.

Определить текущую стоимость облигации, если она может быть:

а) отозвана через полгода по номиналу;

б) предъявлена к погашению через полгода по номиналу.

23.3. Дана 8%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами номиналом 1000 долл., до погашения которой остается 2 года. Годовая волатильность процентной ставки на полгода оценивается в 5%, а параметры биномиальной модели процентной ставки δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 равны 7,0; 7,2; 7,4 и 7,3% соответственно.

Найти «спред с учетом опциона», если облигация может быть отозвана через полгода по номиналу, а ее рыночная стоимость равна 1002,65 долл. («Спред с учетом опциона» – это надбавка ко всем форвардным процентным ставкам биномиальной модели, при которой теоретическая стоимость отзывной облигации равна ее рыночной стоимости.)

23.4. При условиях задачи 23.3 найти «спред с учетом опциона», если облигация может быть предъявлена к погашению через полгода по номиналу, а ее рыночная стоимость равна 1006,14 долл.

23.5. Волатильность рыночной процентной ставки на 1 год оценивается в 10%, а параметры биномиальной модели процентной ставки d_0, d_1, d_2, d_3 равны 6,5; 6,8; 7,0 и 7,4% соответственно.

Определить текущую стоимость:

а) кэпа номиналом 500 долл. при уровне исполнения 7,8%;

б) флора номиналом 500 долл. при уровне исполнения 7,8%.

23.6. Волатильность рыночной процентной ставки на полгода оценивается в 10%, а параметры биномиальной модели процентной ставки δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 равны 6,5; 6,8; 7,0 и 7,4% соответственно.

Определить текущую стоимость:

а) кэпа номиналом 500 долл. при уровне исполнения 7,8%;

б) флора номиналом 500 долл. при уровне исполнения 7,8%.

23.7. Дана облигация с плавающей купонной ставкой на полгода номиналом 500 долл., до погашения которой остается 2 года. Плавающая купонная ставка определяется биномиальной моделью с параметрами 7,6; 8,2; 8,4 и 8,6%, волатильность купонной ставки оценивается в 12%.

Определить текущую стоимость облигации, если в нее встроен:

а) кэп при уровне исполнения 8,5%;

б) флор при уровне исполнения 8,5%.

4.24. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ КОРПОРАТИВНЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ (ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ)

В простейшем случае оценка стоимости корпоративных ценных бумаг производится при условии, что фирма к текущему моменту t выпустила только две ценные бумаги: облигацию с нулевым купоном и номиналом F, дата погашения которой T, и обыкновенную акцию, по которой вплоть до ее погашения не выплачиваются дивиденды.

Если отсутствуют прибыльные арбитражные возможности на рынках и можно пренебречь затратами на реорганизацию фирмы в случае ее дефолта, то:

• обыкновенная акция, выпущенная фирмой, эквивалентна европейскому опциону «колл» на активы фирмы с ценой исполнения F при дате истечения T;

• облигация, выпущенная фирмой, эквивалентна инвестиции денежной суммы $Fe^{-\bar{r}(T-t)}$ под безрисковую процентную ставку $\bar{r}$ на срок в $T-t$ лет и продаже европейского опциона «пут» на активы фирмы с ценой исполнения F и датой истечения T.

Если считать, что стоимость активов фирмы определяется геометрическим броуновским движением, то текущие стоимости акции S_t и стоимость облигации B_t можно оценить следующим образом:

$$S_t = Fe^{-\bar{r}(T-t)}\left[\frac{N(d_1)}{b_t} - N(d_2)\right],$$

$$B_t = Fe^{-\bar{r}(T-t)}\left[N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{b_t}\right],$$

$$d_1 = \frac{-\ln b_t + (T-t)\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad b_t = \frac{Fe^{-\bar{r}(T-t)}}{V},$$

где V – текущая стоимость активов фирмы;

σ – годовая волатильность этой стоимости.

Премия за дефолт-риск H_t, выплачиваемая держателям облигации, может быть определена по формуле

$$H_t = -\frac{1}{T-t}\ln\left[N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{b_t}\right].$$

24.1. К текущему моменту фирма выпустила две ценные бумаги: бездивидендную обыкновенную акцию и облигацию с нулевым купоном номиналом 60 млн долл. До погашения облигации остается 3 года, текущая стоимость активов фирмы равна 100 млн долл., а волатильность активов фирмы оценивается в 50%. Безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении равна 7%.

Определить:

а) текущие стоимости акции и облигации, выпущенных фирмой;

б) премию за дефолт-риск, выплачиваемую держателям облигаций.

24.2. К текущему моменту фирма выпустила две ценные бумаги: бездивидендную обыкновенную акцию и облигацию с нулевым купоном номиналом 60 млн долл., до погашения которой остается 3 года. Волатильность активов фирмы оценивается в 50%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении равна 7%.

Определить размер премии за дефолт-риск, выплачиваемой держателям облигаций, если текущая стоимость активов фирмы равна: а) 90 млн долл.; б) 120 млн долл.

24.3. К текущему моменту фирма выпустила две ценные бумаги: бездивидендную обыкновенную акцию и облигацию с нулевым купоном номиналом 60 млн долл.. Текущая стоимость активов фирмы равна 100 млн долл., волатильность активов фирмы оценивается в 50%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении равна 7%.

Определить размер премии за дефолт-риск, выплачиваемой держателям облигаций, если до погашения облигации остается: а) 1 год; б) 2 года; в) 4 года; г) 10 лет.

24.4. Фирма выпустила две ценные бумаги: бездивидендную обыкновенную акцию и облигацию с нулевым купоном номиналом 60 млн долл., до погашения которой остается 3 года. Текущая стоимость активов фирмы равна 100 млн долл., а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 7%.

Определить размер премии за дефолт-риск, выплачиваемой держателям облигаций, если волатильность стоимости активов фирмы оценивается величиной: а) 30; б) 40; в) 60%.

24.5. Фирма выпустила две ценные бумаги: бездивидендную обыкновенную акцию и облигацию с нулевым купоном. Волатильность стоимости активов фирмы оценивается в 50%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении равна 7%.

Определить размер премии за дефолт-риск, выплачиваемой держателям облигаций, если доля заемного капитала постоянна и равна 50%, а до погашения облигации остается: а) 4 года; б) 3 года; в) 2 года; г) 1 год.

4.25. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ КОРПОРАТИВНЫХ ОБЛИГАЦИЙ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Оценка стоимости корпоративных облигаций производится при условии, что соблюдаются следующие предположения:

- фирма выпустила две ценные бумаги:

– обыкновенную акцию, по которой в моменты $t + h$, $t + 2h$, …, $t + (n - 1)h$ обещают выплатить дивиденды в размерах D_1, D_2, …, D_{n-1} соответственно;

– облигацию с датой погашения T и номиналом F, по которой в моменты $t + h$, $t + 2h$, …, $t + (n - 1)h$, $t + nh = T$ обещают выплатить проценты в размерах q_1, q_2, …, q_{n-1}, q_n соответственно;

- стоимость активов фирмы до выплаты процентов и дивидендов определяется геометрическим броуновским движением;
- дефолт может наступить только в момент погашения облигации, а затраты на реорганизацию фирмы в этом случае равны нулю;
- отсутствуют арбитражные возможности.

В условиях модифицированной биномиальной модели стоимость активов фирмы до выплаты процентов и дивидендов в момент $t + h$ принимает два значения:

$$V_1(1) = Vu \text{ и } V_1(0) = Vd,$$

а в момент $t + kh$ ($k = 2, 3, \ldots, n$), значения $V_k(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ такие, что

$$V_k(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, 1) = (V_{k-1}(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}) - D_{k-1} - q_{k-1})u,$$
$$V_k(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, 0) = (V_{k-1}(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}) - D_{k-1} - q_{k-1})d,$$

где $u = e^{\sigma\sqrt{h}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{h}}$ (σ – годовая волатильность стоимости активов фирмы).

Обозначим через $B_k(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ – стоимость облигации в момент $t + kh$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) до оплаты очередного купона при условии, что стоимость активов фирмы в этот момент равна $V_k(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

1. Если облигация, выпущенная фирмой, не содержит встроенных опционов, то

$$B_n(i_1,i_2,\ldots,i_n)=\min\{V_n(i_1,i_2,\ldots,i_n),\ F+q_n\},$$
$$B_k(i_1,i_2,\ldots,i_k)=e^{-\tilde{r}h}\big[B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,1)\pi^*+$$
$$+B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,0)(1-\pi^*)\big]+q_k,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$$
$$B=e^{-\tilde{r}h}\big[B_1(1)\pi^*+B_1(0)(1-\pi^*)\big],$$

где $\pi^*=\dfrac{e^{\tilde{r}h}-d}{u-d}$.

2. Если облигация, выпущенная фирмой, может быть отозвана (выкуплена) эмитентом в один из моментов $t+lh$, $t+(l+1)h$, …, $t+(n-1)h$ по заранее установленным ценам X_l, X_{l+1}, …, X_{n-1}, то

$$B_n(i_1,i_2,\ldots,i_n)=\min\{V_n(i_1,i_2,\ldots,i_n),\ F+q_n\},$$
$$B_k(i_1,i_2,\ldots,i_k)=\min\Big\{X_k,\ e^{-\tilde{r}h}\big[B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,1)\pi^*+$$
$$+B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,0)(1-\pi^*)\big]\Big\}+q_k,$$
$$k=l,\ l+1,\ \ldots,\ n-1;$$
$$B_k(i_1,i_2,\ldots,i_k)=e^{-\tilde{r}h}\big[B_{k+1}(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k,\ 1)\pi^*+$$
$$+B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,0)(1-\pi^*)\big]+q_k,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1;$$
$$B=e^{-\tilde{r}h}\big[B_1(1)\pi^*+B_1(0)(1-\pi^*)\big].$$

3. Если облигация, выпущенная фирмой, может быть предъявлена к погашению в один из моментов $t+lh$, $t+(l+1)h$, …, $t+(n-1)h$ по заранее установленным ценам X_l, X_{l+1}, …, X_{n-1}, то

$$B_n(i_1,i_2,\ldots,i_n)=\min\{V_n(i_1,i_2,\ldots,i_n),\ F+q_n\},$$
$$B_k(i_1,i_2,\ldots,i_k)=\max\Big\{X_k,\ e^{-\tilde{r}h}\big[B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,1)\pi^*+$$
$$+B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,0)(1-\pi^*)\big]\Big\}+q_k,$$
$$k=l,l+1,\ \ldots,\ n-1;$$

$$B_k(i_1,i_2,\ldots,i_k)=e^{-\tilde{r}h}\big[B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,1)\pi^*+$$
$$+B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,0)(1-\pi^*)\big]+q_k,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1;$$
$$B=e^{-\tilde{r}h}\big[B_1(1)\pi^*+B_1(0)(1-\pi^*)\big].$$

4. Если держатели облигации имеют право в моменты $t+lh$, $t+(l+1)h$, …, $t+nh$ обменять облигации на обыкновенные акции фирмы, общая стоимость которых составляет заданную долю a от стоимости активов фирмы (до выплаты дивидендов и процентов), то

$$B_n(i_1,i_2,\ldots,i_n)=\max\{aV_n(i_1,i_2,\ldots,i_n);$$
$$\min\{V_n(i_1,i_2,\ldots,i_n);\ F+q_n\}\},$$
$$B_k(i_1,i_2,\ldots,i_k)=\max\{aV_k(i_1,i_2,\ldots,i_k);$$
$$e^{-\tilde{r}h}\big[B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,1)\pi^*+B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,0)(1-\pi^*)\big]+q_k\},$$
$$k=l,\ l+1,\ \ldots,\ n-1;$$
$$B_k(i_1,i_2,\ldots,i_k)=e^{-\tilde{r}h}\big[B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,1)\pi^*+$$
$$+B_{k+1}(i_1,i_2,\ldots,i_k,0)(1-\pi^*)\big]+q_k,$$
$$k=1,2,\ldots,l-1;$$
$$B=e^{-\tilde{r}h}\big[B_1(1)\pi^*+B_1(0)(1-\pi^*)\big].$$

25.1. К текущему моменту фирма выпустила две ценные бумаги:

- обыкновенную акцию, по которой каждые полгода обещают выплачивать дивиденды в размере 1 млн долл.;
- безопционную облигацию номиналом 100 млн долл., по которой каждые полгода обещают выплачивать проценты в размере 4 млн долл.

Текущая стоимость активов фирмы равна 130 млн долл., волатильность этих активов оценивается в 40%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 7%.

Определить:

1) текущую стоимость выпущенной фирмой облигации, если до ее погашения остается 1 год;

2) размер премии за дефолт-риск, выплачиваемой держателям облигации;

3) текущую стоимость акции, выпущенной фирмой.

25.2. Найти текущую стоимость облигации при условиях задачи 25.1, если до ее погашения остается 2 года. Определить размер премии за дефолт-риск, выплачиваемой держателям облигации.

25.3. К текущему моменту фирма выпустила две ценные бумаги:

- обыкновенную акцию, по которой каждые полгода обещают выплачивать дивиденды в размере 1 млн долл.;
- облигацию номиналом 100 млн долл., погашаемую через 1 год, по которой обещают каждые полгода выплачивать проценты в размере 4 млн долл.

Текущая стоимость активов фирмы равна 130 млн долл., волатильность этих активов оценивается в 40%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 7%.

Найти текущую стоимость выпущенной фирмой облигации, если:

а) облигация может быть отозвана через полгода по номиналу;

б) облигация может быть предъявлена к погашению через полгода по цене 90 млн долл.;

в) облигация может быть конвертируема через полгода и через 1 год при показателе конверсии $a = 60\%$.

В каждом случае необходимо оценить стоимость опциона, встроенного в облигацию.

25.4. Фирма выпустила две ценные бумаги:

- обыкновенную акцию, по которой каждые полгода обещают выплачивать дивиденды в размере 1 млн долл.;
- облигацию номиналом 100 млн долл., погашаемую через 1,5 года, по которой каждые полгода обещают выплачивать проценты в размере 4 млн долл.

Текущая стоимость активов фирмы равна 130 млн долл., волатильность этих активов оценивается в 40%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 7%.

Определить текущую стоимость выпущенной фирмой облигации, если:

а) облигация может быть отозвана через полгода и 1 год по номиналу;

б) облигация может быть предъявлена к погашению через полгода и 1 год по цене 65 млн долл.;

в) облигация может быть конвертируема через 0,5, 1 и 1,5 года при показателе конверсии $a = 60\%$.

В каждом случае необходимо оценить стоимость опциона, встроенного в облигацию.

25.5. Фирма выпустила две ценные бумаги:

- обыкновенную акцию, по которой каждые полгода обещают выплачивать дивиденды в размере 2 млн долл.;
- облигацию номиналом 120 млн долл., погашаемую через 1,5 года, по которой каждые полгода обещают выплачивать проценты в размере 3 млн долл.

Текущая стоимость активов фирмы равна 180 млн долл., волатильность этих активов оценивается в 30%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении составляет 8%.

Определить текущую стоимость выпущенной фирмой облигации, если:

а) облигация является безопционной;

б) облигация может быть отозвана через полгода и через 1 год по цене 110 млн долл.;

в) облигация может быть предъявлена к погашению через полгода и 1 год по цене 110 млн долл;

г) облигация может быть конвертируема через 0,5, 1 и 1,5 года при показателе конверсии $a = 50\%$.

Значения функции стандартного нормального распределения $N(x)$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.500000	.503989	.507978	.511967	.515953	.519939	.523922	.527903	.531881	.535856
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563559	.563495	.571424	.575345
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0.3	.617911	.621719	.625516	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0.5	.691462	.694974	.698468	.701944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.878999	.881000	.882977
1.2	.884930	.886860	.888767	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1.3	.903199	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1.4	.919243	.920730	.922196	.923641	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931888
1.5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950529	.951543	.952540	.953521	.954486
1.7	.955435	.956367	.957284	.958185	.959071	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1.8	.964070	.964852	.965621	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1.9	.971284	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976705
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987455	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995603	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999
3.1	.999032	.999064	.999096	.999126	.999155	.999184	.999211	.999238	.999264	.999289
3.2	.999313	.999336	.999359	.999381	.999402	.999423	.999443	.999462	.999481	.999499
3.3	.999517	.999533	.999550	.999566	.999581	.999596	.999610	.999624	.999638	.999650
3.4	.999663	.999675	.999687	.999698	.999709	.999720	.999730	.999740	.999749	.999758
3.5	.999767	.999776	.999784	.999792	.999800	.999807	.999815	.999821	.999828	.999835
3.6	.999841	.999847	.999853	.999858	.999864	.999869	.999874	.999879	.999883	.999888
3.7	.999892	.999896	.999900	.999904	.999908	.999912	.999915	.999918	.999922	.999925
3.8	.999892	.999930	.999933	.999936	.999938	.999941	.999943	.999946	.999948	.999950
3.9	.999952	.999954	.999956	.999958	.999959	.999961	.999963	.999964	.999966	.999967
4.0	.999968	.999970	.999971	.999972	.999973	.999974	.999975	.999976	.999977	.999978

Интерполяция

$N(1{,}23165) = N(1{,}23) + 0{,}165 \cdot (N(1{,}24) - N(1{,}23)) = 0{,}890651 + 0{,}165 \cdot (0{,}892512 - 0{,}890651) = 0{,}89096;$

$N(x) = 1 - N(-x)$, если $x < 0$.

Ответы. Указания

ГЛАВА 1

1.1. Внутренняя доходность облигации

1.1. $r_A \approx 7{,}00\%$, $r_B \approx 7{,}98\%$.
1.2. $r_A \approx 4{,}96\%$, $r_B \approx 6{,}00\%$, $r_C \approx 6{,}95\%$.
1.3. $r_A \approx 29{,}10\%$, $r_B \approx 5{,}50\%$.
1.4. 131,94 долл.
1.5. ***Указание.*** Воспользоваться равенством

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^{n-1} = \frac{a(1-x^n)}{1-x}.$$

1.6. 117,48 долл. ***Указание.*** Использовать равенство из задачи 1.5.
1.7. 122,70 долл.
1.8. 9,10%. ***Указание.*** Использовать равенство из задачи 1.5.
1.9. ***Указание.*** Использовать определение внутренней доходности облигации.
1.10. 7,85%. ***Указание.*** Использовать равенства из задач 1.5 и 1.9.
1.11. 12,07%.
1.12. 2426 руб. 55 коп. ***Указание.*** Стоимость потока платежей заемщика должна равняться размеру кредита.

1.2. Свойства внутренней доходности облигации. Внутренняя доходность при непрерывном начислении процентов

2.1. а) 6,00%, б) 8,00%, в) 10,00%.
2.2. $\tilde{r}_A \approx 6{,}77\%$, $\tilde{r}_B \approx 7{,}67\%$.
2.3. $\tilde{r}_A \approx 4{,}84\%$, $\tilde{r}_B \approx 5{,}83\%$.
2.4. $\tilde{r} \approx 27{,}17\%$.
2.5. $\tilde{r} \approx 37{,}32\%$.
2.6. ***Указание.*** Воспользоваться равенством

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^{n-1} = \frac{a(1-x^n)}{1-x}.$$

2.7. $\tilde{r} \approx 11{,}39\%$. ***Указание.*** Использовать равенство из задачи 2.6.

2.8. 131,92 долл. ***Указание.*** Использовать равенство из задачи 2.6.
2.9. 117,46 долл.
2.10. а) $r(2) = 10{,}25\%$, б) $r(4) = 10{,}13\%$.
2.11. а) $r(4) = 14{,}73\%$, б) $r(8) = 14{,}60\%$, в) $\tilde{r} \approx 14{,}46\%$.
2.12. ***Указание.*** В равенстве из задачи 2.6 (при $m = 2$) перейти к пределу при $T \to \infty$.

1.3. Безрисковые процентные ставки

3.1. $r\{1;\,2\} = 5{,}41\%$, $r\{1;\,2{,}5\} = 6{,}72\%$, $r\{1;\,3\} = 7{,}72\%$.
3.2. $\tilde{r}(1{,}5) = 7{,}02\%$, $\tilde{r}(2{,}5) = 6{,}50\%$, $\tilde{r}(3{,}5) = 11{,}58\%$, $\tilde{r}(4{,}5) = 10{,}15\%$.
3.3. $r\{4;\,3{,}5\} = 3{,}02\%$, $r\{4;\,6\} = 2{,}72\%$.
3.4. 122,34 долл.
3.5. 111,12 долл., $\tilde{r} = 8{,}21\%$.
3.6. $r\{2;\,4{,}0\} = 6{,}00\%$.
3.7. $\tilde{r}(2{,}5) = 10{,}81\%$.
3.8. 143,15 долл., $r(2) = 7{,}08\%$.

1.4. Временная структура процентных ставок. Кривая рыночных доходностей

4.1. а) $\tilde{r}(1{,}5) = 0{,}0550$; б) $\tilde{r}(1{,}5) = 0{,}0567$.
4.2. а) $r = 0{,}015t + 0{,}025,\ t \in [0, 2]$; б) $r = \dfrac{1}{300}(-2t^2 + 9t + 8),\ t \in [0, 2]$.
4.3. $r = \dfrac{1}{6}(-0{,}02t^3 + 0{,}12t^2 - 0{,}16t + 0{,}36)$;
$\tilde{r}(1{,}5) = 5{,}375\%$; $\tilde{r}(2{,}8) = 6{,}896\%$; $\tilde{r}(3{,}2) = 7{,}024\%$.
4.4. $r = \dfrac{1}{150}(4t^3 - 15t^2 + 18{,}5t)$;
$\tilde{r}(0{,}25) = 2{,}50\%$; $\tilde{r}(1{,}2) = 5{,}01\%$; $\tilde{r}(1{,}75) = 5{,}25\%$.
4.5. ***Указание.*** Найти безрисковую процентную ставку $\tilde{r}(1{,}5)$.
$\tilde{r}(1{,}5) = 5{,}833\%$, $P = 915{,}30$ долл.
4.6. ***Указание.*** Кривая рыночных доходностей $r = \dfrac{1}{200}(t^2 - t + 10)$.
$\tilde{r}(0{,}5) = 4{,}875\%$, $\tilde{r}(1{,}5) = 5{,}375\%$, $\tilde{r}(2{,}5) = 6{,}875\%$, $P = 103{,}39$ долл.

4.7. ***Указание.*** $r\{1;0,5\}=4,625\%$; $r\{1;1,5\}=7,125\%$; $r\{1;2,5\}=8,625\%$; P = 113,23 долл.

4.8. ***Указания.*** 1. Положить $r\{1;2,5\}=r$, $r\{1;2,0\}=0,04+\frac{r}{2}$ и решить уравнение $\frac{5}{(1+0,06)^{0,5}}+\frac{5}{(1+0,07)^{1}}+\frac{5}{(1+0,08)^{1,5}}+\frac{5}{(1+0,04+r/2)^{2}}+$

$$+\frac{5}{(1+r)^{2,5}}=102,90.$$

Тогда $r\{1;\ 2,0\}$ = 8,495%; $r\{1;\ 2,5\}$ = 8,99%.

2. Положить $r\{1;2,5\}=r$, $r\{1;2,0\}=\frac{r+0,17}{3}$ и решить уравнение

$$\frac{5}{(1+0,06)^{0,5}}+\frac{5}{(1+0,07)^{1}}+\frac{5}{(1+0,08)^{1,5}}+\frac{5}{\left(1+\frac{r+0,17}{3}\right)^{2}}+\frac{5}{(1+r)^{2,5}}=$$

$$=102,90.$$

Тогда $r\{1;2,0\}=8,661\%$; $r\{1;2,5\}=8,984\%$.

4.9. ***Указания.*** 1. Положить $\tilde r(3,0)=r$, $\tilde r(2,5)=\frac{2r+0,08}{3}$; $\tilde r(2,0)=\frac{r+0,16}{3}$ и решить уравнение

$$6e^{-0,06\cdot0,5}+6e^{-0,065\cdot1,0}+6e^{-0,08\cdot1,5}+6e^{-\frac{r+0,16}{3}\cdot2,0}+6e^{-\frac{2r+0,08}{3}\cdot2,5}+$$

$$+106e^{-r\cdot3,0}=105,09.$$

Тогда $\tilde r(2,0)=8,667\%$; $\tilde r(2,5)=9,333\%$; $\tilde r(3,0)=10,000\%$.

2. Положить $\tilde r(3,0)=r$, $\tilde r(2,5)=\frac{r+0,095}{2}$; $\tilde r(2,0)=\frac{r+0,445}{6}$.

Тогда $\tilde r(2,0)=9,077\%$; $\tilde r(2,5)=9,731\%$; $\tilde r(3,0)=9,962\%$.

3. Положить $\tilde r(3,0)=r$, $\tilde r(2,5)=\frac{2r+0,33}{5}$; $\tilde r(2,0)=\frac{r+0,865}{10}$.

Тогда $\tilde r(2,0)=9,640\%$; $\tilde r(2,5)=10,559\%$; $\tilde r(3,0)=9,898\%$.

4.10. $\tilde r(0,25)=4,991\%$; $\tilde r(0,5)=6,009\%$; $\tilde r(0,75)=4,000\%$; $\tilde r(1,0)=4,507\%$; $\tilde r(1,25)=5,014\%$; $\tilde r(1,5)=6,657\%$.

4.11. $r\{2;\ 0,5\}$ = 4,499%; $r\{2;\ 1,0\}$ = 4,649%; $r\{2;\ 1,5\}$ = 4,799%; $r\{2;\ 2,0\}$ = 4,533%; $r\{2;\ 2,5\}$ = 4,266%; $r\{2;\ 3,0\}$ = 4,000%.

4.12. ***Указание.*** Процентные ставки $\tilde r(0,25)$ и $\tilde r(0,75)$ найти с помощью линейной интерполяции: $\tilde r(t)=0,04t+0,04$.

$\tilde r(0,25)=0,05$; $\tilde r(0,5)=0,06$; $\tilde r(0,75)=0,07$; $\tilde r(1,0)=0,08$;

$\tilde r(1,25)=0,0825$; $\tilde r(1,5)=0,085$; $\tilde r(1,75)=0,0875$; $\tilde r(2,0)=0,09$.

1.5. Купонные облигации. Внутренняя доходность купонной облигации

5.1. 10 платежей; 37 дней.
5.2. 25 платежей; 48 дней.
5.3. а) 98,04 долл.; б) 97,29 долл.
5.4. а) 204,56 долл.; б) 202, 41 долл.
5.5. 8,495%.
5.6. 8,911%.
5.7. 6,00%.
5.8. 205,27 долл.; 4,115%.

1.6. Зависимость стоимости купонной облигации от внутренней доходности

6.1. $P(r-\Delta r)-P(r)=72,31$ долл.; $P(r)-P(r+\Delta r)=66,07$ долл.

6.2. $\frac{P(0,06)-P(0,08)}{P(0,08)}=13,77\%$, $\frac{P(0,08)-P(0,1)}{P(0,08)}=11,66\%$ $(f=0,08)$;

$\frac{P(0,06)-P(0,08)}{P(0,08)}=13,45\%$, $\frac{P(0,08)-P(0,1)}{P(0,08)}=11,41\%$ $(f=0,09)$.

6.3. 91,29 долл. (дисконт); 105,94 долл. (премия); 0,00 долл.
6.4. 285,94 долл. (дисконт); 0,00 долл.; 164,17 долл. (дисконт).
6.5. ρ = 6,364%; r = 6,001%.
6.6. ρ = 6,662%; r = 7,000%.
6.7. ρ = 6,937%; r = 6,200%.

6.8. ***Указание.*** Показать, что при $f > r$

$$P=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}\left\{\frac{Af}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right)+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right\}>\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}A,$$

а при $f < r$

$$P=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}\left\{\frac{Af}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right)+\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right\}<\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}A.$$

1.7. Зависимость стоимости купонной облигации от фактора времени

7.1. ***Указание.*** Воспользоваться равенством

$$D_n = A\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right)\cdot\left(1-\frac{f}{r}\right).$$

Число купонных выплат до погашения облигации (n)	Размер дисконта, долл.	Величина изменения дисконта ($D_n - D_{n-1}$)
5	72,10	11,35
4	60,75	12,71
3	48,04	14,24
2	33,80	15,94
1	17,86	17,86
0	0,00	–

7.2. ***Указание.*** Воспользоваться равенством

$$П_n = A\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right)\cdot\left(\frac{f}{r}-1\right).$$

Число купонных выплат (n)	Размер премии ($П_n$), долл.	Изменение премии ($П_n - П_{n-1}$), долл.	Число купонных выплат (n)	Размер премии ($П_n$), долл.	Изменение премии ($П_n - П_{n-1}$), долл.
10	134,20	9,26	4	66,24	14,70
9	124,94	10,01	3	51,54	15,87
8	114,93	10,80	2	35,67	17,15
7	104,13	11,67	1	18,82	18,52
6	92,46	12,61	0	0,00	–
5	79,85	13,61			

7.3. $П_{10}^{A} = 134{,}20$ долл., $П_{9}^{A} = 124{,}94$ долл., $П_{10}^{A} - П_{9}^{A} = 9{,}26$ долл.;
$П_{20}^{B} = 196{,}36$ долл., $П_{19}^{B} = 192{,}07$ долл., $П_{20}^{B} - П_{19}^{B} = 4{,}29$ долл.

7.4. $D_{30}^{A} = 137{,}65$ долл., $D_{28}^{A} = 134{,}06$ долл., $D_{30}^{A} - D_{28}^{A} = 3{,}59$ долл.;
$D_{40}^{B} = 150{,}46$ долл., $D_{38}^{B} = 148{,}46$ долл., $D_{40}^{B} - D_{38}^{B} = 2{,}00$ долл.

7.5. 1026,98 долл., 1032,93 долл., 1036,92 долл., 1040,93 долл.

7.6. 1085,06 долл., 5 долл.

1.8. Дюрация и выпуклость облигации

8.1.

t_k	C_{t_k}	$ПV_2(C_{t_k}) = \frac{C_{t_k}}{(1+0{,}02)^{2t_k}}$	$\frac{ПV_2(C_{t_k})}{P}$	$t_k\frac{ПV_2(C_{t_k})}{P}$	$t_k\left(t_k+\frac{1}{2}\right)\frac{ПV_2(C_{t_k})}{P}$
0,5	5	4,90196	0,04085	0,02043	0,02043
1,0	6	5,76701	0,04806	0,04806	0,07209
1,2	6	5,72151	0,04768	0,05722	0,09727

Продолжение

t_k	C_{t_k}	$\Pi V_2(C_{t_k}) = \dfrac{C_{t_k}}{(1+0{,}02)^{2t_k}}$	$\dfrac{\Pi V_2(C_{t_k})}{P}$	$t_k\dfrac{\Pi V_2(C_{t_k})}{P}$	$t_k\left(t_k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\Pi V_2(C_{t_k})}{P}$
1,4	6	5,67637	0,04731	0,06623	0,12584
2,0	106	97,92762	0,81610	1,63220	4,08050
$\sum$		119,99447(=P)	1,00000	1,82414(=D_2)	4,39613(=C_2)

8.2. $D_4 = 2{,}636$; $C_4 = 8{,}145$; $\dfrac{\Delta P}{P(r)} \approx -2{,}636\cdot\dfrac{0{,}006}{1+\dfrac{0{,}06}{4}} = -0{,}01558$ (стоимость облигации уменьшится на 1,558 %);

$$\frac{\Delta P}{P(r)} \approx -2{,}636\cdot\frac{0{,}006}{1+\frac{0{,}06}{4}} + \frac{8{,}145}{2}\cdot\left(\frac{0{,}006}{1+\frac{0{,}06}{4}}\right) = -0{,}01544.$$

8.3. $D_\infty = 4{,}859$; $C_\infty = 26{,}580$; $P(0{,}05) = 117{,}22$ долл.,
$P(0{,}05 - 0{,}008) \approx P(0{,}05) - 4{,}859\cdot(-0{,}008)\cdot 117{,}22 = 121{,}78$ долл.

8.4. ***Указание.*** Предварительно найти внутреннюю доходность облигации $r = 0{,}0609$.

$$D_1 = 2{,}79;\ C_1 = 10{,}917;\ \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{(1)} \approx 3{,}156\%;\ \left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{(2)} \approx 3{,}226\%.$$

8.5. Внутренняя доходность облигации равна 8%. $D_2 = 3{,}501$, $C_2 = 15{,}035$.

8.6. ***Указание.*** Внутренняя доходность облигации при непрерывном начислении равна $\ln(1 + 0{,}05) = 0{,}04879$.
$D_\infty = 4{,}546$; $C_\infty = 21{,}844$.

8.7. $D_2 = 2{,}790$, $C_2 = 9{,}524$.

Δr	$\dfrac{P(r+\Delta r)-P(r)}{P(r)}$ (точное значение)	$\dfrac{P(r+\Delta r)-P(r)}{P(r)}$ (приближенное значение)
0,01	−0,026643	−0,026638
0,02	−0,052421	−0,052379
−0,01	0,027541	0,027536

8.8. $D_2 = 4{,}180$, $C_2 = 21{,}580$.

Δr	$\dfrac{P(r+\Delta r)-P(r)}{P(r)}$ (точное значение)	$\dfrac{P(r+\Delta r)-P(r)}{P(r)}$ (приближенное значение)
0,005	−0,019662	−0,019660
0,01	−0,038847	−0,038831
0,03	−0,111081	−0,110620

8.9. $P(0{,}065) = 983{,}31$; $P(0{,}05) = 1035{,}18$.

8.10. $P(0{,}09) = 946{,}09$; $P(0{,}1) = 896{,}76$; $P(0{,}075) = 1028{,}67$.

8.11. ***Указание.*** $D_m = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{nm}\dfrac{k}{m}\cdot\dfrac{a}{\left(1+r/m\right)^k}}{\sum\limits_{k=1}^{nm}\dfrac{a}{\left(1+r/m\right)^k}} = \dfrac{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{nm}kR^k}{\sum\limits_{k=1}^{nm}R^k}$, где $R = \dfrac{1}{1+r/m}$.

Воспользоваться соотношениями

$$\sum_{k=1}^{nm}R^k = \frac{R(1-R^{nm})}{1-R};\ \sum_{k=1}^{nm}kR^k = \frac{R(1-R^{nm})}{(1-R)^2} - nm\frac{R^{nm+1}}{1-R}.$$

8.12. Воспользоваться формулой из задачи 8.11. $D_4 = 11{,}530$.

1.9. Основные свойства дюрации и выпуклости облигаций

9.1.

Внутренняя доходность (r), %	Стоимость облигации ($P(r)$), долл.	Дюрация облигации ($D_1(r)$)	Выпуклость облигации ($C_1(r)$)
5	447,2221	3,857	19,024
6	431,1731	3,854	19,006
7	415,8538	3,851	18,987

9.2.

Внутренняя доходность (r), %	Стоимость облигации ($P(r)$), долл.	Дюрация облигации ($D_\infty(r)$)	Выпуклость облигации ($C_\infty(r)$)
6	104,4737	2,706	7,766
8	98,9874	2,697	7,731
10	93,7973	2,688	7,694

9.3. $D^\tau = 6{,}1$, $C^\tau = 41{,}625$.

9.4.

Облигация	Стоимость, долл.	Дюрация (D_2)	Выпуклость (C_2)
1	244,9038	3,785	16,681
2	226,4203	4,785	25,751

Указание. Проверить равенства

$$D_2^{(2)} = D_2^{(1)} + \tau;\ C_2^{(2)} = C_2^{(1)} + \tau^2 + 2\tau D_2^{(1)} + \tau/m.$$

9.5. $D_\infty^\tau + D_\infty + \tau$, $C_\infty^\tau = C_\infty + 2\tau D_\infty + \tau^2$.

Указание. Воспользоваться равенствами

$$D_\infty^\tau = \frac{\sum_{k=1}^{l} C_{t_k}(t_k+\tau)e^{-\bar r(t_k+\tau)}}{\sum_{k=1}^{l} C_{t_k}e^{-\bar r(t_k+\tau)}};\ C_\infty^\tau = \frac{\sum_{k=1}^{l} C_{t_k}(t_k+\tau)^2 e^{-\bar r(t_k+\tau)}}{\sum_{k=1}^{l} C_{t_k}e^{-\bar r(t_k+\tau)}}.$$

9.6.

Облигация	Стоимость, долл.	Дюрация (D_∞)	Выпуклость (C_∞)
1	157,9702	2,317	6,240
2	150,2659	2,817	8,807

9.7. $R = \dfrac{1}{1+0{,}08} = 0{,}925926;\ \sum_{k=1}^{5} R^k = 3{,}992714;\ \sum_{k=1}^{5} kR^k = 11{,}365200;$

$$\sum_{k=1}^{5} k(k+1)R^k = 51{,}641630;\ D_1 = \frac{f\sum_{k=1}^{5} kR^k + 5R^5}{f\sum_{k=1}^{5} R^k + R^5};$$

$$C_1 = \frac{f\sum_{k=1}^{5} k(k+1)R^k + 30R^5}{f\sum_{k=1}^{5} R^k + R^5}.$$

Купонная ставка (f), %	6	7	8	9	10
Дюрация (D_1)	4,439	4,375	4,312	4,256	4,204
Выпуклость (C_1)	25,557	25,032	24,549	24,103	23,690

9.8. $R = \dfrac{1}{1+\frac{0{,}06}{2}} = 0{,}9708738;\ \sum_{k=1}^{6} R^k = 5{,}417193;\ \sum_{k=1}^{6} kR^k = 18{,}493439;$

$$\sum_{k=1}^{6} k(k+1)R^k = 97{,}404914;\ D_2 = \frac{f\sum_{k=1}^{6} kR^k + 12R^6}{2f\sum_{k=1}^{6} R^k + 4R^6};$$

$$C_2 = \frac{f\sum_{k=1}^{6} k(k+1)R^k + 84R^6}{4f\sum_{k=1}^{6} R^k + 8R^6}.$$

Купонная ставка (f), %	4	5	6	7
Дюрация (D_1)	2,852	2,820	2,791	2,761
Выпуклость (C_1)	9,812	9,664	9,524	9,391

9.9. ***Указание.*** Достаточно доказать, что $D''(f) > 0$, где

$$D(f) = \frac{af+b}{cf+d};\ a = \sum_{k=1}^{n} kR^k;\ b = nmR^n;$$

$$c = m\sum_{k=1}^{n} R^k;\ d = m^2R^n;\ R = \frac{1}{1+r/m}.$$

9.10. $D(2,0) = 1{,}732$, $D(2,1) = 1{,}437$.

9.11. ***Указание.*** Воспользоваться равенствами

$$D_m(n) = \frac{\left(f\sum_{k=1}^{n} kR^k\right) + nmR^n}{mf\sum_{k=1}^{n} R^k + m^2R^n},$$

где $R = \frac{1}{1+r/m}$; $\sum_{k=1}^{n} kR^k = \frac{\sum_{k=1}^{n} R^k}{1-R} - \frac{nR^{n+1}}{1-R}$; $H_n = \frac{f\left(\sum_{k=1}^{n} R^k\right)}{f\left(\sum_{k=1}^{n} R^k\right) + mR^n}$.

9.12. ***Указание.*** Лучше воспользоваться равенством из задачи 9.11:

$$D_2(n) = \frac{1+0{,}03}{0{,}06} H_n + \frac{n}{2}\cdot\left(-\frac{0{,}04}{0{,}06}\right)(1-H_n),$$

где $H_n = \frac{0{,}1\left(\sum_{k=1}^{n} R^k\right)}{0{,}1\left(\sum_{k=1}^{n} R^k\right) + 2R^n}$; $\sum_{k=1}^{n} R^k = \frac{R(1-R^n)}{1-R}$; $R = \frac{1}{1+0{,}03}$.

n	$\sum_{k=1}^{n} R^k$	H_n	$D_2(n)$
1	0,97088	0,04762	0,500
2	1,91348	0,09215	0,977
3	2,82863	0,13386	1,432
4	3,71713	0,17299	1,867
5	4,57974	0,20977	2,284
6	5,41723	0,24438	2,684
7	6,23033	0,27700	3,068
8	7,01974	0,30778	3,438
9	7,78617	0,33685	3,793
10	8,53027	0,36435	4,136

9.13. ***Указание.*** Лучше воспользоваться равенством из задачи 9.11:

$$D_1(n) = \frac{8}{3} H_n + 0{,}9n\,(1-H_n),$$

где $H_n = \frac{0{,}06\sum_{k=1}^{n} R^k}{0{,}06\sum_{k=1}^{n} R^k + R^n}$; $\sum_{k=1}^{n} R^k = \frac{R(1-R^n)}{1-R}$; $R = \frac{1}{1{,}6}$.

n	$\sum_{k=1}^{n} R^k$	H_n	$D_1(n)$
1	0,62500	0,05660	1,000
2	1,01563	0,13495	1,917
3	1,25977	0,23641	2,692
4	1,41235	0,35706	3,267
5	1,50772	0,48680	3,607
6	1,56733	0,61206	3,727
7	1,60458	0,72101	3,680
8	1,62786	0,80751	3,539
9	1,64241	0,87133	3,366
10	1,65151	0,91593	3,199

9.14.

n	H_n	$D_2(n)$
1	0,02439	0,500
2	0,05550	0,984
3	0,09446	1,444
4	0,14244	1,867
5	0,19927	2,243
6	0,26523	2,558
7	0,33876	2,802
8	0,41745	2,969
9	0,49810	3,058
10	0,57712	3,076

9.15. $n = 10$; $D_2(9) = 2{,}037$; $D_2(10) = 1{,}950$; $D_2(11) = 1{,}883$.

1.10. Стоимость инвестиции в облигацию. Иммунизирующее свойство дюрации облигаций

10.1. $$5\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^2+5\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)+5+\frac{5}{1+\frac{0{,}06}{2}}+\frac{5}{\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^2}+\frac{105}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^3}=$$

$= 119{,}65$ долл.

10.2. 123,44 долл.

10.3. 821,51 долл.

10.4. а) 114,42 долл.; б) 115,68 долл.; в) 114,51 долл.

10.5. а) $V(0{,}1; t) = 100 \cdot (1{,}1)^t$; $V(0{,}1; 0{,}11; t) = 97{,}556 \cdot (1{,}11)^t$;
б) $t^* = 2{,}734$;
в) $D = 2{,}736$.

10.6. а) $D_1 = 4{,}465$; $V(0{,}06; 4{,}465) = 1297{,}15$ долл.;
б) $V(0{,}06; 0{,}05; 4{,}465) = 1297{,}23$ долл.;
в) 1292,27 долл.

10.7. 1) $P(0{,}08) = 947{,}5786$ долл., $D_2 = 2{,}7831$;
$V(0{,}08; 2{,}7831) = 1178{,}762$ долл.;
2а) $P(0{,}07) = 973{,}3572$ долл., $V(0{,}08; 0{,}07; D_2) = 1178{,}7812$ долл.;
2б) $P(0{,}09) = 922{,}6319$ долл., $V(0{,}08; 0{,}09; D_2) = 1178{,}7822$ долл.;
3) $t^*(0{,}07) = 2{,}7848$, $t^*(0{,}09) = 2{,}7813$.

10.8. 1) $P(0{,}09) = 1000$ долл., $D_2 = 4{,}1344$; $V(0{,}09; D_2) = 1439{,}0265$ долл.;
2а) $P(0{,}08) = 1040{,}5545$ долл., $V(0{,}09; 0{,}08; D_2) = 1439{,}1634$ долл.;
2б) $P(0{,}1) = 961{,}3913$ долл., $V(0{,}09; 0{,}1; D_2) = 1439{,}1639$ долл.;
3) $t^*(0{,}08) = 4{,}1443$, $t^*(0{,}1) = 4{,}1244$;
4) $V = 1432{,}6299$ долл.

10.9. $D_4 = 6{,}432586$.

Δr	$P(0{,}1 + \Delta r)$, долл.	$V(0{,}1; 0{,}1 + \Delta r; D_4)$, долл.
–0,02	1136,7774	1892,1729
–0,01	1065,4838	1888,8058
–0,005	1032,0495	1887,9629
0	1000	1887,6816
0,005	969,2719	1887,9634
0,01	939,8047	1888,8095
0,02	884,4261	1892,2031

1.11. Модифицированные дюрация и выпуклость облигаций

11.1. $P(0{,}06) = 117{,}842385$ долл.; $D_4 = 2{,}63583$; $D_4^{мод} = 2{,}59688$;
$C_4 = 8{,}14485$; $C_4^{мод} = 7{,}90589$.

11.2. $P(0{,}065) = 116{,}323855$ долл.; $P(0{,}055) = 119{,}384208$ долл.;
$D_4^{мод} = 2{,}59700$; $C_4^{мод} = 7{,}90649$.

11.3. 1) $D_2 = 9{,}6148$; $D_2^{мод} = 9{,}201$;
2а) $P(0{,}1) = 914{,}20457$ долл.; $P(0{,}08) = 1098{,}96387$ долл.;
$D_2^{мод} = 9{,}2380$; $C_2^{мод} = 131{,}6844$;
2б) $P(0{,}092) = 981{,}85815$ долл.; $P(0{,}082) = 1018{,}66726$ долл.;
$D_2^{мод} = 9{,}202$; $C_2^{мод} = 131{,}354$.

11.4. При увеличении внутренней доходности цена облигации упадет на 0,995%; при уменьшении внутренней доходности цена облигации возрастет на 2,02%.

11.5. При увеличении безрисковых процентных ставок на 40 б.п. стоимость облигации приближенно будет равна 920,63 долл., а при уменьшении на 50 б.п. – 989,60 долл.

11.6. $P = 105{,}7294$ долл.; $r = 8{,}288\%$; $D_2^{\text{точн}}(r) = 3{,}4024$; $D_2^{\text{мод}}(r) = 3{,}267$;
$C_2^{\text{точн}}(r) = 14{,}5096$; $C_2^{\text{мод}}(r) = 13{,}378$;
$P^+(0{,}02) = 105{,}0417$; $P^-(0{,}02) = 106{,}4227$;
$D_2^{\text{мод}} = 3{,}265$; $C_2^{\text{мод}} = 13{,}241$.

11.7. ***Указание.*** Воспользоваться равенством

$$\frac{d}{dr}D^{\text{мод}}(r) = \left(D^{\text{мод}}(r)\right)^2 - C^{\text{мод}}(r);$$

$$D^{\text{мод}}(r+\Delta r) = D^{\text{мод}}(r) + \left[\left(D^{\text{мод}}(r)\right)^2 - C^{\text{мод}}(r)\right]\Delta r = 3{,}8416.$$

Модифицированная дюрация уменьшится на 0,0084.

11.8. Увеличится на 33,82.

11.9. ***Указание.*** $\frac{\Delta P}{P} \approx -D\Delta r$, $\frac{\Delta P'}{P'} \approx -D'\Delta r$, $\Delta P - \Delta P' = -(DP - D'P')\Delta r$.

При $P' = \frac{D}{D'}P$ $\quad \Delta P \approx \Delta P'$ для любых Δr.

11.10. ***Указание.*** Воспользоваться решением задачи 11.9.
$A = 2000$ долл.

1.12. Доходность портфеля облигаций

12.1. $\Pi = 2370$ долл., $\omega_1 = 0{,}050633$, $\omega_2 = 0{,}105485$, $\omega_3 = 0{,}210970$, $\omega_4 = 0{,}632911$, $r_{\text{вз}} = 7{,}477\%$.

12.2. ***Указание.*** Доказать

$$r'_{\text{вз}} = \frac{\Omega}{\Omega - \Omega_0} r_{\text{вз}} - \frac{\Omega_0}{\Omega - \Omega_0} r,$$

где Ω – стоимость исходного портфеля;
Ω_0 – стоимость продаваемой облигации;
r – внутренняя доходность продаваемой облигации.

$r'_{\text{вз}} = 8{,}105\%$.

12.3. $r'_{\text{вз}} = \frac{\Omega}{\Omega + \Omega_0} r_{\text{вз}} + \frac{\Omega_0}{\Omega + \Omega_0} r$, $r'_{\text{вз}} = 6{,}571\%$.

12.4. Внутренняя доходность покупаемой облигации при начислении 2 раза в год равна 8%.
$r'_{\text{вз}} = 6{,}669\%$.

12.5. $\Omega_1 = 1018{,}8099$, $\Omega_2 = 2022{,}8985$, $\Omega_3 = 3000{,}00$, $\Omega = 6041{,}7084$, $r_{\text{вз}} = 6{,}328\%$. Поток платежей по портфелю приведен ниже.

Срок, лет	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Платеж, долл.	200	200	200	1200	2170	3105

$r = 6{,}426\%$.

12.6. $r_A = 3\%$, $r_B = 12{,}36\%$, $r_C = 4\%$, $r_D = 10\%$, $r_{\text{вз}} = 8{,}545\%$.
Поток платежей по портфелю приведен ниже.

Срок, лет	0,5	1,0	1,5	2,0
Платеж, долл.	364,149	410,126	456,103	7856,758

$r = 7{,}07\%$.

1.13. Дюрация и выпуклость портфеля облигаций

13.1. а) $\Omega_1 = 200{,}4114$, $\Omega_2 = 306{,}4135$. Внутренняя доходность портфеля $r = 8{,}131\%$. $D_1(\Pi) = 3{,}7406$, $C_1(\Pi) = 17{,}2788$;
б) $D_1^{\text{мод}}(\Pi) = 3{,}4593$; $C_1^{\text{мод}}(\Pi) = 14{,}7779$;
в) при увеличении внутренних доходностей на 40 б.п. стоимость портфеля упадет на 1,372%, а при уменьшении на 40 б.п. стоимость портфеля возрастет на 1,396%.

13.2. $D_1 = 3{,}6807$, $C_1 = 17{,}8213$, $D_1^{\text{мод}} = 3{,}5054$, $C_1^{\text{мод}} = 16{,}1644$;
$D_2 = 3{,}7729$, $C_2 = 18{,}5396$, $D_2^{\text{мод}} = 3{,}4300$, $C_2^{\text{мод}} = 15{,}3220$;
$D^{\text{вз}}(\Pi) = 3{,}4598$, $C^{\text{вз}}(\Pi) = 15{,}6551$.

13.3. а) $\Omega_1 = 98{,}0392$, $\Omega_2 = 190{,}3629$, $\Omega_3 = 1288{,}4021$.
Внутренняя доходность портфеля $r = 9{,}510\%$.
$D_2(\Pi) = 1{,}9626$, $C_2(\Pi) = 5{,}4286$, $D_2^{\text{мод}}(\Pi) = 1{,}874$, $C_2^{\text{мод}}(\Pi) = 4{,}947$;
б) при увеличении внутренних доходностей на 60 б.п. стоимость портфеля упадет на 1,116%, а при уменьшении на 60 б.п. стоимость портфеля возрастет на 1,133%.

13.4. $D_1^{\text{мод}} = 0{,}4902$, $C_1^{\text{мод}} = 0{,}4806$; $D_2^{\text{мод}} = 0{,}9756$, $C_2^{\text{мод}} = 1{,}4277$;
$D_3^{\text{мод}} = 2{,}1647$, $C_3^{\text{мод}} = 5{,}9840$; $D^{\text{вз}}(\Pi) = 1{,}917$, $C^{\text{вз}}(\Pi) = 5{,}092$.

13.5. $D_1(\text{П})=2{,}6778$, $C_1(\text{П})=13{,}5556$, $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega}=-2{,}42\%$.

13.6. 25% средств должно быть инвестировано в облигации первого вида, 75% средств – в облигации второго вида.

13.7. 1) Достаточно решить задачу линейного программирования:

$$f=4\omega_1+8\omega_2+16\omega_3+36\omega_4 \quad (\max);$$

$$\begin{cases}\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=1;\\ 1{,}2\omega_1+2\omega_2+3{,}4\omega_3+4\omega_4=3{,}6;\\ \omega_1\ge 0,\ \omega_2\ge 0,\ \omega_3\ge 0,\ \omega_4\ge 0.\end{cases}$$

Решение: $\omega_1=\dfrac{1}{7};\ \omega_2=0;\ \omega_3=0;\ \omega_4=\dfrac{6}{7}$.

2) Достаточно решить задачу линейного программирования:

$$f=4\omega_1+8\omega_2+16\omega_3+36\omega_4 \quad (\max);$$

$$\begin{cases}\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=1;\\ 1{,}2\omega_1+2\omega_2+3{,}4\omega_3+4\omega_4=3{,}6;\\ \omega_1\ge 0,\ \omega_2\ge 0,\ \omega_3\ge 0,\ 0\le\omega_4\le 0{,}5.\end{cases}$$

Решение: $\omega_1=\dfrac{1}{22};\ \omega_2=0;\ \omega_3=\dfrac{5}{11};\ \omega_4=\dfrac{1}{2}$.

13.8. а) $\omega_1=\dfrac{1}{3},\ \omega_2=0,\ \omega_3=0,\ \omega_4=0,\ \omega_5=\dfrac{2}{3};$

б) $\omega_1=\dfrac{1}{5},\ \omega_2=\dfrac{1}{5},\ \omega_3=0,\ \omega_4=0,\ \omega_5=\dfrac{3}{5}.$

13.9. $D_A=1{,}925$, $C_A=4{,}751$, $D_B=3{,}568$, $C_B=17{,}140$,

$$D_2(\text{П})=\frac{2}{5}\cdot 1{,}925+\frac{3}{5}\cdot 3{,}568=2{,}911,$$

$$C_2(\text{П})=\frac{2}{5}\cdot 4{,}751+\frac{3}{5}\cdot 17{,}140=10{,}284.$$

13.10. а) $D_2^{\text{вз}}(\text{П})=2{,}220$, $C_2^{\text{вз}}(\text{П})=6{,}692$;
б) $\Omega=659{,}6003$.

Δy	$\Omega^-(\Delta y)$	$\Omega^+(\Delta y)$	Оценка дюрации	Оценка выпуклости
0,005	666,9622	652,3445	2,216	6,434
0,002	662,5322	656,6853	2,216	6,405

13.11. Поток платежей по портфелю облигаций.

Срок, лет	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Платеж, долл.	77	1077	37	637	210

а) $\Omega=1791{,}0613$ долл.;

б) $\Omega^-(\Delta y)=1795{,}9407$, $\Omega^+(\Delta y)=1786{,}2020$, $D_2^{\text{мод}}(\text{П})\approx 1{,}359$, $C_2^{\text{мод}}(\text{П})\approx 2{,}806$;

в) $\Delta r=0{,}005$, $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega}=-0{,}00676$; $\Delta r=-0{,}005$, $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega}=0{,}00683$;

$\Delta r=0{,}01$, $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega}=-0{,}01310$; $\Delta r=-0{,}01$, $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega}=0{,}01373$.

13.12.

Номер облигации (i)	Стоимость облигации, долл.	Внутренняя доходность, %	Модифицированная дюрация	Модифицированная выпуклость
1	995,3938	8,491	0,941	1,345
2	595,2415	9,444	1,789	4,178
3	200,4260	9,903	2,166	5,990

а) внутренняя доходность портфеля облигаций – 9,164%; средневзвешенная доходность портфеля облигаций – 8,966%;

б) $D_2^{\text{мод}}(\text{П})=1{,}364$, $C_2^{\text{мод}}(\text{П})=2{,}824$;

в) $D^{\text{вз}}(\text{П})=1{,}360$, $C^{\text{вз}}(\text{П})=2{,}806$;

г) при $\Delta r=0{,}005$ $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega}=-0{,}00678$; при $\Delta r=-0{,}005$ $\dfrac{\Delta\Omega}{\Omega}=0{,}00686$.

1.14. Иммунизация портфеля облигаций

14.1. Планируемая стоимость инвестиции $10\,000\cdot(1+0{,}08)^3=12597{,}12$.

Срок, годы	Стоимость инвестиции, долл.	Стоимость облигации, долл.		Дюрация облигации		Инвестиционный портфель
		1	2	1	2	
0,0	10 000	103,5665	106,6243	1,9106	3,5042	(3163,96; 6836,04)

a)

Срок, годы	Стоимость инвестиции, долл.	Стоимость облигации, долл.		Дюрация облигации		Инвестиционный портфель
		1	2	1	2	
1,0	10603,29	100,9174	102,5311	1,0000	2,73895	(4505,78; 6097,51)
2,0	11665,09	0,0000	103,5665			
3,0	12598,51					

b)

Срок, годы	Стоимость инвестиции, долл.	Стоимость облигации, долл.		Дюрация облигации		Инвестиционный портфель
		1	2	1	2	
1,0	10800,00	101,8519	105,1542	1,0000	2,74236	(4601,51; 6198,49)
2,0	11557,45	0,0000	101,7591			
3,0	12597,63					

c)

Срок, годы	Стоимость инвестиции, долл.	Стоимость облигации, долл.		Дюрация облигации		Инвестиционный портфель
		1	2	1	2	
1,0	10412,98	100,0000	100,0000	1,0000	2,73554	(4413,12; 5999,86)
2,0	11668,26	0,0000	103,5665			
3,0	12601,72					

d)

Срок, годы	Стоимость инвестиции, долл.	Стоимость облигации, долл.		Дюрация облигации		Инвестиционный портфель
		1	2	1	2	
1,0	10228,78	99,0991	97,5563	1,0000	2,73211	(4323,39; 5905,39)
2,0	11564,09	0,0000	101,7591			
3,0	12604,86					

14.2. Планируемая стоимость инвестиции $5000 \cdot (1 + 0{,}09)^{2{,}5} = 6202{,}0641$.

Срок, годы	Стоимость инвестиции, долл.	Стоимость облигации, долл.		Дюрация облигации		Инвестиционный портфель
		1	2	1	2	
0,0	5000,00	108,37896	102,53130	2,27619	2,73895	(2581,80; 2418,20)
0,5	5317,36	110,01991	109,27944	1,85961	2,24236	(3367,02; 1950,34)
1,0	5603,67	110,79202	105,424054	1,42234	1,91135	(4713,74; 889,93)
1,5	5851,19	109,60130	110,50668	0,97341	1,41211	(5496,59; 354,60)
2,0	6024,17	106,84144	103,77358	0,50000	1,00000	(6024,17; 0,00)
2,5	6202,26					

14.3. Облигация A

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация
0,0	10	100,0000	1,909091
1,0	9	100,9174	1,000000

Облигация B

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация
0,0	10	100,0000	2,735537
1,2	9	101,7591	1,909843
2,0	8	101,8519	

Облигация C

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация
0,0	10	100,0000	3,486852
1,2	9	102,5313	2,738953
2,0	8	103,5665	

Планируемая стоимость инвестиции $6000 \cdot (1{,}1)^3 = 7986$ долл.

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация
0,0	10	6000,00	(1280,00; 1200,00; 3520,00)
1,0	9	6721,95	(2215,45; 1344,39; 3162,11)
2,0	8	7395,01	
3,0	8	7986,61	

14.4. Облигация A

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация	Выпуклость
0,0	8	845,3742	2,935906	11,65924
1,0	7	909,5991	1,979450	5,91780

Облигация B

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация	Выпуклость
0,0	8	466,8787	3,660322	17,74973
1,0	7	486,8784	2,831009	11,10123

Облигация С

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация	Выпуклость
0,0	8	823,7885	3,480098	16,64001
1,0	7	810,4973	2,796970	10,92019

Планируемая стоимость инвестиции $50\,000 \cdot (1 + 0{,}008)^{3,2} = 63962{,}59$ долл.

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Инвестиционный портфель
0,0	8	50000,00	(25735,20; 0,00; 24264,80)
1,0	7	55118,03	(40248,34; 0,00; 14869,69)
3,2	7	63964,35	

14.5. Чтобы портфель имел дюрацию, равную 3,5, веса облигаций: $\omega_1 = 0{,}25$, $\omega_2 = 0{,}75$.

Для отыскания портфеля с дюрацией, равной 3,5 при наименьших трансакционных расходах, необходимо решить задачу линейного программирования:

$$f = W \quad (\min);$$

$$\begin{cases} 0{,}005(x_1 + x_2) + 0{,}006(y_1 + y_2) = W; \\ (5200 - W)\,\omega_1 = 2000 + x_1 - y_1; \\ (5200 - W)\,\omega_2 = 3000 + x_2 - y_2; \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0. \end{cases}$$

(x_1, x_2 – стоимости покупаемых облигаций; y_1, y_2 – стоимости продаваемых облигаций).

Оптимальное решение: $x_1 = 0$; $x_2 = 893{,}49$; $y_1 = 702{,}17$; $y_2 = 0$; $W = 8{,}68$.

Портфель облигаций: (1297,83; 3893,49).

14.6. Облигация А

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация
0,0	8	100	1,925926
1,0	9	99,0826	1,000000

Облигация В

Срок, годы	Процентная ставка, %	Стоимость, долл.	Дюрация
0,0	8	100	3,577097
1,0	9	97,4687	2,780316

Срок, годы	Процентная ставка, %	Трансакционные расходы, долл.	Стоимость, долл.	Инвестиционный портфель
0,0	8	50	10 000	(3495,08; 6504,92)
1,0	9	7,85	10595,43	(4644,00; 5951,43)
3,0	9	–	12588,43	

1.15. Простейшие альтернативные стратегии управления инвестициями в облигации

15.1. а)

$$f = 100x_1 + 150x_2 \quad (\min);$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 50x_2 \ge 260; \\ 10x_1 + 150x_2 \ge 660; \\ 110x_1 \ge 440; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение: $x_1 = 4$, $x_2 = 4{,}4$, $f = 1060$.

б)

$$f = 100x_1 + 150x_2 \quad (\min);$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 50x_2 \ge 260 + F_1; \\ F_1(1{,}05) + 10x_1 + 150x_2 \ge 660 + F_2; \\ F_1(1{,}05) + 110x_1 \ge 440; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. F_1 \ge 0, F_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 6{,}6768$, $F_1 = 419{,}05$, $F_2 = 73{,}84$, $f = 1001{,}52$.

15.2. а) $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$, $f = 1030$;

б) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 11{,}132$, $F_1 = 913{,}2231$, $F_2 = 454{,}5454$.

15.3. $x_1 = 10$, $x_2 = 23{,}7914$, $x_3 = 0$, $F_1 = 375{,}8278$, $F_2 = 0$, $f = 6558{,}28$.

15.4. $f = 100y_1 + 92y_2 - 100x_1 - 92x_2$ (max);

$$\begin{cases} 10x_1 + 100x_2 \ge 10y_1 + 100y_2 + F_1; \\ 1{,}1F_1 + 100x_1 \ge 100y_1; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ 0 \le y_1 \le 2,\ 0 \le y_2 \le 2. \end{cases}$$

Решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}018$, $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $F_1 = 181{,}818$, $f = 14{,}344$.

15.5. $f = 85y_1 + 95y_2 - 90x_1 - 100x_2$ (max);

$$\begin{cases} 100x_1 + 10x_2 \ge 100y_1 + 10y_2 + F_1; \\ 1{,}1F_1 + 100x_2 \ge 100y_2; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ 0 \le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 4. \end{cases}$$

Решение: $x_1 = 4{,}036$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $F_1 = 363{,}64$, $f = 16{,}76$.

1.16. Реализуемая доходность управляемого портфеля облигаций

16.1. $R_1 = 0{,}04$, т.е. 4%; $R_2 = 0{,}03980$, т.е. 3,980%; $R_3 = 0{,}01847$, т.е. 1,847%; $R_4 = -0{,}00871$, т.е. $-0{,}871$%; $R_5 = 0{,}00096$, т.е. 0,096%.

16.2. $R = 0{,}294$%.

16.3. ***Указание.***

$$\left(1+\frac{R(m)}{m}\right)^{m(T-t_0)} = \frac{\Omega_n}{\Omega_0}\left(1+\frac{Q_1}{\Omega_1}\right)\left(1+\frac{Q_2}{\Omega_2}\right)\cdots\left(1+\frac{Q_n}{\Omega_n}\right)$$

$$\left(1+\frac{R(l)}{l}\right)^{l(T-t_0)} = \frac{\Omega_n}{\Omega_0}\left(1+\frac{Q_1}{\Omega_1}\right)\left(1+\frac{Q_2}{\Omega_2}\right)\cdots\left(1+\frac{Q_n}{\Omega_n}\right)$$

Значит,

$$\left(1+\frac{R(m)}{m}\right)^{m} = \left(1+\frac{R(l)}{l}\right)^{l}.$$

16.4. $$\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m(T-t_0)} =$$

$$= \frac{\Omega_n}{\Omega_0}\left(1+\frac{Q_1}{\Omega_1}\right)\left(1+\frac{Q_2}{\Omega_2}\right)\cdots\left(1+\frac{Q_k}{\Omega_k}\right)\left(1+\frac{Q_{k+1}}{\Omega_{k+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{Q_n}{\Omega_n}\right)$$

$$\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{m(t-t_0)} = \frac{\Omega_k}{\Omega_0}\left(1+\frac{Q_1}{\Omega_1}\right)\left(1+\frac{Q_2}{\Omega_2}\right)\cdots\left(1+\frac{Q_k}{\Omega_k}\right)$$

$$\left(1+\frac{R_2}{m}\right)^{m(T-t_0)} = \frac{\Omega_n}{\Omega_k}\left(1+\frac{Q_{k+1}}{\Omega_{k+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{Q_n}{\Omega_n}\right)$$

$$\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m(T-t_0)} = \left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{m(t-t_0)}\left(1+\frac{R_2}{m}\right)^{m(T-t)}.$$

16.5. ***Указание.*** Воспользоваться результатами, полученными в задаче 16.4.

$$\left(1+\frac{R}{m}\right)^{khm} = \left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{hm}\left(1+\frac{R_2}{m}\right)^{hm}\cdots\left(1+\frac{R_k}{m}\right)^{hm};$$

$$1+\frac{R}{m} = \left[\left(1+\frac{R_1}{m}\right)\left(1+\frac{R_2}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{R_k}{m}\right)\right]^{1/k} \le$$

$$\le \frac{1+\frac{R_1}{m}+1+\frac{R_2}{m}+\cdots+1+\frac{R_k}{m}}{k} = 1+\frac{1}{m}\cdot\frac{R_1+R_2+\cdots+R_k}{k}.$$

16.6. $R = 5{,}920$%; $r_{вн} = 6{,}001$%.

16.7. ***Указание.*** Доказать совпадение годовой реализуемой доходности облигации за один купонный период с внутренней доходностью облигации и воспользоваться результатами, полученными в задаче 16.4.

16.8. а)

Облигация	Стоимость, долл.	Дюрация	Выпуклость
A	100	2,725911	8,909993
B	200	5,869773	44,447761
C	100	6,5426604	58,249078

$$\begin{cases} 2{,}725911\omega_1 + 6{,}5426604\omega_2 = 5{,}869773; \\ \omega_1 + \omega_2 = 1; \end{cases}$$

$\omega_1 = 0{,}176299$, $\omega_2 = 0{,}823701$.

б)

Портфель	Средневзвешенная доходность, %	Средневзвешенная дюрация	Средневзвешенная выпуклость
$П_1$	9,00	5,869771	44,447761
$П_2$	9,6474	5,869773	49,550647

в)

Изменение внутренней доходности (Δr), %	Стоимость облигации через полгода, долл.			Реализуемая доходность портфеля за полгода, %	
	A	B	C	$П_1$	$П_2$
–1	102,2575	211,1184	106,2966	20,118	20,816
–0,5	101,1208	205,4633	103,0838	14,463	15,123
–0,2	100,5221	202,1628	101,2184	11,163	11,837
0	100,0000	200,0000	100,0000	9,000	9,647
0,2	99,7317	197,8668	98,8013	6,867	7,578
0,5	98,8948	194,7213	97,0393	3,721	4,380
1	97,8050	189,6203	94,1962	–1,380	–0,688

1.17. Темп инфляции. Номинальная и реальная внутренние доходности облигаций

17.1. 11,87%.
17.2. а) 6,84% ; б) 3,89% .
17.3. 9,49%.
17.4. 5,40%.
17.5. 1) $r_{ном}$ = 11,972%, $r_{реал}$ = 6,64%; 2) $r_{ном}$ = 10,681%, $r_{реал}$ = 5,41%; 3) $r_{ном}$ = 13,005%, $r_{реал}$ = 7,62%.
17.6. $r_{реал}$ = 2,42%.
17.7. $r_{реал}$ = 7,581%.
17.8. $r_{реал}$ = 5,18%.
17.9. $r_{реал}$ = 3,058%; π = 6,977%; $r_{реал}$ = 2,826%.

1.18. Внутренняя доходность облигации с учетом налогов

18.1. $P = 917{,}7718$, $C_{t_k}(1-\alpha) = 100(1-0{,}25) = 75$,
$A-(A-P)\beta = 1000-(1000-917{,}7718)\cdot 0{,}3 = 975{,}3316$,
$r' = 9{,}01\%$, $r' \approx 8{,}90\%$.

18.2. $r' = 7{,}46\%$, $r' \approx 7{,}30\%$.
18.3. а) $r'_{ном} = 6{,}97\%$, $r'_{реал} = 2{,}86\%$;
б) $r'_{ном} = 5{,}99\%$, $r'_{реал} = 1{,}91\%$;
в) $r'_{ном} = 5{,}01\%$, $r'_{реал} = 0{,}97\%$.
18.4. P_2 = 106,50 долл., $r'_2 = 5{,}11\% > 5\%$. Рекомендовать инвестору вторую облигацию.
18.5. P_2 = 936,60 долл.
а) $r'_2 = 8{,}034\%$, $r'_2 > 8\%$. Рекомендовать инвестору вторую облигацию.
б) $r'_2 = 7{,}045\%$, $r'_2 < 8\%$. Рекомендовать инвестору первую облигацию.
18.6. P = 961,10 долл., $r' = 7{,}15\%$, $r'_{реал} = 3{,}03\%$.

ГЛАВА 2

2.1. Ожидаемая доходность и дисперсия доходности одной ценной бумаги

1.1. V_0 = 40 долл.;
а) $V = 50 + 2\cdot 1{,}05 + 2 = 54{,}10$ долл., $r = 16{,}30\%$;
б) $V = 50 + 2\cdot 1{,}2 + 2 = 54{,}40$ долл., $r = 16{,}62\%$.
1.2. V_0 = 50 долл.;
а) $V = 55 + 1{,}5\cdot(1{,}03)^4 + 1{,}5\cdot(1{,}03)^2 + 1{,}5 = 59{,}78$ долл., $r = 6{,}04\%$;
б) $V = 55 + 1{,}5\cdot(1{,}05)^4 + 1{,}5\cdot(1{,}05)^2 + 1{,}5 = 59{,}98$ долл., $r = 6{,}16\%$.
1.3. а) $r = 6{,}83\%$; б) $r = 7{,}01\%$.
1.4. $r = 16{,}52\%$.
1.5. $r = 10{,}70\%$.
1.6. V_0 = 920,15 долл.;
а) $V = 1000 + 60\cdot(1{,}08)^4 + 60\cdot(1{,}08)^3 + 60\cdot(1{,}08)^2 + 60\cdot 1{,}08 + 60 =$

$$= 1000 + 60\cdot\frac{(1{,}08)^5 - 1}{0{,}08} = 1351{,}996 \text{ долл.}, \; r = 8\%;$$

б) $V = 1000 + 60 \cdot (1{,}06)^4 + 60 \cdot (1{,}06)^3 + 60 \cdot (1{,}06)^2 + 60 \cdot 1{,}06 + 60 =$

$= 1000 + 60 \cdot \frac{(1{,}06)^5 - 1}{0{,}06} = 1338{,}23$ долл., $r = 7{,}78\%$.

1.7. а) 8%; б) 7,81%; в) 8,19%.

1.8. а) 6%, 6%, 6%; б) 6%, 14,39%, 84,16%; в) 6%, –1,64%, –38,36%.

1.9. $\bar{r} = 0{,}26\%$; $\sigma = 3{,}23\%$.

1.10. $\bar{r} = 2{,}99\%$; $\sigma = 2{,}93\%$.

1.11.

Вероятность	Стоимость облигации через полгода, долл.	Доходность облигации за полгода,%
0,1	1246,39	27,639
0,2	1200,58	23,058
0,2	1156,78	18,678
0,3	1074,89	10,489
0,2	1000,00	3,000

$\bar{r} = 14{,}86\%$; $\sigma = 8{,}16\%$.

1.12. $\bar{r} = 0{,}4\%$; $\sigma = 10{,}15\%$.

1.13. а) $\bar{r} = 12{,}96\%$; $\sigma = 4{,}58\%$; б) $\bar{r} = 13{,}22\%$; $\sigma = 4{,}61\%$.

2.2. Ожидаемая доходность и дисперсия доходности портфеля ценных бумаг

2.1. $\bar{r}_p = 7\%$; $\sigma_p = 14\%$.

Указание. $\overline{\Theta} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$

2.2. $\bar{r}_p = 9{,}16\%$; $\sigma_p = 9{,}25\%$.

Указание. $\overline{\Theta} = \frac{1}{19}(3, 8, -2, 10)$.

2.3. $\sigma_P = 66{,}56\%$.

2.4. а) $\bar{r}_p = 19\%$; $\sigma_p = 19{,}97\%$; б) $\bar{r}_p = 12{,}25\%$; $\sigma_p = 11{,}36\%$.

2.5. а) $\bar{r}_p = 2{,}62\%$; $\sigma_p = 6{,}14\%$; б) $\bar{r}_p = 3{,}22\%$; $\sigma_p = 6{,}29\%$.

2.6. $\rho = 0{,}67$.

Указание. $\rho = \frac{\operatorname{cov}(r_{P_1}, r_{P_2})}{\sigma_{P_1} \cdot \sigma_{P_2}}$, $\sigma_{P_1} = 0{,}3062$, $\sigma_{P_2} = 0{,}3302$,

$\operatorname{cov}(r_{P_1}, r_{P_2}) = 0{,}0675$.

2.7. $\bar{r}_p = 1{,}46\%$; $\sigma_p = 1{,}76\%$.

2.3. Отыскание портфеля ценных бумаг с наименьшим риском

3.1. а) $\overline{\Theta}_{\min} = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, $\sigma(\overline{\Theta}_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0{,}378$; б) $\overline{\Theta}^+_{\min} = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$

Указание. Так как координаты портфеля $\overline{\Theta}_{\min}$ неотрицательны, то $\overline{\Theta}^+_{\min} = \overline{\Theta}_{\min}$.

3.2. а) $\overline{\Theta}_{\min} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\sigma(\overline{\Theta}_{\min}) = \sqrt{\frac{3}{20}} \approx 0{,}3873$;

б) $\overline{\Theta}^+_{\min} = (0, 1)$; $\sigma(\overline{\Theta}^+_{\min}) = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}4472$.

Указание. Наименьшее значение функции $\sigma^2 = 0{,}2\Theta_1^2 + 0{,}2\Theta_1 + 0{,}2$ на отрезке [0, 1] достигается при $\Theta_1 = 0$.

3.3. а) $\overline{\Theta}_{\min} = \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, $\sigma(\overline{\Theta}_{\min}) = \frac{1}{5} = 0{,}20$;

б) $\overline{\Theta}^+_{\min} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\sigma(\overline{\Theta}^+_{\min}) = \sqrt{\frac{1}{15}} \approx 0{,}2582$.

Указание. Задача сводится к отысканию наименьшего значения функции

$0{,}3\Theta_1^2 + 0{,}7\Theta_2^2 + 0{,}8\Theta_1\Theta_3 - 0{,}4\Theta_1 - 0{,}4\Theta_3 + 0{,}2$

при условиях

$\Theta_1 + \Theta_3 \le 1$, $\Theta_1 \ge 0$, $\Theta_3 \ge 0$.

3.4. а) $\overline{\Theta}_{\min} = (1, 1, -1)$; $\sigma(\overline{\Theta}_{\min}) = \sqrt{\frac{1}{10}} = 0{,}3162$;

б) $\overline{\Theta}^+_{\min} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, 0\right)$ $\sigma(\overline{\Theta}^+_{\min}) = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}4714$;

в) $\overline{\Theta}^+_{\min} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ $\sigma(\overline{\Theta}^+_{\min}) = \frac{3}{2\sqrt{10}} = 0{,}4743$.

3.5. а) $\overline{\Theta}_{\min} = \left(-\frac{6}{27}, \frac{28}{27}, \frac{5}{27}\right)$ $\sigma(\overline{\Theta}_{\min}) = \frac{\sqrt{43{,}2}}{27} = 0{,}2434$;

б) $\overline{\Theta}^+_{\min} = \left(0, \frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right)$ $\sigma(\overline{\Theta}^+_{\min}) = \frac{\sqrt{0{,}8}}{3} = 0{,}2981$.

3.6. $\overline{\Theta}_{\min} = \left(\frac{68}{125}, \frac{4}{25}, \frac{14}{125}, \frac{23}{125}\right)$ $\sigma(\overline{\Theta}_{\min}) = 0{,}4543$.

3.7. $\overline{\Theta}_{\min} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\sigma(\overline{\Theta}_{\min}) = 0{,}3291$.

Указание. Согласно теореме Куна–Таккера решить систему

$$\begin{cases}
2\Theta_1 + 0{,}4\Theta_2 + 0{,}8\Theta_3 + 0{,}8\Theta_4 + \lambda_1 = 0,\\
0{,}4\Theta_1 + 0{,}2\Theta_2 + \lambda_1 + \mu_1 = 0,\\
0{,}8\Theta_1 + 1{,}6\Theta_3 + \lambda_1 = 0,\\
0{,}8\Theta_1 + 1{,}6\Theta_4 + \lambda_1 = 0,\\
\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 1,\\
\mu_1(\Theta_2 - 0{,}5) = 0,\\
\mu_1 \ge 0,\\
\Theta_2 \le 0{,}5.
\end{cases}$$

3.8. 1. $\overline{\Theta} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ – портфель с наименьшим риском;

$\sigma(\overline{\Theta}) = \frac{\sqrt{2}}{5} = 0{,}2828$.

Указание. Доказать, что $\overline{\Theta}$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases}
2\Theta_1 + 0{,}4\Theta_2 + 0{,}8\Theta_3 \;\; 0{,}8\Theta_4 + \lambda - \mu_1 = 0,\\
0{,}4\Theta_1 + 0{,}2\Theta_2 + \lambda - \mu_2 = 0,\\
0{,}8\Theta_1 + 1{,}6\Theta_3 + \lambda - \mu_3 = 0,\\
0{,}8\Theta_1 + 1{,}6\Theta_4 + \lambda - \mu_4 = 0,\\
\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 1,\\
\mu_1\Theta_1 = 0, \quad \mu_2\Theta_2 = 0, \quad \mu_3\Theta_3 = 0, \quad \mu_4\Theta_4 = 0,\\
\mu_1 \ge 0, \quad \mu_2 \ge 0, \quad \mu_3 \ge 0, \quad \mu_4 \ge 0.
\end{cases}$$

2. $\overline{\Theta}^+_{\min} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ $\sigma(\overline{\Theta}^+_{\min}) = 0{,}3536$.

2.4. Множество инвестиционных возможностей при заданном наборе ценных бумаг

4.1. а) $\sigma = (0{,}122)^{1/2} \approx 0{,}3493$; б) $\sigma = (0{,}178)^{1/2} \approx 0{,}4219$.

4.2. а) $\sigma = [0{,}7204; +\infty)$; б) $\sigma \in \varnothing$.

4.3. а) $\sigma = [\sqrt{0{,}1}; +\infty)$; б) $\sigma \in \{\sqrt{0{,}4}\}$.

4.4. ***Указание.*** Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases}
0{,}2 = 0{,}1\Theta_1 + 0{,}2\Theta_2 + 0{,}4\Theta_3,\\
1 = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,\\
\frac{3}{8} = 0{,}2\Theta_1^2 + 0{,}4\Theta_2^2 + 0{,}5\Theta_3^2 - 0{,}2\Theta_1\Theta_2 + 0{,}6\Theta_2\Theta_3
\end{cases}$$

имеет решение, а система $\begin{cases} 0{,}3t_1 + 0{,}4t_2 = 0{,}2,\\ 2{,}2t_1^2 + 0{,}5t_2^2 + 1{,}2t_1t_2 = \frac{3}{8},\\ t_1 + t_2 = 1, \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ll} \bar{r}(\overline{\Theta}_1) = 0{,}3, & \bar{r}(\overline{\Theta}_2) = 0{,}4 \\ \Lambda(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2) = & \begin{pmatrix} 2{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

решения не имеет.

4.5. *Указание*. Установить, что

$$\bar r(\overline{\Theta}_1)=0{,}2,\ \ \bar r(\overline{\Theta}_2)=0{,}25,\quad \Lambda(\overline{\Theta}_1,\overline{\Theta}_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{7}{40} & \dfrac{1}{5}\\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{37}{160}\end{pmatrix}.$$

2.5. Множество инвестиционных возможностей при двух ценных бумагах

5.1. а) $\sigma=|20r-2{,}4|$, $0{,}1\le r\le 0{,}15$; б) $\sigma=4r$, $0{,}1\le r\le 0{,}15$;

в) $\sigma=(169{,}6r^2-38{,}4r+2{,}304)^{1/2}$, $0{,}1\le r\le 0{,}15$;

г) $\sigma=(112r^2-24r+1{,}44)^{1/2}$, $0{,}1\le r\le 0{,}15$.

5.2. а) $\sigma=|2r-0{,}1|$; б) $\sigma=|6r-1{,}1|$; в) $\sigma=(13{,}6r^2-4{,}24r+0{,}37)^{1/2}$;

г) $\sigma=(7{,}2r^2-1{,}68r+0{,}13)^{1/2}$.

5.3. *Указание.* Показать, что наименьшее значение дисперсии доходности портфеля $\sigma_p^2=\dfrac{1}{\bar r_2-\bar r_1}(ar^2-2br+c)$ достигается при

$$r=\frac{\sigma_1^2\bar r_2+\sigma_2^2\bar r_1-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2(\bar r_1+\bar r_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

5.4. $\sigma=\dfrac{5}{9}(305r^2-69{,}888r+4{,}407984)^{1/2}$, $0{,}12\le r\le 0{,}138$.

Указание. $\bar r(\overline{\Theta}_1)=0{,}12$, $\bar r(\overline{\Theta}_2)=0{,}138$; $\Lambda(\overline{\Theta}_1,\overline{\Theta}_2)=\begin{pmatrix}0{,}1276 & 0{,}1368\\ 0{,}1368 & 0{,}1765\end{pmatrix}$.

5.5. $\sigma=\left(\dfrac{100}{3}r^2-9{,}6r+0{,}72\right)^{1/2}$.

Указание. $\bar r(\overline{\Theta}_1)=0{,}12$, $\bar r(\overline{\Theta}_2)=0{,}18$; $\Lambda(\overline{\Theta}_1,\overline{\Theta}_2)=\begin{pmatrix}0{,}048 & 0\\ 0 & 0{,}072\end{pmatrix}$

2.6. Эффективная граница множества инвестиционных возможностей

6.1. $B>>A$; $B>>D$; $C>>D$.

6.2. а) $S(\Omega_2)=\left[\dfrac{53}{340};\ +\infty\right)$ б) $S(\Omega_2^+)=\left[\dfrac{53}{340};\ 0{,}25\right]$.

6.3. а) $S(\Omega)=\left[\dfrac{87}{725};\ +\infty\right)$ б) $S(\Omega^+)=\left[\dfrac{33}{260};\ 0{,}19\right]$

6.4. а) $S(\Omega_3)=\left[\dfrac{13}{120};\ +\infty\right)$ б) $S(\Omega_3^+)=\left[\dfrac{11}{60};\ 0{,}3\right]$.

6.5. а) $A\in\Gamma(\Omega_3)$, $B\notin\Gamma(\Omega_3)$; б) $A\in\Gamma(\Omega_3^+)$, $B\notin\Gamma(\Omega_3^+)$.

Указание. В каждом случае найти портфель с наименьшим риском при заданной ожидаемой доходности и сравнить дисперсию доходности найденного портфеля с дисперсией исследуемой инвестиционной возможности.

6.6. $\overline{\Theta}_{\min}(0{,}4)=\left(-\dfrac{22}{51},\dfrac{11}{17},\dfrac{40}{51}\right)$, $\overline{\Theta}_{\min}(0{,}4)\in\Gamma(\Omega_3)$.

Указание. Показать, что ожидаемая доходность портфеля с наименьшим риском меньше 0,4.

6.7. а) $\overline{\Theta}_{\min}(0{,}13)=\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{1}{8},0\right)$, $\overline{\Theta}_{\min}(0{,}13)\notin\Gamma(\Omega_3^+)$;

б) $\overline{\Theta}_{\min}(0{,}3)=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\overline{\Theta}_{\min}(0{,}3)\in\Gamma(\Omega_3^+)$.

Указание. $\overline{\Theta}^+_{\min}(0{,}13)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},0\right)$, $\bar r^*=\dfrac{11}{75}\approx 0{,}1467$.

6.8. *Указание.* Воспользоваться определением эффективной границы.

2.7. Эффективная граница множества инвестиционных возможностей при разрешенных коротких продажах ценных бумаг

7.1. $\overline{\Theta}_{\min}(r)=\left(2-10r,\ \frac{25}{4}r-\frac{5}{8},\ \frac{15}{4}r-\frac{3}{8}\right),\ r\geq\frac{23}{150}.$

$$\sigma=\frac{1}{2}\cdot\left(75r^2-23r+\frac{39}{20}\right)^{1/2},\ r\geq\frac{23}{150}.$$

7.2. $\overline{\Theta}_{\min}(r)=\left(-\frac{70}{17}r+\frac{62}{51},\ \frac{20}{17}r+\frac{9}{51},\ \frac{50}{17}r-\frac{20}{51}\right),\ r\geq 0{,}19.$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\left(100r^2-38r+\frac{11}{3}\right)^{1/2},\ r\geq 0{,}19.$$

7.3. $\overline{\Theta}_{\min}(r)=\frac{1}{16}\cdot(28-70r,\ 25r-2,\ 45r-10),\ r\geq\frac{22}{75}.$

$$\sigma=\frac{1}{4}\cdot(75r^2-44r+7{,}2)^{1/2},\ r\geq\frac{22}{75}.$$

7.4. $\overline{\Theta}_{\min}(r)=\left(\frac{17}{15}-\frac{10}{3}r,\ \frac{5}{3}r+\frac{7}{30},\ \frac{5}{3}r-\frac{11}{30}\right),\ r\geq 0{,}1.$

$$\sigma=\frac{1}{3}\cdot(7{,}5r^2-1{,}5r+0{,}435)^{1/2},\ r\geq 0{,}1.$$

7.5. $\overline{\Theta}_{\min}(r)=\frac{1}{33}\cdot(210r-34,\ 35-90r,\ 32-120r),\ r\geq\frac{2}{35}.$

$$\sigma=\left(\frac{70r^2-8r+\frac{3{,}2}{3}}{11}\right)^{1/2},\ r\geq\frac{2}{35}.$$

7.6. $\sigma=(33r^2-7{,}8r+0{,}49)^{1/2},\ r\geq\frac{13}{110}.$

Указание. Воспользоваться равенством $\mathfrak{M}(\overline{\Theta}_1,\overline{\Theta}_2)=\{(\sigma_{\min}(r),\ r)\}$.

7.7. 1. $\sigma=(11r^2-4{,}2r+0{,}41)^{1/2},\ r\geq\frac{21}{110}.$

Указание. $\overline{\Theta}_{\min}(r)=\frac{1}{20}\cdot(28-80r,\ 10r-1,\ 10r-1,\ 60r-6),\ r\geq\frac{21}{110}.$

2. $$\sigma=\begin{cases}(11r^2-4{,}2r+0{,}41)^{1/2}, & \frac{21}{110}\leq r\leq 0{,}3;\\ (15r^2-6{,}6r+0{,}77)^{1/2}, & r\geq 0{,}3.\end{cases}$$

Указание.

$$\overline{\Theta}_{\min}(r)=\begin{cases}\frac{1}{20}\cdot(28-80r,\ 10r-1,\ 10r-1,\ 60r-6), & \frac{21}{110}\leq r\leq 0{,}3;\\ \frac{1}{20}\cdot(4,\ 17-50r,\ 17-50r,\ 100r-18), & r\geq 0{,}3.\end{cases}$$

2.8. Отыскание эффективной границы множества инвестиционных возможностей при запрещенных коротких продажах ценных бумаг

8.1. *Указание.* Рассмотреть системы соотношений, определяющие портфели с наименьшим риском при заданной ожидаемой доходности.

8.2. а) $\overline{\Theta}_{\min}(r)=\left(2-10r,\ \frac{25}{4}r-\frac{5}{8},\ \frac{15}{4}r-\frac{3}{8}\right),$

$$\sigma=\frac{1}{2}\left(75r^2-23r+\frac{39}{20}\right)^{1/2},\ r\in\left[\frac{23}{150},\ 0{,}2\right];$$

б) $$\overline{\Theta}_{\min}(r)=\begin{cases}\frac{1}{16}(-70r+28,\ 25r-2,\ 45r-10), & r\in\left[\frac{22}{75},\ 0{,}4\right],\\ (0,\ 2{,}5-5r,\ 5r-1{,}5), & r\in[0{,}4,\ 0{,}5].\end{cases}$$

$$\sigma=\begin{cases}\frac{1}{4}(75r^2-44r+7{,}2)^{1/2}, & r\in\left[\frac{22}{75},\ 0{,}4\right],\\ (20r^2-15r+2{,}9)^{1/2}, & r\in[0{,}4,\ 0{,}5].\end{cases}$$

8.3. 1. $\bar{\Theta}_{\min}(r)=\frac{1}{51}(62-210r,\quad 60r+9,\quad 150r-20),\quad r\ge 0{,}19;$

$$\bar{\Theta}^{+}(r)=\begin{cases}\frac{1}{51}(62-210r,\ 60r+9,\ 150r-20), & r\in\left[0{,}19,\ \frac{31}{105}\right],\\ (0,\ 2-5r,\ 5r-1), & r\in\left[\frac{31}{105},\ 0{,}4\right].\end{cases}$$

2. $\sigma=\frac{1}{\sqrt{17}}\left(100r^2-38r+\frac{11}{3}\right)^{1/2},\quad r\ge 0{,}19\quad (\Gamma(\Omega_3));$

$$\sigma=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{17}}\left(100r^2-38r+\frac{11}{3}\right)^{1/2}, & r\in\left[0{,}19,\ \frac{31}{105}\right],\\ (27{,}5r^2-15r+2{,}1)^{1/2}, & r\in\left[\frac{31}{105},\ 0{,}4\right].\end{cases}$$

3. $\bar{\Theta}=(-0{,}5106,\ 0{,}6697,\ 0{,}8409)\in\Gamma(\Omega_3),$

$\bar{\Theta}^{+}=(0,\ 0{,}25,\ 0{,}75)\in\Gamma(\Omega_3^{+}).$

8.4. 1. $\bar{\Theta}_{\min}(r)=\frac{1}{71}(70-250r,\ 95r+16,\ 155r-15);$

$$\bar{\Theta}^{+}_{\min}(r)=\begin{cases}\frac{1}{4}(5-25r,\ 25r-1,\ 0), & r\in\left[\frac{7}{75},\ \frac{3}{31}\right],\\ \frac{1}{71}(70-250r,\ 95r+16,\ 155r-15), & r\in\left[\frac{3}{31},\ \frac{7}{25}\right],\\ (0,\ 2-5r,\ 5r-1), & r\in\left[\frac{7}{25},\ 0{,}4\right].\end{cases}$$

2. $\sigma=\frac{1}{\sqrt{71}}(162{,}5r^2-20r+2{,}8)^{1/2},\quad r\ge\frac{4}{65};$

$$\sigma=\begin{cases}\frac{1}{4}(375r^2-70r+3{,}8)^{1/2}, & r\in\left[\frac{7}{75},\ \frac{3}{31}\right],\\ \frac{1}{\sqrt{71}}(162{,}5r^2-20r+2{,}8)^{1/2}, & r\in\left[\frac{3}{31},\ \frac{7}{25}\right],\\ (37{,}5r^2-20r+2{,}8)^{1/2}, & r\in\left[\frac{7}{25},\ 0{,}4\right].\end{cases}$$

8.5. 1. $\bar{\Theta}_{\min}(r)=\frac{1}{30}(33-90r,\ 5-50r,\ 140r-8),\quad r\ge\frac{17}{110};$

$\bar{\Theta}^{+}_{\min}(r)=\frac{1}{5}(6-20r,\ 0,\ 20r-1),\quad r\in[0{,}15;\ 0{,}3].$

2. $\sigma=\frac{1}{\sqrt{15}}(110r^2-34r+2{,}9)^{1/2},\quad r\ge\frac{17}{110};$

$\sigma=\frac{1}{\sqrt{5}}(40r^2-12r+1)^{1/2},\quad r\in[0{,}15;\ 0{,}3]$

8.6. $$\sigma=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{19}}(210r^2-80r+7{,}8)^{1/2}, & r\in\left[\frac{4}{21},\ \frac{13}{35}\right],\\ (17{,}5r^2-9r+1{,}3)^{1/2}, & r\in\left[\frac{13}{35},\ 0{,}4\right].\end{cases}$$

Указание. Портфели, определяющие эффективную границу $\Gamma(\Omega_4^{+})$, имеют вид

$$\bar{\Theta}^{+}_{\min}(r)=\begin{cases}\frac{1}{19}(26-70r,\ 10r-1,\ 0,\ 60r-6), & r\in\left[\frac{4}{21},\ \frac{13}{35}\right],\\ (0,\ 2-5r,\ 0,\ 5r-1), & r\in\left[\frac{13}{35},\ 0{,}4\right]\end{cases}$$

2.9. Инвестиционные возможности при наличии рискованных ценных бумаг и безрискового актива

9.1. а) $\{(\sigma, r)\}$, где $r = 0{,}2\sigma + 0{,}06$, $\sigma \ge 0$;

б) $\{(\sigma, r)\}$, где $r = \begin{cases} 0{,}2\sigma + 0{,}06, & 0 \le \sigma \le 0{,}2, \\ 0{,}1\sigma + 0{,}08, & 0{,}2 < \sigma < +\infty. \end{cases}$

9.2. а) $\{(\sigma, r)\}$, где $r = 0{,}3593\sigma + 0{,}08$, $\sigma \ge 0$;

б) $\{(\sigma, r)\}$, где $r = \begin{cases} 0{,}3593\sigma + 0{,}08, & 0 \le \sigma \le 0{,}4384, \\ 0{,}3365\sigma + 0{,}09, & 0{,}4384 < \sigma < +\infty. \end{cases}$

Указание. $\bar{r}(\overline{\Theta}) = 0{,}2375$, $\sigma(\overline{\Theta}) = 0{,}4384$.

9.3. а) 50% средств отдать в кредит под ставку 6%;

б) взять ссуду в размере $\frac{2}{9}$ имеющихся средств под ставку 8%.

9.4. 1. $\{(\sigma, r)\}$, где $\sigma = rk + 0{,}05$; $-\frac{\sqrt{5}}{6} < k \le \frac{1}{60}\sqrt{505}$.

Указание. Множество инвестиционных возможностей $\Re(\Omega_2)$ определяется уравнением $\sigma = \frac{2}{5}(45r^2 - 6r + 0{,}4)^{1/2}$. Касательная к линии $\sigma = \frac{2}{5}(45r^2 - 6r + 0{,}4)^{1/2}$, проходящая через точку (0; 0,06), имеет уравнение $r = \frac{1}{60}\sqrt{505}\sigma + 0{,}06$.

2. $\{(\sigma, r)\}$, где $r = k\sigma + 0{,}06$, $0{,}2 \le k \le 0{,}35$.

9.5. $\{(\sigma, r)\}$, где $r = k\sigma + 0{,}08$; $-\frac{\sqrt{14}}{28} < k \le \frac{\sqrt{9{,}1}}{5}$.

Указание. Множество инвестиционных возможностей, определяемых портфелями рискованных ценных бумаг с наименьшей дисперсией доходности при заданной ожидаемой доходности, задается уравнением $\sigma = \frac{1}{\sqrt{5}}(70r^2 - 24r + 2{,}2)^{1/2}$.

2.10. Эффективная граница множества инвестиционных возможностей при наличии безрискового актива

10.1. $r = \frac{7}{40}\sigma + 0{,}08$, $\sigma \ge 0$.

10.2. 1. $\sigma = \frac{1}{3}(2000r^2 - 490r + 30{,}8)^{1/2}$, $r \ge \frac{49}{400}$,

$\overline{\Theta}_{\min}(r) = \frac{1}{3}(8 - 50r,\ 50r - 5)$.

2. $\overline{\Theta}_{f_1} = \left(\frac{13}{25}, \frac{12}{25}\right)$, $\overline{\Theta}_{f_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. $\begin{cases} r = 0{,}2217\sigma + 0{,}06, & 0 \le \sigma \le 0{,}3103, \\ \sigma = \frac{1}{3}(2000r^2 - 490r + 30{,}8)^{1/2}, & 0{,}3103 \le \sigma \le 0{,}3162, \\ r = 0{,}1897\sigma + 0{,}07, & 0{,}3162 \le \sigma < +\infty. \end{cases}$

10.3. а) 40% имеющихся средств отдать в кредит, остальные средства инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_1}$;

б) 50% имеющихся средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_1}$, 50% имеющихся средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_2}$;

в) взять ссуду в размере 20% имеющихся средств и все средства инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_2}$.

Указание. Инвестиционные портфели должны определять инвестиционные возможности, принадлежащие эффективной границе.

10.4. а) $r_f = \frac{13}{72}$; б) $r_f = \frac{3}{13}$.

Указание. Вывести равенство $r_f = -\frac{2C + \tilde{r}B}{2A\tilde{r} + B}$, где $\tilde{r}$ – ожидаемая доходность касательного портфеля.

10.5. $\begin{cases} r = 0{,}8832\sigma + 0{,}12, & \sigma \in [0;\ 0{,}2208], \\ \sigma = \frac{1}{7}(350r^2 - 196r + 29{,}4)^{1/2}, & \sigma \in [0{,}2208;\ 0{,}2739], \\ r = 0{,}5476\sigma + 0{,}2, & \sigma \in [0{,}2739;\ +\infty). \end{cases}$

2.11. Отыскание касательного портфеля при разрешенных коротких продажах рискованных ценных бумаг

11.1. 1. $\overline{\Theta}_f=\left(\frac{7}{55};\ \frac{6}{11};\ \frac{18}{55}\right)$

2. $r_f=\frac{37}{290}$.

Указание. Эффективная граница $\Gamma(\Omega_3)$ определяется уравнением

$$\sigma=\frac{1}{2}\cdot\left(75r^2-23r+\frac{39}{20}\right)^{1/2},\quad r\ge\frac{23}{150}.$$

11.2. $\tilde{r}=1/6$.

Указание. Эффективная граница $\Gamma(\Omega_n)$ определяется уравнением

$$\sigma=(33r^2-7{,}8r+0{,}49)^{1/2},\quad r\ge\frac{13}{110}.$$

11.3. 1. $\begin{cases} r=1{,}166\sigma+0{,}02, & 0\le\sigma\le0{,}5831,\\ \sigma=\frac{1}{3}(7{,}5r^2-1{,}5r+0{,}435)^{1/2}, & 0{,}5831\le\sigma\le0{,}6571,\\ r=1{,}150\sigma+0{,}03, & \sigma\ge0{,}6571.\end{cases}$

2. $r_f=-\frac{43}{50}$.

11.4. 1. $\overline{\Theta}_f=\left(-\frac{7}{17};\ \frac{24}{17}\right)$

2. $r=0{,}1307\sigma+0{,}06,\ \sigma\ge0.$

3. 63,83% средств отдать в кредит, 36,17% инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_f$.

11.5. 1. $\overline{\Theta}_{f_1}=\left(-\frac{1}{9};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{9}\right)$, $\overline{\Theta}_{f_2}=\left(-\frac{3}{7};\ \frac{11}{14};\ \frac{9}{14}\right)$

2. $\begin{cases} r=0{,}7823\sigma+0{,}06, & 0\le\sigma\le0{,}4346,\\ \sigma=\frac{1}{3}(20r^2-6r+0{,}9)^{1/2}, & 0{,}4346\le\sigma\le0{,}5288,\\ r=0{,}7402\sigma+0{,}08, & \sigma\ge0{,}5288.\end{cases}$

3. а) $\frac{7}{17}$ средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_1}$, $\frac{10}{17}$ средств отдать в кредит под безрисковую процентную ставку 6%;

б) 30% средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_1}$, 70% средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_2}$;

в) занять 7,3% средств и инвестировать все средства в портфель $\overline{\Theta}_{f_2}$.

11.6. 1. $\overline{\Theta}_{f_1}=\left(\frac{3}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{7}\right)$ $\overline{\Theta}_{f_2}=\left(-\frac{1}{11};\ -\frac{2}{11};\ \frac{14}{11}\right)$

$\bar{r}(\overline{\Theta}_{f_1})=0{,}2,\quad \sigma(\overline{\Theta}_{f_1})=0{,}4629,\quad \bar{r}(\overline{\Theta}_{f_2})=0{,}4,\quad \sigma(\overline{\Theta}_{f_2})=1{,}1870.$

2. $\begin{cases} r=0{,}3240\sigma+0{,}05, & 0\le\sigma\le0{,}4629,\\ \sigma=\frac{1}{\sqrt{77}}(1200r^2-260r+20{,}5)^{1/2}, & 0{,}4629\le\sigma\le1{,}1870,\\ r=0{,}2612\sigma+0{,}09, & \sigma\ge1{,}1870.\end{cases}$

3. $\frac{2}{3}$ средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_1}$, $\frac{1}{3}$ средств отдать в кредит.

Указание. Парабола $r=k\sigma^2+0{,}1$ должна касаться луча $r=0{,}3240\sigma+0{,}05,\ \sigma\ge0.$

11.7. 1. $\overline{\Theta}_f=\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{4};\ -\frac{3}{4};\ 2\right)$. 2. $\overline{\Theta}_f=\left(-\frac{4}{7};\ \frac{5}{7};\ 0;\ \frac{6}{7}\right)$.

Указание. Показать, что для отыскания касательного портфеля из $\Gamma(V_4)$ достаточно решить систему

$$\begin{cases} 0{,}1z_1+0{,}1z_2+0{,}1z_4=0{,}04,\\ 0{,}2z_2=0{,}2,\\ 0{,}2z_3+0{,}2z_4-\Delta_3=0{,}2,\\ 0{,}1z_1+0{,}2z_3+0{,}4z_4=0{,}4,\\ \Delta_3z_3=0,\quad \Delta_3\ge0,\quad z_3\ge0.\end{cases}$$

2.12. Отыскание касательного портфеля при запрещенных коротких продажах рискованных ценных бумаг

12.1. 1. $\overline{\Theta}_f=\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right),\ \bar{r}(\overline{\Theta}_f)=\frac{13}{75},\quad \sigma(\overline{\Theta}_f)=\frac{\sqrt{2}}{3}.$

2. $r=\frac{\sqrt{2}}{20}\sigma+0{,}14,\quad \sigma\ge 0.$

3. Взять ссуду в размере 20% имеющихся средств и инвестировать все средства в портфель $\overline{\Theta}_f$.

12.2. 1. $\overline{\Theta}_f=\left(\frac{6}{63};\ \frac{26}{63};\ \frac{31}{63}\right),\ \bar{r}(\overline{\Theta}_f)=0{,}2397,\quad \sigma(\overline{\Theta}_f)=0{,}2068.$

2. $r=0{,}8690\sigma+0{,}06,\ \ \sigma\ge 0.$

3. 50,08% средств инвестировать в портфель $(\overline{\Theta}_f)$, 49,92% средств отдать в кредит.

12.3. 1. $\overline{\Theta}_{f_1}=\left(0;\ \frac{21}{43};\ \frac{22}{43}\right),\quad \overline{\Theta}_{f_2}=\left(0;\ \frac{6}{13};\ \frac{7}{13}\right),$

$\bar{r}(\overline{\Theta}_{f_1})=0{,}3023,\ \sigma(\overline{\Theta}_{f_1})=0{,}2761,\ \bar{r}(\overline{\Theta}_{f_2})=0{,}3077,$
$\sigma(\overline{\Theta}_{f_2})=0{,}2826.$

2. $\begin{cases} r=0{,}95\sigma+0{,}04, & 0\le\sigma\le 0{,}2761,\\ \sigma=(17{,}5r^2-10r+1{,}5)^{1/2}, & 0{,}2761\le\sigma\le 0{,}2826,\\ r=0{,}7345\sigma+0{,}1, & \sigma\ge 0{,}2826.\end{cases}$

3. а) 41,94% имеющихся средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_1}$, 58,06% средств отдать в кредит под ставку 4%;

б) 50% имеющихся средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_1}$, 50% средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_2}$;

в) взять ссуду в размере 92,59% имеющихся средств и все средства инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_{f_2}$.

12.4. $\begin{cases} r=0{,}4433\sigma+0{,}03, & 0\le\sigma\le 0{,}4263,\\ \sigma=\frac{1}{7}(3000r^2-1220r+132{,}2)^{1/2}, & 0{,}4263\le\sigma\le 0{,}4279,\\ \sigma=\frac{1}{\sqrt{349}}(3000r^2-620r+55{,}3)^{1/2}, & 0{,}4279\le\sigma\le 0{,}4984,\\ r=0{,}3988\sigma+0{,}05, & \sigma\ge 0{,}4984.\end{cases}$

Указание. $\overline{\Theta}_{f_1}=\left(\frac{23}{52};\ \frac{29}{52};\ 0\right),\ \bar{r}(\overline{\Theta}_{f_1})=0{,}2190,\quad \sigma(\overline{\Theta}_{f_1})=0{,}4263;$

$\overline{\Theta}_{f_2}=\left(\frac{1}{8};\ \frac{5}{8};\ \frac{1}{4}\right),\ \bar{r}(\overline{\Theta}_{f_2})=0{,}2488,\quad \sigma(\overline{\Theta}_{f_2})=0{,}4984.$

12.5. 1. $r=\frac{\sqrt{15}}{5}\sigma+0{,}08,\quad \sigma\ge 0.$

Указание. $\overline{\Theta}_f=(0;\ 0{,}5;\ 0;\ 0{,}5),\ \bar{r}(\overline{\Theta}_f)=0{,}38,\quad \sigma(\overline{\Theta}_f)=\frac{\sqrt{15}}{10}.$

2. Взять ссуду в размере 61,69% имеющихся средств и инвестировать все средства в портфель $\overline{\Theta}_f=(0;\ 0{,}5;\ 0;\ 0{,}5)$.

2.13. k-факторная модель рынка рискованных активов

13.1. $\beta_1=0{,}6;\ \beta_2=0{,}5.$

13.2. $\beta_{11}=1{,}2;\ \beta_{21}=0{,}8;\ \beta_{31}=0{,}6;\ \beta_{12}=0{,}6;\ \beta_{22}=-0{,}2;\ \beta_{32}=1{,}2.$

13.3. $\sigma_1=35{,}68\%;\ \sigma_2=40{,}80\%;\ \sigma_{12}=0{,}1002.$

13.4. $\beta_{1,P}=-0{,}38;\ \ \beta_{2,P}=1{,}28;\ \ \beta_{3,P}=0{,}76.$
Факторный риск портфеля – 33,18%. Особый риск портфеля – 18,33%.

13.5. $\bar{r}_P=27{,}10\%$. Особый риск портфеля – 61,97%, факторный риск – 80,78%.

13.6. $\sigma_{\varepsilon_{P_2}}=15{,}81\%;\ \sigma_{\varepsilon_{P_3}}=10{,}54\%;\ \sigma_{\varepsilon_{P_4}}=17{,}68\%;\ \sigma_{\varepsilon_{P_5}}=16{,}73\%.$

13.7. $\sigma_{\varepsilon_{P_n}}=\frac{1}{n}(0{,}4n-0{,}3)^{1/2}.$

13.8. $\sigma = (13{,}1r^2 - 0{,}216r + 0{,}12444)^{1/2}$, $r \geq 0{,}0089$.

Указание. $\bar{r}_1 = 0{,}18$, $\bar{r}_2 = 0{,}08$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}51 & 0{,}285 \\ 0{,}285 & 0{,}191 \end{pmatrix}$

2.14. Построение k-факторной модели рынка рискованных активов

14.1. 1. $\hat{\alpha}_1 = 0{,}002145$; $\hat{\beta}_1 = 0{,}894901$; $\hat{\alpha}_2 = -0{,}002541$; $\hat{\beta}_2 = 1{,}254391$.
Проверить!

Номер актива (j)	$(TSS)_j$	$(RSS)_j$	$(ESS)_j$	R_j^2	Φ_j	d_j	S_j
1	0,0047175	0,0000058	0,0047117	0,9988	3249,44	3,39	0,001209
2	0,0092780	0,0000206	0,0092574	0,9978	1797,55	1,721	0,002269

2.

Номер актива (j)	Доверительный интервал	
	α_j	β_j
1	(–0,001186, 0,005477)	(0,851145, 0,938657)
2	(–0,00879, 0,003712)	(1,172270, 1,336512)

Указание. $t_{0{,}025}(4) = 2{,}776$, $\sqrt{a_{11}} = 0{,}99266$, $\sqrt{a_{22}} = 13{,}03735$.

14.2. $\tilde{r}_1 = 4{,}69\%$; $\tilde{r}_2 = 6{,}02\%$.
$r_1 \in (4{,}40\%;\ 4{,}98\%)$; $r_2 \in (5{,}48\%;\ 6{,}56\%)$.

Указание. $r_j \in \left(\tilde{r}_j - t_{\frac{1-\gamma}{2}}(T-k-1)S_j b,\quad \tilde{r}_j + t_{\frac{1-\gamma}{2}}(T-k-1)S_j b\right)$,

где $b = \sqrt{1 + \bar{\lambda}(X^T X)^{-1} \cdot \bar{\lambda}}$, $\bar{\lambda} = (1;\ \tilde{F})$.

14.3. $\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}0172 & 0{,}0224 \\ 0{,}0224 & 0{,}0337 \end{pmatrix}$.

14.4. 1. $\hat{\alpha}_1 = 0{,}037344$, $\hat{\beta}_{11} = 1{,}24426$, $\hat{\beta}_{21} = -0{,}118588$;

$\hat{\alpha}_2 = -0{,}002405$, $\hat{\beta}_{12} = 1{,}54943$, $\hat{\beta}_{22} = 0{,}035942$.

Номер актива (j)	$(TSS)_j$	$(RSS)_j$	$(ESS)_j$	R_j^2	Φ_j	d_j	S_j
1	0,0383607	0,0012781	0,0370826	0,9667	130,56	1,87	0,011917
2	0,0572027	0,0041738	0,0530289	0,9270	57,17	2,86	0,021535

2.

Номер актива (j)	Доверительный интервал		
	α_j	β_{1j}	β_{2j}
1	(–0,00910, 0,08379)	(1,04390, 1,44462)	(–0,38517, 0,14800)
2	(–0,10798, 0,08153)	(1,18737, 1,91149)	(–0,44580, 0,51768)

Указание.

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}96881 & -8{,}35477 & -16{,}19673 \\ -8{,}35477 & 55{,}24299 & 32{,}27353 \\ -16{,}19673 & 32{,}27353 & 97{,}80187 \end{pmatrix}.$$

14.5. $\tilde{r}_1 = 13{,}15\%$; $\tilde{r}_2 = 14{,}24\%$.
$r_1 \in (10{,}29\%;\ 16{,}01\%)$; $r_2 \in (9{,}07\%;\ 19{,}41\%)$.

Указание. $\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}02195 & 0{,}02193 \\ 0{,}02193 & 0{,}02228 \end{pmatrix}$.

2.15. Отыскание касательного портфеля в условиях однофакторной модели рынка

15.1. $\bar{\Theta}_f = (4{,}3089;\ 3{,}7216;\ 3{,}5202;\ -6{,}4992;\ -4{,}0515)$,
$\bar{r}(\Theta_f) = 83{,}37\%$, $\sigma^2(\bar{\Theta}_f) = 0{,}5946$.

15.2. а) $\bar{\Theta}_f = (0{,}7892;\ -0{,}1589;\ 0{,}1043;\ 0{,}3202;\ -0{,}1886;\ 0{,}1338)$,

$\bar{r}(\Theta_f) = 24{,}79\%$, $\sigma(\bar{\Theta}_f) = 56{,}22\%$;

б) $\bar{\Theta}_f^{+} = (0{,}5664;\ 0;\ 0{,}0737;\ 0{,}2611;\ 0;\ 0{,}0988)$.

$\bar{r}(\Theta_f^+) = 20{,}74\%$, $\sigma(\overline{\Theta}_f^+) = 47{,}23\%$.

15.3. $\overline{\Theta}_f^+ = (0{,}2265;\ 0{,}2199;\ 0{,}2590;\ 0{,}2163;\ 0{,}0783;\ 0;\ 0;\ 0)$,

$\bar{r}(\Theta_f^+) = 14{,}78\%$, $\sigma(\overline{\Theta}_f^+) = 2{,}56\%$.

Инвестиционный портфель: 76,40% имеющихся средств инвестировать в портфель $\overline{\Theta}_f$, 23,60% средств отдать в кредит под ставку 3%.

15.4. $\overline{\Theta}_f^+ = (0{,}2302;\ 0{,}2317;\ 0{,}2328;\ 0{,}2460;\ 0{,}0593;\ 0;\ 0;\ 0)$,

$\bar{r}(\Theta_f^+) = 15{,}02\%$, $\sigma(\overline{\Theta}_f^+) = 5{,}00\%$.

15.5. а) $\overline{\Theta}_f^+ = (-0{,}5849;\ 0{,}4578;\ -0{,}3006;\ 0{,}0949;\ 1{,}3328)$,

$\bar{r}(\Theta_f^+) = 32{,}19\%$, $\sigma(\overline{\Theta}_f^+) = 52{,}77\%$;

б) $\overline{\Theta}_f^+ = (0;\ 0{,}2170;\ 0;\ 0;\ 0{,}7830)$, $\bar{r}(\overline{\Theta}_f^+) = 20{,}48\%$, $\sigma(\overline{\Theta}_f^+) = 33{,}69\%$.

2.16. Равновесие на финансовом рынке

16.1. 94,54% имеющихся средств инвестировать в портфель $P = \left(\frac{8}{17}, \frac{6}{17}, \frac{3}{17}\right)$, 5,46% средств отдать в кредит под ставку 5%.

Указание. Для отыскания портфеля $P = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{r}_i - r_f}{\sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\Theta_i} = \lambda, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \Theta_i = 1. \end{cases}$$

16.2. 98,08% имеющихся средств инвестировать в портфель $P = \left(\frac{13}{23}, \frac{13}{23}, \frac{-3}{23}\right)$, 1,92% средств отдать в кредит под ставку 6%.

16.3. $r = 0{,}16\sigma + r_f$, $\sigma \geq 0$. Рыночная цена риска – 0,16.

16.4. $r = \frac{2}{15}\sigma + 0{,}06$, $\sigma \geq 0$. Рыночная цена риска – $\frac{2}{15}$.

16.5. $r = 0{,}081\sigma + 0{,}06$, $\sigma \geq 0$.

Указание. $M = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\bar{r}(M) = 0{,}092$, $\sigma(M) = 0{,}395$.

16.6. $M = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $M \notin \Gamma(\Omega_3)$.

16.7. $M = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{3}{40}\right)$, портфель M не является касательным.

2.17. Модель оценки финансовых активов (CAPM)

17.1. а) $\beta = \frac{15}{16}$; $r = 13{,}56\%$; б) $\beta = \frac{5}{4}$; $r = 15{,}75\%$; в) $\beta = -\frac{5}{8}$; $r = 2{,}63\%$.

17.2. а) $\text{cov}(r_M, r) = \frac{1}{6}$; б) $\text{cov}(r_M, r) = \frac{7}{12}$; в) $\text{cov}(r_M, r) = -\frac{1}{24}$.

17.3. $r = 0{,}08 + 0{,}04\beta$; а) $\bar{r} = 14\%$; б) $\bar{r} = 11{,}2\%$; в) $\bar{r} = 3{,}20\%$.

17.4. а) $\beta = \frac{13}{9}$; б) $\beta = \frac{1}{3}$; в) $\beta = -\frac{2}{9}$.

17.5. $\bar{r}_1 = 6{,}38\%$, $\bar{r}_2 = 12{,}95\%$, $\bar{r}_3 = 12{,}54\%$.

2.18. Основные свойства модели оценки финансовых активов

18.1. а) $\bar{r} = 20{,}60\%$; систематический риск –72%, общий риск – 74,73%;
б) $\bar{r} = 14{,}30\%$; систематический риск – 36%; общий риск – 53,81%.

18.2. $\bar{r}_P = 17{,}03\%$; систематический риск – 36,50%; особый риск – 15,78%, общий риск – 39,76%.

18.3. $\bar{r}_P = 18{,}45\%$; систематический риск – 50,70%; особый риск – 23,03%, общий риск – 55,28%.

18.4. β = 1,5586; систематический риск– 4,93%; особый риск – 1,07%, рыночная цена риска – 0,427.

18.5. β = 1,012; систематический риск – 8,03%; особый риск – 6,35%.

18.6. S_0 = 84,60 долл.

18.7. S_0 = 188,14 долл.

2.19. Модель оценки финансовых активов при отсутствии безрискового актива

19.1. $\bar{r}_Q = -0{,}19$.

19.2. $\bar{r}_Q = -0{,}27$.

19.3. $Q^* = \left(\frac{46}{35}, \frac{6}{35}, -\frac{17}{35}\right)$ $\beta_{1,P} = \frac{16}{39}$, $\beta_{2,P} = \frac{12}{13}$, $\beta_{3,P} = \frac{56}{39}$.

19.4. $Q^* = \left(\frac{19}{10}, \frac{3}{10}, -\frac{6}{5}\right)$ $\beta_{1,P} = \frac{9}{19}$; $\beta_{2,P} = 1{,}0$; $\beta_{3,P} = 1{,}0$.

19.5. $\bar{r}_1 = 10{,}50\%$; $\bar{r}_2 = 13{,}20\%$; $\bar{r}_3 = 16{,}80\%$.

$\frac{2}{3}$ средств инвестировать в рыночный портфель, $\frac{1}{3}$ средств инвестировать в портфель Q^*.

19.6. $\bar{r}_1 = 12{,}75\%$; $\bar{r}_2 = 17{,}25\%$; $\bar{r}_3 = 11{,}40\%$.

2.20. Рыночные индексы. Оценка бета-коэффициентов рискованных активов

20.1. $q = 8{,}37\%$, $\tilde{q} = 5{,}36\%$.

20.2. 7,76%.

20.3. 9,44%.

20.4. $q = 2{,}17\%$, $\tilde{q} = 1{,}07\%$.

20.5. 1. $\hat{\alpha}_1 = -0{,}00602$, $\hat{\beta}_1 = 1{,}17748$,
$\hat{\alpha}_2 = 0{,}02972$, $\hat{\beta}_2 = 1{,}01751$,
$\hat{\alpha}_3 = -0{,}00165$, $\hat{\beta}_3 = 1{,}81266$.

Номер актива (j)	$(TSS)_j$	$(RSS)_j$	$(ESS)_j$	R_j^2	Φ_j	d_j	S_j
1	0,061311	0,026271	0,035040	0,6296	14,69	2,12	0,051255
2	0,056035	0,029868	0,026167	0,4670	8,76	2,03	0,054652
3	0,284906	0,201839	0,083067	0,2916	4,13	1,70	0,142070

2.

Номер актива (j)	Доверительный интервал	
	α_j	β_j
1	(–0,04547, 0,03343)	(0,45916, 1,89580)
2	(–0,01235, 0,07179)	(0,25158, 1,78343)
3	(–0,10771, 0,11101)	(–0,17839, 3,80371)

3. $\beta_1 = 1{,}0849$, $\beta_2 = 1{,}4250$, $\beta_3 = 2{,}0286$.

20.6. 1. $\hat{\alpha}_1 = 0{,}05057$, $\hat{\beta}_1 = 0{,}69182$,
$\hat{\alpha}_2 = 0{,}02919$, $\hat{\beta}_2 = 0{,}68670$,
$\hat{\alpha}_3 = 0{,}06873$, $\hat{\beta}_3 = 0{,}64351$.

Номер актива (j)	$(TSS)_j$	$(RSS)_j$	$(ESS)_j$	R_j^2	Φ_j	d_j	S_j
1	0,052608	0,031664	0,020944	0,3981	5,29	1,71	0,062913
2	0,073495	0,042289	0,031206	0,4246	5,88	12,41	0,072706
3	0,054983	0,036861	0,018122	0,3296	3,93	7,57	0,067880

2.

Номер актива (j)	Доверительный интервал	
	α_j	β_j
1	(–0,02249, 0,12363)	(–0,00170, 1,38535)
2	(–0,05524, 0,11362)	(–0,11478, 1,48818)
3	(–0,01010, 0,14756)	(–0,10477, 1,39179)

3. $\beta_1 = 0{,}893$, $\beta_2 = 0{,}918$, $\beta_3 = 1{,}077$.

2.21. Арбитражная модель оценки финансовых активов

21.1. $\Delta\overline{\Theta}=(\Delta\Theta_1,\ 0,\ \Delta\Theta_1,\ -2\Delta\Theta_1)$, $\Delta\Theta_1<0$;
$\bar r(\overline{\Theta}+\Delta\overline{\Theta})=0{,}137-0{,}01\Delta\Theta_1$.

21.2. $\Delta\overline{\Theta}=(-2\Delta\Theta_5,\ -1{,}4\Delta\Theta_5,\ 0{,}8\Delta\Theta_5,\ 1{,}6\Delta\Theta_5,\ \Delta\Theta_5)$, $\Delta\Theta_5>0$,
$\bar r(\overline{\Theta}+\Delta\overline{\Theta})=0{,}182+0{,}056\Delta\Theta_5$.

21.3. $\bar r_1=20{,}50\%$; $\bar r_2=22{,}20\%$.

21.4. 1. $P_1=\left(\Theta_1,\ \frac{23}{7}-2\Theta_1,\ -\frac{8}{7}+\Theta_1,\ -\frac{8}{7}\right)$,

$P_2=\left(\Theta_1,\ -\frac{12}{7}-2\Theta_1,\ \frac{27}{7}+\Theta_1,\ -\frac{8}{7}\right)$.

2. $\bar r(P_1)=\frac{37}{140}-\frac{3}{25}\Theta_1$, $\bar r(P_2)=-\frac{3}{35}-\frac{3}{25}\Theta_1$.

21.5. $\bar r_p=22{,}63\%$.

21.6. $\bar r_p=18{,}67\%$.

Указание. Предварительно найти бета-коэффициенты рискованных активов с помощью приближенного равенства

$$\beta_j\approx\sum_{i=1}^{k}\beta_{ij}\frac{\operatorname{cov}(F_i,r_M)}{\sigma_M^2}.$$

$\beta_1=1{,}32$, $\beta_2=1{,}64$, $\beta_3=1{,}22$.

21.7. $\bar r_3=9{,}00\%$.

Указание. Найти факторные портфели рискованных активов и воспользоваться арбитражной моделью оценки рискованных активов.

2.22. Эффективность управления портфелем активов (инвестиционным фондом)

22.1. а) $R=28{,}03\%$; б) $R_{эф}=17{,}91\%$; в) $y=18{,}80\%$.

22.2. а) $R=13{,}44\%$; б) $R_{эф}=6{,}51\%$; в) $y=6{,}20\%$.

22.3. а) $k_S^{(1)}=0{,}2556$, $k_S^{(2)}=0{,}1956$.

Указание. $\bar d^{(1)}=0{,}0407$, $\sigma_d^{(1)}=0{,}1592$, $\bar d^{(2)}=0{,}042$, $\sigma_d^{(2)}=0{,}2147$.

б) $k_{T_r}^{(1)}=0{,}4715$; $k_{T_r}^{(2)}=0{,}4244$.

Указание. $\overline{R}_1=6{,}39\%$, $\hat\beta_1=0{,}8271$, $\overline{R}_2=6{,}52\%$, $\hat\beta_2=1{,}2252$.

22.4. а) $k_S^{(1)}=0{,}4543$, $k_S^{(2)}=0{,}2025$; б) $k_{T_r}^{(1)}=0{,}4104$, $k_{T_r}^{(2)}=1{,}5052$.

22.5. а) $k_S^{(1)}=0{,}0173$; б) $k_S^{(2)}=0{,}0128$.

Указание. $\bar d'=0{,}00435$, $\sigma_{d'}=0{,}3386$.

22.6. Цена актива не может превышать $\frac{2}{7}$ стоимости исходного портфеля.

Указание. Решить неравенство

$$\frac{0{,}06}{\sigma_P}<\frac{0{,}06-0{,}06a}{\sigma_P\sqrt{2{,}4a^2-2{,}4a+1}}.$$

ГЛАВА 3

3.1. Предполагаемые форвардные процентные ставки

1.1. Предполагаемые форвардные процентные ставки $\tilde f_t(s,\Theta)$ приведены в таблице.

s	Θ, %				
	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
$t+2$	–	8,265	6,242	–	5,847
$t+3$	2,197	–	–	4,638	–
$t+3{,}5$	–	–	5,452	–	–

Указание. Предварительно определить рыночные цены облигаций при номинальной стоимости 100 долл.

1.2. Предполагаемые форвардные процентные ставки $f_t\{2, s, \Theta\}$ приведены в таблице.

s	Θ, %	
	2,0	4,0
$t+2$	6,071	3,945
$t+4$	1,841	–

Указание. Воспользоваться равенством

$$\left(1+\frac{f_t\{2,s,\Theta\}}{2}\right)^2=\frac{B_t(\Theta)}{B_t(s+\Theta)}.$$

1.3. $\tilde{r}_t(0{,}5)=6{,}009\%$, $\tilde{r}_t(1{,}0)=6{,}998\%$, $\tilde{r}_t(1{,}5)=7{,}753\%$, $\tilde{r}_t(2{,}0)=8{,}507\%$.

Предполагаемые форвардные процентные ставки $\tilde{f}_t(s,\Theta)$ приведены в таблице.

s	Θ, %		
	0,5	1,0	1,5
$t+0{,}5$	7,987	8,625	9,340
$t+1{,}0$	9,263	10,016	–
$t+1{,}5$	10,769	–	–

1.4.

Срок, годы	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
Предполагаемая форвардная процентная ставка $\tilde{f}_t(t+0{,}25;\Theta)$, %	5,4	6,5	6,067	6,125	6,44	6,517	6,6	6,575

Срок, годы	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75
Предполагаемая форвардная процентная ставка $\tilde{f}_t(t+0{,}5;\Theta)$, %	7,6	6,4	6,367	6,7	6,74	6,8	6,743

1.5. Процентные ставки $\tilde{r}_t(\Theta)$ приведены ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Процентная ставка $\tilde{r}_t(\Theta)$, %	6,0	6,25	6,533	6,675	6,8	7,083

1.6. Предполагаемые форвардные процентные ставки $f_t\{2; t+0{,}5; \Theta\}$ приведены ниже.

Срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Предполагаемая форвардная процентная ставка $\tilde{f}_t(2; t+0{,}5;\Theta)$, %	9,001	8,300	7,733	7,375	8,000

1.7 $f_t\{4;\ t+2{,}1\}=5{,}333\%$.

Указание. Воспользоваться равенством

$$\left(1+\frac{r_t\{4,2\}}{2}\right)^8\left(1+\frac{f_t\{4,t+2,1\}}{2}\right)^4=\left(1+\frac{r_t\{4,3\}}{4}\right)^{12}.$$

1.8. Воспользоваться основным свойством предполагаемых форвардных процентных ставок.

3.2. Форвардные контракты и их основные характеристики

2.1. Доход инвестора – 6 долл.

2.2. Доход инвестора – 110 долл.

2.3. Доход (выигрыш) инвестора $(980-1000)-2\cdot 980\cdot 1{,}04=$ $=-2018{,}40$ руб.

2.4. $f_{\text{дп}}=-355952{,}71$ руб.

2.5. $f_{\text{кор}}=-19{,}22$ долл.

2.6. Стоимость позиции равна 0 руб.

2.7. Занять короткую позицию с ценой поставки 105 долл.

2.8. $f=33{,}50$ долл.

3.3. Форвардные цены финансовых активов с известными доходами

3.1. $F_t(T)=1911{,}99$ руб.

Указание. $\tilde{f}_t(T,T^*-T)=0{,}18$.

Арбитражная стратегия: длиная позиция в форвардном контракте иа облигацию, короткая продажа облигации, инвестиция – 1773,84 руб. иа 6 мес. под безрисковую процентную ставку 15%.

3.2. ***Указание.*** $f_{\text{дл}} = (F_t(T) - K)e^{-\tilde{r}_t(T-t)\cdot(T-t)}$,

$$F_t(T) = Ae^{-\tilde{f}_t(T,T^*-T)\cdot(T^*-T)},$$

$$\tilde{f}_t(T,T^*-T) = \frac{\tilde{r}_t(T^*-t)(T^*-t) - \tilde{r}_t(T-t)(T-t)}{T^*-t}.$$

3.3. $F_t(t + 0{,}5) = 12{,}02\%$.

3.4. $f_{\text{кор}} = -736{,}10$ руб.

Указание.

$$f_{\text{кор}} = Q\left[\frac{K - F_t(T)}{m}\right]\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{r_t(m,T-t)}{m}\right)^{(T-t)m}}.$$

3.5. Арбитражная стратегия: короткая позиция в форвардном контракте на рыночную процентную ставку при уровне исполнения 9%, ссуда в размере $\dfrac{Q}{\left(1+\dfrac{0{,}06}{2}\right)^{\frac{8}{12}\cdot 2}}$ на 8 мес. под процентиую ставку 6%, инвестиция денежной суммы $\dfrac{Q}{\left(1+\dfrac{0{,}06}{2}\right)^{\frac{8}{12}\cdot 2}}$ на 14 мес. под процентиую ставку 7,5%.

Указание. При отсутствии арбитражных возможностей форвардная процентная ставка $F_t(T) = 9{,}517\% > F_t^{\text{рын}}(T) = 9\%$.

3.6. $F_t(T) = 81{,}62$ долл. $> F_t^{\text{рын}}(T) = 79$ долл.
Арбитражная стратегия: длиная позиция в форвардном контракте на акцию при цене поставки 79 долл., короткая продажа акции, инвестиция – 80 долл. на 3 мес. под процентную ставку 8%.

3.7. $F_t(T) = 118{,}34$ долл., $F_{t+\frac{1}{6}}(T) = 106{,}25$ долл.,

$$f_{\text{дл}} = 100\cdot(106{,}25 - 118{,}34)e^{-0{,}07\cdot\frac{10}{12}} = -1140{,}49 \text{ долл.}$$

3.8. $F_t(T) = 185{,}72$ долл.

1. Арбитражная стратегия: длиная позиция в форвардном контракте на акцию с ценой поставки 180 долл., короткая продажа акции, инвестиция – 180 долл. на 8 мес. под процентную ставку 8%.

Прибыль $180e^{0{,}08\cdot\frac{8}{12}} - 180 - 3{,}93e^{0{,}08\cdot\frac{8}{12}} \approx 5{,}72$ долл.

2. Арбитражная стратегия: короткая позиция в форвардном контракте на акцию с ценой поставки 188 долл., покупка акцни, ссуда в размере 180 долл. на 8 мес. под процентную ставку 8%.

Прибыль $188 + 3{,}93e^{0{,}08\cdot\frac{8}{12}} - 180e^{0{,}08\cdot\frac{8}{12}} \approx 2{,}28$ долл.

3.9. $F_t(T) = 31{,}49$ руб.

1. Арбитражная стратегия: длиная позиция в форвардном контракте иа 1 долл. с ценой поставки 31 руб., короткая продажа $e^{-0{,}06\cdot\frac{6}{12}}$ долл., инвестиция – $30{,}1e^{-0{,}06\cdot\frac{6}{12}}$ руб. на 6 мес. под процентиую ставку 15%.

2. Арбитражная стратегия: короткая позиция в форвардиом контракте на 1 долл. с ценой поставки 32 руб., покупка $e^{-0{,}06\cdot\frac{6}{12}}$ долл. н ссуда в размере $30{,}1e^{-0{,}06\cdot\frac{6}{12}}$ руб. на 6 мес. под процентную ставку 15%.

3.4. Форвардные цены товаров

4.1. $F_t(T) = 11{,}204$ долл.

Указание. $U_t = 0{,}08 + 0{,}08e^{-0{,}1\cdot\frac{3}{12}} + 0{,}08e^{-0{,}1\cdot\frac{6}{12}} + 0{,}08e^{-0{,}1\cdot\frac{9}{12}} =$
$= 0{,}308$ долл.

1. Арбитражная стратегия: длинная позиция в форвардном контракте на унцию серебра при цене поставки 11 долл., короткая продажа унции серебра, инвестиция – 10 + 0,308 долл. (0,308 – сэкономленные издержки на хранение) на 10 мес. под процентную ставку 10%.

2. Арбитражная стратегия: короткая позиция в форвардном контракте на унцию серебра при цене поставки 12 долл., покупка

унции серебра и оплата хранения, ссуда в размере 10+0,308 долл. на 10 мес. под процентную ставку 10%.

4.2. $F_t(T) = 436{,}90$ долл.

Указание. $U_t = 2{,}5 + 2{,}5e^{-0{,}07\cdot\frac{3}{12}} + 2{,}5e^{-0{,}07\cdot\frac{6}{12}} + 2{,}5e^{-0{,}07\cdot\frac{9}{12}} = 9{,}743$ долл.

4.3. $\tilde{\alpha} = 2{,}30\%$.

Указание. $20{,}5e^{\tilde{\alpha}\cdot\frac{10}{12}} = (18 + 0{,}441)e^{0{,}15\cdot\frac{10}{12}}$.

4.4. $F_t(T) = 22{,}32$ руб.

4.5. ***Указание.*** Рассмотреть следующую стратегию: длинная позиция в форвардном контракте с датой поставки T_1, ссуда в размере $(F_t(T_1) + u(T_2 - T_1))e^{-\tilde{r}\cdot(T_1 - t)}$ на $T_2 - T_1$ лет, инвестиция этой суммы на $T_1 - t$ лет, короткая позиция в форвардном контракте с датой поставки T_2.

3.5. Стохастический дисконтирующий множитель и форвардные цены активов

5.1. $D_t^{t+0,5} = 15\xi_1 + 25\xi_2 + 15\xi_3$.

Указание. Если $D_t^{t+0,5} = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, то

$$\begin{cases} p_t^{t+0,5}(\xi_1) = x_1 M\xi_1^2 + x_2 M(\xi_1\xi_2) + x_3 M(\xi_1\xi_3), \\ p_t^{t+0,5}(\xi_2) = x_1 M(\xi_1\xi_2) + x_2 M\xi_2^2 + x_3 M(\xi_2\xi_3), \\ p_t^{t+0,5}(\xi_3) = x_1 M(\xi_1\xi_3) + x_2 M(\xi_2\xi_3) + x_3 M\xi_3^2. \end{cases}$$

5.2. $p_t^{t+0,25}(\xi_1) = 1{,}6, \quad p_t^{t+0,25}(\xi_2) = 0{,}7, \quad p_t^{t+0,25}(\xi_3) = 0{,}1.$

5.3. а) $p_t^{t+\frac{8}{12}}(\xi) = 19{,}72$ руб.; б) $p_t^{t+\frac{8}{12}}(\xi) = 18{,}72$ руб.

5.4. $F_t\left(t + \dfrac{6}{12}\right) = 106{,}18.$

5.5. $F_t\left(t + \dfrac{9}{12}\right) = 54{,}52.$

5.6. ***Указание.*** Рассмотреть стратегию: короткая позиция в форвардном контракте на облигацию и покупка облигации. Тогда

$$Ae^{-\tilde{r}_t(T^*-t)\cdot(T^*-t)} = M(F_t(T)D_t^T) = F_t(T)\,MD_t^T = F_t(T)e^{-\tilde{r}_t(T-t)\cdot(T-t)}.$$

3.6. Фьючерсные контракты

6.1. Доход 2400 руб.

6.2.

Дата торгов	Фьючерсная цена закрытия, руб.	Переоценка по рыночной стоимости	Прочие поступления	Сальдо счета маржи
03.09	50,20	–2000	10 000	8000
04.09	50,40	–2000	4000	10 000
05.09	49,90	5000		15 000
06.09	49,79	1100		16 100
07.09	50,20	–4100		12 000
10.09	50,50	–3000		9000
11.09	49,70	8000		17 000
12.09	49,76	–600	–16 400	16 400
			–2400	

6.3. Число дней в году принято 360.

Дата торгов	Фьючерсная цена закрытия, руб.	Переоценка по рыночной стоимости	Прочие поступления	Сальдо счета маржи
03.09	50,20	–2000	10 000	8000
04.09	50,40	–2000	3998,22	10 000
05.09	49,90	5000		15002,22
06.09	49,79	1100		16105,56
07.09	50,20	–4100		12009,14
10.09	50,50	–3000		9017,15
11.09	49,70	8000		17019,15
12.09	49,76	–600	–16419,15	16419,15
			–2420,93	

6.4.

Дата торгов	Фьючерсная цена закрытия, руб.	Переоценка по рыночной стоимости	Прочие поступления	Сальдо счета маржи
02.07	397,00	–300	2000	1700
03.07	396,10	–90		1610
04.07	398,20	210		1820
05.07	392,40	–580	760	2000
06.07	397,80	540		2540
09.07	398,40	60		2600
10.07	399,25	85		2685
11.07	398,60	–65		2620
12.07	397,45	–115	–2505	2505
			255	

3.7. Фьючерсные и форвардные цены товаров

7.1. $\Phi_t(T) = 1023{,}29$ руб.

Указание. $\Phi_t(T) = F_t(T) = (S_t - I_t)e^{\bar{r}(T-t)}$;

$$S_t = 40e^{-0{,}07\cdot\frac{3}{12}} + 40e^{-0{,}07\cdot\frac{9}{12}} + \dots + 40e^{-0{,}07\cdot\frac{51}{12}} + 1000e^{-0{,}07\cdot\frac{51}{12}} =$$

$$= 40e^{-0{,}07\cdot\frac{3}{12}}\left(\frac{1-e^{-0{,}07\cdot4{,}5}}{1-e^{-0{,}07\cdot0{,}5}}\right) + 1000e^{-0{,}07\cdot\frac{51}{12}} = 1051{,}47 \text{ руб.}$$

$$I_t = 40e^{-0{,}07\cdot\frac{3}{12}} + 40e^{-0{,}07\cdot\frac{9}{12}} + 40e^{-0{,}07\cdot\frac{15}{12}} = 113{,}91 \text{ руб.}$$

7.2. $\Phi_t(T) = 952{,}54$ руб.

7.3. а) $\Phi_t(t + 10) = 101{,}84$; б) $\Phi_t(t + 10) = 97{,}84$.
Указание. Воспользоваться равенством

$$\Phi_t(t+10) = \mathrm{cov}(S_{t+10}R_t,\ D_t^{t+10}) + M(S_{t+10}R_t)\cdot M(D_t^{t+10}).$$

7.4. $F_t(t + 10) = 100{,}16$; $\Phi_t(t + 10) = 98{,}2$.

3.8. Спекулятивные стратегии на фьючерсных рынках

8.1. Стратегия: занять короткую позицию в 10 фьючерсных контрактах на акции.
Прибыль: а) –50 000 руб.; б) 40 000 руб.

8.2. 185 руб.

8.3. 6000 руб.

8.4. Стратегия: длинная позиция в двух контрактах на активы первого вида и короткая позиция в 15 контрактах на активы второго вида.
Прибыль: а) 2200 руб.; б) –1100 руб.

8.5. Стратегия: короткая позиция в пяти контрактах на активы первого вида и длинная позиция в 36 контрактах на активы второго вида.
Прибыль: а) –5200 руб.; б) 13 400 руб.

3.9. Хеджирование позиций по исходным активам с помощью фьючерсных контрактов

9.1. $k^* = 27{,}78\%$.

9.2. $k^* = 64\%$, $N = 16$ контрактов.

Указание. Воспользоваться равенством $k^* = \dfrac{\sigma(\Delta S)}{\sigma(\Delta F)}\rho(\Delta S, \Delta F)$.

9.3. $k^* = 86{,}13\%$.
Указание.

$$k^* = \frac{S_{t_0}}{\Phi_{t_0}(T)}\cdot\frac{\mathrm{cov}(r_S,\ r_F)}{\sigma_F^2},\ \text{где}\ \mathrm{cov}(r_S,\ r_F) = 0{,}0149,\ \sigma_F^2 = 0{,}0173.$$

9.4. а) $\bar{r}_{\text{дл}}^{(1)} = 0{,}065$, $\bar{r}_{\text{дл}}^{(2)} = 0{,}092$, $\bar{r}_{\text{дл}}^{(3)} = 0{,}08$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}43075 & -0{,}12 & 0{,}226 \\ -0{,}12 & 0{,}265 & 0{,}144 \\ 0{,}226 & 0{,}144 & 0{,}82 \end{pmatrix}$$

б) $\overline{\Theta}_{\text{хедж}} = (0{,}4114;\ 0{,}5886;\ 0)$;

в) $\overline{\Theta}_{\text{хедж}} = (0{,}8148;\ 0{,}1852;\ 0)$;

г) взять кредит в размере 19,05% стоимости активов и сформировать портфель $\overline{\Theta}_{\text{хедж}} = (0{,}3118;\ 0{,}6882;\ 0)$.

Указание. Касательный портфель, соответствующий безрисковой процентной ставке 5%, имеет вид $\overline{\Theta}_f = (0{,}3118;\ 0{,}6882;\ 0)$.

9.5. а) $\bar{r}^{(1)}_{\text{кор}} = 0{,}034$, $\bar{r}^{(2)}_{\text{кор}} = 0{,}016$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0{,}463 & -0{,}272 \\ -0{,}272 & 0{,}34 \end{pmatrix}$

б) $\overline{\Theta}_{\text{хедж}} = (0{,}3381;\ 0{,}6619)$.

3.10. Хеджирование портфелей акций с помощью фьючерсных контрактов на индекс акций

10.1. $N = 42$. Доход от хеджирования составит 5000 долл.

10.2. $N = 6$ контрактов.
Указание. $P(t_0) = 812\,000$, $\beta_p = 1{,}1385$.
Чистый убыток – 7910.

10.3. $N = 19$ контрактов. Чистый доход – 22 600.

10.4. 1. $N = 12$ контрактов.

Указание. $\Phi_{t_0}(T) = 900e^{(0{,}1-0{,}04)\cdot\frac{4}{12}} = 918{,}18$.

2. Доход 161 610 – 177 400 = –15 790 долл.
Указание. Доходность индекса акций составит

$$r_I = \frac{I(t)}{I(t_0)} e^{\tilde{q}(t-t_0)} - 1 = -0{,}0348.$$

Доходность портфеля акций за 3 мес.: $r_p \approx \beta_p(r_I - r_f) + r_f = -0{,}0887$.
Убытки от портфеля акций – 177 400 долл.

10.5. 1) $N = 6$ контрактов;
2) убытки составят 19 570 долл.

10.6. ***Указание.*** Доходность инвестиционного портфеля

$$r_p^* = r_p - NL\frac{\Phi_{t_0}(T)}{P(t_0)} r_F \approx r_p - NL\frac{\Phi_{t_0}(T)}{P(t_0)} r_I$$

(r_F – доходность фьючерсной позиции, r_I – доходность индекса акций).
Бета-коэффициент инвестиционного портфеля

$$\beta_p^* = \frac{\operatorname{cov}(r_p^*, r_I)}{\sigma_I^2} \approx \frac{\operatorname{cov}(r_p, r_I)}{\sigma_I^2} - NL\frac{\Phi_{t_0}(T)}{P(t_0)} \cdot \frac{\operatorname{cov}(r_I, r_I)}{\sigma_I^2} =$$

$$= \beta_p - NL\frac{\Phi_{t_0}(T)}{P(t_0)}.$$

3.11. Хеджирование процентного риска с помощью фьючерсных контрактов

11.1. $N \approx 14$ контрактов.

11.2. Необходимо занять длинную позицию в четырех фьючерсных контрактах на облигацию.

Указание. $N = \dfrac{5\,000\,000e^{-0{,}06\cdot0{,}5}}{880\,000} \cdot \dfrac{5{,}7}{8{,}8-0{,}5} \approx 4$.

11.3. $N = 18$ контрактов.
Указание. $\tilde{D}_s = 3{,}76$, $\tilde{D}_s - (T-t) = 2{,}26$, $\Phi_t(T) = 92375{,}93$.

11.4. $N = 3$.
Указание. $P(t) = 382092{,}94$ долл., $D_p = 1{,}92$,
$\Phi_t(T) = 982652{,}24$ долл.
Чистый доход инвестора:
362479,62 – 382092,94 + 3(982652,24 – 975309,91) = 2413,67 долл.

3.12. Облигации с плавающими купонными ставками

12.1. Поток платежей по облигации имеет вид:

Номер купонного периода	1	2	3	4	5
Платеж на конец купонного периода, руб.	12	11,25	11,70	11,78	312,30

12.2. $Q = 1011{,}88$ руб.

12.3. $Q = 5074{,}0$ руб.

12.4. $Q = 201{,}01$ руб.

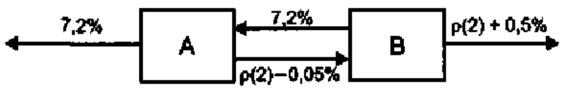
12.5. $Q = 237{,}15$ руб.

12.6. $Q = 1055{,}87$ руб.

12.7. ***Указание.*** Облигация с рыночной купонной ставкой эквивалентна чисто дисконтной облигации, срок до погашения которой совпадает со сроком очередного купонного платежа.

3.13. Процентные свопы

13.1. $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}25\%$.



Платеж компании А:

Номер расчетного периода	1	2	3	4
Сумма, выплачиваемая в конце периода, руб.	34,75	35,75	36,25	37,25

13.2. $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}2\%$.

13.3. $\delta_1 = 0{,}2$, $\delta_2 = 0{,}1\%$.

13.4. $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}2\%$.

13.5.

Ежегодно компания будет платить 84 долл.

13.6.

Плавающая процентная ставка равна $\rho(2) + 0{,}6\%$.

3.14. Оценка стоимости процентных свопов

14.1. $V(t) = -1{,}565$ млн. долл.
Указание. Стоимость облигации с фиксированной купонной ставкой $B_1(t) = 119{,}0371$ млн руб., стоимость облигации с рыночной купонной ставкой $B_2(t) = 120{,}6021$ млн руб.

14.2. $V(t) = 648{,}9$ тыс. долл.
Указание. Временная структура процентных ставок:
$\bar{r}(0{,}5) = 0{,}057175$; $\bar{r}(1{,}0) = 0{,}058161$; $\bar{r}(1{,}5) = 0{,}061160$;
$\bar{r}(2{,}0) = 0{,}063171$.
Ставки дисконтирования при непрерывном начислении на 0,3; 0,8; 1,3; 1,8 года соответственно равны 0,058016; 0,057357; 0,059911; 0,062677.

14.3. 1. $V(t) = 50$ тыс. долл.
Указание. Временная структура процентных ставок:
$\bar{r}(0{,}5) = 0{,}07363$; $\bar{r}(1{,}0) = 0{,}07461$; $\bar{r}(1{,}5) = 0{,}07460$;
$\bar{r}(2{,}0) = 0{,}07562$; $\bar{r}(2{,}5) = 0{,}07665$.

Ставки дисконтирования при непрерывном начислении на 1; 7; 13; 19; 25 мес. соответственно равны: 0,06581; 0,07413; 0,07456; 0,07471; 0,07583.

2. Форвардные ставки LIBOR: 7,696, 7,648, 7,648 и 8,094%.

14.4. $V(t)$ = 179 тыс. долл.
Указание. Ставки дисконтирования при непрерывном начислении на 0,35; 0,6; 0,85 года соответственно равны 0,063960; 0,065330; 0,064565.

14.5. $V(t)$ = 1,1815 млн руб.

14.6. Убытки банка составят 466 311 руб.
Указание. Убытки банка оцениваются следующим образом:

$$\frac{20\cdot 0{,}1}{2}-\frac{20\cdot 0{,}092}{2}+\left(\frac{1}{1+\frac{0{,}086}{2}}+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}086}{2}\right)^2}+\frac{21}{\left(1+\frac{0{,}086}{2}\right)^3}-20\right)$$

14.7. $D^{\text{взв}}=3{,}09$.
Указание. Инвестиционный портфель эквивалентен портфелю, состоящему из: длинной позиции по исходной облигации, короткой позиции по облигации номиналом 5000 долл. с фиксированной купонной ставкой 7% и длинной позиции по облигации номиналом 5000 долл. с рыночной купонной ставкой ρ (1):

$$D_1^{\text{мод}}=4{,}044,\quad D_2^{\text{мод}}=3{,}387,\quad D_3^{\text{мод}}=0{,}935.$$

14.8. $D^{\text{взв}}=1{,}42$.
Указание. Инвестиционный портфель эквивалентен портфелю, состоящему из: длинной позиции по исходной облигации, короткой позиции по облигации номиналом 8000 долл. с фиксированной купонной ставкой 7% и длинной позиции по облигации номиналом 8000 долл. с рыночной купонной ставкой ρ (2):

$$D_1^{\text{мод}}=2{,}542\left(D_1^{\text{мод}}=\frac{\Omega^-(\Delta y)-\Omega^+(\Delta y)}{2\Delta y\Omega}\right),$$

$D_2^{\text{мод}}=1{,}930$ (внутренняя доходность облигации – 7%),

$D_3^{\text{мод}}=0{,}483.$

3.15. Валютные свопы и их оценка

15.1. $\delta_1=\delta_2=0{,}12\%$.

а) 1960 руб.; б) 1800 руб.; в) –120 руб.

15.2. $V(t)$ = 463 849 долл.
Указание. $V(t)=B_1(t)-c_tB_2(t)$, где $B_1(t)$ = 99,606886 млн долл., $B_2(t)$ = 55,079465 млн английских фунтов, $c_t=1{,}8$.

15.3. $V(t)$ = 591 008 руб.
Указание. $V(t)=B_1(t)-c_tB_2(t)$, где $B_1(t)$ = 10,703257 млн руб., $B_2(t)$ = 50,561245 млн иен, c_t = 0,2 руб.

15.4. $V(t)$ = 86 893 долл.

15.5. $V(t)$ =–32027,56 руб.
Указание. $V(t)=(15\,200\cdot 29{,}8-585\,000)e^{-0{,}152\cdot 1}+(15\,200\cdot 29{,}6-585\,000)e^{-0{,}15\cdot 2}+(15\,200\cdot 29{,}5-585\,000)e^{-0{,}148\cdot 3}+(395\,200\cdot 28-10\,585\,000)e^{-0{,}145\cdot 4}$.

15.6. Убытки финансового института составят 680 000 долл.

ГЛАВА 4

4.1. Классические опционы и их основные характеристики

1.1. $d=\begin{cases}S_T-X, & \text{если}\quad S_T\ge X,\\ X-S_T, & \text{если}\quad S_T<X.\end{cases}$

1.2. *Указание.* Показать, что доход от рассматриваемой позиции совпадает с доходом от длинной позиции в форвардном контракте.

1.3. 1. $X_1\le X_2$,

$$d=\begin{cases}X_2-S_T, & \text{если}\quad S_T\ge X_1,\\ X_2-X_1, & \text{если}\quad X_1<S_T\le X_2,\\ S_T-X_1, & \text{если}\quad S_T>X_2.\end{cases}$$

2. $X_1 > X_2$,

$$d = \begin{cases} X_2 - S_T, & \text{если} \quad S_T \le X_2, \\ 0, & \text{если} \quad X_2 < S_T \le X_1, \\ S_T - X_1, & \text{если} \quad S_T > X_1. \end{cases}$$

1.4. 1. $X_1 \le X_2$,

$$d = \begin{cases} S_T - X_2, & \text{если} \quad S_T \le X_1, \\ 2S_T - X_1 - X_2, & \text{если} \quad X_1 < S_T \le X_2, \\ S_T - X_1, & \text{если} \quad S_T > X_2. \end{cases}$$

2. $X_1 > X_2$,

$$d = \begin{cases} S_T - X_2, & \text{если} \quad S_T \le X_2, \\ 0, & \text{если} \quad X_2 < S_T \le X_1, \\ S_T - X_1, & \text{если} \quad S_T > X_1. \end{cases}$$

1.5. а) $\pi = 2{,}80$ долл.; б) $\pi = -9{,}20$ долл.

1.6. а) $\pi = 1{,}14$ долл.; б) $\pi = -0{,}86$ долл.

4.2. Паритет цен европейских опционов

2.1. $2{,}037 < p < 46{,}118$.

Арбитражная стратегия: покупка европейского опциона «пут» по цене 1,8 долл., покупка исходной акции по цене 48 долл., кредит размером 49,8 долл. на срок 6 мес.

Прибыль: $48 + 3{,}92\,e^{0{,}08\cdot 0{,}5} - 49{,}8\,e^{0{,}08\cdot 0{,}5} = 0{,}24$ долл.

2.2. $D = 4{,}833$ долл., $3{,}757 < c < 95{,}167$.

Арбитражная стратегия: покупка европейского опциона «колл» по цене 3 долл., короткая продажа исходной акции при цене 100 долл., 97 долл. отдать в кредит на 10 мес. под процентную ставку 7%.

Прибыль: $97e^{0{,}07\cdot\frac{10}{12}} - 4{,}833e^{0{,}07\cdot\frac{10}{12}} - 96{,}90 = 0{,}803$ долл.

2.3. $D = 4{,}857$ долл., $p = 6{,}39$ долл.

1. Арбитражная стратегия: покупка европейского опциона «пут» по цене 3 долл., покупка исходной акции по цене 29 долл., продажа европейского опциона «колл» по цене 2 долл., кредит в размере 30 долл. на срок 6 мес. под ставку 10%.

Прибыль: $30 + 4{,}857\,e^{0{,}1\cdot 0{,}5} - 30\,e^{0{,}1\cdot 0{,}5} = 3{,}57$ долл.

2. Арбитражная стратегия: продажа европейского опциона «пут» по цене 8 долл., покупка европейского опциона «колл» по цене 2 долл., короткая продажа акции при цене 29 долл., 35 долл. отдать в кредит на срок 6 мес. под ставку 10%.

Прибыль: $35\,e^{0{,}1\cdot 0{,}5} - 30 - 4{,}857\,e^{0{,}1\cdot 0{,}5} = 1{,}688$ долл.

2.4. $D = 0{,}992$ долл.

Указание. Из паритета цен европейских опционов найти цену одного опциона, считая, что цена другого равна 3 долл.

Если $c = 3$ долл., то $p = 4{,}498$ долл.

Арбитражная стратегия: покупка европейского опциона «пут» по цене 3 долл., покупка исходной акции по цене 19 долл., продажа европейского опциона «колл» по цене 3 долл., кредит в размере 19 долл. на срок 3 мес. под ставку 10%.

Прибыль: $20 + 0{,}992\,e^{0{,}1\cdot\frac{3}{12}} - 19\,e^{0{,}1\cdot\frac{3}{12}} = 1{,}536$ долл.

2.5. $p = 14{,}98$ долл.

2.6. Арбитражная стратегия: продажа европейского опциона «пут» на 1000 английских фунтов при цене 16 долл., покупка европейского опциона «колл» на 1000 фунтов по цене 10 долл., короткая продажа $1000\cdot e^{-0{,}04\cdot\frac{5}{12}}$ фунтов по цене 1,78 долл., отдать в кредит $1000\,e^{-0{,}04\cdot\frac{5}{12}}\,1{,}78 + 16 - 10 = 1756{,}58$ долл.

Прибыль: $1756{,}58\cdot e^{0{,}06\cdot\frac{5}{12}} - 1000\cdot 1{,}8 = 1{,}05$ долл.

2.7. $c > 14{,}729$ долл.

4.3. Арбитражные соотношения между ценами европейских опционов одного вида

3.1. $4{,}32 < c < 9$.

3.2. $1{,}20 < p < 7{,}75$.

3.3. $3200 < c_1 < 4{,}114$; $1{,}25 < c_2 < 2{,}80$.

3.4. $3 < p_1 < 3{,}625$; $4 < p_2 < 4{,}5$.

3.5. $c < 3{,}0$.

3.6. $p < 8{,}125$.

3.7. При отсутствии арбитражных возможностей $c\,(102) < 2{,}795$ долл.

Арбитражная стратегия: продажа 10 европейских опционов «колл» с ценой исполнения 102 долл., покупка трех европейских опционов «колл» с ценой исполнения 95 долл. и семи европейских опционов «колл» с ценой исполнения 105 долл., 7,05 долл. отдать в кредит на 3 мес. под ставку 8%.

Прибыль: $7{,}05e^{0{,}08\cdot\frac{3}{12}} - 10\max\{S_T - 102, 0\} + 3\max\{S_T - 95, 0\} + 7\max\{S_T - 105, 0\} \ge 7{,}19$ долл. $\forall S_T$.

4.4. Спекулятивные стратегии на рынке европейских опционов

4.1. Для спреда «быков»

$$\pi = \begin{cases} -0{,}21, & \text{если } S_T \le 10,\\ S_T - 10{,}21, & \text{если } 10 < S_T \le 12,\\ 1{,}79, & \text{если } S_T > 12.\end{cases}$$

Для спреда «медведей»

$$\pi = \begin{cases} 0{,}21, & \text{если } S_T \le 10,\\ 10{,}21 - S_T, & \text{если } 10 < S_T \le 12,\\ -1{,}79, & \text{если } S_T > 12.\end{cases}$$

4.2. $$\pi = \begin{cases} -0{,}52, & \text{если } S_T \le 15,\\ S_T - 15{,}52, & \text{если } 15 < S_T \le 17{,}5\\ 19{,}48 - S_T, & \text{если } 17{,}5 < S_T \le 20,\\ -0{,}52, & \text{если } S_T > 20.\end{cases}$$

4.3. $\pi = \max\{X_1 - S_T,\ 0\} - \max\{X_2 - S_T,\ 0\} - \max\{X_3 - S_T,\ 0\} + \max\{X_4 - S_T,\ 0\} + (p_2 + p_3 - p_1 - p_4)e^{\bar{r}(T-t)}$,

если спред «быков» состоит из опционов с ценами исполнения X_1 и X_2, $X_1 < X_2$, а спред «медведей» – из опционов с ценами исполнения X_3 и X_4, $X_3 < X_4$.

4.4. $$\pi = \begin{cases} S_T + p_2^T(S_T) - 52{,}08, & \text{если } S_T \le 50,\\ p_2^T(S_T) - 2{,}08, & \text{если } S_T > 50.\end{cases}$$

4.5. а) $$\pi = \begin{cases} 39{,}695 - S_T, & \text{если } S_T \le 50,\\ S_T - 60{,}305, & \text{если } S_T > 50.\end{cases}$$

б) $S_T = 39{,}695$ и $S_T = 60{,}305$.

4.6. $$\pi = \begin{cases} 46{,}796 - S_T, & \text{если } S_T \le 50,\\ -3{,}204, & \text{если } 50 < S_T \le 52,\\ S_T - 55{,}204, & \text{если } S_T > 52.\end{cases}$$

Убытки будут при $46{,}795 < S_T < 55{,}204$.

4.7. $$\pi = \begin{cases} -1{,}025, & \text{если } S_T \le 20,\\ S_T - 21{,}025, & \text{если } 20 < S_T \le 30,\\ 8{,}975, & \text{если } 30 < S_T \le 40,\\ 48{,}975 - S_T & \text{если } 40 < S_T \le 50,\\ -1{,}025, & \text{если } S_T > 50.\end{cases}$$

$S_T \in (21{,}025;\ 48{,}975)$.

4.5. Арбитражные свойства цен американских опционов

5.1. *Указание.* Проверить

$$3 \le 200\cdot\left(1 - e^{-0{,}08\cdot\frac{5}{12}}\right),$$

$$2 \le 200\cdot\left(1 - e^{-0{,}08\cdot\frac{4}{12}}\right).$$

5.2. $D \le 1{,}49$ долл.

5.3. $C \ge 5{,}10$ долл.

5.4. $C \ge 3{,}01$ долл.

Указание. Доказать, что исполнять досрочно американский опцион не оптимально.

5.5. $2{,}05 \le C \le 6{,}60$.

5.6. $1{,}68 \le P \le 3{,}97$.

5.7. *Указание.* Для доказательства неравенства $Se^{-\bar{q}(T-t)} - X \le C - P$ рассмотреть портфели А и В.

Портфель А. Покупка американского опциона «пут» и покупка $e^{-\bar{q}(T-t)}$ единиц исходных активов.

Портфель В. Покупка европейского опциона «колл», аналогичного американскому опциону «колл», и инвестиция денежной суммы X под безрисковую процентную ставку.

Для доказательства неравенства $C - P \le S - Xe^{-\bar{r}(T-t)}$ рассмотреть портфели A′ и B′.

Портфель A′. Покупка американского опциона «колл» и инвестиция денежиой суммы $Xe^{-\bar{r}(T-t)}$ под безрисковую процентиую ставку.

Портфель B′. Покупка европейского опциона «пут», аналогичного американскому опциону «пут», и покупка исходных активов.

4.6. Простейшая модель оценки производных финансовых инструментов «европейского типа»

6.1. $c = 0{,}805$ долл., $p = 2{,}138$ долл.
Указание. $u = 1{,}1515$, $d = 0{,}9697$, $\pi^* = 0{,}2735$.

6.2. $c = 2{,}052$ долл., $p = 0{,}898$ долл.
Указание. $u = 1{,}08$, $d = 0{,}96$, $\pi^* = 0{,}5332$.

6.3. $p = 7{,}17$ долл.
Указание. $u = 1{,}0111$, $d = 0{,}9722$, $\pi^* = 0{,}8781$.

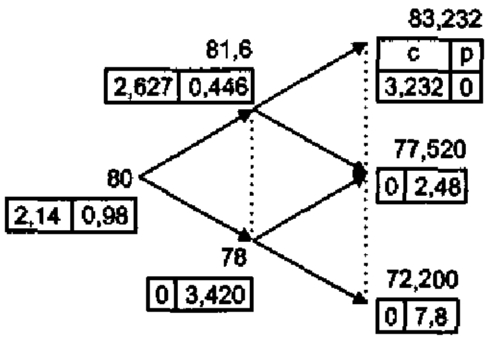
6.4. *а*) $\Pi = 6{,}99$ долл.; б) $\Pi = 13{,}13$ долл.

6.5. Следует продать 20 европейских опционов «колл».
Указание. Чтобы хеджировать исходиую позицию, необходимо продать x опционов «колл», где
$S\,u - x\max\{S\,u - X, 0\} = S\,d - x\max\{S\,d - X, 0\}$.

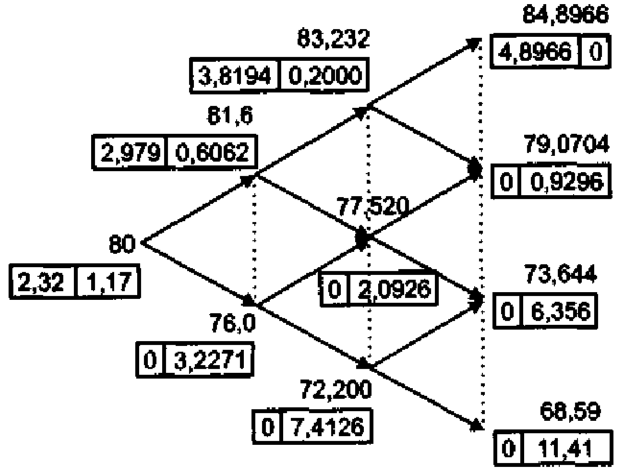
6.6. Необходимо купить 6,6 акции.

4.7. Оценка производных финансовых инструментов «европейского типа» в условиях биномиальной модели

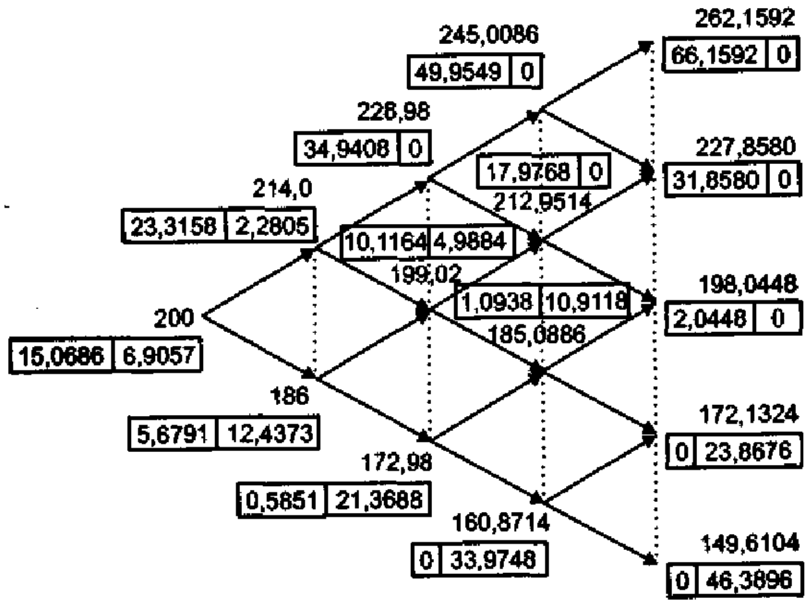
7.1. *а*) $\pi^* = 0{,}8187$, $c = 2{,}14$, $p = 0{,}98$.



б) $\pi^* = 0{,}7838$, $c = 2{,}32$, $p = 1{,}17$.



7.2. $\pi^* = 0{,}5392$, $c = 15{,}07$ долл., $p = 6{,}9057$.



7.3. $c=\dfrac{1}{(1{,}1)^{\frac{1}{3}}}\cdot[66{,}1592\cdot(0{,}5392)^4+4\cdot 31{,}8582\cdot(0{,}5392)^3\cdot 0{,}4608+$

$+6\cdot 2{,}0448\cdot(0{,}5392)^2\cdot(0{,}4608)^2]=15{,}0687;$

$p=\dfrac{1}{(1{,}1)^{\frac{1}{3}}}\cdot[46{,}3896\cdot(0{,}4608)^4+4\cdot 23{,}8676\cdot 0{,}5392\cdot(0{,}4608)^3]=$

$=6{,}9055.$

7.4. $c=41{,}221$ долл., $p=21{,}657$ долл.

$c=\dfrac{1}{(1{,}08)^{\frac{1}{3}}}\cdot[213{,}1215\cdot(0{,}5260)^6+6\cdot 142{,}0187\cdot(0{,}5260)^5\cdot 0{,}4740+$

$+15\cdot 73{,}7042\cdot(0{,}5260)^4\cdot(0{,}4740)^2+20\cdot 8{,}0681\cdot(0{,}5260)^3\cdot(0{,}4740)^3];$

$p=\dfrac{1}{(1{,}08)^{\frac{1}{3}}}\cdot[15\cdot 54{,}9927\cdot(0{,}5260)^2(0{,}4740)^4+$

$+6\cdot 115{,}5813\cdot 0{,}5260\cdot(0{,}4740)^5+173{,}7938\cdot(0{,}4740)^6].$

7.5. $c=41{,}234$ долл.; $p=21{,}679$ долл.
Указание. $\pi^*=0{,}5260;$

$$\tilde{\pi}=1{,}02\cdot 0{,}5260\cdot\left(\frac{1{,}06}{1{,}08}\right)^{\frac{1}{18}}=0{,}53596;\quad k=\left[\frac{\ln\frac{1600}{1610}-6\cdot\ln 0{,}98}{\ln 1{,}02-\ln 0{,}98}\right]+1=3.$$

$B(6,\ 3,\ \pi^*)=(0{,}5260)^6+6\cdot(0{,}5260)^5\cdot 0{,}4740+$

$+15\cdot(0{,}5260)^4\cdot(0{,}4740)^2+20\cdot(0{,}52596)^3\cdot(0{,}4740)^3=0{,}7036;$

$B(6,\ 3,\ \tilde{\pi})=(0{,}53596)^6+6\cdot(0{,}53596)^5\cdot 0{,}4640+$

$+15\cdot(0{,}53596)^4\cdot(0{,}4640)^2+20\cdot(0{,}53596)^3\cdot(0{,}4640)^3=0{,}7210.$

7.6. $\Pi=13{,}31$ долл.
Указание. $\pi^*=0{,}4630;$

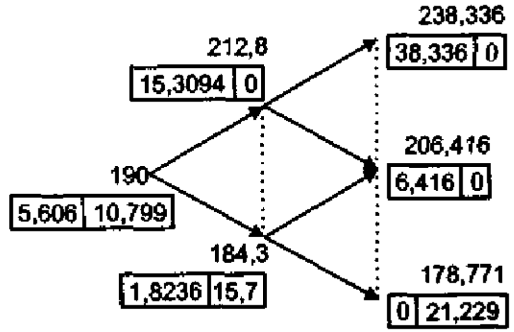
$\Pi=\dfrac{1}{(1{,}06)^{\frac{1}{2}}}\cdot[19{,}8972\cdot(0{,}4630)^4+4\cdot 16{,}6515\cdot(0{,}4630)^3\cdot 0{,}5370+$

$+6\cdot 13{,}8792\cdot(0{,}4630)^2\cdot(0{,}5370)^2+4\cdot 11{,}5196\cdot 0{,}4630\cdot(0{,}5370)^3+$

$+9{,}5189\cdot(0{,}5370)^4].$

4.8. Оценка стоимости американских опционов в условиях биномиальной модели

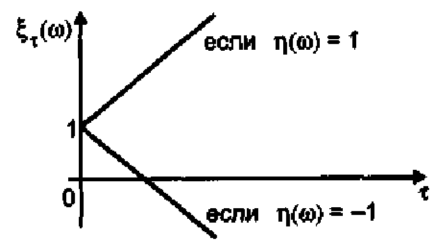
8.1. $C=5{,}606,\ P=10{,}799.$
Указание. $\pi^*=0{,}2924,\ 1-\pi^*=0{,}7076.$



8.2. $c=C=13{,}473,\ p=11{,}597,\ P=11{,}850.$
8.3. $c=12{,}091,\ C=12{,}510,\ p=16{,}220,\ P=16{,}266.$
8.4. $c=6{,}897,\ C=8{,}232,\ p=15{,}694,\ P=15{,}694.$

4.9. Понятие о случайных процессах. Винеровский случайный процесс

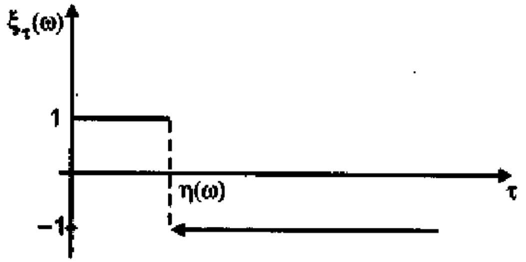
9.1. Траектория случайного процесса ξ имеет следующий вид:



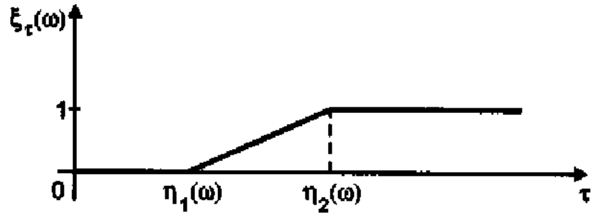
Сечение случайного процесса

$$\xi_\tau(\omega)=\begin{cases}\tau+1 & \text{с вероятностью } 1/4,\\ -\tau+1 & \text{с вероятностью } 3/4.\end{cases}$$

9.2. Траектория случайного процесса ξ имеет следующий вид:



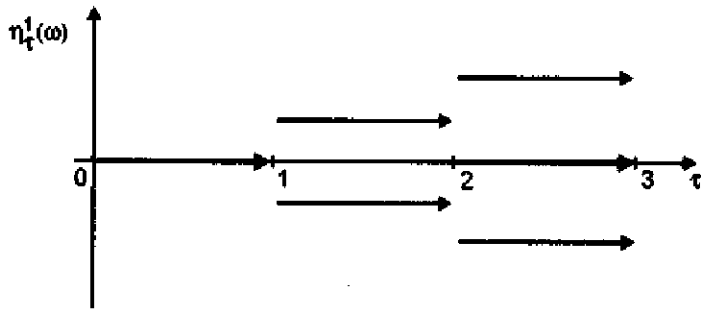
9.3.

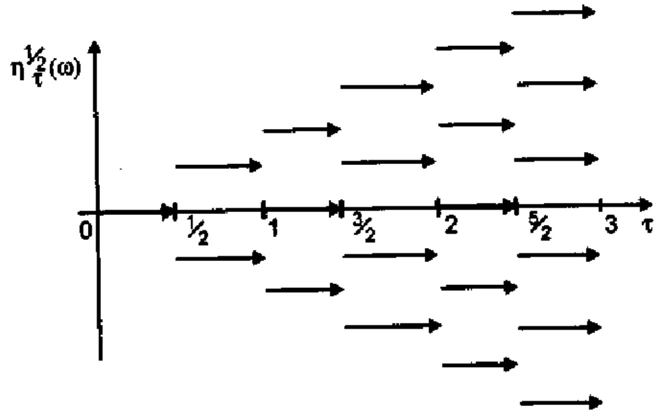


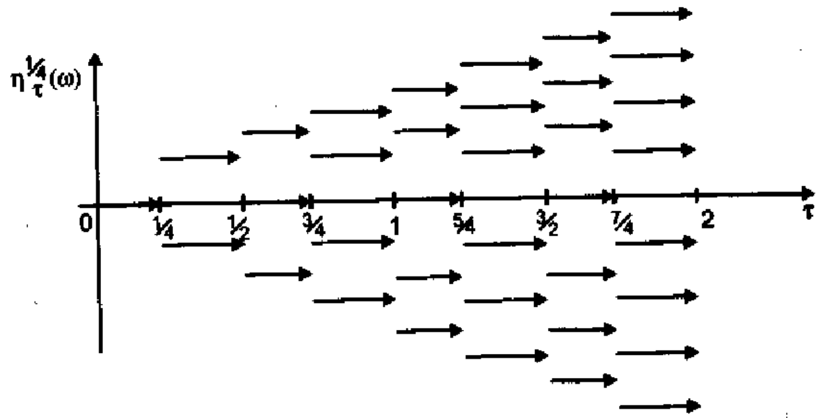
9.4. $P\{w_1(\omega) < 2\} = 97{,}73\%$; $P\{1 \le w_{1,5}(\omega) < 2\} = 15{,}47\%$;
$P\{w_2(\omega) > 3\} = 1{,}69\%$.

9.5. $M(\eta_\tau^\Delta(\omega)) = 0,\ \forall \tau \in [0,\ +\infty)$; $D(\eta_\tau^\Delta(\omega)) = \left[\dfrac{\tau}{\Delta}\right]\Delta,\ \forall \tau \in [0,\ +\infty)$.

9.6.







9.7. ***Указание.*** Если $\tau < s$, то

$$\operatorname{cov}(w_\tau, w_s) = \operatorname{cov}(w_\tau - w_0,\ w_s - w_\tau + w_\tau - w_0) =$$
$$= \operatorname{cov}(w_\tau - w_0,\ w_\tau - w_0) = \tau.$$

4.10. Процесс геометрического броуновского движения

10.1. а) $M(S_{t+0,5}) = 10{,}05$ долл.; $M(S_{t+1,0}) = 10{,}10$ долл.;
$M(S_{t+1,5}) = 10{,}15$ долл;

б) $P\{9{,}8 \le S_{t+1{,}0} \le 10{,}2\} = 0{,}0786$;
$P\{10{,}1 \le S_{t+1{,}5} \le 10{,}3\} = 0{,}0316$.

10.2. а) $M(S_{t+0{,}4}) = 52{,}04$ долл.; $M(S_{t+0{,}8}) = 54{,}16$ долл.;
$M(S_{t+1{,}2}) = 56{,}37$ долл;
б) $P\{50{,}5 \le S_{t+0{,}4} \le 52\} = 0{,}0920$; $P\{49 \le S_{t+0{,}8} \le 51\} = 0{,}0820$.

10.3. $\sigma_{\text{год}} = 43{,}22\%$ (число дней в году 260, $\sigma_{\text{дн}} = 2{,}6804\%$).

10.4. $\sigma_{\text{дн}} = 1{,}6109\%$; $\sigma_{\text{год}} = 25{,}98\%$.

10.5. а) $h_3 = \dfrac{1}{12}$; $u_3 = 1{,}09046$, $d_3 = 0{,}91704$, $\pi_3^* = 0{,}49588$;
$c = 4{,}01$ долл.; $p = 2{,}57$ долл.; $C = 4{,}01$ долл.; $P = 2{,}62$ долл.;
б) $h_5 = \dfrac{1}{20}$; $u_5 = 1{,}06938$, $d_5 = 0{,}93512$, $\pi_5^* = 0{,}49680$;
$c = 3{,}91$ долл.; $p = 2{,}47$ долл.; $C = 3{,}91$ долл.; $P = 2{,}53$ долл.

10.6. а) $h_3 = \dfrac{1}{12}$; $u_3 = 1{,}15527$, $d_3 = 0{,}86560$, $\pi_3^* = 0{,}47445$;
$c = 6{,}16$ долл.; $p = 4{,}73$ долл.; $C = 6{,}16$ долл.; $P = 4{,}77$ долл.;
б) $h_5 = \dfrac{1}{20}$; $u_5 = 1{,}11829$, $d_5 = 0{,}89422$, $\pi_5^* = 0{,}480207$;
$c = 5{,}99$ долл.; $p = 4{,}56$ долл.; $C = 5{,}99$ долл.; $P = 4{,}62$ долл.

4.11. Модель Блэка–Шоулса для оценки европейских опционов

11.1. а) $u_4 = 1{,}20167$, $d_4 = 0{,}83218$, $\pi_4^* = 0{,}47289$; $\tilde{\pi}_4 = 0{,}56436$;
$k_4 = 3$; $B(4,\ k_4,\ \pi_4^*) = 0{,}27297$; $B(4,\ k_4,\ \tilde{\pi}_4) = 0{,}41467$;
$u_6 = 1{,}16183$, $d_6 = 0{,}86071$, $\pi_6^* = 0{,}47784$; $\tilde{\pi}_6 = 0{,}55263$;
$k_6 = 4$; $B(6,\ k_6,\ \pi_6^*) = 0{,}30317$; $B(6,\ k_6,\ \tilde{\pi}_6) = 0{,}44684$;
$u_8 = 1{,}13872$, $d_8 = 0{,}87818$, $\pi_8^* = 0{,}48080$; $\tilde{\pi}_8 = 0{,}54562$;
$k_8 = 5$; $B(8,\ k_8,\ \pi_8^*) = 0{,}32215$; $B(8,\ k_8,\ \tilde{\pi}_8) = 0{,}46674$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty} B(n, k_n, \pi_n^*) = 0{,}4354$, $\lim\limits_{n\to\infty} B(n, k_n, \tilde{\pi}_n) = 0{,}5811$,
$d_1 = 0{,}2047$, $d_2 = -0{,}1627$.

11.2. $c = 24{,}39$ долл., $p = 22{,}93$ долл.
Указание. $d_1 = 0{,}1113$, $d_2 = -0{,}0619$,
$N(d_1) = 0{,}5443$, $N(d_2) = 0{,}4753$, $N(-d_1) = 0{,}4557$,
$N(-d_2) = 0{,}5247$.

11.3. $c = 5{,}02$ долл., $p = 1{,}55$ долл.

11.4. $c = 23{,}17$ долл., $p = 32{,}78$ долл.

11.5. $c_4 = 4{,}73$ долл., $p_4 = 15{,}33$ долл.
$c = 5{,}36$ долл., $p = 15{,}96$ долл.

4.12. Свойства стоимостей европейских опционов в модели Блэка–Шоулса

12.1. $\dfrac{\partial c}{\partial S} = 0{,}5987$, $\dfrac{\partial^2 c}{\partial S^2} = 0{,}0387$, $\dfrac{\partial c}{\partial \tilde{r}} = 13{,}7134$, $\dfrac{\partial c}{\partial \sigma} = 19{,}3334$.

12.2. $\dfrac{\partial p}{\partial S} = -0{,}4037$, $\dfrac{\partial^2 p}{\partial S^2} = 0{,}0268$, $\dfrac{\partial p}{\partial \tilde{r}} = -12{,}5606$, $\dfrac{\partial p}{\partial \sigma} = 13{,}3833$.

12.3. $c\left(\dfrac{1}{12}\right) = 4{,}8433$, $c\left(\dfrac{1}{6}\right) = 4{,}8158$, $c\left(\dfrac{1}{3}\right) = 4{,}8631$, $c\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4{,}9214$,
$c(1) = 5{,}0036$.

12.4. $\dfrac{\partial p}{\partial X} = 0{,}5125$; а) $\pm\, 0{,}51$ долл., б) $\pm\, 1{,}02$ долл., в) $\pm\, 2{,}56$ долл.

12.5. 1. ***Указание.*** Воспользоваться неравенством
$c > \max\{S - Xe^{-\tilde{r}(T-t)},\ 0\}$.

2. ***Указание.*** Показать $\dfrac{\partial TV^c}{\partial S} = \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial S}, & \text{если } S < X, \\ \dfrac{\partial c}{\partial S} - 1, & \text{если } S > X \end{cases}$

и исследовать эту производную.

12.6. 1. ***Указание.*** Например, рассмотреть европейский опцион «пут» на бездивидендную акцию при следующих данных:

$$T - t = \frac{1}{12},\quad X = 120 \text{ долл.},\quad S = 100 \text{ долл.},\quad \sigma = 40\%,\quad \tilde{r} = 8\%.$$

2. ***Указание.*** Показать $\dfrac{\partial TV^{p}}{\partial S} = \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial S} + 1, & \text{если } S < X, \\ \dfrac{\partial p}{\partial S}, & \text{если } S > X \end{cases}$

и исследовать эту производную.

4.13. Неявная (предполагаемая) волатильность исходных активов

13.1. $\sigma_{\text{н}} = 18{,}91\%$.

13.2. $\sigma_{\text{н}} = 34{,}27\%$.

13.3. а) $\sigma_{\text{н}} = 24{,}32\%$; б) $c = 1{,}54$ долл., $p = 0{,}40$ долл.

13.4. а) $\sigma_{\text{н}} = 33{,}43\%$; б) $P = 6{,}96$ долл.

13.5. ***Указание.*** Рыночные и теоретические стоимости опционов удовлетворяют паритету цен:

$$c^{\text{рын}} - p^{\text{рын}} = Se^{-\tilde{q}(T-t)} - Xe^{-\tilde{r}(T-t)},$$

$$c - p = Se^{-\tilde{q}(T-t)} - Xe^{-\tilde{r}(T-t)}.$$

Тогда $c^{\text{рын}} - c = p^{\text{рын}} - P$.

13.6. $\sigma_{\text{н}} = 10{,}96\%$.

4.14. Оценка стоимости опционов на фьючерсные контракты

14.1. $c = 8{,}53$ долл.; $p = 12{,}35$ долл.; $C = 8{,}70$ долл.; $P = 12{,}61$ долл.
Указание. Для оценки стоимости американских опционов рассмотреть 10-этапную биномиальную модель с параметрами

$$u_{10} = 1{,}135455,\quad d_{10} = 0{,}880704,\quad \pi_{10}^{*} = 0{,}468285.$$

14.2. $c = 82{,}33$ долл.; $p = 62{,}86$ долл.; $C = 83{,}18$ долл.; $P = 63{,}16$ долл.
Указание. Для оценки стоимости американских опционов рассмотреть восьмиэтапную биномиальную модель с параметрами

$$u_8 = 1{,}041670,\quad d_8 = 0{,}960000,\quad \pi_8^{*} = 0{,}489809.$$

14.3. ***Указание.*** Воспользоваться паритетом цен европейских опционов: $c - p = \Phi e^{-\tilde{r}(T-t)} - Xe^{-\tilde{r}(T-t)}$.

14.4. ***Указание.*** Воспользоваться неравенством для цен американских опционов на активы с постоянной непрерывной дивидендной доходностью.

14.5. $c = p = 5{,}76$ долл.; $C = 5{,}76$ долл.; $P = 5{,}76$ долл.
Указание. Для оценки стоимости американских фьючерсных опционов рассмотреть восьмиэтапную биномиальную модель с параметрами $u_8 = 1{,}054464$, $d_8 = 0{,}948349$, $\pi_8^{*} = 0{,}486746$.

4.15. Оценка стоимости финансовых инструментов, производных от акций с известными дивидендами

15.1. $c = 7{,}92$ долл.; $p = 8{,}01$ долл.; $C = 8{,}07$ долл.; $P = 8{,}39$ долл.

15.2. $C = 1{,}41$ долл.
Указание. Можно упростить расчеты, если учесть, что после выплаты дивидендов американский опцион эквивалентен европейскому опциону.

15.3. $c = 3{,}13$ долл.; $p = 3{,}32$ долл.
Указание. Воспользоваться формулами Блэка–Шоулса.

15.4. Если $t + (l_1 - 1)h_n < \tau_1 \le t + l_1 h_n$, $t + (l_2 - 1)h_n < \tau_2 \le t + l_2 h_n$ то

$$\begin{cases} S_t = S, \\ S_{t+kh_n} = S_{t+(k-1)h_n}\mu_k, \quad k \ne l_1, l_2, \\ S_{t+l_1h_n} = S_{t+(l_1-1)h_n}\mu_{l_1} - D_1, \\ S_{t+l_2h_n} = S_{t+(l_2-1)h_n}\mu_{l_2} - D_2. \end{cases}$$

При $1 \le k < l_1$ случайная величина S_{t+kh_n} принимает значение $Su_n^i d_n^{k-i}$ с вероятностью $c_k^i \pi_n^i (1-\pi_n)^{k-i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

При $l_1 \le k < l_2 - 1$ случайная величина S_{t+kh_n} принимает значение $(S u_n^i d_n^{l_1-i} - D_1) u_n^j d_n^{k-l_1-j}$

с вероятностью $c_{l_1}^i \pi_n^i (1-\pi_n)^{l_1-i} c_{k-l_1}^j \pi_n^j (1-\pi_n)^{k-l_1-j}$,

$i = 0, 1, 2, \ldots, l_1$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k - l_1$.

При $l_2 \le k < n$ случайная величина S_{t+kh_n} принимает значение $[(S u_n^i d_n^{l_1-i} - D_1) u_n^j d_n^{k-l_1-j} - D_2] u_n^{\alpha} d_n^{k-l_1-l_2-\alpha}$

с вероятностью

$$c_{l_1}^i \pi_n^i (1-\pi_n)^{l_1-i} c_{l_2-l_1}^j \pi_n^j (1-\pi_n)^{l_2-l_1-j} c_{k-l_1-l_2}^{\alpha} \pi_n^{\alpha} (1-\pi_n)^{k-l_1-l_2-\alpha},$$

$i = 0, 1, 2, \ldots, l_1$, $j = 0, 1, 2, \ldots, l_2 - l_1$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, k - l_2 - l_1$.

15.5. а) $c = 9{,}89$ долл.; $p = 13{,}01$ долл.; б) $c = 9{,}06$ долл.; $p = 12{,}18$ долл.

15.6. $C = 10{,}58$ долл.; $P = 13{,}44$ долл.

4.16. Простейшие схемы хеджирования опционных позиций

16.1. Чистая приведенная прибыль: а) 0,325 долл.; б) 1,311 долл.; в) –0,662 долл.; г) –1,649 долл.

16.2. Чистая приведенная прибыль: а) 9,47 долл.; б) 1,67 долл.; в) –2,23 долл.

16.3. Чистые приведенные затраты равны 1,152 долл.

16.4. Чистые приведенные затраты: а) 0,49 долл.; б) 0,24 долл.

4.17. Дельта-коэффициенты производных финансовых инструментов. Дельта-хеджирование

17.1. а) $\Delta_П = 614{,}34$.

Указание. $\Delta_F = 1{,}061837$, $\Delta_p = -0{,}417096$;

$\Delta_П = 500 \cdot 1{,}061837 - 200 \cdot (-0{,}417096) = 614{,}34$;

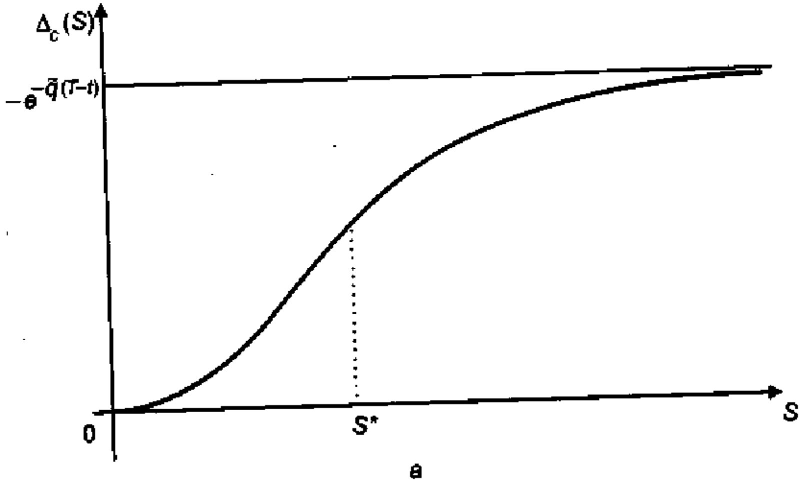
б) необходимо продать 614,34 акции.

17.2. $\Delta_c^F = 0{,}5406$, $\Delta_p^F = -0{,}4307$.

17.3. а) $\Delta_C = 0{,}253823$ (американский опцион эквивалентен аналогичному европейскому опциону);

б) необходимо купить 25 382 акции.

17.4.



в

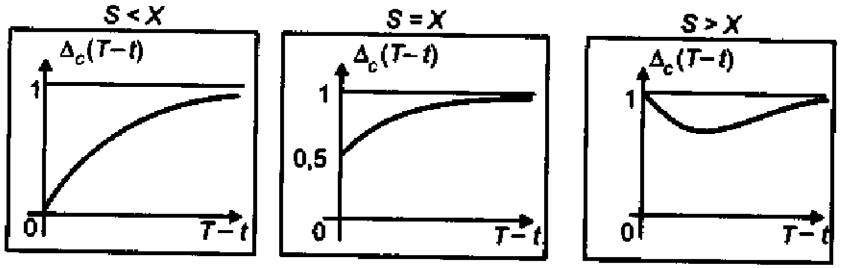
Указание.

$$\lim_{S \to 0+0} \Delta_c(S) = 0; \quad \lim_{S \to +\infty} \Delta_c(S) = e^{-\tilde{q}(T-t)};$$

$$\frac{\partial \Delta_c(S)}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tilde{q}(T-t)} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{S \sigma \sqrt{T-t}} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Delta_c(S)}{\partial S^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tilde{q}(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{S^2 \sigma \sqrt{T-t}} \left(\frac{d_1}{\sigma \sqrt{T-t}} + 1 \right);$$

$$\frac{\partial^2 \Delta_c(S)}{\partial S^2} > 0 \text{ при } 0 < S < S^* \text{ и } \frac{\partial^2 \Delta_c(S)}{\partial S^2} < 0 \text{ при } S < S^*.$$



б

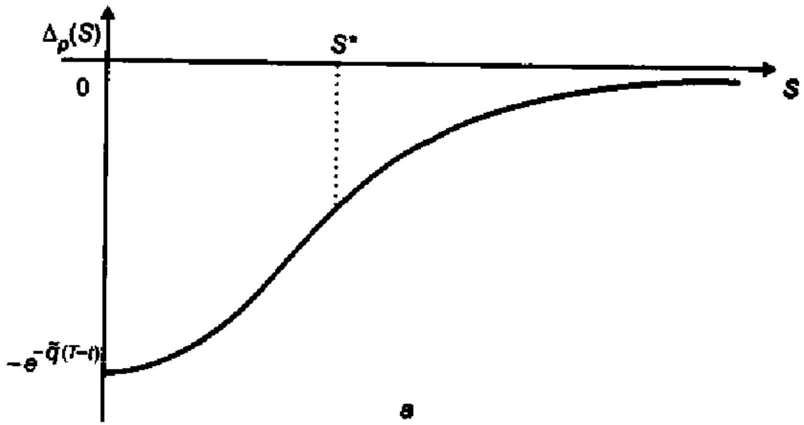
Указание. $0 \le \Delta_c(T-t) < 1$;

$$\lim_{(T-t)\to 0+0} \Delta_c(T-t) = \begin{cases} 0, & \text{если } S < X, \\ 0{,}5, & \text{если } S = X, \\ 1, & \text{если } S > X. \end{cases}$$

$$\lim_{(T-t)\to +\infty} \Delta_c(T-t) = 1;$$

$$\frac{\partial \Delta_c(T-t)}{\partial (T-t)} = \frac{N'(d_1)}{2\sigma(T-t)^{3/2}}\left[(T-t)\left(\tilde r + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \ln\frac{S}{X}\right].$$

17.5.



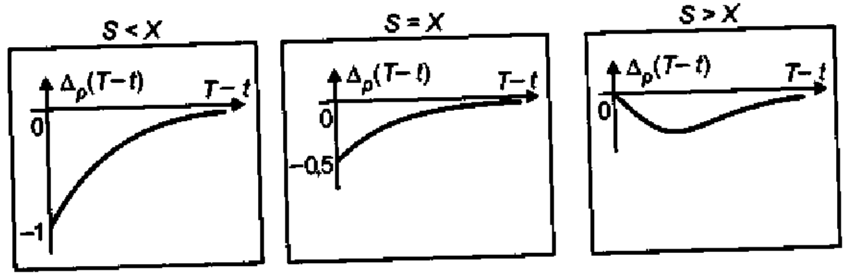
в

Указание.

$$\lim_{S\to 0+0} \Delta_p(S) = -e^{-\tilde q(T-t)}; \quad \lim_{S\to +\infty} \Delta_p(S) = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta_p(S)}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tilde q(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Delta_p(S)}{\partial S^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tilde q(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{S^2\sigma\sqrt{T-t}}\left(\frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}} + 1\right).$$



б

Указание.

$$\lim_{(T-t)\to 0+0} \Delta_p(T-t) = \begin{cases} -1, & \text{если } S < X, \\ -0{,}5, & \text{если } S = X, \\ 0, & \text{если } S > X. \end{cases}$$

$$\lim_{(T-t)\to +\infty} \Delta_p(T-t) = 0 \quad \frac{\partial \Delta_p(T-t)}{\partial (T-t)} =$$

$$= \frac{N'(d_1)}{2\sigma(T-t)^{3/2}}\left[(T-t)\left(\tilde r + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \ln\frac{S}{X}\right].$$

17.6. а) $\Delta_П = -15\,500$;

б) необходимо купить 15 500 японских иен;

в) необходимо купить 16 фьючерсных контрактов на японские иены ($\Delta_F = 990{,}05$).

17.7. а) $\Delta_P = -0{,}4794$; б) необходимо продать 4794 акции.

17.8. Чистая приведенная прибыль составит $131\,340 - 78\,705e^{-0{,}09\cdot\frac{5}{52}} =$ $= 53\,313$ долл.

Указание. Стоимость проданного опциона равна 131 340 долл. Расчет накопленных издержек приведен ниже.

Номер недели (i)	Дельта-коэффициент ($\Delta^{(i)}$)	Количество акций в портфеле (x_i)	Накопленные издержки (Q_i) долл.
0	0,639344	31967,2	1598 360
1	0,616111	30805,6	1543 397
2	0,824523	41226,2	2087 942
3	0,535161	26758,1	1368 154
4	0,426956	21347,8	1105 754
5	0	0	78 705

17.9. Чистые приведенные затраты составят 304019,6 долл.

Указание. Стоимость проданного опциона равна 205280,1 долл. Расчет накопленных издержек приведен ниже.

Номер недели (i)	Дельта-коэффициент ($\Delta^{(i)}$)	Количество акций в портфеле (x_i)	Накопленные издержки (Q_i) долл.
0	− 0,561349	− 56134,9	− 4153982,6
1	− 0,405033	− 40503,3	− 2975363,6
2	− 0,798506	− 79850,6	− 5826432,5
3	− 0,184796	− 18479,6	− 1117391,2
4	−1,000000	− 100000,0	− 6987556,5

4.18. Гамма-коэффициенты производных финансовых инструментов. Гамма-хеджирование

18.1. 1. $\Delta_П = 614{,}34$, $Г_П = -11{,}04$.

2.

ΔS, долл.	−2,0	−1,0	− 0,5	0,5	1,0	2,0
$\Delta П$, долл.	−1250,76	− 619,86	−308,55	305,79	608,82	1206,60

18.2. $Г_c^ф = Г_p^ф = 0{,}011767$.

18.3. $Г = 1246{,}21$.

Указание. Американский опцион «колл» на бездивидендные акции эквивалентен европейскому опциону на эти акции.

18.4. 1. $\Delta_П = 1900$, $Г_П = 4050$.

2. Для дельта- и гамма-нейтрализации портфеля необходимо продать 280 фунтов стерлингов и 2700 биржевых опционов на фунты стерлингов.

18.5. Покупка 181 560 биржевых опционов «колл» на акцию и продажа 127 826 акций.

Указание. $\Delta = -64883{,}9$, $Г = 17412{,}3$, $\Delta_\delta = 0{,}346674$, $Г_\delta = 0{,}095904$.

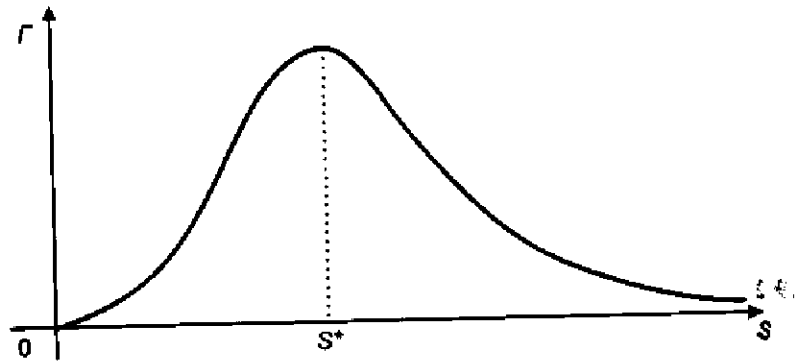
18.6. 1. $\Delta = -4793{,}8$, $Г = 256{,}76$.

Указание. $P_1(1) = 3{,}942$, $P_1(0) = 10{,}378$, $P_2(2) = 1{,}535$, $P_2(1) = 6{,}200$, $P_2(0) = 14{,}342$

2.

ΔS, долл.	−2,0	−1,0	− 0,5	0,5	1,0	2,0
$\Delta П$, долл.	10 101	4922	2429	− 2365	− 4665	− 9074

18.7.

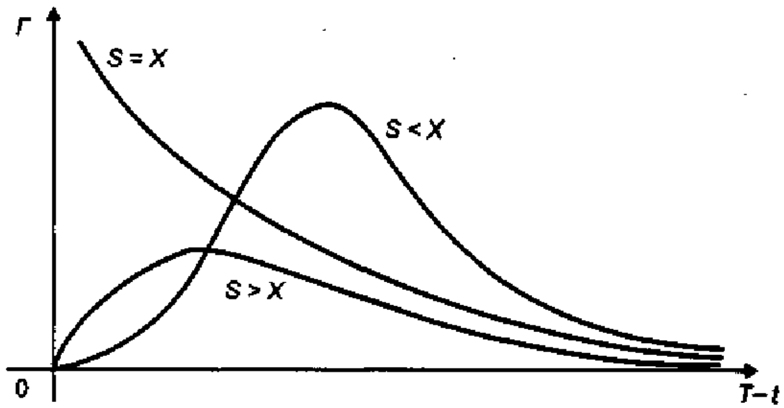


Указание. $\lim\limits_{S\to 0+0} Г(S) = 0$, $\lim\limits_{S\to+\infty} Г(S) = 0$;

$$\frac{\partial Г}{\partial S} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}e^{-\bar{q}(T-t)}}{S^2\sigma\sqrt{T-t}}\left[\frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}}+1\right];$$

$$\frac{\partial Г}{\partial S} > 0 \text{ при } S < S^* \text{ и } \frac{\partial Г}{\partial S} < 0 \text{ при } S > S^*.$$

18.8.



Указание.

$$\lim_{T-t\to 0+0}\Gamma=\begin{cases}0, & S<X,\\ +\infty, & S=X,\\ 0, & S>X.\end{cases}\qquad \lim_{T-t\to+\infty}\Gamma=0.$$

4.19. Коэффициенты Θ, ρ и Λ производных финансовых инструментов

19.1. $\Theta = -14613{,}01$, $\rho = 167004{,}31$, $\Lambda = 154015{,}75$.

19.2. 1. Для Δ- и ρ-нейтральности необходима покупка 29 414 акций и 3680 биржевых опционов;

2. Для Δ- и Λ-нейтральности необходима покупка 4826 биржевых опционов и продажа 11 488 акций.
Указание. Показатели проданных опционов:
$\Delta = 36773{,}5$, $\rho = 73599{,}3$, $\Lambda = 241307{,}2$.

19.3. 1. $\Delta C = -4371{,}9$ долл.
Указание.

$$\Delta C \approx \Theta\frac{1}{52}+\Delta\cdot 0{,}1+\rho(-0{,}005)\,;\ \Theta = -399424{,}8.$$

2. $\Delta C \approx -13105{,}5$ долл.

Указание.

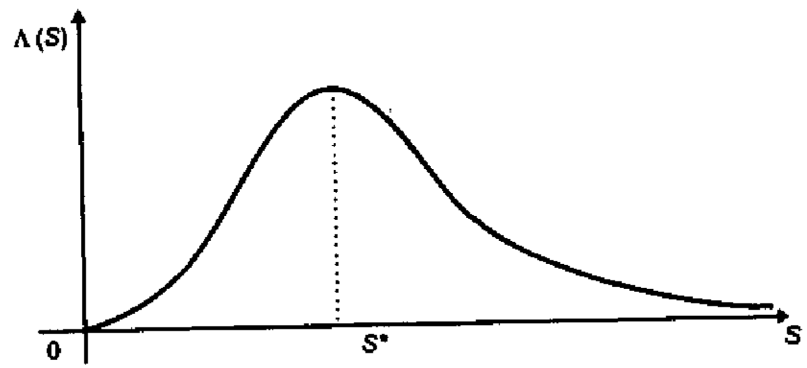
$$\Delta C \approx \Theta\cdot\frac{1}{52}+\Delta\cdot(-0{,}2)+\Lambda\cdot 0{,}008.$$

19.4. 1. Купить 1740 японских иен и продать 2200 биржевых опционов.

2. Продать 3300 японских иен и купить 2000 биржевых опционов.

3. Купить 300 японских иен и продать 1000 биржевых опционов.

19.5.



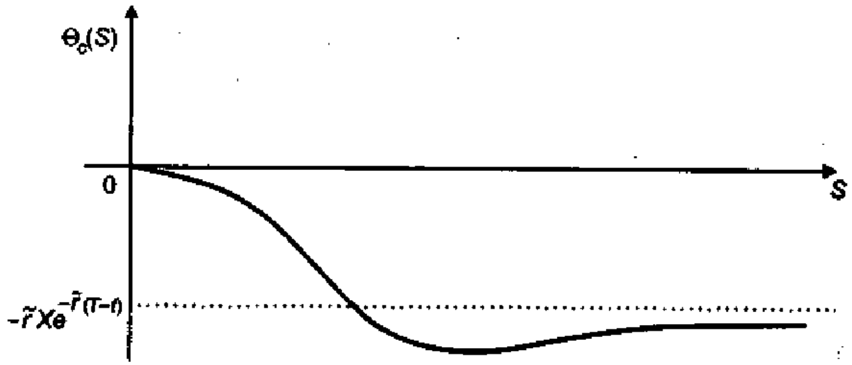
Указание

$$\lim_{S\to 0+0}\Lambda(S)=0,\quad \lim_{S\to+\infty}\Lambda(S)=0,$$

$$\frac{\partial\Lambda(S)}{\partial S}=\sqrt{T-t}\,e^{-\tilde{q}(T-t)}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\left(1-\frac{d_1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right);$$

$$\frac{\partial\Lambda(S)}{\partial S}\ge 0 \text{ при } S\le S^* \text{ и } \frac{\partial\Lambda(S)}{\partial S}<0 \text{ при } S>S^*.$$

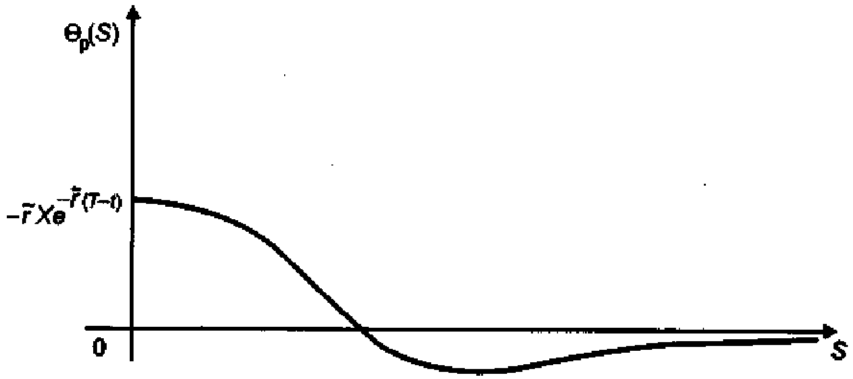
19.6.



Указание. $\Theta_c = -\dfrac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_1) - \tilde{r}Xe^{-\tilde{r}(T-t)}N(d_2)$.

$\lim\limits_{S\to 0+0}\Theta_c(S) = 0, \quad \lim\limits_{S\to +\infty}\Theta_c(S) = -\tilde{r}Xe^{-\tilde{r}(T-t)}$.

19.7.



Указание. $\Theta_p = -\dfrac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_1) + \tilde{r}Xe^{-\tilde{r}(T-t)}N(-d_2)$.

$\lim\limits_{S\to 0+0}\Theta_p(S) = \tilde{r}Xe^{-\tilde{r}(T-t)}, \quad \lim\limits_{S\to +\infty}\Theta_p(S) = 0$.

4.20. Страхование портфелей акций с помощью опционов на индексы акций

20.1. 1. Необходимо купить 320 12-месячных европейских опционов «пут» на индекс SP-500 с ценой исполнения 494,375.

2. Затраты на страхование составят 993256 долл.

20.2. Необходимо купить 320 шестимесячных европейских опционов «пут» на индекс SP-500 с ценой исполнения 497,1875.

20.3. 1. Необходимо купить 480 девятимесячных европейских опционов «пут» на индекс SP-500 с ценой исполнения 445,96.

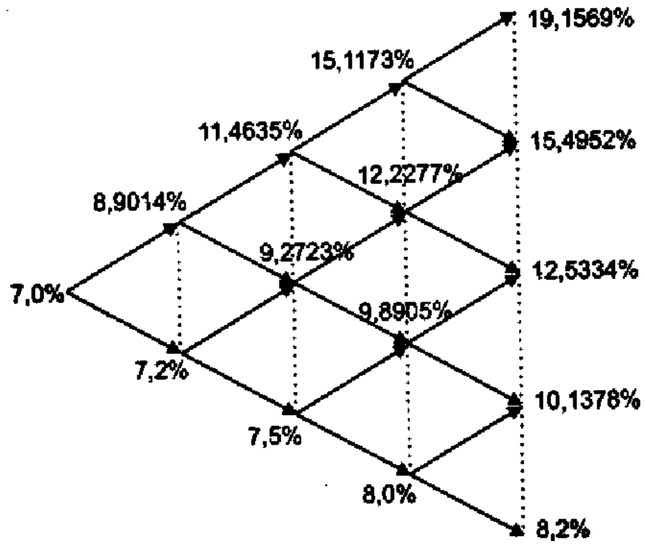
2. Необходимо продать 39,09% портфеля акций.

20.4. 1. Необходимо купить 233,3 трехмесячных европейских опционов «пут» на рыночный индекс акций с ценой исполнения 582,43.

2. Необходимо продать 38,44% портфеля акций.

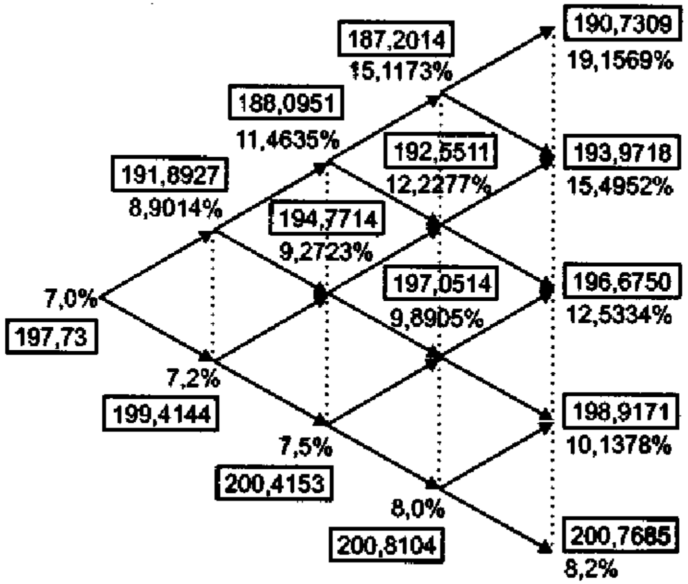
4.21. Биномиальная модель эволюции процентной ставки

21.1.



21.2. $B = 197{,}73$ долл.

Указание. Необходимые расчеты приведены на рисунке.



21.3. а) $\delta_0 = 7\%$, $\delta_1 = 7{,}25\%$, $\delta_2 = 6{,}8\%$;

б) $\delta_0 = 7\%$, $\delta_1 = 6{,}85\%$, $\delta_2 = 6{,}08\%$;

21.4. $\delta_0 = 6\%$, $\delta_1 = 6{,}5\%$, $\delta_2 = 7{,}5\%$.

21.5. $P = 100{,}44$ долл. ($P = 100{,}45$ долл.)

21.6. $$M(z_k(h)) = \delta_k\left(\frac{1+e^{2\sigma\sqrt{h}}}{2}\right)^k;$$

$$\sigma(z_k(h)) = \delta_k\left[\left(\frac{1+e^{4\sigma\sqrt{h}}}{2}\right)^k - \left(\frac{1+e^{2\sigma\sqrt{h}}}{2}\right)^{2k}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Указание. Форвардная процентная ставка $z_k(h)$ принимает значения

$$\delta_k,\quad \delta_k e^{2\sigma\sqrt{h}},\ldots,\quad \delta_k e^{2i\sigma\sqrt{h}},\ldots,\delta_k e^{2(k-1)\sigma\sqrt{h}},\quad \delta_k e^{2k\sigma\sqrt{h}}$$

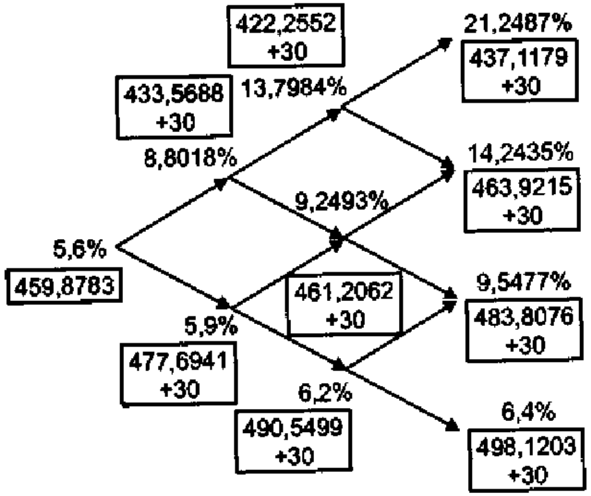
соответственно с вероятностями

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k,\quad C_k^1\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ldots,C_k^i\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ldots,\quad C_k^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

4.22. Оценка стоимости опционов на облигации в условиях биномиальной модели

22.1. $c = 7{,}20$ долл., $p = 4{,}95$ долл.

Указание. Биномиальная модель процентной ставки и эволюция стоимости облигации приведены на рисунке.



22.2. $\tilde{c} = 7{,}38$ долл., $\tilde{p} = 19{,}22$ долл.

22.3. $c = 2{,}40$ долл., $p = 2{,}03$ долл.

22.4. $\tilde{c} = 5{,}53$ долл., $\tilde{p} = 4{,}59$ долл.

22.5. $\tilde{c} = 1{,}87$ долл., $\tilde{p} = 11{,}75$ долл.

4.23. Оценка стоимости облигаций со встроенными опционами

23.1. а) $\tilde{B} = 463{,}63$ долл.; б) $\tilde{B} = 502{,}12$ долл.

23.2. а) $\tilde{B} = 488{,}67$ долл.; б) $\tilde{B} = 501{,}32$ долл.

23.3. «Спред с учетом опциона» составляет 12 базисных пунктов.

23.4. «Спред с учетом опциона» составляет 20 базисных пунктов.

23.5. а) $U = 13{,}74$ долл.; б) $W = 9{,}31$ долл.

23.6. а) $U = 4{,}29$ долл.; б) $W = 4{,}88$ долл.

23.7. а) стоимость облигации со встроенным кэпом равна 489,63 долл.; б) стоимость облигации со встроенным флором равна 502,57 долл.

4.24. Оценка стоимости корпоративных ценных бумаг (простейший случай)

24.1. а) $S_t = 57{,}85\%$ млн долл.; $B_t = 42{,}15\%$ млн долл.; б) $H_t = 4{,}77\%$.

24.2. а) $H_t = 5{,}68\%$; б) $H_t = 3{,}45\%$.

24.3. а) $H_t = 4{,}05\%$; б) $H_t = 4{,}78\%$; в) $H_t = 4{,}62\%$; г) $H_t = 3{,}70\%$.

24.4. а) $H_t = 0{,}93\%$; б) $H_t = 2{,}55\%$; в) $H_t = 7{,}42\%$.

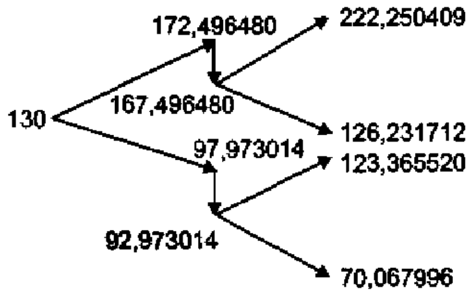
24.5. а) $H_t = 5{,}29\%$; б) $H_t = 5{,}00\%$; в) $H_t = 4{,}34\%$; г) $H_t = 2{,}65\%$.

4.25. Оценка стоимости корпоративных облигаций на основе модифицированной биномиальной модели

25.1. 1. 92,6633 млн долл.

Указание. $u = 1{,}326896$, $d = 0{,}753638$, $\pi^* = 0{,}491893$.

Модифицированная биномиальная модель имеет следующий вид.



2. Премия за дефолт-риск $H = 8{,}615\%$.

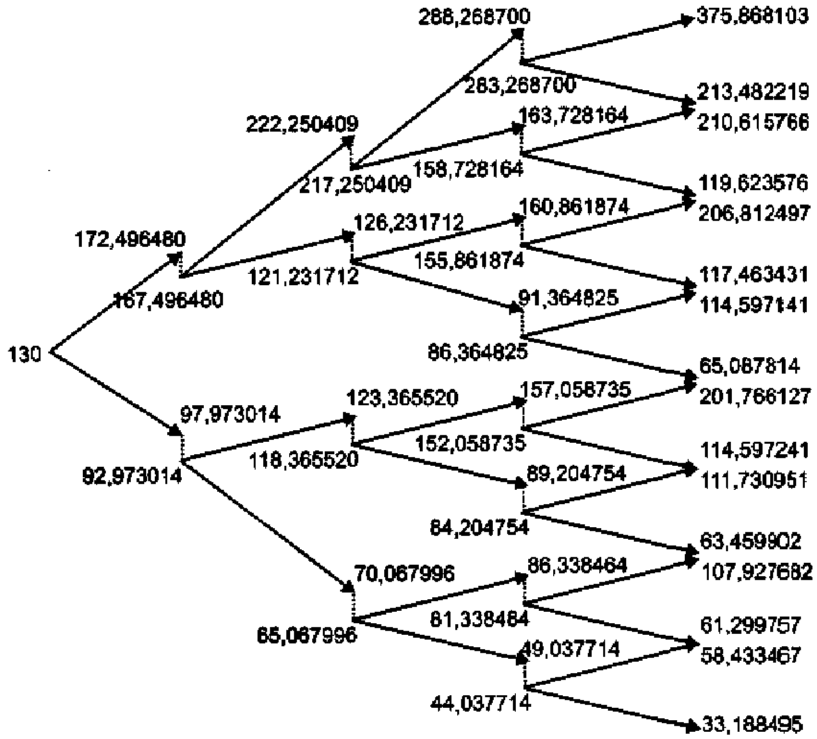
Указание. Решить уравнение $4e^{-(0{,}07+H)\frac{1}{2}} + 104e^{-(0{,}07+H)} =$
$= 92{,}6633$.

3. Стоимость акции равна 37,3367 млн долл.

25.2. $B = 88{,}09$ млн долл., $H = 7{,}58\%$.

Указание. $u = 1{,}326896$, $d = 0{,}753638$, $\pi^* = 0{,}491893$.

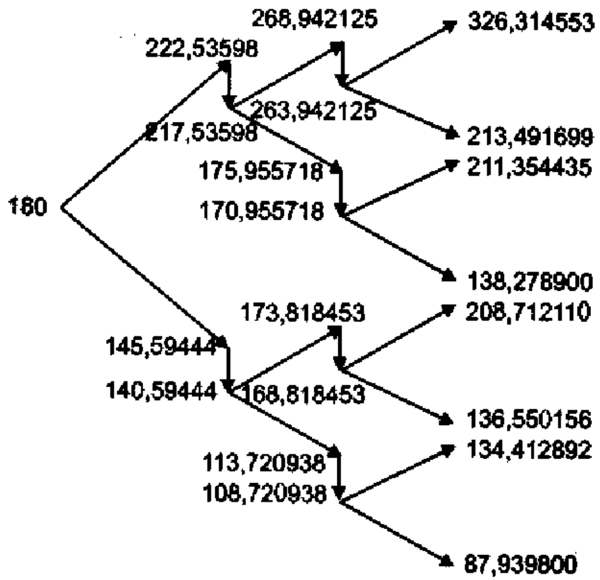
Модифицированная биномиальная модель имеет следующий вид.



25.3. а) $B = 92{,}4624$ млн долл., $c = 0{,}2009$ млн долл.; б) $B = 95{,}7176$ млн долл., $p = 3{,}0543$ млн долл.; в) $B = 99{,}2848$ млн долл., $p = 6{,}6215$ млн долл.

25.4. а) B = 89,4835 млн долл., c = 0,0954 млн долл.;
б) B = 89,5789 млн долл., p = 0,00 млн долл.;
в) B = 96,9684 млн долл., p = 7,3895 млн долл.
Указание. Текущая стоимость безопционной облигации равна 89,5789 млн долл.

25.5. ***Указание.*** u = 1,236311, d = 0,808858, π^* = 0,542639.
Модифицированная биномиальная модель имеет следующий вид.



а) B = 111,7680 млн долл.; б) 105,7986 млн долл.;
в) B = 113,1640 млн долл.; г) 117,4589 млн долл.

Учебное издание

Барбаумов Виктор Ефимович
Гладких Иван Михайлович
Чуйко Анатолий Степанович

Сборник задач по финансовым инвестициям

Заведующая редакцией *Н.Ф. Карпычева*
Редактор *А.Д. Федорова*
Художественный редактор *Г.Г. Семенова*
Технический редактор *Т.С. Маринина*
Корректоры *Н.Б. Вторушина, Н.П. Сперанская*
Оформление художника *Т.Л. Погорельцевой*

ИБ № 4871

Сдано в набор 17.08.2004. Подписано в печать 04.10.2004
Формат 60×88/16. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная
Усл. п.л. 21,56. Уч.-изд. л. 18,31. Тираж 6000 экз.
Заказ № 1903. «С» 229

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7
Телефон (095) 925-35-02. Факс (095) 925-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http://www.finstat.ru

Отпечатано в ОАО «Типография «Новости»
105005, г. Москва, ул. Ф. Энгельса, 46